T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMLU LİNEER UZAYLARDA ROUGH YAKINSAKLIK

Tezi Hazırlayan
Ahmet ÖZBEK

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Ocak 2013
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NORMLU LİNEER UZAYLARDA ROUGH YAKINSAKLIK

Tezi Hazırlayan
Ahmet ÖZBEK

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Ocak 2013
NEVŞEHİR

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL danışmanlığında **Ahmet ÖZBEK** tarafından hazırlanan **"Normlu Lineer Uzaylarda Rough Yakınsaklık"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

04/01/2013

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Üye : Doç. Dr. Tacettin YILDIRIM

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulu 11./01/2013 tarih ve 2013../02-04 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

28../01/2013

Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve desteğini hep gördüğüm Nevşehir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nün değerli öğretim üyeleri, danışman hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL'e, sayın Prof. Dr. İhsan SOLAK'a ve sayın Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ'a teşekkür ederim.

Tüm yaşamım boyunca maddi manevi her konuda beni sonuna kadar destekleyen, her zaman içimde sevgilerini hissettiğim ve borçlarını asla ödeyemeyeceğim sevgili anneme, babama, eşim Döne ve abilerim Bülent, Ramazan'a ve hastane çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

NORMLU LİNEER UZAYLARDA ROUGH YAKINSAKLIK

Ahmet ÖZBEK
Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ocak 2013
Tez Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

ÖZET

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde yakınsaklığın tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir. İkinci bölümünde bir X normlu uzayında yakınsaklık hakkında temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümünde normlu uzaylar üzerinde rough yakınsaklığa dair temel tanım ve teoremler hakkında etraflıca bilgilere yer verilmiştir. dördüncü bölümünde Rough Cauchy dizi hakkında bilgiler sunulmuştur. Beşinci ve son bölümünde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yakınsaklık, rough yakınsaklık, rough limit kümesi, rough cauchy dizisi.

THE ROUGH CONVERGENCE ON NORMED LİNEAR SPACES

Ahmet ÖZBEK
Nevşehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M. Sc. Thesis, January 2013
Thesis Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

ABSTRACT

In the first section of this thesis, the historical progress of convergence have discussed. In the second section, the basic definitions and theorems about convergence of on X-normed space have given. In the third section, the basic definitions and theorems about rough convergence have introduced and studied detailed. In the fourth section, the information about rough Cauchy sequences have present. In the fifth and last section, conclusions and recommendations have given.

Keywords: Convergence, rough convergence, rough limit set, rough Cauchy sequence.

İÇİNDEKİLER

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^n$	:	n boyutlu Euclid uzayı
$\|\ .\ \|$	:	Norm fonksiyonu
$\|\ .\ \|_{\frac{1}{2}}$	:	Euclid norm
$\|\ .\ \|_\infty$	:	Maximum norm
$(X, \|\ .\ \|)$	:	normlu X uzayı
(x_i)	:	Genel terimi x_i olan dizi
iç(A)	:	A kümesinin iç noktalarının kümesi
$cl(A)$	:	A kümesinin kapanışı
$LIM^r x_i$	:	(x_i) dizisinin r-limit kümesi
$\bar{B}_r(x_o)$	:	x_o merkezli r yarı çaplı kapalı yuvar
çap(A)	:	A kümesinin çapı
$[\|\alpha\|]$	:	α reel sayısının tam kısmı
$\bigcap_{i\in I} A_i$	:	A_i kümelerinin kesişimi
$\bigcup_{i\in I} A_i$	:	A_i kümelerinin birleşimi
$x_i \to x_o$	:	(x_i) dizisi x_0'a yakınsak
$x_i \xrightarrow{r} x_o$	:	(x_i) dizisi x_0'a r-yakınsak

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Diziler üzerindeki yakınsaklık fikri oldukça eski olmakla birlikte bir çok matematikçinin ilgisini çekmiştir ve bu konu ile uğraşmışlardır. Klâsik yakınsaklık kavramı, ölçüm, küme ve benzeri araçlar kullanılarak bir çok farklı yakınsaklık kavramının tanımlanmasına zemin hazırlamıştır. Toplanabilme teorisinde sonsuz matrisler kullanılarak çeşitli matris metotlarına ilişkin yakınsaklık kavramları da tanımlanmıştır. Bu metotlar genelde yakınsak olmayan dizilerin belirli bir sınıfını yakınsak yapmaya yöneliktir. Bir yakınsaklık metodu tanımlanırken bu metodun regüler olması, yani limiti koruması istenir. Regülerlik özelliği, yakınsak dizilere matris dönüşümü uygulandıktan sonra elde edilen dönüşüm dizisinin limitini koruması nedeniyle büyük bir öneme sahiptir. Bu alanda ilk göze çarpan Cauchy$(1777-1855)$'nin çalışmalarıdır. Limitleme kavramını bu günkü bilinen şekli ile tanımlamasından sonra süreklilik, türev ve sürekli fonksiyonların integralini de limit kavramını kullanarak tanımlamıştır.

Diziler üzerindeki diğer yakınsaklık kavramlarından en önemlilerinden biri de 1951'de Fast ve Steinhaus tarafından tanımlanan istatistiksek yakınsaklıktır. Salat [**15**], Freedman [**8**], Connor [**6**], Fridy [**9**] istatistiksel yakınsaklığın gelişmesinde önemli katkıları olmuştur.

Ayrıca, Kostyrko et al. klâsik yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklığın bir genellemesi olan ideal yakınsaklık kavramını ortaya attı [**11**].

Lorentz, "Iraksak Seriler Teorisine bir Katkı" adlı, 1948'de yayınladığı bir makalesinde dizilerin hemen hemen yakınsaklığı tarifini verdi. Aslında matematik literatürü tarandığında bir çok yakınsaklık kavramı tarifi görülecektir.

Bu çalışmanın amacı, Phu'nun "Rough Convergence in Normed Linear Spaces" isimli makalesinde ve Burgin'in "Neoclasical Analysis" isimli kitabında bahsettiği rough yakınsaklık kavramını ele almak ve bunu adi anlamdaki yakınsaklık kavramı ile karşılaştırmaktır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde bir metrik uzayda yakınsaklıkla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. Önce bir küme üzerindeki en önemli yapılardan, lineer uzay tanımını vereceğiz.

Tanım 2.1. *X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun.*

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$

ve

$$\bullet : \mathbb{F} \times X \longrightarrow X$$

fonksiyonları her $a, b \in \mathbb{F}$ ve $x, y, z \in X$ için;

L1) $x + y = y + x$

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3) $x + \theta = x$ *olacak şekilde* $\theta \in X$ *vardır.*

L4) $\forall x \in X$ *için* $x + (-x) = \theta$ *olacak şekilde bir* $(-x) \in X$ *vardır.*

L5) $1 \bullet x = x$

L6) $a \bullet (x + y) = a \bullet x + a \bullet y$

L7) $(a + b) \bullet x = a \bullet x + a \bullet y$

L8) $a \bullet (b \bullet x) = (a \bullet b) \bullet x$

özellikleri sağlıyorsa X kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde lineer uzaydır denir [4].

Tanım 2.2. *X boş olmayan bir küme olsun $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ile tanımlı d fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için*

M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2) $d(x,y) = d(y,x)$ *(simetri özelliği)*

M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(üçgen eşitsizliği)*

şartlarını sağlıyorsa d'ye X'de bir metrik, (X,d) *ikilisine de bir metrik uzay denir* [4].

Tanım 2.3. (X,d) *mertik uzay,* $r > 0$ *olacak şekilde bir reel sayı ve* $x_0 \in X$ *ise,*

$$D(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$$

ile tanımlı $D(x_0;r)$ *kümesine* x_0 *merkezli r yarıçaplı açık yuvar,*

$$\bar{D}(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) \leq r\}$$

ile tanımlı $\bar{D}(x_0;r)$ *kümesine* x_0 *merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,*

$$S(x_0;r) = \{x \in X : d(x,x_0) = r\}$$

ile tanımlı $S(x_0;r)$ *kümesine* x_0 *merkezli r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir* [4].

Tanım 2.4. (X,d) *bir mertik uzay,* $A \subset X$ *ve* $x_0 \in A$ *olsun. Eğer* $D(x_0;r) \subset A$ *olacak şekilde pozitif bir r sayısı varsa* x_0*'a A'nın bir iç noktası denir. A'nın içi ise, A'nın tüm iç noktalarının oluşturduğu kümedir. Yaygın olarak kabul edilmiş bir gösterimi yok ise de,* A^o *yada iç(A) şeklinde gösterilir. iç(A) açık olup, A'nın ihtiva ettiği en büyük açık kümedir* [4].

Tanım 2.5. *X bir metrik uzay* $A \subset X$ *olsun. X'in (A'ya ait olabilen yada olamayan) bir* x_0 *noktası ele alalım. Eğer,* x_0*'ın her bir komşuluğu,* x_0*'dan farklı en az bir* $y \in A$ *noktası içeriyor ise, diğer bir ifade ile* $(D(x_0;r) \backslash \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ *oluyor ise* x_0 *noktasına A'nın bir yığılma noktası denir. A'nın noktalarıyla, A'nın yığılma noktalarından oluşan kümeye ise A'nın kapanışı denir.* $\bar{A}$ *ile gösterilir.* $\bar{A}$ *kümesi, A'yı içeren en küçük kapalı kümedir* [7].

Tanım 2.6. *X bir mertik uzay ve* $A \subset X$ *olsun. Her* $x \in X$ *için* $D(x;r) \subseteq A$ *olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A'ya X'in açık kümesi veya A, X'de açık denir. X'in B alt kümesinin X'deki tümleyeni yani* $B^t = X \backslash B$*, X'de açık ise B'ye kapalı küme denir* [4].

Tanım 2.7. *Bir X metrik uzayı verilmiş olsun. Eğer X'deki her dizi yakınsak bir altdiziye sahip ise X uzayına kompaktır denir. X'in bir M altkümesi, X'in bir altuzayı olarak ele alındığında kompakt oluyorsa (yani M'deki herbir dizi M'de yakınsak bir altdiziye sahipse) M'ye kompakt denir* [7].

Tanım 2.8. (x_n), (X,d) *metrik uzayında bir dizi olsun. Her* $\varepsilon > 0$ *için* $n > n_0$ *olduğunda* $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ *olacak şekilde en az bir* n_0 *sayısı varsa* (x_n) *dizisine X'de yakınsaktır ve* x_0*'a da dizinin limiti denir. Kısaca*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad veya \quad x_n \to x_0, \quad (n \to \infty)$$

şeklinde gösterilir [4].

Tanım 2.9. (x_n), *X metrik uzayında bir dizi olsun. Verilmiş bir* $\varepsilon > 0$ *sayısı için* $m,n > n_0 \in \mathbb{N}$ *olduğunda*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *sayısı var ise* (x_n) *dizisine X metrik uzayında Cauchy dizisi denir. X'deki her* (x_n) *Cauchy dizisi yakınsak ve yakınsadığı nokta x olsun.* $x \in X$ *ise* (X,d) *metrik uzayına tam metrik uzay denir* [4].

Tanım 2.10. *X kümesi* $\mathbb{F}$ *cismi üzerinde lineer uzay olsun.* $\| \, . \, \| : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu,*

N1) $\| x \| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$

N2) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|, \ (\alpha \in \mathbb{F})$

N3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

şartlarını sağlıyorsa $\| \, . \, \|$ *fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. Normlu uzaylar genellikle* $(X, \| \, . \, \|)$ *şeklinde gösterilir. Lineer uzay üzerinde bir norm tanımlanmış ise bu uzaya normlu lineer uzay denir. X üzerindeki bir norm,*

$$\forall x,y \in X \quad için \quad d(x,y) = \| x - y \|$$

ile verilen bir d metriği tanımlar ve bu metrik norm tarafından üretilen metrik olarak adlandırılır [4].

Örnek 2.1. *n-boyutlu reel uzay $\mathbb{R}^n$ (Euclid uzayı) üzerinde tanımlanan*

$$\| x \|_{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

dönüşümü de bir normdur ve $(\mathbb{R}^n, \| \, . \, \|_{\frac{1}{2}})$ normlu bir uzaydır [4].

Örnek 2.2. $\mathbb{R}^n$ *Euclid uzayı üzerinde tanımlanan*

$$\| x \|_{\infty} = \max \{ |x_i| : i \in \mathbb{N} \}$$

dönüşümü de bir normdur ve $(\mathbb{R}^n, \| \, . \, \|_{\infty})$ normlu bir uzaydır [4].

Tanım 2.11. *X normlu bir uzay ve (x_n) de X'de bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\| x_n \| \leq K$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ sayısı varsa (x_n)'ye sınırlı dizi denir* [4].

Tanım 2.12. *$(X, \| \, . \, \|)$ normlu uzay, $r > 0$ ve $x_0 \in X$ ise,*

$$D(x_0; r) = \{ x \in X : \| x - x_0 \| < r \}$$

ile tanımlı $D(x_0; r)$ kümesine X normlu uzayında açık yuvar,

$$\bar{D}(x_0; r) = \{ x \in X : \| x - x_0 \| \leq r \}$$

ile tanımlı $\bar{D}(x_0; r)$ kümesine X normlu uzayında kapalı yuvar,

$$S(x_0; r) = \{ x \in X : \| x - x_0 \| = r \}$$

ile tanımlı $S(x_0; r)$ kümesine X normlu uzayında yuvar yüzeyi denir [4].

Tanım 2.13. *$(X, \| \, . \, \|)$ normlu uzay ve $A \subseteq X$ olsun.*

$$d(A) = \sup \{ \| x - y \| : x, y \in A \} < \infty$$

ise A'ya X'de sınırlı küme denir [4].

Tanım 2.14. *Normlu bir X uzayında (x_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer X uzayı,*

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x_0 \| = 0$$

olacak şekilde bir x_0 elemanı içeriyorsa, (x_n) dizisi yakınsaktır denir. Bu durum $x_n \to x_0$ olarak gösterilir ve x_0'a (x_n) dizisinin limiti adı verilir.

Tanımı bir başka ifade ile $\forall\varepsilon > 0$ *için* $\exists n_0 \in N$ *öyleki* $\exists n > n_0$ *için* $\| x_n - x_0 \| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $x_n \to x_0$ *şeklinde yazabiliriz* [4].

Tanım 2.15. (x_n)*, normlu X uzayında bir dizisi olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *sayısı için,* $m,n > N$ *olduğunda,*

$$\| x_m - x_n \| < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir N doğal sayısı varsa (x_n) *dizisine X normlu uzayında Caucyh dizisi denir* [7].

Teorem 2.1. *Bir X normlu uzayının sonlu boyutlu her Y alt uzayı tamdır. Özel olarak, sonlu boyutlu her normlu uzay tamdır* [4].

Teorem 2.2. *Normlu bir uzayın sonlu boyutlu her alt uzayı kapalıdır* [4].

Lemma 2.1. *Bir metrik uzayın kompakt altkümesi kapalı ve sınırlıdır* [7].

Teorem 2.3. *X sonlu boyutlu normlu bir uzay ve* $M \subset X$ *olsun. X'in kompakt olması için gerek ve yeter şart M'ini kapalı ve sınırlı olmasıdır* [7].

Teorem 2.4. *Normlu bir X uzayında kapalı* $M = \{x : \| x \| \leq 1\}$ *birim yuvarı kompakt ise X sonlu boyutludur* [7].

Tanım 2.16. *X lineer uzay olsun.* $A \subseteq X$ *ve keyfi* $x,y \in A$ *için,*

$$B = \{z \in X : z = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks denir [4].

Tanım 2.17. *X lineer uzay olsun. Her* $x,y \in X$*,* $x \neq y$ *için* $\| x \| = 1$ *ve* $\| y \| = 1$ *iken*

$$\| x + y \| < 2$$

ise X uzayına kesin konveks lineer uzay denir [10].

Tanım 2.18. *X boş olmayan bir küme ve X'in alt kümelerinden oluşan H ailesi verilmiş olsun. Eğer H ailesinin elemanlarının her sonlu keşimi boştan faklı ise, yani*

$$\forall A_1, A_2, ..., A_n \in H \quad \text{için} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$$

ise H ailesine sonlu kesişim özelliğini sağlıyor denir [16].

BÖLÜM 3

NORMLU UZAYLARDA ROUGH YAKINSAKLIK

3.1. Giriş

Bu bölümde rough yakınsaklık hakkında temel bilgilere yer verilecektir.

Tanım 3.1. *(x_i), $(X, ||.||)$ normlu lineer uzayında bir dizi ve r negatif olmayan bir reel sayı olsun. (x_i) dizisine x_0' a rough yakınsak denir. Eğer,*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists i_\varepsilon \in \mathbb{N} : i \geq i_\varepsilon \Rightarrow \| x_i - x_0 \| < \varepsilon + r \quad ise. \tag{3.1}$$

Veya (**3**.1)'e denk olarak,

$$\lim\sup \| x_i - x_0 \| \leq r \tag{3.2}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Eğer (x_i) dizisi bir x_0 noktasına rough yakınsak ise $x_i \xrightarrow{r} x_0 \quad (i \to \infty)$ veya $r - \lim x_i = x_0$ biçiminde gösterilir. r sayısı (x_i) dizisinin yakınsaklık derecesidir. $r = 0$ için klâsik anlamda (yani norm) yakınsaklığı elde ederiz. $r > 0$ olacak şekilde bir reel sayı için (x_i) dizisi (**3**.1) sağlıyorsa r-limit noktası birden fazladır. Böylece (x_i) dizisinin r-limit kümesini $LIM^r x_i$ biçiminde yazıp aşağıdaki şekilde verebiliriz,

$$LIM^r x_i = \{x_0 \in X : x_i \xrightarrow{r} x_0\}. \tag{3.3}$$

$LIM^r x_i \neq \emptyset$ ise (x_i) dizisinin rough yakınsak olduğu, $LIM^r x_i = \emptyset$ ise (x_i) dizisinin rough yakınsak olmadığı açıktır [**12**].

Örnek 3.1. *$X = \mathbb{R}$ olsun. (x_i) dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım,*

$$x_i = \begin{cases} 1 & , \quad i \text{ çift ise} \\ 0 & , \quad i \text{ tek ise} \end{cases}, \ (i \in \mathbb{N})$$

(x_i) *dizisi klâsik anlamda yakınsak değildir, fakat* $r = 0.5$ *için* $x_i \xrightarrow{r} 0.5$ *dir. Tanım* ***3**.1'den* (x_i) *dizisinin* $r - limit$ *kümesini yazacak olursak,*

$$\| x_i - x_0 \| = | x_i - x_0 | < r + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -r - \varepsilon < x_i - x_0 < r + \varepsilon \qquad (\mathbf{3}.4)$$

burada (x_i) *dizisinin, i tek veya çift iken aldığı değerler ile iki durum söz konusudur.*

1.Durum; i çift ise $(x_i) = (1, 1, ..., 1, ...)$ *olur. Böylece* $(\mathbf{3}.4)$*'den*

$$-r - \varepsilon < 1 - x_0 < r + \varepsilon$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$1 - r - \varepsilon < x_0 < 1 + r + \varepsilon$$

elde edilir. Buradan da

$$x_0 \in [1 - r, 1 + r] \qquad (\mathbf{3}.5)$$

ifadesine ulaşırız.

2.Durum; i tek ise $(x_i) = (0, 0, ..., 0, ...)$ *olur. Bu durumda yine* $(\mathbf{3}.4)$*'den*

$$-r - \varepsilon < 0 - x_0 < r + \varepsilon$$

eşitsizliğine ve buradan

$$-r - \varepsilon < x_0 < +r + \varepsilon$$

ifadesine ulaşırız. Bu da

$$x_0 \in [-r, r] \qquad (\mathbf{3}.6)$$

demektir. $r < 0.5$ *için* $(\mathbf{3}.5)$ *ve* $(\mathbf{3}.6)$*'dan ortak çözüm yaparak bir* x_0 *noktası bulamayız. Fakat* $r \geq 0.5$ *için* $(\mathbf{3}.5)$ *ve* $(\mathbf{3}.6)$*'nın ortak çözümünden*

$$x_0 \in [1 - r, r]$$

bulunur. Dolayısı ile

$$LIM^r x_i = \begin{cases} \emptyset & , \quad r < 0.5 \quad ise, \\ [1 - r, r] & , \quad r \geq 0.5 \quad ise \end{cases}$$

elde edilir.

Örnek 3.2. *Reel terimli ve genel terimi $x_i = (-1)^i$ olan (x_i) dizisinin klâsik anlamda yakınsak olmadığını biliyoruz. Fakat (x_i) dizisi rough yakınsaktır. $r - limx_i$ kümesi,*

$$LIM^r x_i = \begin{cases} \emptyset & , \quad r < 1 \quad ise, \\ [1-r, r-1] & , \quad r \geq 1 \quad ise \end{cases}$$

ile verilir.

Örnek 3.3. *Reel terimli ve genel terimi $x_i = (1 + \frac{1}{i})$ olan (x_i) dizisi hem klâsik anlamda yakınsak hemde rough yakınsaktır. (x_i) dizisi için $r - limit$ kümesi,*

$$LIM^r x_i = [1-r, r+1]$$

şeklindedir.

Sonuç olarak yukarıdaki örnekler dikkatlice incelendiğinde $X = \mathbb{R}$ için bir (x_i) dizisinin $r - limit$ kümesi olan $LIM^r x_i$ boş değil ise

$$LIM^r x_i = [\limsup x_i - r, \liminf x_i + r]$$

dir [2].

X'in bir alt kümesi olan S kümesinin $r - limit$ noktalarının kümesini aşağıdaki gibi tanımlaya biliriz,

$$LIM^{S,r} x_i = \{x_0 \in S : x_i \xrightarrow{r} x_0\}. \tag{3.7}$$

Açıkça $LIM^{X,r} x_i = LIM^r x_i$ ve $LIM^{S,r} x_i = S \cap LIM^r x_i$ olduğunu söyleye biliriz. Örnek **3**.1'deki (x_i) dizisini S kümesi olarak alırsak $LIM^{S,r} x_i$ kümesi,

$$LIM^{(x_i),r} x_i = \begin{cases} \emptyset & , \quad r < 1 \quad \text{ise} \\ \{x_i : i \geq 3\} & , \quad r \geq 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olduğu görülür [12].

Basitlik için burdan sonraki bölümlerde $X = \mathbb{R}^n$ kabul edeceğiz.

3.2. Rough Yakınsaklığın Temel Özellikleri

Klâsik yakınsaklıktaki bazı özellikler rough yakınsaklık ile benzerlik gösterebilir. Fakat farklı oldukları taraflar da vardır. Örneğin, klâsik anlamda yakınsak dizinin limiti bir tek reel sayı (tek nokta kümesi) iken, rough yakınsaklıkta ise bir kümedir $(r > 0)$.

Teorem 3.1. *Bir (x_i) dizisinin $r-limit$ kümesinin çapı $2r$ den büyük değildir. Genel olarak en küçük sınırı yoktur* [**12**].

İspat. *İspat için*

$$çap(LIM^r x_i) = \sup\{\| y - z \| : y, z \in LIM^r x_i\} \leq 2r \tag{3.8}$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. Kabul edelim ki aksine $çap(LIM^r x_i) > 2r$ olsun.

*$d = \| y - z \| > 2r$ sağlayan $y, z \in LIM^r x_i$ mevcuttur. Keyfi $\varepsilon \in (0, d/2 - r)$ için, (**3**.1) ve (**3**.3)'ten anlaşılacağı gibi $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyleki,*

$$i > i_\varepsilon \quad için \quad \| x_i - y \| < r + \varepsilon \quad ve \quad \| x_i - z \| < r + \varepsilon \; dur.$$

Bu durumda,

$$\| y - z \| \leq \| x_i - y \| + \| x_i - z \| < 2(r + \varepsilon) < 2r + 2(d/2 - r) = d$$

*elde edilir ve bu $d = \| y - z \|$ olması ile çelişir. Bu nedenle (**3**.8) doğrudur.*

En küçük üst sınırının olmadığını göstermek için $lim x_i = x_0$ olacak şekilde yakınsak bir (x_i) dizisini göz önüne alalım. O zaman,

$$\bar{B}_r(x_0) = \{y \in X : \| y - x_0 \| \leq r\},$$

kümesi

$$y \in \bar{B}_r(x_0) \quad için \quad \| x_i - y \| \leq \| x_i - x_0 \| + \| x_0 - y \| \leq \| x_i - x_0 \| + r,$$

*(**3**.1) ve (**3**.3)'ten $LIM^r x_i = \bar{B}_r(x_0)$ olduğu görülür. $çap(\bar{B}_r(x_0)) = 2r$ olduğundan bu genel olarak $r-limit$ kümesinin çapının $2r$ üst sınırının azalmayacağını gösterir.*

Açıkça limitin (adi yakınsaklıkta) tekliği $LIM^r x_i$ kümesinin özel bir durumudur. Çünkü $r = 0$ ise çap$(LIM^r x_i) = 2r = 0$ dır. $LIM^r x_i$ kümesi ya boştur yada tek nokta kümesidir.

Teorem 3.2. *Reel sayıların bir (x_i) dizisi sınırlıdır$\Leftrightarrow$ $r \geq 0$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{R}$ vardır öyleki $LIM^r x_i \neq \emptyset$ dir. Her $r > 0$ için sınırlı bir (x_i) dizisi $LIM^{(x_{i_j}),r} x_{i_j} \neq \emptyset$ ile bir (x_{i_j}) alt dizisini her zaman içerir* [12].

İspat. *Kabul edelim ki (x_i) dizisi sınırlı olsun $s = \sup\{\| x_i \| : i \in \mathbb{N}\} < \infty$. Buradan $LIM^s x_i$, $(X, \| \, . \, \|)$ uzayının orjinini içerir bu da $LIM^r x_i \neq \emptyset$ olduğu anlamına gelir. Diğer yandan eğer $r \geq 0$ için $LIM^r x_i \neq \emptyset$ ise (x_i) dizisinin sonlu sayıdaki elemanı r yarı çaplı açık yuvarın dışında kalır. Bu (x_i)'nin yakınsak dolayısı ile sınırlı olması demektir.*

Sonlu boyutlu normlu uzayda sınırlı (x_i) dizisi, yakınsak bir (x_{i_j}) alt dizisini her zaman içerir. (x_i) dizisinin limit noktası x_0 olsun. $LIM^r x_i = \bar{B}_r(x_0)$ ve $r > 0$ için

$$LIM^{(x_{i_j}),r} x_{i_j} = \{x_{i_j} : \| x_0 - x_{i_j} \| \leq r\} = \emptyset.$$

Teorem **3**.2'de ikinci kısım (x_{i_j}) alt dizisinin r-limitinde bulunan noktalar ile ilgilidir. Sınırlı S kümesinde bulunan bir dizi S'nin herhangi bir noktasında (keyfi bir $r > 0$) rough yakınsak bir alt diziye her zaman sahiptir. Burada S kümesinin kapalılığına klâsik yakınsaklık için ihtiyaç yoktur.

Teorem 3.3. *Reel sayıların bir (x_i) dizisinin alt dizisi (x_i') ise $LIM^r x_i \subseteq LIM^r x_i'$ dir* [12].

İspat. *(x_i) dizisinin alt dizisi (x_i') olsun. (x_i) dizisinin $r-limit$ kümesi $LIM^r x_i = [\limsup x_i - r, \liminf x_i + r]$ dir.*

$$\liminf x_i \leq \liminf x_i' \leq \limsup x_i' \leq \limsup x_i$$

olduğu açıktır. (x_i') alt dizisini $r - limit$ kümesi $LIM^r x_i' = [\limsup x_i' - r, \liminf x_i' + r]$ olduğundan

$$LIM^r x_i = [\limsup x_i - r, \liminf x_i + r] \subseteq [\limsup x_i' - r, \liminf x_i' + r] = LIM^r x_i' \; dir.$$

İspat $X = \mathbb{R}$ için bu şekilde yapılabilir.

Teorem 3.4. *(x_i) reel sayıların bir dizisi ve (x_i') de (x_i)'nin alt dizisi olsun. O zaman*

$$çap(LIM^r x_i) \leq çap(LIM^r x_i')$$

dir.

İspat. *İspatı bir dizinin rough limit tanımı ve bir kümenin çap tanımından açıktır.*

Örnek 3.4. *Örnek 3.2'de verilen (x_i) dizisini ele alırsak, $x_i' = (1, 1, ..., 1, ...)$ dizisi (x_i) dizisinin alt dizisidir. (x_i) dizisinin $r-$limit kümesi $r \geq 1$ için $LIM^r x_i = [1-r, r-1]$ idi, (x_i') alt dizisinin $r-$limit kümesi ise $LIM^r x_i' = [1-r, r+1]$ dir. $LIM^r x_i \subseteq LIM^r x_i'$ olduğu açıktır.*

Teorem 3.5. *Her $r \geq 0$ için reel sayıların keyfi (x_i) dizisinin $r-$limit kümesi $LIM^r x_i$ kapalı kümedir* [12].

İspat. *(y_j) dizisi $LIM^r x_i$'de keyfi bir dizi ve yakınsadığı nokta y_0 olsun. Her $\varepsilon > 0$ için tanımdan $j_{\frac{\varepsilon}{2}}$ ve $i_{\frac{\varepsilon}{2}}$ vardır öyleki, $i > i_{\frac{\varepsilon}{2}}$ olduğunda $\| y_{j_{\frac{\varepsilon}{2}}} - y_0 \| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\| x_i - y_{j_{\frac{\varepsilon}{2}}} \| < r + \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Sonuç olarak $i > i_{\frac{\varepsilon}{2}}$ ise*

$$\| x_i - y_0 \| \leq \| x_i - y_{j_{\frac{\varepsilon}{2}}} \| + \| y_{j_{\frac{\varepsilon}{2}}} - y_0 \| < r + \varepsilon \text{ dur.}$$

Bu da $y_0 \in LIM^r x_i$ anlamına gelir. Bu nedenle $LIM^r x_i$ kapalıdır.

Teorem 3.6.

(a) $y_0 \in LIM^{r_0} x_i$ ve $y_1 \in LIM^{r_1} x_i$ ise $\lambda \in [0, 1]$ için

$$y_\lambda = (1-\lambda) y_0 + \lambda y_1 \in LIM^{(1-\lambda) r_0 + \lambda r_1} x_i \text{ dir.} \tag{3.9}$$

(b) $LIM^r x_i$ konvekstir. Eğer $(X, \| \, . \, \|)$ sonlu boyutlu kesin konveks uzay (yani kapalı birim yuvarı kesin konveks) ise $LIM^r x_i$ kesin konvekstir. Yani $y_0, y_1 \in LIM^r x_i$ ve $y_0 \neq y_1$ olduğunda

$$\forall \lambda \in (0, 1) \quad \text{için} \quad y_\lambda \in iç(LIM^r x_i)$$

dir [12].

İspat.

(a) Tanım 3.1'den $\forall \varepsilon > 0$ *için* $\exists i_\varepsilon$ *vardır öyleki* $i \geq i_\varepsilon$ *olduğunda* $\| x_i - y_0 \| < r_0 + \varepsilon$ *ve* $\| x_i - y_1 \| < r_1 + \varepsilon$ *eşitsizlikleri sağlanır.*

$$\begin{aligned} \| x_i - y_\lambda \| &\leq (1-\lambda) \| x_i - y_0 \| + \lambda \| x_i - y_1 \| \\ &< (1-\lambda)(r_0+\varepsilon) + \lambda(r_1+\varepsilon) \\ &= (1-\lambda)r_0 + \lambda r_1 + \varepsilon, \end{aligned}$$

olur. Bu ise $y_\lambda \in LIM^{(1-\lambda)r_0+\lambda r_1} x_i$ *demektir.*

(b) *Özellikle* $r = r_0 = r_1$ *için* (a)*'dan dolayı* $LIM^r x_i$ *konvekstir.* $(X, \| \,.\, \|)$ *uzayının kesin konveks olduğunu kabul edelim,* $LIM^r x_i$*'nin kesin konveks olduğunu kanıtlamak için,* $y_0, y_1 \in LIM^r x_i$ *ve* $y_0 \neq y_1$ *olduğunda*

$$y_{0.5} = \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \in iç(LIM^r x_i)$$

olduğunu göstermeliyiz. Çünkü her y_λ *için,* $0 < \lambda < 1$, $y_0 \neq y_1$ *ve* $y_{0.5} = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)$ *sağlayan* $y_0, y_1 \in LIM^r x_i$ *vardır.*

(x_i) *dizisinin yığılma noktalarının kümesi C olsun. C kapalıdır. Ayrıca X normlu uzayı sonlu boyutlu ve* (x_i) *dizisi sınırlı olduğundan (*$LIM^r x_i \neq \emptyset$*), C boştan farklı ve sınırlıdır.*

$\| \bar{c} - y_{0.5} \| = \max \| c - y_{0.5} \|$ *sağlayan* $\bar{c} \in C$ *vardır.* $y_0, y_1 \in LIM^r x_i$*'den anlaşılır ki,*

$$\| \bar{c} - y_0 \| \leq r \quad ve \quad \| \bar{c} - y_1 \| \leq r\,.$$

X uzayı kesin konveks olduğundan,

$$\| c - y_{0.5} \| = \| 0.5(c - y_0) + 0.5(c - y_1) \| < \max\{ \| c - y_0 \|, \| c - y_1 \| \} \leq r$$

eşitsizliği yazılabilir. $\sigma = r - \| \bar{c} - y_{0.5} \| > 0$ *olsun. Şimdi her* $c \in C$ *ve her* $y \in B_\sigma(y_{0.5})$ *için,*

$$\| c - y \| \leq \| c - y_{0.5} \| + \| y_{0.5} - y \| \leq \| \bar{c} - y_{0.5} \| + \sigma = r,$$

buradan $y \in LIM^r x_i$ *dir. Bu da* $y_{0.5}$*'in* $LIM^r x_i$*'nin iç noktası olduğu anlamına gelir.* $LIM^r x_i$ *kesin konvekstir.*

3.3. Rough Yakınsaklığın Diğer Yakınsaklıklarla İlişkisi

Teorem 3.7. *$r_1 \geq 0$ ve $r_2 > 0$ reel sayıları verilsin. X normlu uzayında bir (x_i) dizisi x_0'a (r_1+r_2)-yakınsaktır $\Leftrightarrow$ X normlu uzayında bir (y_i) dizisi vardır öyleki,*

$$y_i \xrightarrow{r_1} x_0 \quad ve \quad \| x_i - y_i \| \leq r_2, \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{3.10}$$

dır [**12**].

İspat. *Kabul edelim ki (3.10) sağlansın. O zaman her $\varepsilon > 0$ için $\exists\, i_\varepsilon$ vardır öyleki,*

$$i \geq i_\varepsilon \quad için \quad \| y_i - x_0 \| < r_1 + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. $\| x_i - y_i \| \leq r_2$ olduğundan

$$i \geq i_\varepsilon \quad ise \quad \| x_i - x_0 \| \leq \| x_i - y_i \| + \| y_i - x_0 \| < r_1 + r_2 + \varepsilon$$

yazabiliriz. Bu ise (x_i) dizisinin x_0'a (r_1+r_2)-yakınsak olması demektir.

Tersine kabul edelimki (x_i) dizisi x_0'a (r_1+r_2)-yakınsak olsun. Bir (y_i) dizisini

$$y_i = \begin{cases} x_0 & , \quad \| x_i - x_0 \| \leq r_2 \quad ise \\ x_i + r_2 \frac{x_0 - x_i}{\| x_0 - x_i \|} & , \quad \| x_i - x_0 \| > r_2 \quad ise \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Dolayısı ile

$$\| y_i - x_0 \| = \begin{cases} 0 & , \quad \| x_i - x_0 \| \leq r_2 \quad ise \\ \| x_i - x_0 \| - r_2 & , \quad \| x_i - x_0 \| > r_2 \quad ise \end{cases}$$

ve

$$i \in \mathbb{N} \quad için \quad \| x_i - y_i \| \leq r_2$$

olur. (3.2)'den, $x_0 \in LIM^{r_1+r_2} x_i$ olduğunda

$$\limsup \| x_i - x_0 \| \leq r_1 + r_2$$

eşitsizliği sağlanacağından

$$\limsup \| y_i - x_0 \| \leq r_1$$

eşitsizliğide geçerlidir. Bu ise $y_i \xrightarrow{r_1} x_0$ anlamına gelir.

$r_1 = 0$ ve $r_2 = r > 0$ için yukarıdaki sonuç bize, (x_i) dizisi x_0'a r-yakınsaktır ancak ve ancak bir (y_i) dizisi vardır öyleki

$$y_i \xrightarrow{r} x_0 \quad \text{ve} \quad \| x_i - y_i \| \leq r,\ (i \in \mathbb{N})$$

özel durumunu verir.

Buradan şunlar yazılabilir: Eğer (x_i) dizisi x_0'a r-yakınsak ise bu taktirde (x_i)'ye yakın (veya (x_i)'nin elemanları alınarak oluşturulan) bir (y_i) dizisi vardır ve bu (y_i) dizisi klâsik anlamda x_0'a yakınsaktır.

Teorem 3.8. *(x_i) dizisi, $(\mathbb{R}^n, \| \,.\, \|)$'de bir dizi ve x_0'a yakınsak olsun. $x = (x^1, x^2, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$ için, $[|x|] = ([|x^1|], [|x^2|], ..., [|x^n|])$ şeklinde tanımlansın,*

(a) *$\| \,.\, \|_\infty$ maximum norm ise,*

$$x_0 \in LIM^r [|x_i|] \quad ve \quad LIM^{0.5}[|x_i|] \neq \emptyset \ dir.$$

(b) *$\| \,.\, \|_{\frac{1}{2}}$ Euclidean norm ise,*

$$x_0 \in LIM^{\sqrt{n}} [|x_i|] \quad ve \quad LIM^{0.5\sqrt{n}}[|x_i|] \neq \emptyset \ dir.$$

Burada $[|\alpha|]$, α reel sayısının tam kısmıdır [**12**].

İspat. *$\forall\, i, n \in \mathbb{N}$ ve $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ için $0 \leq x_i^j - [|x_i^j|] < 1$ olduğundan,*

$$\| x_i - [|x_i|] \| < \begin{cases} 1 & , \ \| \,.\, \|_\infty \ \textit{maximum norm ise} \\ \sqrt{n} & , \ \| \,.\, \|_{\frac{1}{2}} \ \textit{Euclidean norm ise,} \end{cases}$$

*eşitsizliği yazılabilir. Dolasıyla, Teorem **3**.7'den görülür ki*

$$r = \begin{cases} 1 & , \ \| \,.\, \|_\infty \ \textit{maximum norm} \\ \sqrt{n} & , \ \| \,.\, \|_{\frac{1}{2}} \ \textit{Euclidean norm}, \end{cases} \quad ise \quad x_0 \in LIM^r x_i \ \ dir.$$

Kabul edelim ki $\tilde{x_0} = [|x_0|] - (0.5, 0.5, ..., 0.5)$ olsun. $(x_i) \to x_0$ $(i \to \infty)$ olduğundan, bir i_ε doğal sayısı vardır öyleki

$$i \geq i_0 \quad kaldığında, \quad j \in \{1, 2, ..., n\} \quad için \quad [|x_0^j|] - 1 < x_i^j < [|x_0^j|] + 1$$

ve $[|x_i^j|] \in \{[|x_0^j|]-1, [|x_0^j|]\}$ *dır. Dolayısı ile*

$$i \geq i_0, \quad j \in \{1,2,...,n\} \quad \text{için} \quad |[|x_i^j|] - \tilde{x_0}^j| = 0.5$$

olup buradan

$$i \geq i_0 \quad \text{için} \quad \| \, [|x_i|] - \tilde{x_0} \, \|_\infty = 0.5 \quad \text{ve} \quad \| \, [|x_i|] - \tilde{x_0} \, \|_{\frac{1}{2}} = 0.5\sqrt{n}$$

elde edilir. Bunun anlamı Tanım **3**.*1'den, norm maximum norm ise* $r = 0.5$ *için* $\tilde{x_0} \in LIM^r[|x_i|]$, *norm Euclidean norm ise* $r = 0.5\sqrt{n}$ *için* $\tilde{x_0} \in LIM^r[|x_i|]$ *dir.*

Bu teoremdeki bütün r parametreleri uygun değerler olarak seçilmiştir. Bunu daha iyi görmek için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 3.5. $\mathbb{R}^n$*'de bir dizi* $x_i^1 = x_i^2 = ... = x_i^n = \frac{(-1)^i}{i}$ *şeklinde tanımlansın.* $x_i = (x_i^1, x_i^2, ..., x_i^n)$ *iken* $x_0 = (0,0,...,0)$*'a yakınsar ve*

$$[|x_i|] = \begin{cases} (0,0,...,0) & , \; i \text{ çift ise} \\ -(1,1,...,1) & , \; i \text{ tek ise,} \end{cases}$$

şeklindedir.

$$\| -(1,1,...,1) - (0,0,...,0) \| = \begin{cases} 1 & , \; \| \, . \, \|_\infty \text{ maximum norm ise} \\ \sqrt{n} & , \; \| \, . \, \|_{\frac{1}{2}} \text{ Euclidean norm ise,} \end{cases}$$

olduğundan,

$$r < \begin{cases} 1 & , \; \| \, . \, \|_\infty \text{ maximum norm} \\ \sqrt{n} & , \; \| \, . \, \|_{\frac{1}{2}} \text{ Euclidean norm,} \end{cases} \quad \text{ise} \quad x_0 \notin LIM^r[|x_i|],$$

ve

$$r < \begin{cases} 0.5 & , \; \| \, . \, \|_\infty \text{ maximum norm} \\ 0.5\sqrt{n} & , \; \| \, . \, \|_{\frac{1}{2}} \text{ Euclidean norm,} \end{cases} \quad \text{ise} \quad LIM^r[|x_i|] = \emptyset$$

olduğunu görmek kolaydır [**12**].

Teorem **3**.1'de, eğer (x_i) dizisi x_0'a yakınsak ise $LIM^r x_i = \bar{B}_r(x_0)$ olduğunu göstermiştik. Aşağıdaki teorem bu durumu çift gerektirme olarak verir.

Teorem 3.9. $(x_i) \subset \mathbb{R}^n$ *bir dizi olsun.* (x_i) *dizisi* x_0*'a yakınsaktır* $\Leftrightarrow LIM^r x_i = \bar{B}_r(x_0)$ *dır* [**12**].

İspat. *Teorem* **3**.*1'de* $LIM^r x_i = \bar{B}_r(x_0)$ *eşitlik durumu gösterilmişti. Teoremin ispatı için* $LIM^r x_i = \bar{B}_r(x_0)$ *iken* $(x_i) \to x_0$ $(i \to \infty)$ *olduğunu göstermek yeterlidir.* (x_i) *dizisinin* x_0*'dan farklı* x_0' *yığılma noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda,*

$$\bar{x}_0 = x_0 + \frac{r}{\| x_0 - x_0' \|}(x_0 - x_0')$$

noktası

$$\begin{aligned}\| \bar{x}_0 - x_0' \| &= \left\| x_0 - x_0' + \frac{r}{\| x_0 - x_0' \|}(x_0 - x_0') \right\| \\ &= \left| 1 + \frac{r}{\| x - x_0' \|} \right| . \| x_0 - x_i' \| \\ &= r + \| x_0 - x_0' \| > r\end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar ve x_0' *yığılma noktası olduğundan, bu eşitsizliğin anlamı Tanım* **3**.*1'den* $\bar{x}_0 \notin LIM^r x_i$ *demektir. Bu da* $\| \bar{x}_0 - x_0 \| = r$ *olması ve* $LIM^r x_i = \bar{B}_r(x_0)$ *olması ile çelişir. Bu durum* x_0*'ı yalnızca sonlu boyutlu normlu uzayda sınırlı bir* (x_i) *dizisinin yığılma noktası yapar. Sonuç olarak* (x_i)*,* x_0*'a yakınsaktır.*

$(x_i) \to x_0 (i \to \infty)$ ise $\| y_1 - y_2 \| = 2r$'yi sağlayan $y_1, y_2 \in LIM^r x_i$ noktalarının mevcut olduğu hemen görülür. Genel olarak bu iki noktanın varlığı (x_i) dizisini yakınsak olduğunu göstermez bu duruma bir örnek verelim.

Örnek 3.6. (x_i)*,* $\mathbb{R}^2$*'de bir dizi olsun ve* $x_i = (\xi_i, 0)$*,* $\xi_i = (-1)^i$ *şeklinde tanımlansın.* $\| \,.\, \|_\infty$ *için,*

$$LIM^1 x_i = \{(0, \eta) \in \mathbb{R}^2 : |\eta| \leq 1\}$$

dir. Açıkça $y_1, y_2 \in LIM^1 x_i$ *için* $\| y_1 - y_2 \| = 2$ *sağlayan* $y_1 = (0,1)$ *ve* $y_2 = (0,-1)$ *noktalarıdır. Fakat* (x_i) *dizisi hiçbir yerde yakınsak değildir* [**12**].

Fakat bu durum kesin konveks uzayda tamamen değişir.

Teorem 3.10. (x_i) *sonlu boyutlu kesin konveks uzayda bir dizi olsun. Eğer* $\| y_1 - y_2 \| = 2r$ *eşitliğini sağlayan* $y_1, y_2 \in LIM^r x_i$ *var ise* (x_i) *dizisi* $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$*'ye yakınsar* [**12**].

İspat. (x_i) *dizisinin keyfi yığılma noktası* y_3 *olsun.* $y_1, y_2 \in LIM^r x_i$ *olduğunda*

$$\| y_1 - y_3 \| \leq r \quad ve \quad \| y_2 - y_3 \| \leq r$$

dir. Diğer yandan,

$$2r = \| y_1 - y_2 \| \leq \| y_1 - y_3 \| + \| y_2 - y_3 \|$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece

$$\| y_1 - y_3 \| = \| y_2 - y_3 \| = r$$

dir.

$$\frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}((y_3 - y_1) + (y_2 - y_3)) \quad ve \quad \| \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \| = r$$

olduğundan, normlu uzayın kesin konveksliği göz önüne alındığında

$$\frac{1}{2}(y_2 - y_1) = y_3 - y_1 = y_2 - y_3$$

eşitliği yazılabilir. Buradan $y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ *elde edilir. Bunun anlamı* $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, *yalnızca sonlu boyutlu normlu uzayda sınırlı bir* (x_i) *dizisinin yığılma noktasıdır (bkz. Teorem 3.2). Sonuç olarak* (x_i) *dizisi* $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$*'ye yakınsak olmak zorundadır.*

Önceki iki teoremde yakınsak bir dizi ve onun r-limit kümeleri arasındaki ilişki incelendi. Aşağıda bu ilişki yığılma noktaları bakımından ele alınmıştır.

Teorem 3.11.

(a) Bir (x_i) *dizisinin yığılma noktası c ise*

$$LIM^r x_i \subseteq \bar{B}_r(c) \quad dir. \tag{3.11}$$

(b) $(x_i) \subset \mathbb{R}^n$ *dizisinin yığılma noktalarının kümesi C olsun. Bu taktirde*

$$LIM^r x_i = \bigcap_{c \in C} \bar{B}_r(c) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : C \subseteq \bar{B}_r(x_0)\} \tag{3.12}$$

dır [12].

İspat.

(a) Kabul edelim ki c, (x_i) dizisinin keyfi yığılma noktası olsun. O zaman

$$\forall x_0 \in LIM^r x_i \quad \text{için} \quad \| x_0 - c \| \leq r \tag{3.13}$$

olacak şekilde $r > 0$ sayısı vardır. Eğer böyle olmasaydı c, (x_i)'nin yığılma noktası olduğundan

$$\varepsilon = \frac{(\| x_0 - c \| - r)}{2} \quad \text{olmak üzere} \quad \| x_0 - x_i \| > r + \varepsilon,$$

eşitsizliğini sağlayan sonsuz x_i bulunacaktır. Bu da $(\mathbf{3}.1)$ ile çelişir. Yani $(\mathbf{3}.11)$ doğrudur.

(b) Bir önceki ispat bize şu sonucu verir:

$$LIM^r x_i \subseteq \bigcap_{c \in C} \bar{B}_r(c). \tag{3.14}$$

Eğer $y \in \bigcap_{c \in C} \bar{B}_r(c)$ ve her $c \in C$ için $\| y - c \| \leq r$ ise, bu $C \subseteq \bar{B}_r(y)$ kapsamasına denktir. Yani

$$\bigcap_{c \in C} \bar{B}_r(c) \subseteq \{x_0 \in \mathbb{R}^n : C \subseteq \bar{B}_r(x_0)\} \text{ dir.} \tag{3.15}$$

*Eğer $y \notin LIM^r x_i$ ise Tanım **3**.1'den, $\varepsilon > 0$ var öyleki $\| x_i - y \| \geq r + \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan sonsuz tane x_i vardır. $\| y - c \| \geq r + \varepsilon$ ile (x_i) dizisinin bir c yığılma noktası vardır. Yani $C \not\subseteq \bar{B}_r(y)$ ve $y \notin \{x_0 \in \mathbb{R}^n : C \subseteq \bar{B}_r(x_0)\}$ dir. Böylece $y \in LIM^r x_i$ ve $y \in \{x_0 \in \mathbb{R}^n : C \subseteq \bar{B}_r(x_0)\}$ olduğu anlaşılır.*

$$\{x_0 \in \mathbb{R}^n : C \subseteq \bar{B}_r(x_0)\} \subseteq LIM^r x_i \tag{3.16}$$

$(\mathbf{3}.14)$, $(\mathbf{3}.15)$ ve $(\mathbf{3}.16)$ ifadelerinden $(\mathbf{3}.12)$'nin doğru olduğu ispatlanmış olur.

Örnek **3**.6'yı bu teorem için tekrar verecek olursak $x_i = ((-1)^i, 0) \in \mathbb{R}^2$ dizisi sadece iki tane yığılma noktasına sahiptir ve bunlar $(-1,0)$ ve $(1,0)$ dir. $(\mathbf{3}.12)$ ifadesinden görebiliriz ki $LIM^r x_i = \bar{B}_r(-1,0) \bigcap \bar{B}_r(1,0)$ dir.

2.3.1 Küme Değerli Analizde Küme Yakınsaklığı ile Rough Yakınsaklık Arasındaki İlişki

Eğer X metrik uzayının alt kümelerinin dizisi $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ise,

$$\limsup_{i\to\infty} K_i = \{x \in X : \liminf_{i\to\infty} d(x,K_i) = 0\},$$
$$\liminf_{i\to\infty} K_i = \{x \in X : \lim_{i\to\infty} d(x,K_i) = 0\}$$

ifadeleri (K_i) dizisinin üsten ve alttan limitleri olarak adlandırılır [1].

Bu tanımlamadan $\limsup\{x_i\}$, (x_i) dizisinin yığılma noktalarının kümesidir. (3.13)'den

$$\forall x_0 \in LIM^r x_i \quad \text{için} \quad \limsup\{x_i\} \subset \bar{B}_r(x_0)$$

ve (3.12)'den

$$LIM^r x_i = \bigcap_{c\in\limsup\{x_i\}} \bar{B}_r(c)$$

olduğu görülür.

Teorem 3.12.

$$LIM^r x_i = \liminf \bar{B}_r(x_i)$$

eşitliği geçerlidir [12].

İspat. *$y \in LIM^r x_i$ olsun. Bir (y_i) dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım,*

$$y_i = \begin{cases} x_i + \frac{r}{\|y-x_i\|}(y-x_i) & , \quad \| y-x_i \| > r \quad ise, \\ y & , \quad diğer. \end{cases}$$

$$\left\| x_i + \frac{r}{\| y-x_i \|}(y-x_i) - y \right\| = \left| \frac{r}{\| y-x_i \|} - 1 \right| \| y-x_i \|$$
$$= |\| y-x_i \| - r|$$

olduğundan

$$\| y_i - y \| = \begin{cases} \| y-x_i \| - r & , \quad \| y-x_i \| > r \quad ise, \\ 0 & , \quad diğer \end{cases}$$

yazabiliriz. Böylece $y \in LIM^r x_i$ olduğunda $i \to \infty$ iken $y_i \to y$ dir. Fakat $\| x_i - y_i \| \leq r$, yani $y_i \in \bar{B}_r(x_i)$ dir. Sonuç olarak $\lim_{i\to\infty} d(y,\bar{B}_r(x_i)) = 0$ dır. Bu ifade alt ve üst limit tanımından $y \in \liminf \bar{B}_r(x_i)$ olduğunu gösterir.

Eğer $y \in \liminf \bar{B}_r(x_i)$ *ise,* $y_i \in B_r(x_i)$ *ve* $y_i \to y$ *sağlayan* (y_i) *dizisi vardır. Yani* $\| x_i - y_i \| \leq r$ *dir. Böylece Teorem* $\mathbf{3}.7$*'den* $y \in LIM^r x_i$ *dir.*

3.4. Roughness Derecesine Bağımlılık

Önceki bölümlerde $r-limit$ kümesinin sabit r derecesi için sahip olduğu özellikleri inceledik. Şimdi $r-limit$ kümesinde sabit (x_i) dizisinin değişken r parametresine olan bağımlılığını inceleyeceğiz.

$r-limit$ tanımından (Tanım $\mathbf{3}.1$),

$$r_1 < r_2 \quad \text{ise} \quad LIM^{r_1} x_i \subseteq LIM^{r_2} x_i \tag{3.17}$$

monotonluğunu yazabiliriz [**12**].

Teorem 3.13. $r \geq 0$ *ve* $\sigma > 0$ *olsun.*

(a) $\quad LIM^r x_i + \bar{B}_\sigma(0) \subseteq LIM^{r+\sigma} x_i.$

(b) $\quad \bar{B}_\sigma(y) \subseteq LIM^r x_i \quad$ *ise* $\quad y \in LIM^{r-\sigma} x_i$ *dir* [**12**].

İspat. $r \geq 0$ *ve* $\sigma > 0$ *için,*

(a) $y \in LIM^r x_i$ *ve* $z \in \bar{B}_\sigma(0)$ *olsun. Tanım* $\mathbf{3}.1$*'den, her* $\varepsilon > 0$ *için* i_ε *vardır öyleki* $i \geq i_\varepsilon$ *iken* $\| x_i - y \| < r + \varepsilon$ *ve* $\| z \| \leq \sigma$ *dır. Buradan,*

$$i > i_\varepsilon \quad \textit{ise} \quad \| x_i - y - z \| < r + \sigma + \varepsilon$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece $y + z \in LIM^{r+\sigma} x_i$ *elde edilir.*

(b) (x_i) *dizisinin keyfi bir yığılma noktası* c *olsun. Eğer* $\| y - c \| > r - \sigma$ *ise bunu sağlayan*

$$x_0 = y + \frac{\sigma}{\| y - c \|}(y - c)$$

şeklinde bir x_0 *noktası vardır. Buradan*

$$\| x_0 - c \| = \sigma + \| y - c \| > \sigma + (r - \sigma) = r$$

ifadesi yazılabilir. $(\boldsymbol{3}.11)$*'den* $x_0 \notin LIM^r x_i$ *dir ve bu durum* $\| x_0 - y \|$ *ve* $\bar{B}_\sigma(y) \subseteq LIM^r x_i$ *ile çelişir. Böylece her* $c \in C$ *yığılma noktaları için* $\| y - c \| \leq r - \sigma$ *dir. Sonuç olarak* $(\boldsymbol{3}.12)$*'den*

$$y \in \bigcap_{c \in C} \bar{B}_{r-\sigma}(c) = LIM^{r-\sigma} x_i \text{ dir.}$$

Genel anlamda $LIM^r x_i + \bar{B}_\sigma(0) \neq LIM^{r+\sigma} x_i$ olabilir. Örnek olarak (x_i) dizisi 2-boyutlu Euclid uzayında, $x_i = (0, (-1)^i)$ $(i = 1, 2, ...)$ şeklinde olsun.

$$LIM^{0.5} x_i + \bar{B}_{0.5}(0) = \emptyset + \bar{B}_{0.5}(0) = \emptyset \neq \{(0,0)\} = LIM^1 x_i \text{ dir.}$$

Burada eşitliğin sağlanmaması $LIM^{0.5} x_i$'nin boş küme olmasından kaynaklanmaz. Çünkü

$$LIM^1 x_i + \bar{B}_1(0) = \{(0,0)\} + \bar{B}_1(0) = \bar{B}_1(0)$$

dir. Buradan her i için $\| (\sqrt{3}, 0) - x_i \|_{\frac{1}{2}} = \| (\sqrt{3}, \mp 1) \|_{\frac{1}{2}} = 2$ bulunur ve

$$(\sqrt{3}, 0) \in LIM^2 x_i \backslash \bar{B}_1(0) \; dir.$$

Yani $LIM^1 x_i + \bar{B}_1 \neq LIM^2 x_i$ elde edilir.

$$\bar{r} = \inf\{r \in \mathbb{R}^+ : LIM^r x_i \neq \emptyset\} \tag{3.18}$$

olsun.

$(\mathbf{3}.17)$ ile verilen monotonluktan

$$r < \bar{r} \quad \text{ise} \quad LIM^r x_i = \emptyset, \quad \bar{r} < r \quad \text{ise} \quad LIM^r x_i \neq \emptyset \tag{3.19}$$

yazılabilir. Bundan başka Teorem **3**.13'den her $r > \bar{r}$ ve $\sigma \in (0, r - \bar{r})$ için $LIM^r x_i$ daima σ yarıçaplı bir yuvar içerir. Bunun da anlamı

$$r > \bar{r} \quad \text{için} \quad \text{iç}(LIM^r x_i) \neq \emptyset \tag{3.20}$$

olmasıdır. Bu nedenle $r \leq \bar{r}$ olduğunda

$$\text{iç}(LIM^r x_i) = \emptyset \quad \text{ve} \quad r' \in [0, r) \quad \text{için} \quad \text{iç}(LIM^r x_i) = \emptyset \tag{3.21}$$

olmasıdır.

Aşağıda verilen teoremlerde $\bar{r}$'nin sahip olduğu bazı özellikler incelenecektir.

Teorem 3.14.

(a) $r = \bar{r}$ dir gerek yeter koşul

$$LIM^r x_i \neq \emptyset \quad ve \quad iç(LIM^r x_i) = \emptyset \; dir. \tag{3.22}$$

(b) $(X, \| \,.\, \|)$ sonlu boyutlu kesin konveks uzay ise o zaman $r = \bar{r} \Leftrightarrow LIM^r x_i$ tek nokta kümesidir [12].

İspat.

(a) Kabul edelim ki $r = \bar{r}$ olsun. (3.22)'nın doğru olduğunu gösterelim. $LIM^r x_i = \bigcap_{r'>\bar{r}} LIM^{r'} x_i$ olduğu göz önünde tutulursa, $r' > \bar{r}$ için (3.19)'dan $LIM^{r'} x_i$ kümesi boştan farklıdır ve Teorem 3.5'den kapalıdır. (3.17)'den

$$\bigcap_{r'>\bar{r}} LIM^{r'} x_i = \bigcap_{\bar{r}<r'\leq\bar{r}+1} LIM^{r'} x_i$$

yazabiliriz. $r' \in (\bar{r}, \bar{r}+1]$ ile $LIM^{r'} x_i$ kapalı altkümelerin boştan farklı ailesidir. $LIM^{\bar{r}+1} x_i$ kompakt kümesi sonlu kesişim özelliğine sahiptir (Tanım 2.18). Böylece keşim kümesi boştan farklıdır. Buradan $LIM^{\bar{r}} x_i \neq \emptyset$ elde edilir.

Eğer $iç(LIM^r x_i) \neq \emptyset$ olursa $\sigma > 0$ ve $B_\sigma(y)$ ile bir açık yuvar içerir ve Teorem 3.13'den $LIM^{r-\sigma} \neq \emptyset$ elde edilir. Bu da $r > \bar{r}$ olması anlamına gelir. Oysa bizim kabulumüz $r = \bar{r}$ idi. Bu durumunda $r = \bar{r}$ ise $iç(LIM^r x_i) = \emptyset$ dir.

Şimdi (3.22) sağlansın. $r = \bar{r}$ olduğunu gösterelim. $LIM^r x_i \neq \emptyset$ olduğundan, $r \geq \bar{r}$ elde edilir. Diğer yandan Teorem 3.14'den $iç(LIM^r x_i) = \emptyset$ olması bize $r \leq \bar{r}$ verir. Sonuç olarak $r = \bar{r}$ elde edilir.

(b) Eğer $LIM^r x_i$ tek nokta kümesi ise (3.22) sağlanır (a)'dan dolayı $r = \bar{r}$ dir. Şimdi $r = \bar{r}$ ve X uzayı kesin konveks uzay olsun. Buradan (3.22) sağlanır ve $LIM^{\bar{r}} x_i$ kümesi de kesin konvekstir (Teorem 3.6'dan). Böylece $LIM^{\bar{r}} x_i \neq \emptyset$ ve $iç(LIM^{\bar{r}} x_i) = \emptyset$ dir. Bu da $LIM^r x_i$ kümesinin tek nokta kümesi olması anlamına gelir.

Örnek 3.7. $(x_i) = ((-1)^i, 0) \in \mathbb{R}^2$ *dizisi verilmiş olsun. Euclid ve maximum norm için*

$$(0,0) \in LIM^1 x_i \neq \emptyset \quad ve \quad iç(LIM^1 x_i) = \emptyset$$

minimum yakınsaklık derecesi $\bar{r} = 1$ *dir* [**12**].

Teorem 3.15.

$$cl\left(\bigcup_{0 \le r' < r} LIM^{r'} x_i\right) \subseteq LIM^r x_i = \bigcap_{r' > r} LIM^{r'} x_i.$$

Eğer $r \neq \bar{r}$ *ise o zaman* $\bigcup_{r \le r' < r} LIM^{r'} x_i = LIM^r x_i$ *dir* [**12**].

İspat. $(\boldsymbol{3}.17)$*'de verilen monotonluktan ve r-limit kümesinin kapalılığından*

$$cl\left(\bigcup_{0 \le r' < r} LIM^{r'} x_i\right) \subseteq LIM^r x_i \subseteq \bigcap_{r' > r} LIM^{r'} x_i$$

dir. Şimdi keyfi bir $y \in X \setminus LIM^r x_i$ *ele alalım. Tanım* $\boldsymbol{3}.1$*'den* $\varepsilon > 0$ *ve* $\forall k \in \mathbb{N}$ *için* $i \ge k$ *olacak şekilde bir* $k \in \mathbb{N}$ *var öyleki*

$$\| x_i - y \| \ge r + \varepsilon.$$

Buradan $r' < r + \varepsilon$ *ve* $\varepsilon' = r + \varepsilon - r'$ *için*

$$\| x_i - y \| \ge r' + \varepsilon'$$

dir. Bu durum $r' < r + \varepsilon$ *için* $y \notin LIM^{r'} x_i$ *olduğunu gösterir. Böylece* $y \notin \bigcap_{r' > r} LIM^{r'} x_i$ *dir. Buradan* $LIM^r x_i = \bigcap_{r' > r} LIM^{r'} x_i$ *dir.* $r < \bar{r}$ *için açık olarak*

$$cl\left(\bigcup_{0 \le r' < r} LIM^{r'} x_i\right) = LIM^r x_i = \emptyset$$

dir.

Şimdi $r = r_1 > \bar{r}$ *ve* $r_0 = (\bar{r} + r_1)/2$ *olsun.* $r_0 > \bar{r}$ *olduğundan* $y_0 \in LM^{r_0} x_i \neq \emptyset$ *olacak şekilde bir* y_0 *seçebiliriz. Keyfi bir* $y_1 \in LIM^{r_1} x_i$ *ele alalım. Teorem* $\boldsymbol{3}.6$*'den*

$$\lambda \in [0,1] \quad için \quad y_\lambda = (1-\lambda) y_0 + \lambda y_1 \in LIM^{(1-\lambda) r_0 + \lambda r_1} x_i \ dir.$$

Sonuç olarak $\lambda \in [0,1)$ *için* $y_\lambda \in \bigcup_{0 \le r' < r} LIM^{r'} x_i$ *bulunur.*

$$\lambda \to 1 \quad iken \quad \| y_\lambda - y_1 \| = (1-\lambda) \| y_0 - y_1 \| \to 0$$

olacağından

$$y_1 \in cl\left(\bigcup_{0\leq r'<r} LIM^{r'} x_i\right)$$

yazabiliriz. Böylece

$$cl\left(\bigcup_{0\leq r'<r} LIM^{r'} x_i\right) = LIM^{r} x_i$$

bulunur.

BÖLÜM 4

ROUGH CAUCHY DİZİLERİ

Tam normlu uzayda her yakınsak dizinin Cauchy şartını sağladığını biliyoruz. Tersine Banach uzayında her Cauchy dizisi yakınsaktır. Rough yakınsak diziler ve rough Cauchy dizileri arasındaki ilişkiyi kısaca tarif etmek mümkün değildir. Bu bölümde rough yakınsaklık derecesi r ile rough Cauchy derecesi ρ olan rough Cauchy dizileri arasındaki ilişki hakkında bilgi verilecektir.

Tanım 4.1. *(x_i), X normlu uzayında bir dizi ve $\rho \geq 0$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists i_\varepsilon$ var öyleki $i, j \geq i_\varepsilon$ iken*

$$\| x_i - x_j \| < \varepsilon + \rho$$

ise (x_i) dizisine ρ-roughness derecesi ile rough Cauchy dizisi denir. Ya da kısa olarak $\rho -$Cauchy dizisi denir. ρ ise (x_i)'nin Cauchy derecesidir [12].

Teorem 4.1.

a) Monotonluk: $\rho' > \rho$ olsun. ρ, (x_i) dizisinin Cauchy derecesi ise ρ' de Cauchy derecesidir.

b) Sınırlılık: (x_i) dizisi sınırlıdır $\Leftrightarrow$ her $\rho \geq 0$ için (x_i) dizisi ρ-Cauchy dizisidir [13].

Teorem 4.2. *(x_i) dizisi r-yakınsak olsun, yani $LIM^r x_i \neq \emptyset$. Her $\rho \geq 2r$ için (x_i) bir ρ-Cauchy dizisidir. Böylece bir Cauchy derecesinin sınırı genel olarak azalan değildir* [13].

İspat. *Keyfi bir $x_0 \in LIM^r x_i$ alalım. Tanım **3**.1'den her $\varepsilon > 0$ için $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $i, j \geq i_\varepsilon$ olduğunda $\| x_i - x_0 \| \leq r + \varepsilon/2$ ve $\| x_j - x_0 \| \leq r + \varepsilon/2$ dir. Buradan*

$$\| x_i - x_j \| \leq \| x_i - x_0 \| + \| x_j - x_0 \| \leq 2r + \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece (x_i) dizisi $\rho = 2r$ ile bir ρ-Cauchy dizisidir ve $2r$ sınırı genel olarak azalan değildir. Gerçekten $\| z \| = r$ ($z \in \mathbb{R}$) ve $x_i = (-1)^i z$ olsun. (x_i) dizisi $0 \in LIM^r x_i$'ye r-yakınsaktır ve $\rho = 2r$ minimum Cauchy derecesidir.

(x_i) dizisinin Cauchy derecesi $\rho \geq 0$ olduğunda, (x_i) dizisinin yakınsaklık derecesi $\rho/2$ eşit olabilir mi?, yani $LIM^{\rho/2}x_i \neq \emptyset$ olabilir mi? Her zaman eşit değildir.

Sonlu boyutlu normlu uzayda sınırlı (x_i) dizisinin yığılma noktalarının kümesi C boştan farklı ve sınırlıdır. Böylece C kümesini çapı $D(C)$ ve onu çevreleyen en küçük yuvarın yarı çapı $R(C)$ sonludur. $(\mathbb{R}^n, \| \, . \, \|)$ normlu uzayında bu çap ve yarı çap

$$D(C) = \sup_{x,y \in C} \| x - y \|, \quad R(C) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in C} \| x - y \|, \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır [14].

Teorem 4.3. *(x_i) dizisinin yığılma noktalarının kümesi C olsun. (x_i) dizisinin minimum Caucyh derecesi $D(C)$ ve minimum yakınsaklık derecesi $R(C)$, $\bar{r}$'ye eşittir. Bu ifade*

$$D(C) = \min\{\rho \in \mathbb{R}^+ : (x_i) \quad \rho - Cauchy \quad dizisi\} \tag{4.2}$$

ve

$$\bar{r} < R(C) \quad ise \quad LIM^r x_i = \emptyset, \quad \bar{r} \geq R(C) \quad ise \quad LIM^r x_i \neq \emptyset \tag{4.3}$$

anlamına gelir [12].

İspat.

(a) Eğer $\varepsilon = (D(C) - \rho)/3$ için $0 \leq \rho < D(C)$ ise c_1 ve c_2 gibi iki yığılma noktası vardır öyleki $\| c_1 - c_2 \| > \rho + 2\varepsilon$ dir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $i_1, i_2 \geq k$ olduğunda

$$\| x_{i1} - c_1 \| < \varepsilon/2 \quad ve \quad \| x_{i2} - c_2 \| < \varepsilon/2$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \| x_{i1} - x_{i2} \| &\geq \| c_1 - c_2 \| - \| (x_{i1} - c_1) - (x_{i2} - c_2) \| \\ &\geq \| c_1 - c_2 \| - (\| x_{i1} - c_1 \| + \| x_{i2} - c_2 \| \\ &> \rho + 2\varepsilon - (\varepsilon/2 + \varepsilon/2) \\ &= \rho + \varepsilon \end{aligned}$$

*bulunur. Böylece Tanım **4**.1'den (x_i) dizisi eğer $0 \leq \rho < D(C)$ ise ρ-Cauchy dizisi değildir.*

Şimdi $\rho \geq D(C)$ *ve keyfi* $\varepsilon > 0$ *olsun.* $C + B_{\varepsilon/2}(0)$ *dışında yalnız sonlu* x_i *vardır, diğer yandan* $C + B_{\varepsilon/2}(0)$ *dışında yığılma noktasıda vardır çünkü ele aldığımız uzay sonlu boyutlu ve* $C + B_{\varepsilon/2}(0)$ *açıktır. Böylece en az bir* i_ε *vardır öyleki* $x_i \in C + B_{\varepsilon/2}(0)$ *sağlar. Bunun anlamı eğer* $i_1 \geq i_\varepsilon$ *ve* $i_2 \geq i_\varepsilon$ *ise* $c_1, c_2 \in C$ *için* $\| x_{i1} - c_1 \| < \varepsilon/2$ *ve* $\| x_{i2} - c_2 \| < \varepsilon/2$ *dir. Böylece* $\| c_1 - c_2 \| \leq D(C) \leq \rho$ *olur,*

$$\begin{aligned} \| x_{i1} - x_{i2} \| &\leq \| c_1 - c_2 \| + \| x_{i1} - c_1 \| + \| x_{i2} - c_2 \| \\ &< \rho + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \rho + \varepsilon. \end{aligned}$$

Böylece (x_i) *dizisi eğer* $\rho \geq D(C)$ *ise bir* ρ*-Cauchy dizisidir.*

(b) Eğer $r < R(C)$ *ise* $(\boldsymbol{4}.1)$*'den her* $z \in \mathbb{R}^n$ *için* $y \in C$ *vardır öyleki* $\| z - y \| > r$ *ve Teorem* $\boldsymbol{3}.11$*'den* $z \notin LIM^r x_i$ *yani* $LIM^r x_i = \emptyset$*.*

Eğer $r > R(C)$ *ise* $(\boldsymbol{4}.1)$*'den* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *vardır öyleki her* $y \in C$ *için* $\| x_0 - y \| \leq r$, $x_0 \in \bigcap_{y \in C} \bar{B}_r(y)$ *olur. Böylece Teorem* $\boldsymbol{3}.11$*'den* $LIM^r x_i \neq \emptyset$ *olur.*

Eğer $R(C) = \bar{r}$ *ise Teorem* $\boldsymbol{3}.14$*'den* $r = \bar{r} = R(C)$ *için* $LIM^r x_i \neq \emptyset$ *olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.*

Aşağıdaki iki teoremi ispatsız olarak verelim.

Teorem 4.4. *S kümesi* $(\mathbb{R}^n, \| \, . \, \|)$ *Euclid uzayının sınırlı kapalı alt kümesi olsun. S kümesinin çapı* $D(S)$ *ile S kümesini çevreleyen en küçük yuvarın yarı çapı* $R(S)$ *arasında*

$$R(S) \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} D(S)$$

eşitsizliği vardır [**12**].

Teorem 4.5. *S kümesi* $(\mathbb{R}^n, \| \, . \, \|)$ *normlu uzayının sınırlı kapalı alt kümesi olsun. S kümesinin çapı* $D(S)$ *ile S kümesini çevreleyen en küçük yuvarın yarı çapı* $R(S)$ *arasında*

$$R(S) \leq \frac{n}{2(n+1)} D(S)$$

eşitsizliği vardır [**12**].

Teorem 4.6. (x_i) *dizisi* $(\mathbb{R}^n, \|\,.\,\|)$ *normlu uzayında* $\rho \geq 0$ *için* ρ*-Cauchy dizisi olsun.* (x_i) *dizisi* $r \geq \frac{n}{n+1}\rho$ *için rough yakınsaktır. Özellikle* $\|\,.\,\|_{\frac{1}{2}}$ *Euclid norm olur ise* (x_i) *dizisi* $r \geq \sqrt{\frac{n}{n+1}}\rho$ *için rough yakınsaktır* [**12**].

İspat. (x_i) *dizisi* ρ*-Cauchy dizisi olduğundan Teorem* ***4***.2*'den C,* (x_i) *dizisinin yığılma noktalarının kümesi olmak üzere* $\rho \geq D(C)$ *dir. Böylece Teorem* ***4***.5*'den*

$$r \geq \frac{n}{n+1}\rho \quad \text{iken} \quad r \geq \frac{n}{n+1}D(C) \geq R(C)$$

elde edilir. Sonuç olarak Teorem ***4***.2*'den* $r \geq \frac{n}{n+1}\rho$ *ise* $LIM^r x_i \neq \emptyset$ *dır.*

$\|\,.\,\|_{\frac{1}{2}}$ *Euclid norm olduğunda Teorem* ***4***.5 *yerine Teorem* ***4***.4*'ü uygulayarak benzer sonuç bulunur.*

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada rough yakınsak dizi ve rough limit tanımı yapılmıştır ve ilgili örnekler çözülmüştür. Daha sonra rough limit kümelerinin kapalılık, konvekslik,sınırlılık özellikleri incelenmiştir. Son olarak rough Cauchy dizilerden bahsedilmiştir.

Sonuç olarak klâsik anlamda yakınsak olmayan bir dizi rough yakınsak olabilir. Bu sonuç bize matematikte inşa edilen yapıların sabit olmayıp değişikliğe açık olduğunu gösterir.

Ayrıca; Fuzzy yakınsak diziler ile rough yakınsak diziler arasındaki ilişki, rough yakınsak dizilerin uzayı ile fuzzy yakınsak dizilerin uzayları topolojik ve cebiesel anlamda karşılaştırılarak yeni teoremler verilebileceği öneri olarak tezimize konulacak temel önerilerdir.

KAYNAKLAR

1. Aubin J. P and Frankowska H., Set-Valued Analysis, Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 1990.
2. Aytar S., The Rough Limit Set and The Core of a Real Sequence, Numer Funct Anal Optim. 29, 283-290, 2008.
3. Balcı M., Analiz 1, Balcı Yayınları, Ankara, 1999.
4. Bayraktar M., Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ankara, 2006.
5. Burgin M., Neoclasical Analysis, Nova Science Publishers, New York, 2008.
6. Connor J.,The Statistical and Strong p-Cesáro Convergence of Sequences, Analysis, 14, 311-317, 1988.
7. Çakar Ö., Fonksiyonel Analize Giriş 1, Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Yayın no 13, Ankara, 2007.
8. Freedman A.R., Generalized Limits and Sequence Spaces, Bull. London Math., 13, 224-228, 1981.
9. Fridy J.A, Statistical Limit Points, Proc. Am. Math. Soc., 118, 1187-1192, 1993.
10. Kreyszig E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons, U.S.A, 1978.
11. Kostyrko P. et al, I-Convergence, Real Analysis Exchange, 26, 669-680, 2000.
12. Phu H. X., Rough Convergence in Normed Linear Spaces, Numer. Funct. Anal. Optim, 22, 201-224, 2001.
13. Phu H. X., Rough Convergence in Infinite Dimensional Normed Space, Numer. Funct. Anal. Optim, 24, 285-301, 2003.
14. Phu H. X, Some Basic Ideal of Rough Analysis, Proceedings of the Sixth Vietnamese Mathematical Conference, 3-31, September 7-10, 2005.
15. Salat T., On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers, Math. Slovaca, 30, 139-150, 1980.
16. Yıldız C., Genel Topoloji, Gazi Kitabevi, Ankara, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet ÖZBEK 1981 yılında Nevşehir'de doğdu. İlk öğrenimini Nevşehir'de orta öğrenimi Niğde/Bor sağlık meslek lisesinde tamamladı. 2001 yılında Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandı. 2002 yılında Isparta Devlet Hastanesinde sağlık memuru olarak göreve başladı. 2006 yılında üniversiteden mezun oldu ve Nevşehir Devlet Hastanesine tayini çıktı. 2010 yılında Nevşehir Üniversitesinde yüksek lisansa başladı. Halen Nevşehir Devlet Hastanesinde sağlık memuru olarak görev yapmakta ve Nevşehir Üniversitesine yüksek lisans öğrencisi olup evlidir.

Adres: Nevşehir Devlet Hastanesi, 50100, NEVŞEHİR.

E-posta: ahmet.ozbek@nevsehir.edu.tr

Tel: 0505 562 5753