

**T.C.  
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LANE-EMDEN VE EMDEN-FOWLER DENKLEMLERİNİN  
HOMOTOPI ANALİZ METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

**Tezi Hazırlayan  
Ergün ERDOĞAN**

**Tezi Yöneten  
Yrd.Doç.Dr. Aytekin ERYILMAZ**

**Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**OCAK 2013  
NEVŞEHİR**

Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ danışmanlığında **Ergün ERDOĞAN** tarafından hazırlanan “**Lane-Emden ve Emden-Fowler denklemlerinin homotopi analiz metodu ile çözümü**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

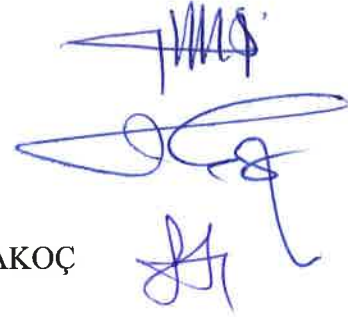
14.02.2012

**JÜRİ:**

Başkan: Doç. Dr. Murat ATIŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ



**ONAY:**

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 11.03.2013 tarih ve 2013/08-04 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

11.03.2013.....

**Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK**  
**Enstitü Müdürü**



## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ve tez çalışmalarım süresince büyük yardım ve desteğini gördüğüm tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ'a, hiçbir konuda yardımlarını esirgemeyen meslektaş arkadaşlarım Adem ÇİL ve Musa BAŐBÜK'e, çalışmalarım sırasında gösterdiği sevgi, fedakarlık ve anlayıŐtan dolayı eşim Selda ERDOĞAN'a en derin duygularla teşekkür ederim. Sevimli yaramazlarım İbrahim Ersel ve İsmail Eren'e de çalışmalarımda gösterdikleri sabırdan dolayı teşekkür ederim.

**LANE-EMDEN VE EMDEN-FOWLER DENKLEMLERİNİN HOMOTOPI  
ANALİZ METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

**Ergün ERDOĞAN**  
**Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü**  
**Yüksek Lisans Tezi, Ocak 2013**  
**Tez Danışman: Yrd.Doç.Dr. Aytekin ERYILMAZ**

**ÖZET**

Bu çalışmanın amacı homotopi analiz metodunu kullanarak Lane-Emden ve Emden-Fowler denklemlerinin çözümlerini elde etmek ve gerçek çözümleri ile karşılaştırmasını yapmaktır.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde Homotopi Analiz Metodunun güçlü yanları ve yapılmak istenen çalışma anlatıldı.

İkinci Bölümünde Lane-Emden ve Emden-Fowler denklemleri anlatıldı.

Üçüncü Bölümde homotopi analiz metodu tanıtıldı. Deformasyon denklemlerinin elde edilişi anlatıldı.

Dördüncü Bölümünde Lane-Emden ve Emden-Fowler denklemlerinin  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresine bağlı seri çözümleri elde edildi ve çözümlerin analizi yapılarak hata grafikleri çizildi.

**Anahtar Kelimeler:** Homotopi Analiz Metodu,  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresi, Lane-Emden denklemleri, Emden-Fowler denklemleri.

**LANE-EMDEN AND EMDEN-FOWLER EQUATIONS BY HOMOTOPY  
ANALYSIS METHOD**

**Ergün ERDOĞAN**

**Nevşehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences**

**M.Sc. Thesis, January 2013**

**Thesis Supervisor: Asist.Prof.Dr. Aytakin ERYILMAZ**

**ABSTRACT**

The aim of this study is to obtain the solutions of Lane-Emden and Emden-Fowler equations by using the Homotopy Analysis Method and to make comparisons of the fact solutions.

This study consists of four chapters in total. Strong sides of Homotopy Analysis Method have been introduced in the first chapter. And the works to be made have told.

In the second chapter, Lane-Emden and Emden-Fowler equations have been introduced.

In the third chapter, Homotopy Analysis Method have been introduced. And obtaining the deformation equations have been told.

In the fourth chapter, Lane-Emden and Emden-Fowler equations have been obtained by using the series solution according the  $\hbar$  convergence control parameter. At the end by making the analysis of the solutions, the graphs of faults have been drawn.

**Keywords:** Homotopy Analysis Method,  $\hbar$  convergence control parameter, Lane-Emden equations, Emden-Fowler equations.

**İÇİNDEKİLER**

KABUL VE ONAY.....	i
TEŞEKKÜR.....	.ii
ÖZET.....	.iii
ABSTRACT.....	iv
TABLolar LİSTESİ.....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	viii
1. BÖLÜM	
GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM	
LANE-EMDEN VE EMDEN FOWLER DENKLEMLERİ.....	3
2.1. Lane-Emden Denklemleri.....	3
2.2. Emden-Fowler Denklemleri.....	9
3. BÖLÜM	
HOMOTOPI ANALİZ METOTU.....	13
3.1. Homotopi Analiz Metodu.....	13
3.2. Homotopi türevinin özellikleri.....	19
3.3. Deformasyon denklemleri.....	20
3.4. Sıfırcı Dereceden Deformasyon Denklemi.....	21
3.5. Yüksek Dereceden Deformasyon Denklemi.....	23
3.6. Yakınsaklık teoremi.....	24
3.7. Lane-Emden Denklemine Deformasyon Denklemi.....	25

3.8. Emden-Fowler Denkleminin Deformasyon Denklemi. ....	.27
4. BÖLÜM	
UYGULAMALAR. ....	30
Örnek 4.1. ....	30
Örnek 4.2. ....	34
Örnek 4.3. ....	38
Örnek 4.4. ....	42
Örnek 4.5. ....	46
Örnek 4.6. ....	50
5. BÖLÜM	
TARTIŞMA VE SONUÇLAR. ....	55
KAYNAKLAR. ....	56
ÖZGEÇMİŞ. ....	59

**TABLolar LİSTESİ**

Tablo 4.1. (4.1) probleminin uygun $\hbar$ değerleri tablosu. ....	32
Tablo 4.2. (4.1) probleminin hata tablosu. ....	33
Tablo 4.3. (4.13) probleminin uygun $\hbar$ değerleri tablosu. ....	36
Tablo 4.4. (4.13) probleminin hata tablosu. ....	37
Tablo 4.5. (4.25) probleminin uygun $\hbar$ değerleri tablosu. ....	40
Tablo 4.6. (4.25) probleminin hata tablosu. ....	41
Tablo 4.7. (4.37) probleminin uygun $\hbar$ değerleri tablosu. ....	44
Tablo 4.8. (4.37) probleminin hata tablosu. ....	45
Tablo 4.9. (4.49) probleminin uygun $\hbar$ değerleri tablosu. ....	48
Tablo 4.10. (4.49) probleminin hata tablosu. ....	49
Tablo 4.11. (4.61) probleminin uygun $\hbar$ değerleri tablosu. ....	52
Tablo 4.12. (4.61) probleminin hata tablosu. ....	53



## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1.	(4.1) probleminin $h$ eğrisinin grafiği. . . . .	32
Şekil 4.2.	(4.1) probleminin hata fonksiyon grafiği. . . . .	33
Şekil 4.3.	(4.13) probleminin $h$ eğrisinin grafiği. . . . .	36
Şekil 4.4.	(4.13) probleminin $[0,1]$ aralığında hata fonksiyon grafiği. . . . .	37
Şekil 4.5.	(4.25) probleminin $h$ eğrisinin grafiği. . . . .	40
Şekil 4.6.	(4.25) probleminin $[0,1]$ aralığında hata fonksiyon grafiği. . . . .	41
Şekil 4.7.	(4.37) probleminin $h$ eğrisinin grafiği. . . . .	44
Şekil 4.8.	(4.37) probleminin $[0,1]$ aralığında hata fonksiyon grafiği. . . . .	45
Şekil 4.9.	Problem (4.37)'nin gerçek çözüm eğrisi $u(x) = x^2 + e^{x^2+t}$ ile $h = -0.001$ ve $h = -0.695$ değerleri için kıyaslama grafikleri. . . . .	46
Şekil 4.10.	(4.49) probleminin $h$ eğrisinin grafiği. . . . .	48
Şekil 4.11.	(4.49) probleminin $[0,1]$ aralığında hata fonksiyon grafiği. . . . .	49
Şekil 4.12.	Problem (4.49)'un gerçek çözüm eğrisi $u(x) = x^3 + e^{x^2-t}$ ile $h = -0.01$ ve $h = -0.66$ değerleri için kıyaslama grafikleri. . . . .	50
Şekil 4.13.	(4.61) probleminin $h$ eğrisinin grafiği. . . . .	52
Şekil 4.14.	(4.61) probleminin $[0,1]$ aralığında hata fonksiyon grafiği. . . . .	54
Şekil 4.15.	Problem (4.61)'in gerçek çözüm eğrisi $u(x) = t^2 + e^{x^3}$ ile $h = -0.01$ ve $h = -0.67$ değerleri için kıyaslama grafikleri. . . . .	54

## 1.BÖLÜM

### GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı, Lane-Emden ve Emden-Fowler denklemlerinin lineer ve lineer olmayan değişken katsayılı ısı-tipi, dalga-tipi başlangıç ve sınır değer problemlerini homotopi analiz metodu ile çözmek, çözümün yakınsaklığını göstermek ve gerçek çözümleri ile karşılaştırmasını yapmaktır. Çözümü zor olan bir problemi, kolay çözülebilir bir probleme dönüştürmeyi sağlayan homotopi metodunu kullanarak lineer olmayan problemlerin çözümüne kolay bir şekilde ulaşmaktır.

Topolojisi ve diferansiyel geometrinin temellerinden biri olan homotopi kavramına dayanan Homotopi Analiz Metodu (HAM) 1992 yılında Shi Jun Liao tarafından ortaya konmuş seri çözümler sunan yarı analitik bir yöntemdir [1]. Bu tarihten itibaren Liao ve başka pek çok araştırmacı tarafından çeşitli bilim ve mühendislik alanlarında, cebirsel, lineer ve lineer olmayan denklemlere başarıyla uygulanmıştır [2]. Yöntemin temel farklılığı ve güçlü yanı ele alınan problemin çözüm serisinin yakınsaklık hızının ve bölgesinin,  $h$  yakınsaklık kontrol parametresi ile kontrol edilebilir olmasıdır. Bu nedenle HAM herhangi bir kabul ya da kısıtlama olmaksızın lineer ve lineer olmayan problemlere uygulanabilmektedir. Yöntemin bir diğer güçlü yanı, probleme uygun taban fonksiyonlarının seçiminde, başlangıç varsayımının yardımcı lineer operatörün ve  $h$  yakınsaklık kontrol parametresinin seçiminde geniş bir seçim özgürlüğüne sahip olmasıdır. Ancak bu rastgele bir seçim yapılabileceği anlamına da gelmemektedir. Çözülmek istenen problemin tipi ve sınır koşulları, bu serbestinin sınırlarını belirlemektedir. Bu konuda detaylı iki çalışma ilgili referanslarda bulunabilir [3,4].

Analitik yöntemler hataya fazlasıyla açık ve çoğu zaman eldeki problemi çözmekte yetersiz kaldığı için bu tezde Homotopi Analiz Metodu araştırılmıştır.

Lane-Emden ve Emden-Fowler denklemlerinin çözümünü oldukça kolaylaştıran bu yöntem Liao tarafından geliştirilmiştir [1]. Bu çalışmada metodun Lane-Emden ve Emden-Fowler denklemlerine uygulanmasında Mathematica 7.0 yazılımı kullanılmıştır.

## 2. BÖLÜM

### LANE-EMDEN VE EMDEN-FOWLER DENKLEMLERİ

#### 2.1. Lane-Emden Denklemleri

İkinci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerle modellenen tekil başlangıç değer problemleri birçok matematikçi ve fizikçinin ilgisini çekmiştir. Bu kategorideki denklemlerden bir tanesi de aşağıdaki Lane-Emden tipi denklemlerdir. Bu tip denklemler

$$y(0) = a, \quad y'(0) = 0 \quad (2.1)$$

başlangıç koşulları ile

$$y''(x) + \frac{\alpha}{x} y'(x) + f(x, y) = g(x), \quad ax \geq 0, \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada  $f(x, y)$ ,  $x$  ve  $y$  değişkenlerine bağlı lineer olmayan bir fonksiyondur. Verilen Lane-Emden tipi denklemlerin analitik çözümü  $x = 0$  tekil noktasının komşuluğunda yukarıda verilen başlangıç koşulları ile çözümü olduğu bilinmektedir [5]. Bu denklem ilk defa astrofizikçi Jonathan H. Lane ve R. Emden [6] tarafından çalışılmıştır. (2.1) ve (2.2) denklemlerinde  $\alpha = 2$ ,  $f(x, y) = y^n$ ,  $a = 1$  alınarak

$$y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) + y^n = 0, \quad x \geq 0, \quad (2.3)$$

denklemini elde edilir.

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (2.4)$$

başlangıç koşulları ile

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) + y^n = 0 \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.4) ve (2.5) denklemleri Lane-Emden denklemleri olarak bilinir. Astrofizikte bu denkleme Poisson denklemi de denir. Fiziksel olarak küresel politrofik sıvının yoğunluğunu, basıncını ve potansiyel çekimini ifade etmek için kullanılır. Bunun çözümü  $x$  ve  $y$ 'nin

$$x = r \left( \frac{4\pi G \rho_0^2}{(n+1)P_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad y = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\theta}{\theta_0} \quad (2.6)$$

olarak yorumlandığı yerde ( $P$  basınç,  $r$  yarıçapı,  $\rho$  yoğunluk) Poisson denkleminin çözümünü verir. Burada 0 indisi kürenin merkezindeki değerleri gösterir. Kürenin yüzeyinde  $\rho = 0$  olduğunda  $\theta = 0$  kabul edilir.  $m(r)$ ,  $r$  yarıçaplı küre kütlesi olmak üzere

$$\frac{Gm(r)}{r^2} = g, \quad (2.7)$$

ve

$$x = \frac{d\theta}{dr} \quad (2.8)$$

dır. Burada  $g$  yerçekimi ivmesi ve  $G$  evrensel yer çekim sabitidir. Gazın basıncı ve yoğunluğu ile ilgili politrofik denklemdeki  $n$ 'ye politrofik endeks denir. Dejenere olmuş beyaz cüce yıldızların çekimsel potansiyeli (2.1) ve (2.2) denkleminde  $\alpha = 2$ ,  $f(x, y) = (y^2 - c)^{\frac{3}{2}}$  ve  $a=1$  alınarak elde edilen denklem beyaz cüce denklemi ile modellenir [7]. Benzer şekilde izotermal gaz küreleri aşağıdaki

$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + e^{y(x)} = 0, \quad x \geq 0 \quad (2.9)$$

ve

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (2.10)$$

denklemleri ile modellenir.

Verilen bir  $n$  indeksi için Lane-Emden denkleminin çözümleri  $n$  indeksinin politropları olarak bilinir. (2.3) denkleminde  $n$  parametresi  $0 \leq n \leq 5$  aralığında fiziksel anlama sahiptir. (2.5) başlangıç koşulları ile (2.3) denkleminin  $n = 0, 1, 5$  için analitik çözümü vardır [7]. Fakat  $x = 0$ 'deki tekil durum sadece Lane-Emden denkleminde değil, ayrıca kuantum mekaniği ve astrofizikte çok çeşitli lineer olmayan problemlerde karşımıza çıkar [8].

Lane-Emden denklemlerinin seri çözümleri pertürbasyon tekniği ve Adomian Decomposition Metodu ile bulunabilir. Fakat bu çözümler genellikle sınırlı bölgelerde yakınsaktır. Pade metodu gibi bazı teknikler yakınsaklık bölgesini genişletmek için kullanılmıştır [9]. Daha sonrasında Ramos [10], integral denklemleri kullanarak Lane-Emden denklemlerinin seri çözümlerini elde etti.

Aynı yıl Youseff [11],

$$L_{\alpha}(\cdot) = \int_0^x x^{-\alpha} \int_0^x t^{\alpha}(\cdot) dt dx \quad (2.11)$$

integral operatörü kullanarak Lane-Emden denklemlerini integral denklemleri dönüştürdü ve  $0 \leq x \leq 1$  aralığında bir yaklaşık çözüm elde etti. 2008'in son zamanlarında Dehghan ve Shakeri [12], (2.1) denkleminde ( $\alpha = 2$ ,  $f(x, y) = f(y)$  ve  $g(x) = 0$  koşulu ile)  $x = e^t$  dönüşümü kullanarak  $\lim y(t) = a$ ,  $\lim e^{-t}y'(t) = 0$  koşulu ile

$$y''(t) + y'(t) + e^{2t}f(y(t)) = 0 \quad (2.12)$$

denklemini elde etmiştir.

Dehghan ve Shakeri, Varyasyonel Iterasyon Metodu ile (2.11) denklemini  $[0,1]$  aralığında,  $f(y) = y^n$  ve  $n = 0,1,5$  olduğu durumlarda bir yaklaşık çözüm bulmuşlardır [13].

Lane-Emden ve Emden-Fowler denklemleri yıldız yapıları belirlenirken karşımıza çıkmaktadır. Yıldız yapısı belirlenirken önce kütesini ve kimyasal bileşimi belirlenir. Vogt-Russell teoremi “Eğer yıldızın kimyasal bileşimi ve kütesi belli ise bu denklem sisteminin yalnız bir çözümü vardır” der. Temel yapı denklemlerini çözerek referans yıldızını  $r_0$  indisi ile modelini yapacağımız yıldızı da indissiz gösterelim.

$$\frac{r}{R} = \frac{r_0}{R_0} \Rightarrow r = \left(\frac{R}{R_0}\right)r_0 \text{ ve } m = \left(\frac{M}{M_0}\right)m_0 \text{ her iki tarafın diferansiyelini alırsak,}$$

$$\frac{dr}{dr_0} = \frac{R}{R_0} \text{ ve } \frac{dm}{dm_0} = \frac{M}{M_0} \text{ bulunur.}$$

Bu ifadeler ile yıldızın içinde yoğunluğun nasıl dağıldığı bulunabilir. Kütle denklemi

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2} \quad (2.13)$$

dir. (2.13) denkleminin her iki tarafı  $\frac{dr}{dr_0} = \frac{R}{R_0}$  ve  $\frac{dm}{dm_0} = \frac{M}{M_0}$  denklemleri ile

çarpılırsa

$$\frac{dr}{dm} \frac{dr_0}{dr} \frac{dm}{dm_0} = \frac{dr_0}{dm_0} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{R_0}{R} \frac{M}{M_0} = \frac{1}{4\pi r_0^2 \rho_0} \quad (2.14)$$

denklemi elde edilir. (2.14) denkleminde her parametre için boyutsuz değişkenler tanımlayarak ve bazı yaklaşımlar yaparak yıldız yapı denklemlerini çözmek olasıdır. Bununla birlikte en doğrusu bilgisayarda sayısal olarak çözmektir. Bu denklemi doğru olarak çözmek birçok gökbilimciyi uğraştırmıştır. Yöntemlerden birini de politrop modeller oluşturmaktır. Politrop modellemeler için ideal gaz yasası ele alınır.

$$P_g V = NkT, n = \frac{N}{V}, P_g = nkT$$

burada  $N$  parçacık sayısını,  $n$  ise parçacık yoğunluğudur. Astrofizikte gaz yasası kütle yoğunluğu ile kullanılır. Farklı kütlelere sahip parçacıklar varsa o zaman  $n$  yerine,

$n = \frac{\rho}{m_H}$  kullanılır,  $P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H}$  elde edilir. Gazın basıncı ile hacmi arasındaki ilişki:

$$PV^\gamma = \text{sabit} \quad \frac{P}{\rho^\gamma} = \text{Sabit} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \text{ şeklindedir.}$$

Burada  $\gamma$ , iki esas özgül ısının oranı olup, adı adyabatik ölçektir. Gaz basıncının bu şekilde ifadesine, politropik durum denklemi denir.

$$P_g = \frac{\rho k T}{\mu m_H} \quad (2.15)$$

dır.  $\gamma$  adyabatik ölçek,  $n$  politropik ölçeğe  $\gamma = 1 + \frac{1}{n}$  ile bağlıdır. Hidrostatik denge denklemi

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \quad (2.16)$$

bulunur.  $\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} = -Gm(r)$  yazılır ve her iki tarafın  $r$ 'ye göre diferansiyeli alınır

ise  $\frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = \frac{-Gdm}{dr}$  elde edilir. Sağ taraftaki kütle sürekliliği ifadesi yerine

koyulur ve  $r^2$  sol tarafa alınır ise,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (2.17)$$

denklemini elde edilir. (2.17) denkleminde hareketle Lane -Emden denklemini elde edilebilir. Şimdi gaz basıncı politropik ölçek ile yazılır ve her iki tarafın  $r$ 'ye göre türevini alınır ise

$$P_g = K \rho^\gamma = K \rho^{\frac{n+1}{n}}, \quad \frac{dP}{dr} = K^{\frac{n+1}{n}} \rho^{\frac{1}{n}} \frac{d\rho}{dr} \quad (2.18)$$

denklemini elde edilir. (2.18), (2.17)'da yerine yazılırsa

$$\left( \frac{(n+1)K}{4\pi nG} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho^{\frac{n-1}{n}}} \frac{d\rho}{dr} \right) = -\rho, \quad (2.19)$$

denklemini elde edilir.  $\rho(r)$  için ikinci dereceden bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu



denklemin  $r = R$  için  $\rho = 0$ ,  $r = 0$  için çözümü  $\frac{d\rho}{dr} = 0$  iki sınır değerini gerektirir.

Bu son sınır değer merkezde net çekim kuvvetinin sıfır olmasından kaynaklanır. Dolayısıyla  $dP/dr=0$ 'dan hareketle elde edilir. Bu denklemi çözmek için boyutsuz bir değişken  $\rho = \rho_c \theta^n$  değişken tanımlanır. Diferansiyeli  $d\rho = \rho_c n \theta^{n-1} d\theta$ 'dır. (2.19) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{(n+1)K}{4\pi nG}\right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{\rho_c n \theta^{n-1} r^2}{(\rho_c \theta^n)^{\frac{n-1}{n}}} \frac{d\theta}{dr} \right) = -\rho_c \theta^n \quad (2.20)$$

denklemin elde edilir. (2.20) sadeleştirilir ise  $\left(\frac{(n+1)K \rho_c^{((\frac{1}{n})-1)}}{4\pi G}\right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n$

olur,  $\left(\frac{(n+1)K \rho_c^{((\frac{1}{n})-1)}}{4\pi G}\right) = \alpha^2$  ifadesi kısaltılırsa,

$$\frac{\alpha^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n \quad (2.21)$$

denklemin elde edilir. Denklemin sağ tarafı boyutsuz olduğu için sol tarafın da boyutsuz olması gerekir. Yani,  $\alpha$  uzunluk birimindedir.  $r = \alpha \xi$  olmak üzere,

$$dr = \alpha d\xi \quad (2.22)$$

dir. (2.22)'de boyutsuz bir değişken tanımlanırsa o zaman denkleminiz,

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (2.23)$$

halini alır. (2.23) denkleminde Lane-Emden denkleminin denir [14]. Lane-Emden tipi denklemler,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{n}{x} \frac{dy}{dx} + f(y) = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{n}{x} \frac{dy}{dx} + y^r = 0 \quad (2.24)$$

formunda yazılan denklemlerdir. Burada politropik gaz kürelerin incelenmesi sırasında karşımıza çıkmaktadır.

## 2.2. EMDEN-FOWLER DENKLEMLERİ

Emden-Fowler denklemleri, astrofizik, nükleer fizik, göreliliğe dayalı mekanik, akışkan mekaniği, gaz dinamikleri ve kimyasal reaksiyon sistemleri gibi pek çok konuda meydana gelen olayların matematiksel modelleri olarak karşımıza çıkmakta ve bu nedenle bu tip problemler yüzyılı aşkın süreyle incelenmektedir [15].

Wong [16]'un 1975'te yayınlanan makalesi, o yıla kadar geliştirilmiş Emden-Fowler denklemleri üzerine yapılan çalışmaların ve alınan sonuçların geniş bir özeti şeklindedir. Şimdi, Wong'un bu makalesine dayanarak Emden-Fowler denklemlerinin tarihsel gelişiminden ve bu tip denklemler üzerine yapılan bazı çalışmalardan bahsedeceğiz.

Lane 1869'da, gaz bulutları arasındaki ısı alışverişinin dengelendiği anın matematiksel ifadesi olan (2.4) denklemi üzerinde çalışmıştır.  $n = 1.5$  ve  $n = 2.5$  için (2.4) denklemi yaygın olarak "Lane-Emden denklemi" olarak adlandırılır. Emden 1907'de yayınlanan kitabı Gaskugeln [17]'de yıldız şekillenmelerinin matematiksel modeli olarak gösterilen (2.4) denklemi üzerine yapılan çalışmaları noktalamış ve çalışmalara daha genel bir denklem formu ile yaklaşmak gerektiğini söylemiştir. Fowler [18], 1914-1931 yılları arasında

$$\frac{d}{dx}(x^p \frac{du}{dx}) + x^\sigma u^\gamma = 0, \quad x \geq 0, \quad \gamma > 0 \quad (2.25)$$

denklemi ve bu denklemin daha genel formu olan

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)|u|^\gamma \operatorname{sgn}(u) = 0, \quad x \geq 0, \quad (2.26)$$

denklemi üzerine yoğun çalışmalar yapmış ve temel sonuçlar almıştır. (2.25) denklemi "Emden-Fowler denklemi" ve (2.26) denklemi "genelleştirilmiş Emden-Fowler denklemi" olarak bilinmektedir [19].

(2.26) denklemi için konulmuş Cauchy probleminin yerel çözümlerinin varlığı, tekliği ve sürekli devamının varlığı ayrıca sınırlı, kararlı ya da salınımlı çözümlerin varlığı ve çözümlerin asimptotik davranışları gibi pek çok konu üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bu

çalışmaları yapanlardan bazıları Fowler, Atkinson, Nehari, Moore, Cffmann, Wong, Sansone, Belohorec, Heidel ve Ullrich'tir [16].

Örneğin Fowler, (2.26) denkleminin özel durumunda salınımlı ya da salınımsız çözümün varlığı ve sınırlı ya da kararlı çözümün varlığı için yeterli koşulları almıştır. İlk olarak Taam, 1955'te (2.26) denkleminin tüm çözümlerinin sınırlı olması için yeterli koşulları almıştır. Yine 1955'te Atkinson, (2.26) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerekli ve yeterli koşulları almıştır.

(2.26) denkleminin sadece Cauchy problemleri değil sınır problemleri de incelenmiştir. Örneğin (2.26)'in  $[0, T]$  sonlu aralığında,

$$u(0) = u(T) = 0 \quad (2.27)$$

ya da

$$u(0) = u'(T) = 0 \quad (2.28)$$

sınır koşullarını sağlayan çözümünün varlığı ve tekliği incelenmiştir.

(2.26) problemlerinin pozitif çözümlerinin varlığı için yeterli koşulları ilk olarak alan 1959'da Moore ve Nehari'dir. Ayrıca Moore ve Nehari, bu problemlerin birden fazla çözümünün olduğunu da göstermişlerdir. Çözümün tekliğine dair ilk sonuç ise, 1962'de Moroney tarafından verilmiştir. Moroney, tek bir pozitif çözümün olması için yeterli koşulları almıştır [20].

Emden-Fowler denklemlerine benzer denklemler üzerine 1960'lı yıllardan itibaren Pohozoev çalışma yapmıştır [21]. Emden-Fowler denklemleri de politropik gaz kürelerinin incelenmesi sırasında kullanılmakta olup (2.3) formundadır.

(2.3) denkleminin sınır şartları

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad (2.29)$$

şeklindedir.  $y = \frac{u}{x}$  değişimi altında bu denklemi daha basit bir forma dönüştürmek mümkündür.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + x^{1-n} v^n = 0 \quad (2.30)$$

Bu denklem esasında atom fiziğindeki Thomas-Fermi denkleminin bir genelleştirilmiştir. (2.30) denklemini incelemek daha kolaydır. Ancak lineer olmayan denklemi her zaman böyle basit forma indirgemek mümkün olmadığından (2.29) denklemini çözmek tercih edilmiştir. Ramnath 1971'de  $n=0,1$  ve 5 için (2.29) ve (2.30) denklemlerinin çözülebildiğini göstermiştir [22]. Ayrıca Emden-Fowler denklemleri ısı denklemlerinde de kullanılmaktadır. Aşağıdaki ısı denklemini,

$$y_{xx} + \frac{r}{x} y_t + af(x,t)g(y) + h(x,t) = y_t, \quad 0 < x \leq L, \quad 0 < t < T, \quad r > 0, \quad (2.31)$$

sınır koşulları

$$y(0,t) = \alpha, \quad y_x(0,t) = 0, \quad (2.32)$$

ile ele alınsın. Burada  $\alpha$  sabit ve  $f(x,t)g(y) + h(x,t)$  lineer olmayan ısı kaynağıdır.  $y(x,t)$  sıcaklık ve  $t$ 'de boyutsuz zaman değişkenidir.

$$y_{xx} + \frac{r}{x} y_t + af(x,t)g(y) + h(x,t) = y_{tt}, \quad 0 < x \leq L, \quad 0 < t < T, \quad r > 0 \quad (2.33)$$

denklemini dalga denklemdir. Burada  $y(x,t)$  dalganın  $t$  anında  $x$  pozisyonundaki konumudur.

(2.31) ve (2.33) denklemlerinin bazı formları ısının paralel düzlem yüzeylerine dik dağılması, yıldız yapı teorisi, gaz bulutlarının ısıl davranışı, izotermal gaz küresi ve ısıl yük akım teorisi gibi astrofizik ve matematiksel fizik olaylarını modeller. Kuantum mekaniği ve astrofizikteki lineer ve lineer olmayan tekil sınır değer problemleri kadar, zamana bağlı Emden-Fowler denkleminin çözümü de orijin etrafındaki tekil davranışından dolayı ilgi çekici olmuştur. (2.31) ve (2.33) denklemlerinin analizinde en büyük zorluk  $x=0$  noktasındaki tekilliktir.

(2.31) ve (2.33) denklemlerinin çeşitli formları için yaklaşık analitik çözümlerini Adomian Decomposition Method kullanarak Shwagfeh [23] ve Wazwaz [24]

çözmüştür. Bazı durumlarda (ADM)'deki adomian polinomlarını hesaplamak çok karmaşık olmaktadır. Yakın zamanda Chowdhury ve Hashim Emden-Fowler denklemlerini Homotopi Pertürbasyon Metodu ile çözmüşlerdir [25]. Yıldırım vd. Lane-Emden denklemlerini Homotopi Pertürbasyon Metodu ile çözmüşlerdir [26].

## 3. BÖLÜM

### HOMOTOPI ANALİZ METODU

#### 3.1. Homotopi Analiz Metodu

Bu bölümde, Homotopi analiz metodu (HAM) tanıtılacaktır. Homotopi Pertürbasyon Metodundan bahsedilir ise son yıllarda mühendislik uygulamalarında lineer ve lineer olmayan problemlerin çözümlerinde kullanılan Homotopi Pertürbasyon Metodu 1998 yılında Ji-Huan He [27] tarafından verilmiştir. He, metodu oluştururken pertürbasyon tekniği ile homotopi kavramını birleştirmiş lineer ve lineer olmayan problemleri çözümü kolay lineer problemlere dönüştürmüştür. Bilindiği gibi bu yöntemler, 1990'lı yıllarda ortaya çıkan yöntemler olup temelde seri çözümlere dayanırlar. Çözümlerin seri şeklinde olması ve bazı durumlarda çözümlerin kapalı formlarının elde edilebilmesi bu yöntemleri farklı dallarda çalışan bilim adamları arasında popüler kılmış ve çözümlerin farklı yorumlarının yapılabilmesini sağlamıştır. Bu çalışmada çözülen problemlerin bir kısmının literatürde analitik metotlarla çözümleri olmasına rağmen, bu çözümlerin analizinin yapılması mümkün değildir. Burada kullanılan yaklaşımlarla mevcut ve yeni çözümlerin analizinin yapılması sağlanmıştır. Birçok araştırmacı Homotopi Pertürbasyon Metodunu çeşitli problemlere uygulamıştır [28].

Homotopi kavramı ile Taylor serisini birleştiren Homotopi Analiz Metodu 1992'de Shijun Liao [29-30] tarafından ortaya konmuştur. Homotopi Pertürbasyon Metodundan farklı olarak Homotopi Analiz Metodu, farklı tipteki lineer olmayan denklemlerin seri çözümlerini elde etmek için kullanılan genel bir yarı analitik yaklaşımdır. Bu metotta da ele alınan denklemin başlangıç yaklaşımından tam çözümüne götüren sürekli bir dönüşüm oluşturulur. Bu tip bir sürekli dönüşümü oluşturmak için bir yardımcı lineer

operatör seçilir. Bulunan çözüm serisinin yakınsaklığını garantilemek için bir yardımcı parametre kullanılır. Bu metot, başlangıç yaklaşımı ve yardımcı lineer operatörlerin seçiminde serbestlik sağlar. Bütün pertürbasyon metotlarından ve klasik pertürbatif olmayan metotlardan farklı olarak, Homotopi Analiz Metodu, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini kontrol etme imkânı sağlar. Lineer olmayan problemlerin analitik çözümlerini elde etmek genelde zordur. Lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemler bilim ve mühendisliğin sıvı dinamiği, katı alan, plazma alanı, matematiksel biyoloji, kimyasal kinetik, jeofizik, elektrik ve manyetik kinetik gaz teorisi, kuantum mekaniği, matematiksel ekonomi gibi birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Birçok araştırmacı çeşitli fiziksel ve mühendislik problemlerini bu yöntemle başarılı bir şekilde çözmüştür [31,32].

HAM, lineer ve lineer olmayan Fredholm integral denklemlerin de uygulanmış ve başarılı bir sonuç vermiştir. Yarı analitik yöntemlerde, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesi çoğu zaman fiziksel parametrelere bağlıdır. Pertürbasyon metotlarının aksine, Homotopi Analiz Metodu küçük ve büyük fiziksel parametrelerden bağımsızdır ve metodun uygulanması için problemin küçük ve büyük fiziksel parametre içerip içermediği önemli değildir. Yöntemin güçlü bir yanı olarak kabul edilen, probleme uygun taban fonksiyonlarının seçiminde, başlangıç varsayımının, yardımcı lineer operatörün ve yakınsaklık kontrol parametresinin seçiminde geniş bir seçim özgürlüğüne sahip olmasıdır. Homotopi Analiz Metodu aynı zamanda, Adomian ayrışım metodu, Lyapunov küçük yapay parametre metodu,  $\delta$ -açılım metodu gibi pertürbatif olmayan metotların genel halidir [33]. Yani, önceki metotların genelleştirilmiş veya birleştirilmiş bir teorisi olarak düşünülebilir.

Örneğin aşağıdaki lineer olmayan cebirsel denklemi göz önüne alalım;

$$f(x) = 0 \quad (3.1)$$

$x_0, x'$  in bir başlangıç yaklaşımı ve  $q \in [0,1]$  homotopi parametresi olmak üzere;

$$H[x; q] = (1 - q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x) \quad (3.2)$$

homotopisi kurulsun.  $q = 0$  ve  $q = 1$  iken,

$$H[x;0] = f(x) - f(x_0) \text{ ve } H[x;1] = f(x) \quad (3.3)$$

elde edilir.  $q$  parametresi 0'dan 1'e değiştikçe,  $H[x;q]$  homotopisi sürekli olarak  $f(x) - f(x_0)$ 'dan  $f(x)$ 'e değişir. Böyle sürekli değişim, topolojide deformasyon olarak adlandırılır.  $H[x;q] = 0$  alınarak

$$(1 - q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x) = 0 \quad (3.4)$$

cebirsel denklemlerin bir ailesi bulunur. Bu cebirsel denklemler ailesinin bir çözümü, homotopi parametresi  $q$ 'ya bağlıdır. Bu yüzden denklemlerin ailesi

$$(1 - q)[f[\phi(q)] - f(x_0)] + qf(\phi(q)) = 0 \quad (3.5)$$

biçiminde tekrar yazılabilir.  $q = 0$  iken,

$$f[\phi(q)] - f(x_0) = 0; q = 0 \quad (3.6)$$

bulunur.

Bu denklemin çözümü  $\phi(0) = x_0$ 'dır.  $q = 1$  iken  $f[\phi(q)] = 0$   $q = 1$  denklemi başlangıçta alınan cebirsel denklem  $f(x) = 0$  ile tam olarak aynıdır. Buradan  $\phi|_{q=1} = \phi(1) = x$  elde edilir. Yani homotopi parametresi  $q$ , 0'dan 1'e değiştikçe,  $\phi(q)$ 'nun değeri başlangıç yaklaşımı  $x_0$ 'dan  $f(x) = 0$  denklemin çözümü olan  $x$ 'e değişir. (3.5) tipindeki denklemlerin ailesine sıfırıncı derece deformasyon denklemi denir. Bu da homotopi pertürbasyon denkleminde homotopiye denktir. Homotopi Pertürbasyon Metodu bu noktadan sonra farklılık göstermeye başlar. Burada  $\phi(q)$ , homotopi parametresi  $q$ 'nın bir fonksiyonu olduğu için pertürbasyon serisi yerine Taylor serisine açılarak ifade edilir. Böylece  $\phi(0) = x_0$  olmak üzere

$$\phi(q) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k q^k \quad (3.7)$$

bulunur. (3.7) serisinde  $x_k$



$$x_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k \phi(q)}{\partial q^k} \right|_{q=0} = D_k(\phi) \quad (3.8)$$

biçimindedir [34].

(3.7) serisine homotopi-serisi,  $D_k(\phi)$ 'ya ise  $k$ . mertebeden homotopi-türevi denir. Homotopi-serisi (3.7),  $q = 1$ 'de yakınsak ise  $\phi(1) = x$  eşitliği kullanılarak homotopi serisi çözümü

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \quad (3.9)$$

elde edilir.

Taylor serisinde katsayılar tek biçimde verildiğinden, (3.7) homotopi serisinin  $x_k$  katsayıları da tektir. Bu yüzden  $x_k$ 'dan oluşan denklem de tektir ve sıfıncı derece deformasyon denklemi (3.5)'den doğrudan elde edilebilir. Sıfıncı derece deformasyon denkleminin her iki tarafının (3.8) ile tanımlanan 1. mertebeden homotopi türevi alınarak

$$(1-q)[f[\phi(q)] - f(x_0)] + qf'[\phi(q)] = f'[\phi(q)] - (1-q)f'(x_0) = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{d\phi(q)}{dq} f'[\phi(q)] + f'(x_0) = 0 \quad (3.11)$$

1. derece deformasyon denklemi

$$x_1 f'(x_0) + f'(x_0) = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir. Bulunan denklemin çözümü:

$$x_1 = -\frac{f'(x_0)}{f'(x_0)} \quad (3.13)$$

dır. (3.5) denkleminin her iki tarafının 2. mertebeden homotopi türevi alınarak

$$(1-q)[f[\phi(q)]-f(x_0)]+qf[\phi(q)]=f[\phi(q)]-(1-q)f(x_0)=0 \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{2!} \left. \frac{d^2\phi(q)}{dq^2} \right|_{q=0} f'[\phi(q)]|_{q=0} + \frac{1}{2!} \left( \left. \frac{d\phi(q)}{dq} \right|_{q=0} \right)^2 f''[\phi(q)]|_{q=0} = 0 \quad (3.15)$$

2. derece deformasyon denklemi

$$x_2 f'(x_0) + \frac{1}{2} x_1^2 f''(x_0) = 0 \quad (3.16)$$

elde edilir.

Bu denklemin çözümü

$$x_2 = -\frac{x_1^2 f''(x_0)}{2f'(x_0)} = -\frac{f^2(x_0) f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3} \quad (3.17)$$

bulunur. Bu şekilde  $k=1,2,3,\dots$  için  $x_k$  sırayla elde edilir. Elde edilen bu m. derece deformasyon denklemleri lineer ve çözülmesi kolay denklemlerdir. Birinci derece homotopi serisi yaklaşımı;

$$x \approx x_0 + x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (3.18)$$

ve ikinci-derece homotopi-serisi yaklaşımı Homotopi Pertürbasyon Metodundaki gibi

$$x \approx x_0 + x_1 + x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f^2(x_0) f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3} \quad (3.19)$$

olarak bulunur. (3.18)'in Newton iterasyon formülüyle aynı olduğu, (3.19)'nın da 2. derece Newton iterasyon formülü olarak düşünülebileceği görülür.

Yukarıdaki yaklaşım, hiçbir fiziksel parametreye bağlı değildir. Bir lineer olmayan problemin küçük veya büyük fiziksel parametre içerip içermediği fark etmeksizin her zaman sıfır derece deformasyon denklemi oluşturmak için  $q \in [0,1]$  homotopi-parametresi verilebilir. (3.7)'deki homotopi serisi her zaman  $q=1$ 'de yakınsak olmayabilir. Bu yüzden, buna karşı gelen (3.9) homotopi çözüm serisi de ıraksak

olabilir. Örneğin 1. derece Newton iterasyon formülü, çoğu zaman iraksak sonuçlar verir. Bunun nedeni ise yukarıdaki yaklaşımın  $q = 1$ 'de yakınsak olduğu varsayımına dayanmasıdır. Fakat bu yaklaşım, genelde kuvvetli lineer olmayan problemler için sağlanmaz. Homotopi Analiz Metodunda, bu kısıtlamayı ortadan kaldırmak için Liao [35], bir sıfıncı derece deformasyon denklemini oluştururken, bir yardımcı  $\hbar \neq 0$  parametresi vermiştir:

$$(1 - q)[f[\phi(q)] - f(x_0)] = q\hbar f[\phi(q)] \quad (3.20)$$

$\hbar \neq 0$  olduğundan (3.20) denklemi,  $q = 1$ 'de  $x = \phi(1)$ 'i sağlayan  $f(x) = 0$  denkleminin karşılığıdır:  $\hbar f[\phi(q)] = 0$ ;  $q = 1$  olur. Yüksek derece deformasyon denklemi hariç diğer formüller (3.7) ve (3.9) ile aynıdır. 1. derece deformasyon denklemi:  $x_1 f'(x_0) - \hbar f(x_0) = 0$  olur.

Bu denklemin çözümü:  $x_1 = \hbar \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$  'dir. (3.20) denkleminin her iki tarafının 2.

mertebeden homotopi türevi alınarak 2. derece deformasyon denklemi:

$x_2 f'(x_0) - (1 + \hbar)x_1 f'(x_0) + \frac{1}{2}x_1^2 f''(x_0) = 0$  bulunur. Bu denklemin çözümü:

$$x_2 f'(x_0) - (1 + \hbar)x_1 f'(x_0) - \frac{1}{2}x_1^2 \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\hbar(1 + \hbar)f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{\hbar^2 f^2(x_0)f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3} \quad \text{elde}$$

edilir. Buradan birinci derece homotopi serisi yaklaşımı ve 2. derece homotopi serisi yaklaşımı:

$$x \approx x_0 + x_1 = x_0 + \hbar \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (3.21)$$

$$x \approx x_0 + x_1 + x_2 = x_0 + \hbar(\hbar + 2) \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \hbar^2 \frac{f^2(x_0)f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3}$$

elde edilir. (3.18) ve (3.19) denklemleri, (3.22) denklemlerinin sırasıyla  $\hbar = -1$  olduğu durumdaki özel halleridirler. (3.18) denkleminde,  $\hbar$  yardımcı parametresinin, nümerik hesaplamalarda sıkça kullanılan bir iterasyon çarpanı olduğu düşünülebilir. Uygun seçilen bir iterasyon çarpanı, iterasyonun yakınsak olmasını sağlar. Bunun gibi, (3.7) homotopi serisinin yakınsaklığı da  $\hbar$  yardımcı parametresinin değerine bağlıdır.  $\hbar$

yardımcı parametresinin uygun bir değeri seçilerek, homotopi seri çözümünün yakınsaklığı garanti edilebilir. Bu yüzden  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresi olarak adlandırılır.  $\hbar$  yakınsaklık parametresi kullanılmadığında, (3.7) homotopi serisinin yakınsak olduğu varsayılmak zorundadır.  $\hbar$  yakınsaklık parametresinin kullanımıyla böyle bir varsayıma gerek yoktur. Yakınsak homotopi seri çözümü elde etmek için her zaman uygun bir  $\hbar$  değeri seçilebilir [36].

### 3.2. Homotopi-türevinin özellikleri

Homotopi türevi, daha yüksek derece deformasyon denklemini türetmek için kullanılır. Bu alt bölümde, bu türevin tam olarak tanımıyla birlikte bazı özellikleri verilmiştir.

**3.2.1. Tanım**  $\phi$ ,  $q$  homotopi parametresinin bir fonksiyonu olsun.  $m \geq 0$  bir tamsayı olmak üzere;

$$D_m(\phi) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial \phi(q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (3.22)$$

$D_m(\phi)$ 'ye  $\phi$ 'nin  $m$ . mertebeden homotopi-türevi denir.

**3.2.2. Tanım**  $N[u] = 0$ ; bir lineer olmayan denklem,  $\phi$ ; Maclaurin serisi

$$\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k q^k \quad (3.23)$$

olan,  $q \in [0,1]$  homotopi parametresinin bir fonksiyonu olsun.

$\pi[\phi, q] = 0$ ,  $q \in [0,1]$  denklemler ailesine  $N[u] = 0$ 'ın sıfıncı derece deformasyon denklemi denir. Eğer  $q = 1$  ise bu denklem

$$u = \phi|_{q=1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \quad (3.24)$$

olmak üzere başlangıçta alınan  $N[u] = 0$  denklemine denktir.  $q = 0$ 'da ise denklemin çözümü açıktır. (3.23) serisine homotopi serisi ve (3.24) serisine  $N[u] = 0$ 'ın homotopi seri çözümü denir.  $u_k$ 'ların oluşturduğu denklemlere  $k$ . derece deformasyon denklemleri denir.

### 3.3. Deformasyon denklemleri

3.2. alt bölümünde verilen homotopi türevinin özellikleri, farklı tipte sıfıncı derece deformasyon denklemleri için yüksek derece deformasyon denklemleri elde edilirken kullanılır.

**Yardımcı Teorem:**  $q \in [0,1]$  bir homotopi parametresi,  $u_m(\vec{x})$  uzay,  $t$  zaman değişkeninin bir fonksiyonu olmak üzere ;  $\phi = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(\vec{x}, t) q^m$  bir homotopi serisini,  $L$ ;  $\vec{x}$  ve  $t$ 'ye göre bir yardımcı lineer operatörünü  $u_0$ ; bir başlangıç çözümünü gösterebilir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1, \\ 1 & m > 1, \end{cases} \quad (3.25)$$

olmak üzere, (3.22) ile tanımlanan  $D_m$  operatörü için

$$D_m \left\{ (1-q) L[\phi - u_0] \right\} = L[u_m(\vec{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\vec{x}, t)] \text{ sağlanır.}$$

**İspat:**  $L, q$ 'dan bağımsız bir lineer operatör olduğundan

$$(1-q)L[\phi - u_0] = L[\phi - q\phi + u_0q - u_0] \text{ sağlanır. Ve}$$

$$\begin{aligned} D_m \left\{ (1-q)L[\phi - u_0] \right\} &= D_m \left\{ L[\phi - q\phi + u_0q - u_0] \right\} \\ &= L \left\{ D_m[\phi - q\phi + u_0q - u_0] \right\} \\ &= L \left[ D_m(\phi) - D_m(q\phi) + u_0 D_m(q) \right] \\ &= L \left[ u_m - u_{m-1} + u_0 D_m(q) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade,  $m=1$  iken  $L[u_m]$ 'ye,  $m > 1$  iken  $L[u_m - u_{m-1}]$ 'e eşittir.  $\chi_m$

(3.25) tanımı ile kullanılarak  $D_m \left\{ (1-q) L[\phi - u_0] \right\} = L[u_m - \chi_m u_{m-1}]$  bulunur.

### 3.4. Sıfırncı Mertebeden Deformasyon Denklemi

Genel biçimde,  $N$  bir lineer olmayan operatör,  $\vec{x}$  uzay,  $t$  zaman değişkenleri,  $u(\vec{x}, t)$  bu değişkenlere bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$N[u(\vec{x}, t)] = 0 \quad (3.26)$$

lineer olmayan denklemi göz önüne alınsın.

$u_0(\vec{x}, t)$ ,  $u(\vec{x}, t)$  tam çözümünün bir başlangıç yaklaşımı,  $\hbar \neq 0$  bir yakınsaklık kontrol parametresi,  $H(\vec{x}, t) \neq 0$  bir yardımcı fonksiyon ve  $L$  aşağıdaki özelliği sağlayan bir yardımcı lineer operatör,

$$f(\vec{x}, t) = 0 \text{ iken } L[f(\vec{x}, t)] = 0 \quad (3.27)$$

olsunlar.  $q \in [0, 1]$  homotopi parametresi kullanılarak,

$$H[\phi(\vec{x}, t; q), u_0(\vec{x}, t), H(\vec{x}, t), \hbar, q] = (1 - q) \left\{ L[\phi(\vec{x}, t; q) - u_0(\vec{x}, t)] \right\} - q\hbar H(\vec{x}, t) N[\phi(\vec{x}, t; q)] \quad (3.28)$$

homotopisi kurulabilir. Yakınsaklık kontrol parametresi  $\hbar$  ve yardımcı fonksiyon  $H(\vec{x}, t)$  homotopi analiz metodunda önemli rol oynarlar. Metot  $u_0(\vec{x}, t)$  başlangıç yaklaşımını,  $L$  yardımcı lineer operatörünü, yakınsaklık kontrol parametresi  $\hbar$  ve  $H(\vec{x}, t)$  yardımcı fonksiyonunu seçme serbestliği tanır. (3.28) homotopisi 0'a eşitlenerek,  $H[\phi(\vec{x}, t; q), u_0(\vec{x}, t), H(\vec{x}, t), \hbar, q] = 0$  sıfırncı derece deformasyon denklemi

$$(1 - q) \left\{ L[\phi(\vec{x}, t; q) - u_0(\vec{x}, t)] \right\} = q\hbar H(\vec{x}, t) N[\phi(\vec{x}, t; q)] \quad (3.29)$$

elde edilir.

Denklemin çözümü  $\phi(\vec{x}, t; q)$  sadece  $u_0(\vec{x}, t)$ ,  $L, H(\vec{x}, t)$  ve  $\hbar$ 'ye bağlı değil, aynı zamanda  $q \in [0, 1]$ 'ya da bağlıdır.  $q = 0$  iken (3.29) sıfıncı derece deformasyon denklemi,

$$L[\phi(\vec{x}, t; 0) - u_0(\vec{x}, t)] = 0 \quad (3.30)$$

denkleme dönüşür. (3.27) özelliği kullanılarak

$$\phi(\vec{x}, t; 0) = u_0(\vec{x}, t) \quad (3.31)$$

bulunur.  $q = 1$  iken  $\hbar \neq 0$  ve  $H(\vec{x}, t) \neq 0$  olduğundan (3.29) sıfıncı derece deformasyon denklemi ,

$$N[\phi(\vec{x}, t; 1)] = 0, \quad (3.32)$$

denkleme karşı gelir. Bu denklem ilk başta alınan (3.26) denkleminin aynısıdır. Buradan

$$\phi(\vec{x}, t; 1) = u(\vec{x}, t) \quad (3.33)$$

denklemleri sağlanır. (3.31) ve (3.33) denklemlerine göre, homotopi parametresi  $q$ , 0'dan 1'e artarken  $\phi(\vec{x}, t; q)$ ,  $u_0(\vec{x}, t)$  başlangıç yaklaşımından, (3.26) denkleminin tam çözümü olan  $u(\vec{x}, t)$ 'ye sürekli olarak değişir (veya deforme olur). Bu tip sürekli değişime, homotopide deformasyon denir. (3.29) denkleminin sıfıncı derece deformasyon denklemi denmesinin nedeni budur.  $m$ . derece deformasyon denklemlerinin türevleri

$$u_0^{[m]}(\vec{x}, t) = \left. \frac{\partial^m \phi(\vec{x}, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (3.34)$$

ile tanımlanır. Taylor teoremi ile  $\phi(\vec{x}, t; q)$ ,  $q$ 'nin kuvvet serisine açılabilir:

$$\phi(\vec{x}, t; q) = \phi(\vec{x}, t; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_0^{[m]}(\vec{x}, t)}{m!} q^m \quad (3.35)$$

Buradan

$$u_m(\vec{x}, t) = \frac{u_0^{[m]}(\vec{x}, t)}{m!} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(\vec{x}, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} = D_m(\phi) \quad (3.36)$$

bulunur. (3.31) denklemini kullanılarak (3.36)  $\phi(\vec{x}, t; q)$ 'nin kuvvet serisi

$$\phi(\vec{x}, t; q) = u_0(\vec{x}, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\vec{x}, t) q^m \quad (3.37)$$

elde edilir.  $L$  yardımcı lineer operatörü,  $u_0(\vec{x}, t)$  başlangıç çözümü,  $\hbar \neq 0$  yakınsaklık kontrol parametresi ve  $H(\vec{x}, t)$  yardımcı fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlayacak biçimde seçilir:

1. Her  $q \in [0, 1]$  için  $\phi(\vec{x}, t; q)$ , (3.29) sıfıncı derece deformasyon denkleminin çözümüdür.
2.  $m = 1, 2, 3, \dots$  için deformasyon türevi  $u_0^{[m]}(\vec{x}, t)$  mevcuttur.
3.  $\phi(\vec{x}, t; q)$ 'nin kuvvet serisi (3.37)  $q = 1$ 'de yakınsaktır.

(3.33) ve (3.37) denklemlerinden, çözüm serisi

$$u(\vec{x}, t) = u_0(\vec{x}, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\vec{x}, t) \quad (3.38)$$

bulunur. Bu ifade, tam çözüm  $u(\vec{x}, t)$  ve başlangıç yaklaşımı  $u_0(\vec{x}, t)$  arasında, yüksek derece deformasyon denklemleri ile belirlenen  $u_m(\vec{x}, t)$  terimleri yardımıyla bir ilişki kurar.

### 3.5. Yüksek-derece Deformasyon Denklemi

$\vec{u}_n = \{u_0(\vec{x}, t), u_1(\vec{x}, t), u_2(\vec{x}, t), \dots, u_n(\vec{x}, t)\}$  vektörü tanımlansın. (3.36) tanımına göre,

$u_m(\vec{x}, t)$ 'nin denklemi, sıfıncı derece deformasyon denklemi (3.29)'den türetilebilir.

$\mathcal{X}_m$  fonksiyonu (3.25) ile tanımlanmak üzere;



$$L[u_m(\vec{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\vec{x}, t)] = \hbar H(\vec{x}, t) R_m(u_{m-1}, \vec{x}, t) \quad (3.39)$$

$$R_m(u_{m-1}, \vec{x}, t) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(\vec{x}, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (3.40)$$

m. derece deformasyon denklemi elde edilir. (3.22) tanımından,

$$R_m(u_{m-1}, \vec{x}, t) = D_{m-1}(N[\phi]) \quad (3.41)$$

denklemi bulunur. (3.41) denklemi, (3.39) denkleminde yerine konularak

$$L[u_m(\vec{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\vec{x}, t)] = \hbar H(\vec{x}, t) D_{m-1}(N[\phi]) \quad (3.42)$$

denklemi bulunur. (3.37) denklemi, (3.40) denkleminde yerine konularak

$$R_m(u_{m-1}, \vec{x}, t) = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} N \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\vec{x}, t) q^n \right] \right\} \Big|_{q=0} \quad (3.41)$$

bulunur. Bu da (3.22) tanımına göre

$$R_m(u_{m-1}, \vec{x}, t) = D_{m-1} \left( N \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\vec{x}, t) \right] \right) = D_{m-1}(N[u]) \quad (3.42)$$

denklemini verir. (3.42) yüksek derece lineer deformasyon denklemi birbiri ardınca çözümlenerek  $u_1(\vec{x}, t), u_2(\vec{x}, t), \dots$  elde edilir.  $u(\vec{x}, t)$ 'nin  $m$ . yaklaşımı;

$$u(\vec{x}, t) \approx \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\vec{x}, t) \quad (3.45)$$

ile verilir.

### 3.6. Yakınsaklık teoremi

Bir serinin yakınsaklığı önemlidir. Homotopi analiz metodu ile verilen (3.38) çözüm serisinin, yakınsak olduğu sürece ele alınan lineer olmayan problemin çözümü olduğu kanıtlanabilir.

**3.6.1. Teorem:**  $u(\vec{x}, t) = u_0(\vec{x}, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\vec{x}, t)$  serisi yakınsak ise (3.26) denkleminin bir çözümüdür [34].

**İspat:**

Eğer seri yakınsak ise

$$s = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m \text{ yazılabilir. Ayrıca seri yakınsak olduğundan } \lim_{x \rightarrow \infty} u_n = 0 \text{ sağlanır. (3.39)}$$

denklemini kullanarak

$$\begin{aligned} \hbar H(\vec{x}, t) \sum_{m=1}^{+\infty} R_m[u_{m-1}(\vec{x}; t)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n L[u_m(\vec{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\vec{x}, t)] \\ &= L \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n [u_m(\vec{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\vec{x}, t)] \right\} \\ &= L[\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\vec{x}, t)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\hbar \neq 0$ ,  $H(\vec{x}, t) \neq 0$  olduğundan

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m[u_{m-1}(\vec{x}; t)] = 0 \text{ bulunur. } u(\vec{x}, t), \text{ (3.26) denkleminin bir çözümüdür.}$$

### 3.7. Lane-Emden Denkleminin Deformasyon Denklemi

$$u''(x) + \frac{2}{x} u'(x) + u^n = 0, \quad x \geq 0 \quad (3.46)$$

Bu denklemde  $u(x)$  bağımsız değişken  $x$ 'in bilinmeyen fonksiyonudur.  $u_0(x)$ ,  $u(x)$  çözümünün başlangıç tahmini olduğunu kabul edilsin.  $\hbar \neq 0$  yakınsama kontrol parametresi, yardımcı görevdeki  $H(x) \neq 0$  ve yardımcı lineer operatör  $L$  homotopi analiz metodunu yakınsama bölgesini çözüm için kontrol etmede ve ayarlama önemli bir rol oynar. Liao,  $q \in [0, 1]$  gömme parametresini sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemini

$$(1-q)L[\phi(x;q)-u_0(x)] = q\hbar H(x)N[\phi(x;q)] \quad (3.47)$$

oluşturmak için kurmuştur [20]. Burada

$$N[\phi(x;q)] = \phi''(x) + \frac{2}{x}\phi'(x) + \phi^n \quad (3.48)$$

olmak üzere, (3.47)'de  $q=0$  olduğunda sıfıncı mertebeden deformasyon denklemi  $\phi(x;0) = u_0(x)$  olur ve  $q=1$  olduğunda ise sıfıncı mertebeden deformasyon denklemi (3.47)'de  $L[\phi(x;1)] = 0$  olur.  $q$ , 0'dan 1'e arttığında  $\phi(x;q)$ 'nin çözümü ilk tahmin olan  $u_0(x)$ 'e göre farklılık gösterir ve  $u(x)$  olur. Bu durumda,  $[\phi(x;1)]$  (3.46) lineer denklemin kesin çözümüdür.  $\phi(x;q)$ 'yu  $q$ 'ya göre Taylor serisine göre açılırsa yardımcı lineer operatör, ilk tahmin fonksiyonu  $\hbar$  yardımcı parametresi sonradan belirlenecektir.  $\phi(x;q)$ 'nin kuvvet serisi  $q=1$ 'e yakınsadığında, aşağıdaki çözüm serisi

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) \quad (3.49)$$

elde edilir. Burada  $u_m(x)$  terimleri, yüksek mertebeden deformasyon denklemi ile tespit edilir. Şimdi

$$\vec{u} = \{u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)\} \quad (3.50)$$

vektörü tanımlansın ve (3.46) denklemini gömme parametresine göre  $m$  kere türevi alınır ve  $q=0$  alınarak  $m!$  bölünürse  $m$ . mertebeden deformasyon denklemi

$$L[u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x)] = \hbar H(x) R_m(u_{m-1}, x) \quad (3.51)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (3.52)$$

ve

$$R_m(\bar{u}_{m-1}, x) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (3.53)$$

dir. İlk çözüm ifadesi ve katsayı ergodiklik kuralına uymak için, ilgili ve yardımcı görevler benzersiz şekilde  $H(x) = 1$  olarak belirlenir [33].

Verilen herhangi bir doğrusal olmayan  $N$  operatörü ve  $L$  terimi (3.47) ile kolayca ifade edilebilir. Bu sayede yüksek mertebeden lineer deformasyon denklemi ile  $u_1(x), u_2(x), \dots$  elde edilir.  $m$ . mertebeden  $u(x)$  yaklaşımı

$$U(x) = \sum_{m=0}^n u_m(x) \quad (3.54)$$

Deformasyon denkleminin seri çözümlerinden elde edilen  $u_m(x)$ 'lerin toplamı olan  $U(x)$  bize (3.46) denkleminin analitik çözümüne yakınsamamızı sağlar. Ancak, burada uygun bir  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresi belirlemek gerekir. Burada,  $\hbar$  parametresi  $U'(0)$ ,  $U''(0)$  veya  $U'(1)$ ,  $U''(1)$  türev grafikleri çizilerek grafiklerin yatay eksene paralel olduğu aralıkta seçilir.

### 3.8. Emden-Fowler Denkleminin Deformasyon Denklemi

$$N[y(x, t)] = 0 \quad (3.55)$$

denklemini ele alalım. Lineer olmayan bir operatör bağımsız değişkenler bir fonksiyon olmak üzere sıfıncı dereceden deformasyon denklem yapıları

$$(1-q)L[\phi(x, t; q) - y_0(t)] = qhH(x, t)N[\phi(x, t; q)] \quad (3.56)$$

şeklindedir. Burada  $q \in [0, 1]$  aralığında gömme parametresi,  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresi  $L$  yardımcı lineer operatör  $\phi(x, t; q)$  bir fonksiyon. Burada  $q \in [0, 1]$  arasında değiştiğinde  $\phi(x, t; q)$ ,  $y_0(x, t)$  başlangıç şartı ile  $y(x, t)$  arasında değişir.  $\phi(x, t; q)$ 'da  $q$ 'ya göre Taylor serisine açılarak

$$\phi(x, t; q) = y_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x, t)q^m, \quad (3.57)$$

Burada

$$y_m(x, t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (3.58)$$

dır. Başlangıç şartı ve  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresi uygun olarak seçilir ve (3.57) serisinde  $q = 1$  'e yakınsarsa

$$\phi(x, t; 1) = y_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x, t), \quad (3.59)$$

(3.56) 'de Liao [3]  $\hbar = -1$  ve  $H(x, t) = 1$  için denklemin,

$$(1 - q)L[\phi(x, t; q) - y_0(x, t)] + qN[\phi(x, t; q)] = 0 \quad (3.60)$$

olduğunu kanıtlamıştır. Homotopi Pertürbasyon Metodu ile (3.56) 'deki deformasyon denklemini yazılamaz.

$$\vec{y}_n = \{y_0(x, t), y_1(x, t), \dots, y_n(x, t)\} \quad (3.61)$$

vektör ailesi tanımlanarak  $q = 0$  alınarak  $m$ . dereceden deformasyon denklemini

$$L[y_m(x, t) - \chi_m y_{m-1}(x, t)] = \hbar H(t) R_m(\vec{y}_{m-1}) \quad (3.62)$$

dır.

Burada,

$$R_m(\vec{y}_{m-1}, x) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (3.63)$$

ve

$\chi_m$  (3.52)'deki gibi tanımlanır ve bilgisayarda matematik yazılımları yardımıyla analitik çözüme yaklaşan seri çözüm yakınsamaları bulunur. Bu yakınsama serileri  $h$  yakınsaklık kontrol parametresi ile kontrol edilebilir.

## 4. BÖLÜM

### UYGULAMALAR

Bu bölümde, Lane-Emden ve Emden-Fowler denklemlerinin lineer ve lineer olmayan 6 örneğini HAM ile çözümlerini inceleyeceğiz.

Örnek 4.1.

$$u''(x) + \frac{2}{x}u'(x) - 2(2x^2 + 3)u(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \quad (4.1)$$

lineer Lane-emden denklemini ele alalım [8]. Bu problemin tam çözümü,

$$u(x) = e^{x^2} \quad (4.2)$$

dir. Öncelikle deformasyon denklemi yazılırsa,

$$L[u_m - \chi_m u_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(u_{m-1}) \quad (4.3)$$

elde edilir. Burada

$$N[\phi(x; q)] = \phi''(x) + \frac{2}{x}\phi'(x) - (4x^2 + 6)\phi(x) \quad (4.4)$$

$$R_m(u_{m-1}) = u''(x) + \frac{2}{x}u'(x) - (4x^2 + 6)u(x) = 0 \quad (4.5)$$

dır.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}, \quad H[x, t] = 1 \quad (4.6)$$

ve türev operatörü

$$du_m(x) = D[u_m(x), x], \quad ddu_m(x) = D[D[u_m(x), x], x] \quad (4.7)$$

olarak tanımlanırsa

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + \hbar \int_0^x \left( \int_0^r (ddu_{m-1}(t) + \frac{2}{x} du_{m-1}(t)) dr \right) dt \quad (4.8)$$

$u_0(x) = 1$  seçerek (4.8) denklemiyle ardışık olarak  $u_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  değerleri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u_0(x, \hbar) = 1 \quad (4.9)$$

$$u_1(x, \hbar) = -3\hbar x^2 - \frac{\hbar x^4}{3}$$

$$u_2(x, \hbar) = -3\hbar x^2 - 9\hbar^2 x^2 - \frac{\hbar x^4}{3} + \frac{17\hbar^2 x^6}{18} + \frac{7\hbar^2 x^6}{15} + \frac{\hbar^2 x^8}{42}$$

$$u_3(x, \hbar) = -3\hbar x^2 - 18\hbar^2 x^2 - 27\hbar^3 x^2 - \frac{\hbar x^4}{3} + \frac{17\hbar^2 x^4}{9} + \frac{164\hbar^2 x^4}{27} + \frac{14\hbar^2 x^6}{15} + \frac{749\hbar^3 x^6}{450}$$

$$+ \frac{\hbar^2 x^8}{21} - \frac{383\hbar^3 x^8}{4410} - \frac{211\hbar^3 x^{10}}{9450} - \frac{\hbar^3 x^{12}}{1386}$$

⋮

$u_n(x, \hbar)$   $n = 18$  'e kadar çözümleri bulunur.

Burada uygun bir  $\hbar$  yakınsama parametresi seçmek için  $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m u_n(x, \hbar)$  toplamı

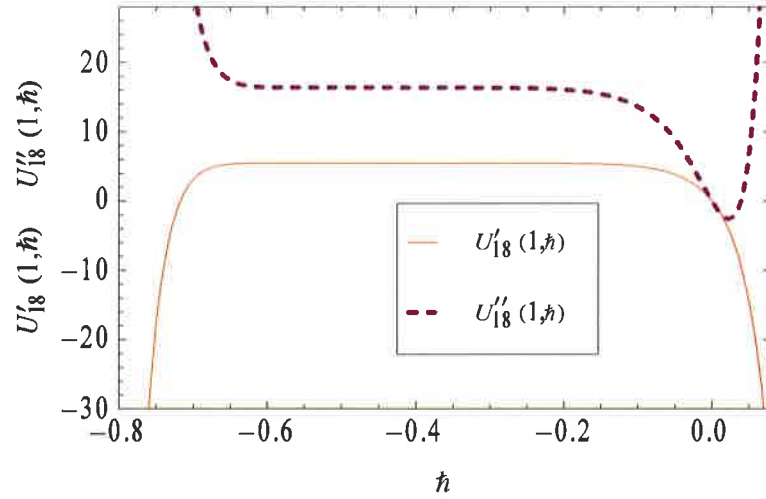
elde edilir ki, bu olası analitik çözümdür. Burada Mathematica 7.0 yazılımı ile



$u_{18}(x, \hbar)$ 'a kadar hesaplatılırsa, (4.1) probleminin çözüm serisinin (4.10)'deki gibi gerçek çözüme yakınsadığı görülür.

$$u(x) \approx U_{18}(x, \hbar) \quad (4.10)$$

çözüm serimizin gerçek çözüme yakınsamasını kontrol altına almamızı sağlayan  $\hbar$ 'ın uygun aralığını bulmak için,  $U'_{18}(1, \hbar)$  ve  $U''_{18}(1, \hbar)$  grafiklerini çizersek.



Şekil 4.1. (4.1) probleminin  $\hbar$  eğrisinin grafiği

Şekil 4.1'deki  $U'_{18}(1, \hbar)$  ile  $U''_{18}(1, \hbar)$  grafiklerinin paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa  $[-0.7, -0.1]$  aralığında olması gerektiği görülür.

Tablo 4.1. Problem (4.1)'in uygun  $\hbar$  değerleri

$x_i$	$U(x_i, \hbar)$	$\hbar$
0	0	$\hbar \rightarrow 1$
0.2	$1.38501 \times 10^{-9}$	$\hbar \rightarrow -0.461789$
0.4	0.000158400	$\hbar \rightarrow -0.561097$
0.6	0.000250403	$\hbar \rightarrow -0.557753$
0.8	0.001851107	$\hbar \rightarrow 0.578119$
1	0.000387924	$\hbar \rightarrow -0.554864$

Uygun  $\hbar$  değeri Tablo 4.1'de görüldüğü gibi seçilebilecek en iyi  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresinin yaklaşık  $\hbar = -0.461$  olduğu görülür.  $\hbar = -0.461$  için (4.11) çözüm serisi hesaplanırsa,

$$U_{18}(x) = \sum_{m=0}^{18} u_m(x) \quad (4.11)$$

bulunur ve yaklaşık çözümünün hata fonksiyonu

$$|U_{18}(x) - e^{x^2}| \quad (4.12)$$

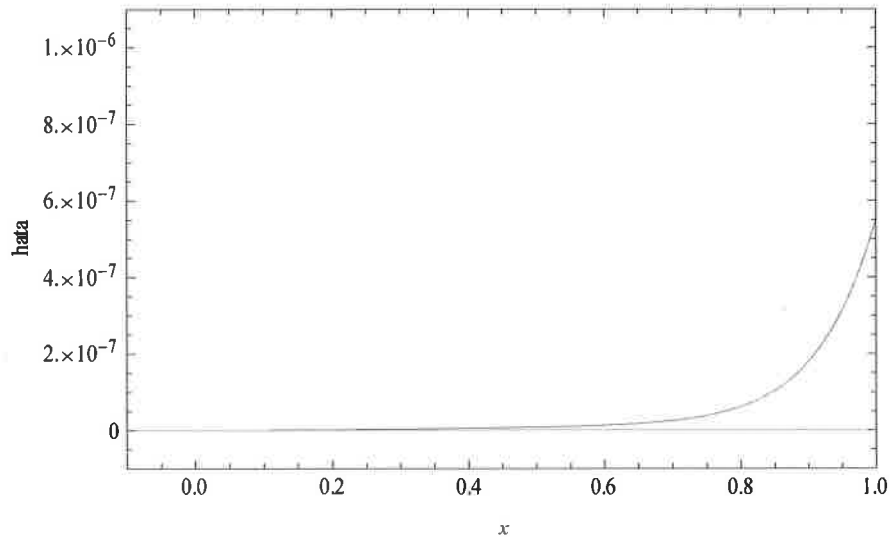
olmak üzere. Tablo 4.2'deki hata tablosu elde edilir.

Tablo 4.2. Problem (4.1)'in hata tablosu

$i$	$x_i$	$u(x) = e^{x^2}$	$U_{18}(x)$ $\hbar = -0.461$	$ U_{18}(x) - e^{x^2} $
0	0	1.00000000	1.000000000	0
1	0.2	1.040810774	1.040810773	$1.24334 \times 10^{-9}$
2	0.4	1.173510871	1.173510866	$4.78125 \times 10^{-9}$
3	0.6	1.433329415	1.433329402	$1.25569 \times 10^{-8}$
4	0.8	1.896480879	1.896480818	$6.10550 \times 10^{-8}$
5	1	2.718281828	2.718281276	$5.52575 \times 10^{-7}$

hata tablosu elde edilir.

Grafik [0,1] aralığına yoğunlaştırılır ve bulduğumuz hata tablosu göz önüne alınırsa aşağıdaki fark fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil 4.2. (4.1.) Probleminin [0,1] aralığında hata fonksiyon grafiği

Örnek 4.2.

$$u''(x) + \frac{8}{x}u'(x) + xu(x) = x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x, \quad (4.13)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0$$

lineer Lane-Emden denklemini alalım [8]. Bu problemin tam çözümü,

$$u(x) = x^4 - x^3 \quad (4.14)$$

dir. Öncelikle deformasyon denklemini yazılırsa,

$$L[u_m - \chi_m u_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(u_{m-1}) \quad (4.15)$$

denklemini elde edilir. Buradan

$$N[\phi(x; q)] = \phi''(x) + \frac{8}{x}\phi'(x) + x\phi(x) - x^5 + x^4 - 44x^2 + 30x \quad (4.16)$$

$$R_m(u_{m-1}) = u''(x) + \frac{8}{x}u'(x) + xu(x) - x^5 + x^4 - 44x^2 + 30x = 0 \quad (4.17)$$

elde edilir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}, \quad H[x, t] = 1 \quad (4.18)$$

ve türev operatörü

$$du_m(x) = D[u_m(x), x], \quad ddu_m(x) = D[D[u_m(x), x], x] \quad (4.19)$$

olarak tanımlanırsa

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + \hbar \int_0^x \left( \int_0^r (ddu_{m-1}(t) + \frac{8}{t} du_{m-1}(t) + tu_{m-1}(t)) dt \right) dr \quad (4.20)$$

$u_0(x) = 0$  seçerek (4.20) denkleminle ardışık olarak  $u_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  değerleri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u_0(x, \hbar) = 0 \quad (4.21)$$

$$u_1(x, \hbar) = 5\hbar x^3 + 25\hbar^2 x^3 - \frac{11\hbar x^4}{3} - \frac{121\hbar^2 x^4}{9} + \frac{\hbar x^6}{30} + \frac{19\hbar^2 x^6}{75} - \frac{\hbar x^7}{42} - \frac{\hbar^2 x^7}{7} + \frac{\hbar^2 x^9}{2160} - \frac{\hbar^2 x^{10}}{3780}$$

$$u_2(x, \hbar) = 5\hbar x^3 + 50\hbar^2 x^3 + 125\hbar^3 x^3 - \frac{11\hbar x^4}{3} - \frac{242\hbar^2 x^4}{9} - \frac{1331\hbar^3 x^4}{27} + \frac{\hbar x^6}{30} + \frac{38\hbar^2 x^6}{75} + \frac{373\hbar^3 x^6}{250} - \frac{\hbar x^7}{42} - \frac{2\hbar^2 x^7}{7} - \frac{247\hbar^3 x^7}{378} + \frac{\hbar^2 x^9}{1080} + \frac{\hbar^3 x^9}{225} - \frac{\hbar^2 x^{10}}{1890} - \frac{71\hbar^3 x^{10}}{34020} + \frac{\hbar^3 x^{12}}{285120} - \frac{\hbar^3 x^{13}}{589680}$$

$$u_3(x, \hbar) = 5\hbar x^3 + 75\hbar^2 x^3 + 375\hbar^3 x^3 + 625\hbar^4 x^3 - \frac{11\hbar x^4}{3} - \frac{121\hbar^2 x^4}{3} - \frac{1331\hbar^3 x^4}{9} - \frac{14641\hbar^4 x^4}{81} + \frac{\hbar x^6}{30} + \frac{19\hbar^2 x^6}{25} + \frac{1119\hbar^3 x^6}{250} + \frac{15086\hbar^4 x^6}{1875} - \frac{\hbar x^7}{42} - \frac{3\hbar^2 x^7}{7} - \frac{247\hbar^3 x^7}{126} - \frac{170\hbar^4 x^7}{63} + \frac{\hbar^2 x^9}{720} + \frac{\hbar^3 x^9}{75} + \frac{533\hbar^4 x^9}{18000} - \frac{\hbar^2 x^{10}}{1260} - \frac{71\hbar^3 x^{10}}{11340} - \frac{49\hbar^4 x^{10}}{4374} + \frac{\hbar^3 x^{12}}{95040} + \frac{623\hbar^4 x^{12}}{15681600} - \frac{\hbar^3 x^{13}}{196560} - \frac{43\hbar^4 x^{13}}{2653560} + \frac{\hbar^4 x^{15}}{59875200} - \frac{\hbar^4 x^{16}}{141523200}$$

⋮

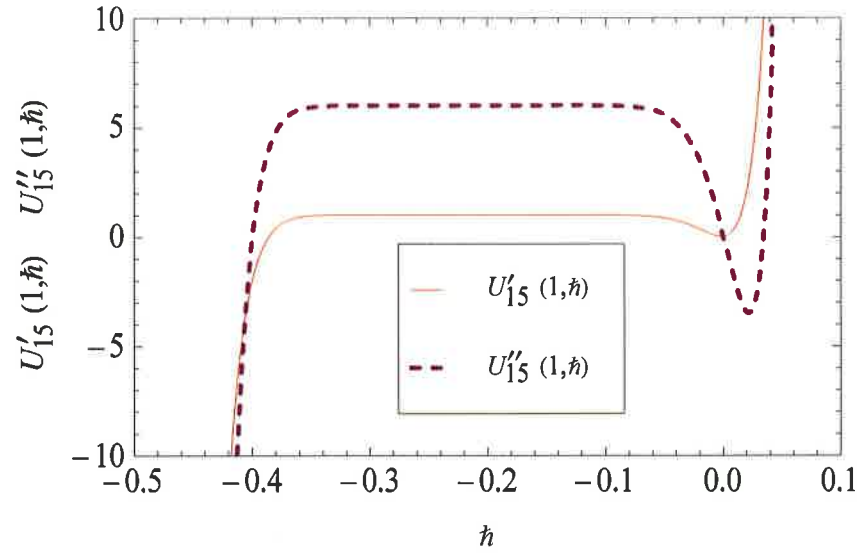
$u_n(x, \hbar)$   $n = 15$ ' e kadar çözümleri bulunur.

Burada uygun bir  $\hbar$  yakınsama parametresi seçmek için  $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m u_n(x, \hbar)$  toplamı elde edilir ki, bu olası analitik çözümdür. Burada Mathematica 7.0 yazılımı ile

$u_{15}(x, \hbar)$ 'a kadar yazılımı ile hesaplatılırsa, (4.13) probleminin çözüm serisinin (4.22)'deki gibi gerçek çözüme yakınsadığı görülür.

$$u(x) \approx U_{15}(x, \hbar) \quad (4.22)$$

Çözüm serimizin gerçek çözüme yakınsamasını kontrol altına almamızı sağlayan  $\hbar$ 'ın uygun aralığını bulmak için  $U'_{15}(1, \hbar)$  ve  $U''_{15}(1, \hbar)$  grafiklerini çizerek.



Şekil 4.3. Problem (4.13)'ün  $\hbar$  eğrisinin grafiği

Şekil 4.3'deki  $U'_{15}(1, \hbar)$  ile  $U''_{15}(1, \hbar)$  grafiklerinin paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa  $\hbar$ 'ın  $[-0.33, -0.06]$  aralığında olması gerektiği görülür.

Tablo 4.3. Problem (4.13)'ün uygun  $\hbar$  değerleri

$x_i$	$U(x_i, \hbar)$	$\hbar$
0	0	$\hbar \rightarrow 1$
0.2	$1.4068 \times 10^{-10}$	$\hbar \rightarrow -0.260827$
0.4	$1.13748 \times 10^{-9}$	$\hbar \rightarrow -0.260931$
0.6	$3.69359 \times 10^{-9}$	$\hbar \rightarrow -0.261032$
0.8	$7.87379 \times 10^{-9}$	$\hbar \rightarrow -0.261130$
1	$1.47899 \times 10^{-8}$	$\hbar \rightarrow -0.261227$

Uygun  $h$  değeri Tablo 4.3'de görüldüğü gibi seçilebilecek en iyi  $h$  yakınsaklık kontrol parametresinin yaklaşık  $h = -0.260$  olduğu görülür.  $h = -0.260$  için aşağıdaki (4.23) çözüm serisi hesaplanırsa,

$$U_{15}(x) = \sum_{m=0}^{15} u_m(x) \quad (4.23)$$

bulunur ve yaklaşık çözümünün hata fonksiyonu

$$|U_{18}(x) - x^4 + x^3| \quad (4.24)$$

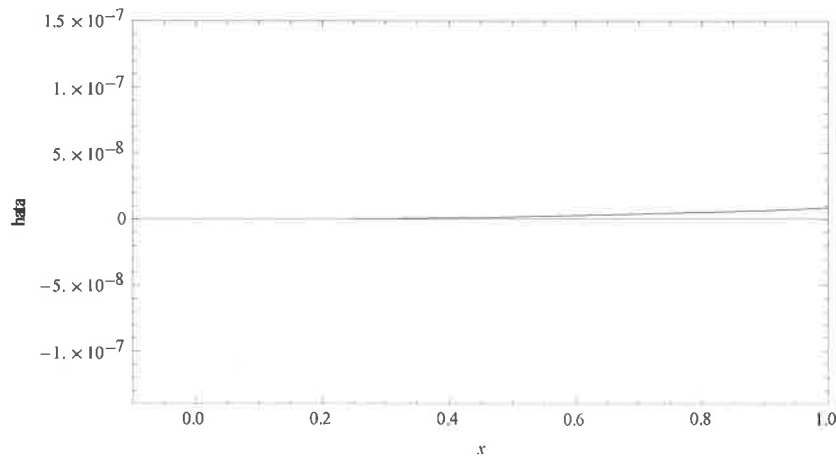
olmak üzere Tablo 4.4'deki hata tablosu elde edilir.

Tablo 4.4. Problem (4.13) hata tablosu

$i$	$x_i$	$u(x) = x^4 - x^3$	$U_{18}(x)$ $h = -0.260$	$U_{18}(x) - x^4 + x^3$
0	0	0	0	0
1	0.2	-0.006400000000	-0.006400000115	$1.1467 \times 10^{-10}$
2	0.4	-0.038400000000	-0.038400000090	$8.97713 \times 10^{-10}$
3	0.6	-0.086400000000	-0.086400000276	$2.75705 \times 10^{-9}$
4	0.8	-0.102400000000	-0.102400000530	$5.25135 \times 10^{-9}$
5	1	0	$-8.686550131 \times 10^{-9}$	$8.68912 \times 10^{-9}$

hata tablosu elde edilir.

Grafik [0,1] aralığına yoğunlaştırılır ve bulduğumuz hata tablosu göz önüne alınarak aşağıdaki fark fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil 4.4. Problem (4.13)'ün [0,1] aralığında hata fonksiyon grafiği

Örnek 4.3.

$$u''(x) + \frac{2}{x}u'(x) - (6 + 4x^2 - \cos t)u(x) = u'(t), \quad (4.25)$$

$$u(0, t) = (1 + x^2)e^{\sin t}, \quad u'(0, t) = 0$$

lineer olmayan Emden-Fowler denklemini alalım [26]. Bu problemin tam çözümü,

$$u(x) = e^{x^2 + \sin t} \quad (4.26)$$

dir. Öncelikle deformasyon denklemi yazılırsa,

$$L[u_m - \chi_m u_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(u_{m-1}) \quad (4.27)$$

denklemi gereklidir. Buradan

$$N[\phi(x; q)] = \phi''(x) + \frac{2}{x}\phi'(x) - (6 + 4x^2 - \cos t)\phi(x) - \phi'(t) \quad (4.28)$$

$$R_m(u_{m-1}) = u''(x) + \frac{2}{x}u'(x) - (6 + 4x^2 - \cos t)u(x) - u'(t) = 0 \quad (4.29)$$

elde edilir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}, \quad H[x, t] = 1 \quad (4.30)$$

ve türev operatörü

$$du_m(x) = D[u_m(x), x], \quad ddu_m(x) = D[D[u_m(x), x], x] \quad (4.31)$$

olarak tanımlanırsa

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + \hbar \left[ \int_0^x \int_0^n \left( ddu_{m-1}(r) + \frac{2}{r} du_{m-1}(r) - u_{m-1}(r) \right) dn \right] \quad (4.32)$$

$$\left( \int_0^n (6 + 4r^2 - \cos t) - d_{m-1}(t) \right) dr$$

$u_0(x) = 0$  seçerek (4.32) denklemiyle ardışık olarak  $u_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  değerleri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u_0(x, \hbar) = (1 + x^2)e^{\sin[t]} \quad (4.33)$$

$$u_1(x, \hbar) = -\frac{5}{6}e^{\sin[t]}\hbar x^4 - \frac{2}{15}e^{\sin[t]}\hbar x^6$$

$$u_2(x, \hbar) = -\frac{5}{6}e^{\sin[t]}\hbar x^4 - \frac{25}{18}e^{\sin[t]}\hbar^2 x^4 - \frac{2}{15}e^{\sin[t]}\hbar x^6 - \frac{1}{50}e^{\sin[t]}\hbar^2 x^6 \\ + \frac{31}{420}e^{\sin[t]}\hbar^2 x^8 + \frac{4}{675}e^{\sin[t]}\hbar^2 x^{10}$$

$$u_3(x, \hbar) = -\frac{5}{6}e^{\sin[t]}\hbar x^4 - \frac{25}{9}e^{\sin[t]}\hbar^2 x^4 - \frac{125}{54}e^{\sin[t]}\hbar^3 x^4 - \frac{2}{15}e^{\sin[t]}\hbar x^6 \\ - \frac{1}{25}e^{\sin[t]}\hbar^2 x^6 + \frac{281e^{\sin[t]}\hbar^3 x^6}{1125} + \frac{31}{210}e^{\sin[t]}\hbar^2 x^8 \\ + \frac{17309e^{\sin[t]}\hbar^3 x^8}{88200} + \frac{8}{675}e^{\sin[t]}\hbar^2 x^{10} + \frac{2731e^{\sin[t]}\hbar^3 x^{10}}{850500} \\ - \frac{521e^{\sin[t]}\hbar^3 x^{12}}{207900} - \frac{8e^{\sin[t]}\hbar^3 x^{14}}{61425}$$

⋮

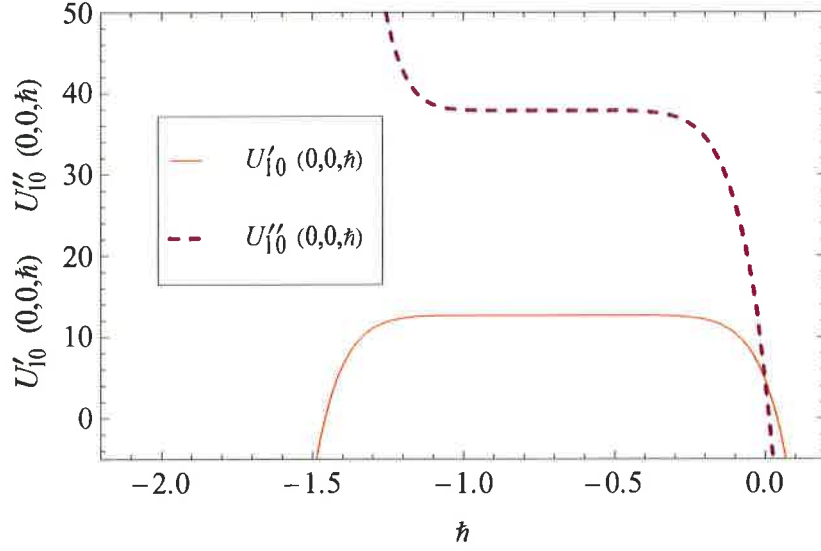
$u_n(x, \hbar)$   $n = 10$  'a kadar çözümleri bulunur.

Burada uygun bir  $\hbar$  yakınsama parametresi seçmek için  $U_m(x, h) = \sum_{n=0}^m u_n(x, h)$  toplamı elde edilir ki bu olası analitik çözümdür. Burada Mathematica 7.0 yazılımı ile  $u_{10}(x, \hbar)$ 'a kadar yazılımı ile hesaplatılırsa (4.25) probleminin çözüm serisinin (4.34)'deki gibi gerçek çözüme yakınsadığı görülür.

$$u(x) \approx U_{10}(x, \hbar) \quad (4.34)$$

Çözüm serimizin gerçek çözüme yakınsamasını kontrol altına almamızı sağlayan  $\hbar$ 'ın uygun aralığını bulmak için  $U'_{10}(1, \hbar)$  ve  $U''_{10}(1, \hbar)$  grafiklerini çizersek.





Şekil 4.5. Problem (4.25)'in  $h$  eğrisinin grafiği

Şekil 4.5'deki  $U'_{10}(1,h)$  ile  $U''_{10}(1,h)$  grafiklerinin paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa  $h$ 'in  $[-1.1, -0.5]$  aralığında olması gerektiği görülür.

Tablo 4.5. Problem (4.25)'in uygun  $h$  değerleri

$x_i$	$U(x_i, h)$	$h$
0	0	$h \rightarrow 1$
0.2	$2.61366 \times 10^{-12}$	$h \rightarrow -0.587984$
0.4	$1.10096 \times 10^{-11}$	$h \rightarrow -0.665407$
0.6	$3.94567 \times 10^{-10}$	$h \rightarrow -0.679427$
0.8	$7.45224 \times 10^{-9}$	$h \rightarrow -0.686608$
1	$6.15252 \times 10^{-8}$	$h \rightarrow -0.713855$

Uygun  $h$  değer Tablo 4.5'de görüldüğü gibi seçilebilecek en iyi  $h$  yakınsaklık kontrol parametresinin yaklaşık  $h = -0.650$  olduğu görülür.  $h = -0.650$  için aşağıdaki (4.35) çözüm serisi hesaplanırsa,

$$U_{10}(x) = \sum_{m=0}^{10} u_m(x) \quad (4.35)$$

ve yaklaşık çözümünün hata fonksiyonu

$$|U_{18}(x) - e^{x^2 + \sin t}| \quad (4.36)$$

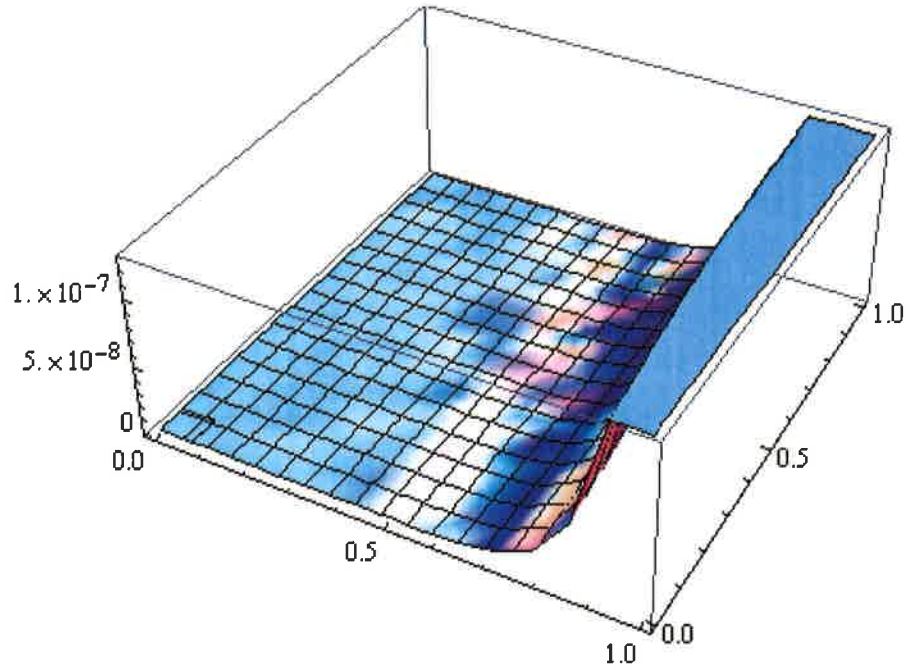
olmak üzere. Tablo 4.6'daki hata tablosu elde edilir.

Tablo 4.6. Problem (4.25) hata tablosu

$i$	$x_i$	$u(x) = e^{x^2+\sin x}$	$U_{18}(x)$ $h = -0.650$	$ U_{18}(x) - e^{x^2+\sin x} $
0	0	1.00000000	1.0000000000	0
1	0.2	1.269558663	1.269558663	$4.841279156 \times 10^{-14}$
2	0.4	1.732245151	1.732245151	$1.968480805 \times 10^{-11}$
3	0.6	2.520966787	2.520966785	$1.407825919 \times 10^{-9}$
4	0.8	3.885905727	3.885905684	$4.292518216 \times 10^{-8}$
5	1	6.305807189	6.305806379	$8.099986121 \times 10^{-7}$

hata tablosu elde edilir.

Grafik  $[0,1]$  aralığına yoğunlaştırılır ve bulduğumuz hata tablosu göz önüne alınarak aşağıdaki hata fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil 4.6. Problem (4.25)'in  $[0,1]$  aralığında hata fonksiyon grafiği

Örnek 4.4.

$$\begin{aligned} u''(x) + \frac{2}{x}u'(x) - (5 + 4x^2)u(x) &= u'(t) + (6 - 5x^2 - 4x^4) \quad , \\ u(0, t) = x^2 + (1 + x^2)e^t \quad , \quad u'(0, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

lineer olmayan Emden-Fowler denklemini alalım [26]. Bu problemin tam çözümü,

$$u(x) = x^2 + e^{x^2+t} \quad (4.38)$$

dir. Öncelikle deformasyon denklemi yazılırsa,

$$L[u_m - \chi_m u_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(u_{m-1}) \quad (4.39)$$

denklemi gereklidir. Buradan

$$N[\phi(x; q)] = \phi''(x) + \frac{2}{x}\phi'(x) - (5 + 4x^2)\phi(x) - \phi'(t) - (6 - 5x^2 - 4x^4) \quad (4.40)$$

$$R_m(u_{m-1}) = u''(x) + \frac{2}{x}u'(x) - (5 + 4x^2)u(x) - u'(t) - (6 - 5x^2 - 4x^4) = 0 \quad (4.41)$$

elde edilir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad , \quad H[x, t] = 1 \quad (4.42)$$

ve türev operatörü

$$du_m(x) = D[u_m(x), x] \quad , \quad ddu_m(x) = D[D[u_m(x), x], x] \quad (4.43)$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} u_m(x) &= \chi_m u_{m-1}(x) \\ &+ \hbar \left[ \int_0^x \left( \int_0^n (ddu_{m-1}(r) + \frac{2}{r} du_{m-1}(r) - u_{m-1}(r)(5 + 4r^2) - d_{m-1}(t)) dr \right) dn \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

$u_0(x) = x^2 + (1+x^2)e^t$  seçerek (4.44) denkleminle ardışık olarak  $u_i(x)$ ,  $i=1, 2, 3, \dots$  değerleri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u_0(x, \hbar) = x^2 + (1+x^2)e^t \quad (4.45)$$

$$u_1(x, \hbar) = -\frac{5}{6}e^t \hbar x^4 - \frac{2}{15}e^t \hbar x^6$$

$$u_2(x, \hbar) = -\frac{5}{6}e^t \hbar x^4 - \frac{25}{18}e^t \hbar^2 x^4 - \frac{2}{15}e^t \hbar x^6 - \frac{1}{50}e^t \hbar^2 x^6 + \frac{31}{420}e^t \hbar^2 x^8 \\ + \frac{4}{675}e^t \hbar^2 x^{10}$$

$$u_3(x, \hbar) = -\frac{5}{6}e^t \hbar x^4 - \frac{25}{9}e^t \hbar^2 x^4 - \frac{125}{54}e^t \hbar^3 x^4 - \frac{2}{15}e^t \hbar x^6 - \frac{1}{25}e^t \hbar^2 x^6 \\ + \frac{281e^t \hbar^3 x^6}{1125} + \frac{31}{210}e^t \hbar^2 x^8 + \frac{17309e^t \hbar^3 x^8}{88200} + \frac{8}{675}e^t \hbar^2 x^{10} \\ + \frac{2731e^t \hbar^3 x^{10}}{850500} - \frac{521e^t \hbar^3 x^{12}}{207900} - \frac{8e^t \hbar^3 x^{14}}{61425}$$

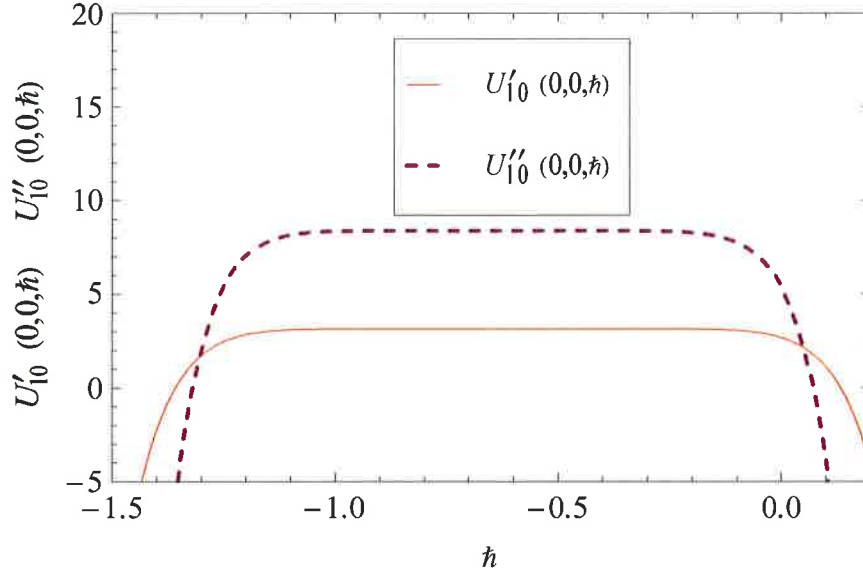
⋮

$u_n(x, \hbar)$   $n=10$ 'a kadar çözümleri bulunur.

Burada uygun bir  $\hbar$  yakınsama parametresi seçmek için  $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m u_n(x, \hbar)$  toplamı elde edilir ki, bu olası analitik çözümdür. Burada Mathematica 7.0 yazılımı ile  $u_{10}(x, \hbar)$ 'a kadar hesaplatılırsa, (4.37) probleminin çözüm serisinin (4.46)'deki gibi gerçek çözüme yakınsadığı görülür.

$$u(x) \approx U_{10}(x, \hbar) \quad (4.46)$$

Çözüm serimizin gerçek çözüme yakınsamasını kontrol altına almamızı sağlayan  $\hbar$ 'ın uygun aralığını bulmak için  $U'_{10}(1, \hbar)$  ve  $U''_{10}(1, \hbar)$  grafiklerini çizersek.



Şekil 4.7. Problem (4.37)'nin  $h$  eğrisinin grafiği

Şekil 4.7'deki  $U'_{10}(1, h)$  ile  $U''_{10}(1, h)$  grafiklerinin paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa  $h$ 'in  $[-1.1, -0.2]$  aralığında olması gerektiği görülür.

Tablo 4.7. Problem (4.37)'nin uygun  $h$  değerleri

$x_i$	$U(x_i, h)$	$h$
0	0	$h \rightarrow 1$
0.2	$1.24764 \times 10^{-13}$	$h \rightarrow -0.660941$
0.4	$7.75373 \times 10^{-10}$	$h \rightarrow -0.585402$
0.6	$2.74106 \times 10^{-9}$	$h \rightarrow -0.638201$
0.8	$6.93372 \times 10^{-9}$	$h \rightarrow -0.695888$
1	$7.36904 \times 10^{-8}$	$h \rightarrow -0.717025$

Uygun  $h$  değeri Tablo 4.7'deki görüldüğü gibi seçilebilecek en iyi  $h$  yakınsaklık kontrol parametresinin yaklaşık  $h = -0.695$  olduğu görülür.  $h = -0.695$  için (4.47) yaklaşık çözüm serisi hesaplanırsa,

$$U_{10}(x) = \sum_{m=0}^{10} u_m(x) \quad (4.47)$$

bulunur ve yaklaşık çözümünün hata fonksiyonu

$$|U_{10}(x) - x^2 - e^{x^2+t}| \quad (4.48)$$

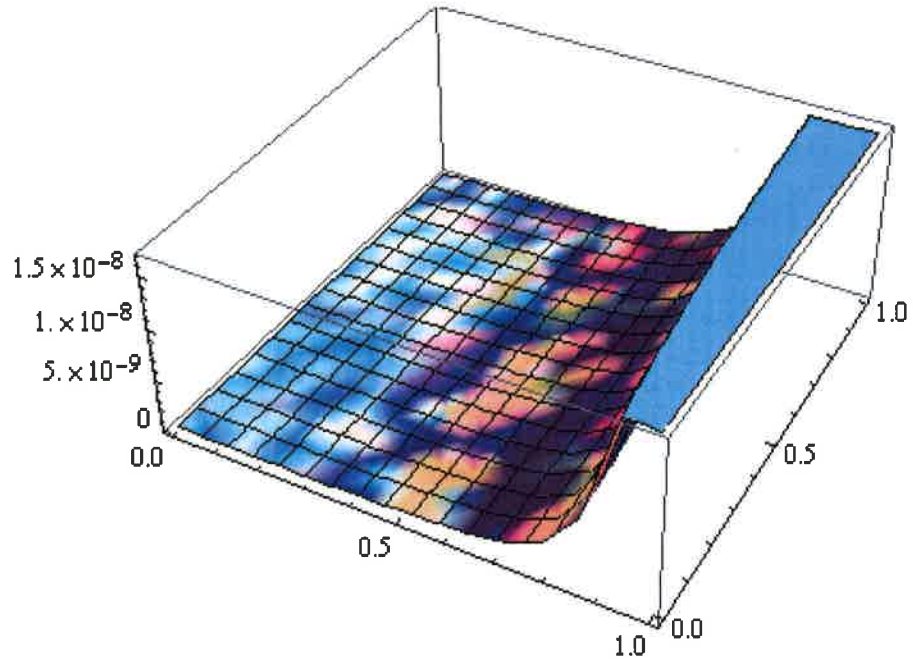
olmak üzere. Tablo 4.8'deki hata tablosu elde edilir.

Tablo 4.8. Örnek (4.4)'in hata tablosu

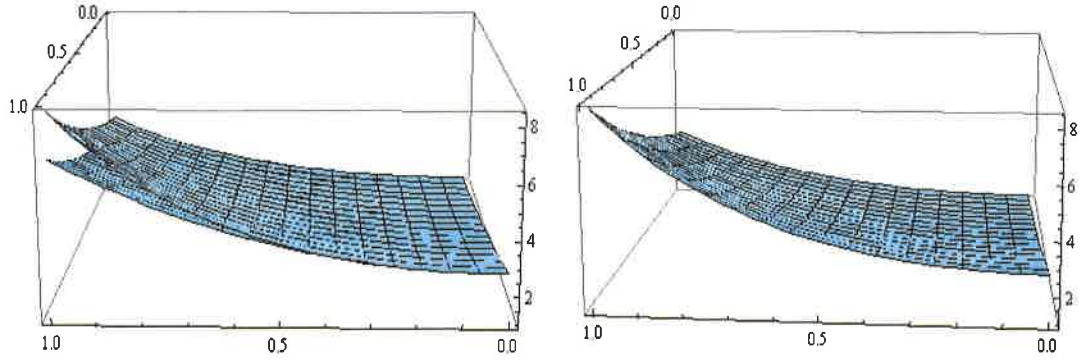
$i$	$x_i$	$u(x) = e^{x^2+\sin t}$	$U_{18}(x)$ $h = -0.650$	$ U_{18}(x) - e^{x^2+\sin t} $
0	0	1.00000000	1.000000000	0
1	0.2	1.269558663	1.269558663	$4.841279156 \times 10^{-14}$
2	0.4	1.732245151	1.732245151	$1.968480805 \times 10^{-11}$
3	0.6	2.520966787	2.520966785	$1.407825919 \times 10^{-9}$
4	0.8	3.885905727	3.885905684	$4.292518216 \times 10^{-8}$
5	1	6.305807189	6.305806379	$8.099986121 \times 10^{-7}$

hata tablosu elde edilir.

Grafik  $[0,1]$  aralığına yoğunlaştırılır ve bulduğumuz hata tablosu göz önüne alınarak  $O_y$  eksenini için aşağıdaki fark fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil 4.8. Problem (4.37)'nin  $[0,1]$  aralığında hata fonksiyon grafiği



$h = -0.01$  için fonksiyon grafikleri

$h = -0.695$  için fonksiyon grafikleri

Şekil 4.9. Problem (4.37)'nin gerçek çözüm eğrisi  $u(x) = x^2 + e^{x^2+t}$  ile  $h = -0.001$  ve  $h = -0.695$  değerleri için kıyaslama grafikleri

Örnek 4.5.

$$u''(x) + \frac{2}{x}u'(x) - (5 + 4x^2)u(x) = u''(t) + (12x - 5x^3 - 4x^5), \quad (4.49)$$

$$u(0,t) = x^3 + (1 + x^2)e^{-t}, \quad u'(0,t) = 0$$

lineer olmayan Emden-Fowler denklemini alalım [26]. Bu problemin tam çözümü,

$$u(x) = x^3 + e^{x^2-t} \quad (4.50)$$

şeklindedir. Öncelikle deformasyon denklemini yazılırsa,

$$L[u_m - \chi_m u_{m-1}] = \hbar H[x,t] R_m(u_{m-1}) \quad (4.51)$$

denklemini elde edilir. Buradan

$$N[\phi(x;q)] = \phi''(x) + \frac{2}{x}\phi'(x) - (5 + 4x^2)\phi(x) - \phi''(t) - (12x - 5x^3 - 4x^5) \quad (4.52)$$

$$R_m(u_{m-1}) = u''(x) + \frac{2}{x}u'(x) - (5 + 4x^2)u(x) - u''(t) - (12x - 5x^3 - 4x^5) = 0 \quad (4.53)$$

elde edilir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}, \quad H[x, t] = 1 \quad (4.54)$$

ve türev operatörü

$$du_m(x) = D[u_m(x), x], \quad ddu_m(x) = D[D[u_m(x), x], x] \quad (4.55)$$

olarak tanımlanırsa

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + \hbar \left[ \int_0^x \left( \int_0^n (ddu_{m-1}(r) + \frac{2}{r} du_{m-1}(r) - u_{m-1}(r)(5 + 4r^2) - d_{m-1}(t)) dn \right) dr \right] \quad (4.56)$$

$u_0(x) = x^2 + (1 + x^2)e^{-t}$  seçerek (4.56) denklemiyle ardışık olarak  $u_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  değerleri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u_0(x, \hbar) = x^3 + (1 + x^2)e^{-t} \quad (4.57)$$

$$u_1(x, \hbar) = -\frac{5}{6}e^{-t}\hbar x^4 - \frac{2}{15}e^{-t}\hbar x^6$$

$$u_2(x, \hbar) = -\frac{5}{6}e^{-t}\hbar x^4 - \frac{25}{18}e^{-t}\hbar^2 x^4 - \frac{2}{15}e^{-t}\hbar x^6 - \frac{1}{50}e^{-t}\hbar^2 x^6 \\ + \frac{31}{420}e^{-t}\hbar^2 x^8 + \frac{4}{675}e^{-t}\hbar^2 x^{10}$$

$$u_3(x, \hbar) = -\frac{5}{6}e^{-t}\hbar x^4 - \frac{25}{9}e^{-t}\hbar^2 x^4 - \frac{125}{54}e^{-t}\hbar^3 x^4 - \frac{2}{15}e^{-t}\hbar x^6 \\ - \frac{1}{25}e^{-t}\hbar^2 x^6 + \frac{281e^{-t}\hbar^3 x^6}{1125} + \frac{31}{210}e^{-t}\hbar^2 x^8 + \frac{17309e^{-t}\hbar^3 x^8}{88200} \\ + \frac{8}{675}e^{-t}\hbar^2 x^{10} + \frac{2731e^{-t}\hbar^3 x^{10}}{850500} - \frac{521e^{-t}\hbar^3 x^{12}}{207900} - \frac{8e^{-t}\hbar^3 x^{14}}{61425}$$

⋮

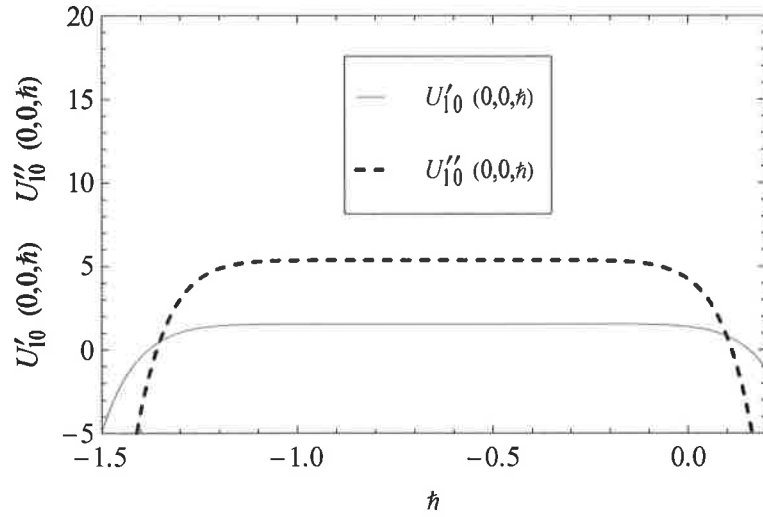
$u_n(x, \hbar)$   $n = 10$  'a kadar çözümleri bulunur.



Burada uygun bir  $\hbar$  yakınsama parametresi seçmek için  $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m u_n(x, \hbar)$  toplamı elde edilir ki, bu olası analitik çözümdür. Burada Mathematica 7.0 yazılımı ile  $u_{10}(x, \hbar)$ 'a kadar hesaplatılırsa, (4.49) probleminin çözüm serisinin (4.58)'deki gibi gerçek çözümüne yakınsadığı görülür.

$$u(x) \approx U_{10}(x, \hbar) \quad (4.58)$$

Çözüm serimizin gerçek çözüme yakınsamasını kontrol altına almamızı sağlayan  $\hbar$ 'ın uygun aralığını bulmak için  $U'_{10}(1, \hbar)$  ve  $U''_{10}(1, \hbar)$  grafiklerini çizersek.



Şekil 4.10. Problem (4.49)'un  $\hbar$  eğrisinin grafiği

Şekil 4.10'deki  $U'_{10}(1, \hbar)$  ile  $U''_{10}(1, \hbar)$  grafiklerinin paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa  $\hbar$ 'ın  $[-1.1, -0.2]$  aralığında olması gerektiği görülür.

Tablo 4.9. Problem (4.49)'un uygun  $\hbar$  değerleri

$x_i$	$U(x_i, \hbar)$	$\hbar$
0	0	$\hbar \rightarrow 1$
0.2	$3.2494 \times 10^{-14}$	$\hbar \rightarrow -0.648573$
0.4	$5.37871 \times 10^{-11}$	$\hbar \rightarrow -0.619923$
0.6	$1.2322 \times 10^{-10}$	$\hbar \rightarrow -0.678006$
0.8	$5.38958 \times 10^{-9}$	$\hbar \rightarrow -0.661419$
1	$2.26106 \times 10^{-8}$	$\hbar \rightarrow -0.688483$

Uygun  $h$  değeri Tablo 4.9'deki görüldüğü gibi seçilebilecek en iyi  $h$  yakınsaklık kontrol parametresinin yaklaşık  $h = -0.660$  olduğu görülür.  $h = -0.660$  için (4.59) yaklaşık çözüm serisi hesaplanırsa,

$$U_{10}(x) = \sum_{m=0}^{10} u_m(x) \quad (4.59)$$

bulunur ve yaklaşık çözümünün hata fonksiyonu

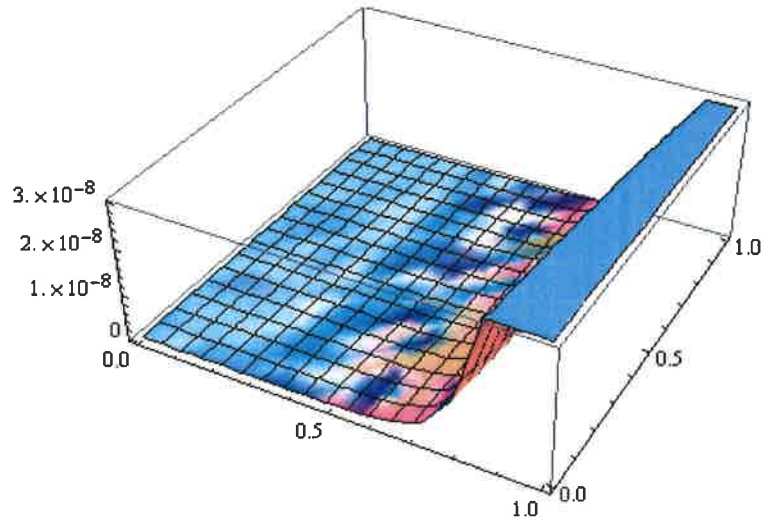
$$|U_{10}(x) - x^3 - e^{x^2-t}| \quad (4.60)$$

olmak üzere. Tablo 4.10'daki hata tablosu elde edilir.

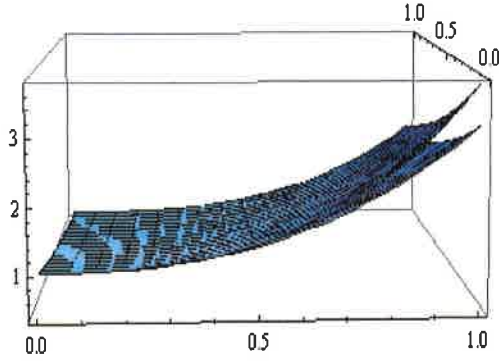
Tablo 4.10. Problem (4.49)'un hata tablosu

$i$	$x_i$	$u(x) = x^3 + e^{x^2-t}$	$U_{10}(x)$ $h = -0.660$	$ U_{10}(x) - x^3 - e^{x^2-t} $
0	0	1.000000000	1.000000000	0
1	0.2	0.8601437890	0.8601437890	$7.38298 \times 10^{-14}$
2	0.4	0.8506278611	0.8506278611	$5.36471 \times 10^{-12}$
3	0.6	1.002627861	1.002627861	$2.53923 \times 10^{-10}$
4	0.8	1.364143789	1.364143783	$5.78266 \times 10^{-9}$
5	1	2.000000000	1.999999917	$8.34598 \times 10^{-8}$

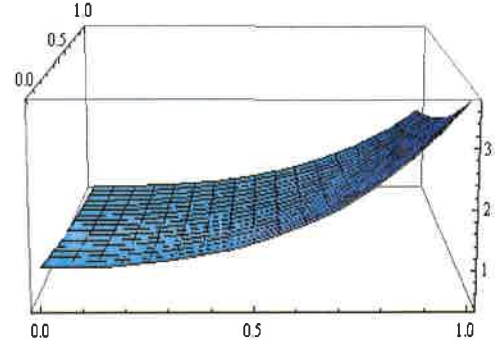
hata tablosu elde edilir. Grafik  $[0,1]$  aralığına yoğunlaştırılır ve bulduğumuz hata tablosu göz önüne alınarak  $O_y$  eksenini için aşağıdaki fark fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil 4.11. Problem (4.49)'un  $[0,1]$  aralığında hata fonksiyon grafiği



$\hbar = -0.01$  için fonksiyon grafikleri



$\hbar = -0.66$  için fonksiyon grafikleri

Şekil 4.12. Problem (4.49)'un gerçek çözüm eğrisi  $u(x) = x^3 + e^{x^2-t}$  ile  $\hbar = -0.01$  ve  $\hbar = -0.66$  değerleri için kıyaslama grafikleri

Örnek 4.6.

$$u''(x) + \frac{4}{x}u'(x) - (18 + 9x^4)u(x) = u''(t) - 2 - (18x + 9x^4)t^2, \quad (4.61)$$

$$u(0, t) = 1 + t^2 + x^3, \quad u'(0, t) = 0$$

lineer olmayan Emden-Fowler denklemini alalım [26]. Bu problemin tam çözümü,

$$u(x) = t^2 + e^{x^3} \quad (4.62)$$

dir. Öncelikle deformasyon denklemi yazılırsa,

$$L[u_m - \chi_m u_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(u_{m-1}) \quad (4.63)$$

denklemini gereklidir. Buradan

$$N[\phi(x; q)] = \phi''(x) + \frac{4}{x}\phi'(x) - (18 + 9x^4)\phi(x) - \phi''(t) + 2 + (18x + 9x^4)t^2 \quad (4.64)$$

$$R_m(u_{m-1}) = u''(x) + \frac{4}{x}u'(x) - (18 + 9x^4)u(x) - u''(t) + 2 + (18x + 9x^4)t^2 = 0 \quad (4.65)$$

elde edilir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}, \quad H[x, t] = 1 \quad (4.66)$$

ve türev operatörü

$$du_m(x) = D[u_m(x), x], \quad ddu_m(x) = D[D[u_m(x), x], x] \quad (4.67)$$

olarak tanımlanırsa

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + \hbar \left[ \int_0^x \left( ddu_{m-1}(r) + \frac{4}{r} du_{m-1}(r) - u_{m-1}(r)(18r + 9r^4) - d_{m-1}(t) \right) dr \right. \\ \left. - (1 - \chi_m)(-2 - (18r + 9r^4)t^2) \right] \quad (4.68)$$

$u_0(x) = 1 + t^2 + x^3$  seçerek (4.68) denklemiyle ardışık olarak  $u_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  değerleri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u_0(x, \hbar) = 1 + t^2 + x^3 \quad (4.69)$$

$$u_1(x, \hbar) = -\frac{9\hbar x^6}{10} - \frac{\hbar x^9}{8}$$

$$u_2(x, \hbar) = -\frac{9\hbar x^6}{10} - \frac{81\hbar^2 x^6}{50} - \frac{\hbar x^9}{8} + \frac{3\hbar^2 x^9}{80} + \frac{69\hbar^2 x^{12}}{880} + \frac{3\hbar^2 x^{15}}{560}$$

$$u_3(x, \hbar) = -\frac{9\hbar x^6}{10} - \frac{81\hbar^2 x^6}{25} - \frac{729\hbar^3 x^6}{250} - \frac{\hbar x^9}{8} + \frac{3\hbar^2 x^9}{40} + \frac{369\hbar^3 x^9}{800} \\ + \frac{69\hbar^2 x^{12}}{440} + \frac{20547\hbar^3 x^{12}}{96800} + \frac{3\hbar^2 x^{15}}{280} - \frac{621\hbar^3 x^{15}}{431200} - \frac{549\hbar^3 x^{18}}{209440} \\ - \frac{9\hbar^3 x^{21}}{78400}$$

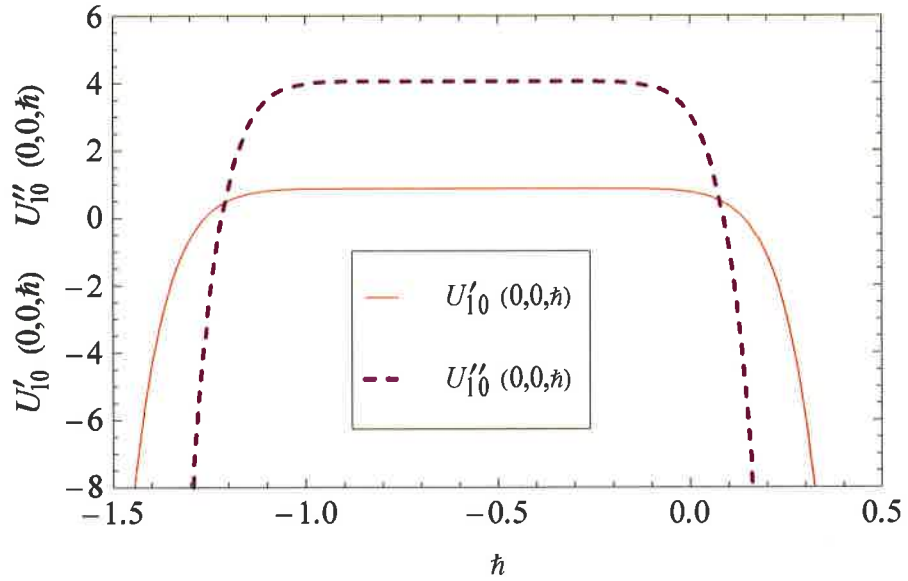
⋮

$u_n(x, \hbar)$   $n = 10$ 'a kadar çözümleri bulunur.

Burada uygun bir  $\hbar$  yakınsama parametresi seçmek için  $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m u_n(x, \hbar)$  toplamı elde edilir ki, bu olası analitik çözümdür. Burada Mathematica 7.0 yazılımı ile  $u_{10}(x, \hbar)$ 'a hesaplatılırsa, (4.61) probleminin çözüm serisinin (4.70)'deki gibi gerçek çözüme yakınsadığı görülür.

$$u(x) \approx U_{10}(x, \hbar) \quad (4.70)$$

Çözüm serimizin gerçek çözüme yakınsamasını kontrol altına almamızı sağlayan  $\hbar$ 'ın uygun aralığını bulmak için,  $U'_{10}(1, \hbar)$  ve  $U''_{10}(1, \hbar)$  grafiklerini çizersek.



Şekil 4.13. Problem (4.61)'in  $\hbar$  eğrisinin grafiği

Şekil 4.13'deki  $U'_{10}(1, \hbar)$  ile  $U''_{10}(1, \hbar)$  grafiklerinin paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa  $\hbar$ 'ın  $[-1.1, -0.1]$  aralığında olması gerektiği görülür.

Tablo 4.11. Problem (4.61)'in uygun  $\hbar$  değerleri

$x_i$	$U(x_i, \hbar)$	$\hbar$
0	0	$\hbar \rightarrow 1$
0.2	$3.42459 \times 10^{-16}$	$\hbar \rightarrow -0.594896$
0.4	$3.33782 \times 10^{-12}$	$\hbar \rightarrow -0.574069$
0.6	$6.40162 \times 10^{-11}$	$\hbar \rightarrow -0.617821$
0.8	$3.01182 \times 10^{-9}$	$\hbar \rightarrow -0.635207$
1	$6.28362 \times 10^{-8}$	$\hbar \rightarrow -0.670190$

Uygun  $h$  değeri Tablo 4.11'deki görüldüğü gibi seçilebilecek en iyi  $h$  yakınsaklık kontrol parametresinin yaklaşık  $h = -0.670$  olduğu görülür.  $h = -0.670$  için (4.71) yaklaşık çözüm serisi hesaplanırsa,

$$U_{10}(x) = \sum_{m=0}^{10} u_m(x) \quad (4.71)$$

bulunur ve yaklaşık çözümünün hata fonksiyonu

$$|U_{10}(x) - t^2 - e^{x^3}| \quad (4.72)$$

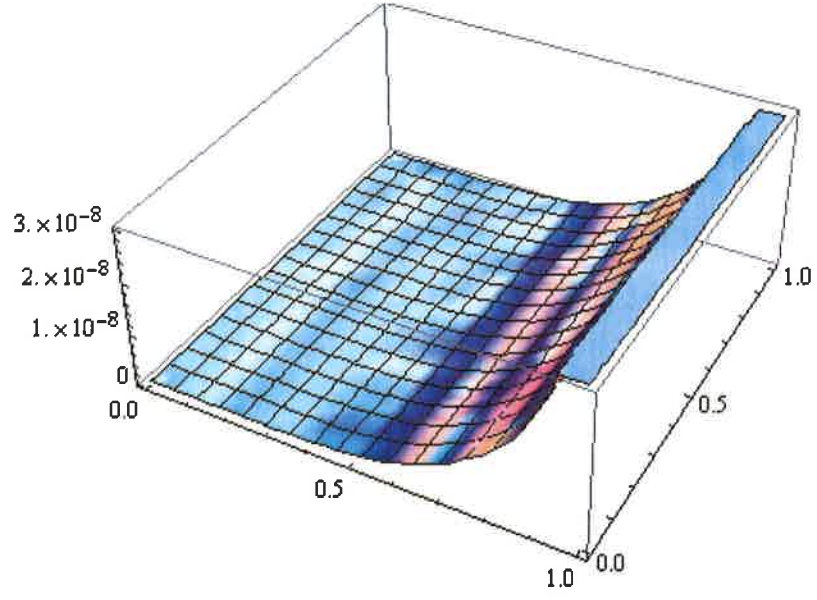
olmak üzere. Tablo 4.12'deki hata tablosu elde edilir.

Tablo 4.12. Problem (4.61)'in hata tablosu

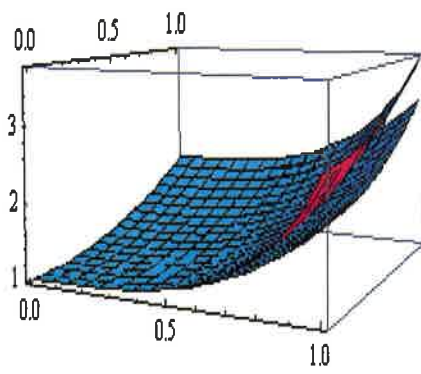
$i$	$x_i$	$u(x) = t^2 + e^{x^3}$	$U_{10}(x)$ $h = -0.670$	$ U_{10}(x) - t^2 - e^{x^3} $
0	0	1.00000000	1.000000000	0
1	0.2	1.048032086	1.048032085	$4.3745 \times 10^{-12}$
2	0.4	1.226092399	1.226092398	$2.66935 \times 10^{-10}$
3	0.6	1.601102379	1.601102376	$2.65142 \times 10^{-9}$
4	0.8	2.308625110	2.308625099	$1.13161 \times 10^{-8}$
5	1	3.718281828	3.718281766	$6.28753 \times 10^{-8}$

hata tablosu elde edilir.

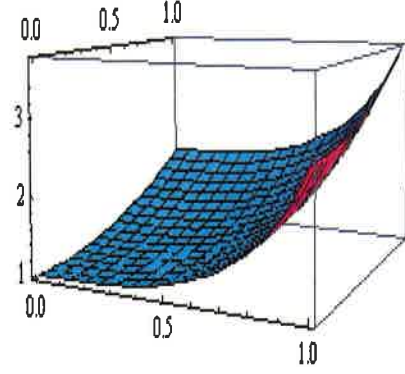
Grafik  $[0,1]$  aralığına yoğunlaştırılır ve bulduğumuz hata tablosu göz önüne alınarak  $O_y$  eksenini için aşağıdaki fark fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil 4.14. Problem (4.61)'in  $[0,1]$  aralığında hata fonksiyon grafiği



$\hbar = -0.01$  için fonksiyon grafikleri



$\hbar = -0.67$  için fonksiyon grafikleri

Şekil 4.15. Problem (4.61)'in gerçek çözüm eğrisi  $u(x) = t^2 + e^{x^3}$  ile  
 $\hbar = -0.01$  ve  $\hbar = -0.67$  değerleri için kıyaslama grafikleri

## 5.BÖLÜM

### TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada Homotopi Analiz Metodu (HAM) ile lineer ve lineer olmayan Lane-Emden ve Emden-Fowler denklemlerinin çözümleri araştırılmıştır. Homotopi Analiz Metodu bulunan sonuçlar, hata analiz tabloları verilerek gerçek çözümleri ile karşılaştırma yapılması sağlanmıştır. Tablolar incelendiğinde birbirine çok yakın sonuçlar elde edildiği ve bu metodun gerçek çözüme yaklaşık bir çözüm olduğu gözlenmiştir.

Homotopi analiz metodunda, ( $\hbar$  'nin geçerli bölgesi)  $\mathbb{R}_\hbar$  yardımıyla yani metotta  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresi verilerek metodun yakınsaklık bölgesinin genişletilmesi sağlanmıştır. Homotopi analiz metodunda  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresinin uygun seçilebilmesi durumunda yakınsama hızlandırılabilir ve analitik çözüme hızlı yakınsaması sağlanır. Bu yöntem ile başlangıç yaklaşımı ne seçilirse seçilsin analitik çözüme ulaşılmasa bile yakınsak seri çözüm bulmak mümkündür.  $\hbar$  yakınsaklık kontrol parametresinin  $-1$  ve  $H(\vec{x}, t)$  yardımcı fonksiyonunun  $1$ 'e eşit olması durumunda çözüm serisi, homotopi pertürbasyon metodunda elde edilen çözüm serisi ile çakıştığı görülmüştür. Homotopi pertürbasyon metodunun da homotopi analiz metodunun bir özel hali olduğunu iddia edilebilir.



### KAYNAKLAR

1. Liao, S.J., The Proposed Homotopy Analysis Techniques for the Solution of Nonlinear Problems, PhD Dissertation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 1992.
2. Liao, S.J., On the Relationship Between The Homotopy Analysis Method and Euler Transform, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009.
3. Liao, S.J., Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method, CRC Press, Boca Raton, Chapman and Hall, 2003.
4. Van Gorder, R.A., Vajravelu, K., On the Selection of Auxiliary Functions, Operators, and Convergence Control Parameters in the Application of the Homotopy Analysis Method to Nonlinear Differential Equations: A general approach, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 14, 4078–4089, 2009.
5. Davis, H.T., Introduction to Nonlinear Diferantial and Integral Equations Dower, New York, 1962.
6. Lane, J.H., On theoretical temperature of the sun under the hypothesis of agaseous mass maintaining its internal heat and depending on the laws of gases known to terrestrial experiment, Amer.J.Sci.Arts Ser.2,50, (1870), 57-74.
7. Chandrasekhar, S., Introduction to Study of Stellar Structure, Dover. New York 1967.
8. Singh, P., Rajesh, K.P, An analyytic algorithm of Lane-Emden type equations arising in astrophysics using modified Homotopy analysis method, 1967.
9. Wazwaz, A.M., Anew algorithm for solving differential equionLane-Emden type, Appl. Math. Comput. 118,(2201),287-310.
10. Ramos, J.I., Series approach to Lane–Emden equation and comparison with the homotopy perturbation method, Chaos Solitons and Fractals 38 (2008) 400–408.

11. Yousefi, S.A., Legendre wavelet method for solving differential equations of Lane–Emden type, *Appl. Math. Comput.* 181 (2006) 1417–1422.
12. Dehghan, M., Shakeri, F., Approximate solution of a differential equation arising in astrophysics using variational iteration method, *New Astronomy* 13,(2008),53.59.
13. Liao, S.J., *Int. J. Non-Linear Mech.* 30 (1995) 371.
14. Derman, E., Yıldızların İç Yapısı ve Evrimi, Ankara Üniversitesi, Ankara, [http://www.derman.science.ankara.edu.tr/A403/A403\\_7-TemelYapiDenklemleri-Cozumu-Yeni.ppt](http://www.derman.science.ankara.edu.tr/A403/A403_7-TemelYapiDenklemleri-Cozumu-Yeni.ppt), Aralık, 2012.
15. Düzgün, F.Z, Emden-Fowler tipli denklemler, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, 2008.
16. Wong, J. S. W., On the Generalized Emden-Fowler Equation, *SIAM Review*, Vol. 17, No. 2 (1975) 339-360.
17. Emden, R., *Gaskugeln, Anwendungen der mechanischen Wärmen-theorie auf Kosmologie und meteorologische Probleme*, B. G. Teubner, Leipzig, Germany 1907, Chap, 11.
18. Fowler, R.H., Further Studies of Emden’s and Similar Differential Equations, *Quart. J. Math.*, 2 (1931), 259-288.
19. Flores, I., A Resonance Phenomenon for Ground States of an Elliptic Equation of Emden-Fowler Type, *Journal of Differential Equations*, 198 (2004) 1-15.
20. Bataineh, A.S., Noorani, M.S.M., On a new reliable modification of homotopy analysis method, *Commun, Nonlinear Sci, Numer, Simul*, 14, 409–423, 2009.
21. Pohozaev, S. I., The Boundary Value Problem for Equation  $\Delta u = u^2$ , *Dokl Akad, Nauk SSSR*, 138, 305-308, Russian, 1961.
22. Ramnath R.V., “On a Class of Nonlinear Differential Equations of Astrophysics”, *J. of Mathematical Analysis and Applications*, Vol:35,pp. 27-47,1971.
23. Shawagfeh, N.T., , *Math. Phys*, 34, 9, 4364,1993.

24. Wazwaz, A.M., *Appl. Math. Comput.*, 166 ,638, 2005.
25. Chowdhury, M.S.H., Hashim, I., *Phys. Lett, A* 368 305, 2007.
26. Yıldırım, A., Öziş, T., Solutions of singular IVPs of Lane-Emden type by Homotopi Perturbation Method, May 2007, Izmir, Turkey.
27. He J.H., 2005, Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 6, 207-208.
28. Siddiqui, A.M., Mahmood, R., Ghorı Q.K., Thin film flow of a third grade fluid on a moving belt by He's homotopy perturbation method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7 (1): 7-14. 2006.
29. Liao, S.J., *Int. J. Non-Linear Mech*, 30 ,371, 1995.
30. Liao S.J., "Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems", *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 14, 983-997, 2009.
31. Song, H, Tao L., Homotopy analysis of 1D unsteady, nonlinear groundwater flow through porous media. *J Coastal Res* , 50, 292–295, 2007.
32. Abbasbandy, S., "The application of homotopy analysis method to solve a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation", *Physics Letters A*, 361, 478-483, 2007.
33. Liao, S.J., *Int. J. Non-Linear Mech.* 34 759, 1999.
34. Ağırseven D., Lineer ve Lineer Olmayan Problemlerin Homotopi Pertüsbasyon Metodu ve Homotopi Analiz Metodu İle Hesaplanması, Doktora Tezi, Trakya Üniversitesi, 2003.
35. He, J.H., Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, 156(2), 527-539. 2004.
36. Çavdar, S., X. Ulusal Nükleer Bilimler ve Teknolojileri Kongresi, Ankara, Ekim 6-9, 2009.
37. Dehghan, M., Shakeri, F., Inverse problem of diffusion equation by He's homotopy perturbation method, *Phys. Scripta* 75 551–556, 2007.

## ÖZGEÇMİŞ

Ergün ERDOĞAN 1978 yılında Kayseri’de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Kayseri’de tamamladı. 2000 yılında K.T.Ü Fatih Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Matematik Öğretmenliğinden mezun oldu. 2000 yılında Kayseri’de Milli Eğitimde göreve başladı. 2006 yılında Nevşehir Anadolu Öğretmen Lisesine tayin oldu. Halen aynı okulda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.

Tel no: 05055212346

e-posta: [ergunerdogan1978@hotmail.com](mailto:ergunerdogan1978@hotmail.com)