Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 24, Sayı 2, 302-305, 2020

Süleyman Demirel University
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 24, Issue 2, 302-305, 2020

DOI: 10.19113/sdufenbed.497629

En Fazla İki Adet Komşuluk Özdeğeri -1,0 ya da 1,0'dan Farklı Olan Graflar

Hatice TOPCU[*1]

[1]Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 50300, Nevşehir

(Alınış / Received: 15.12.2018, Kabul / Accepted: 30.05.2020, Online Yayınlanma / Published Online: 20.08.2020)

Anahtar Kelimeler
Kospektral graflar,
Spektral karakterizasyon,
Çok parçalı tam graf

Özet: Bir grafın komşuluk matrisinin özdeğerleri, komşuluk spektrumunu oluşturur. Bu çalışmada, en fazla iki adet komşuluk özdeğeri -1,0 ya da 1,0'dan farklı olan tüm grafların oluşturduğu kümeler ile ilgili bazı sonuçlar sınıflandırma yapılmak suretiyle bir araya getirilmiştir. Bir grafta izole bir nokta, bu grafın komşuluk spektrumunda sadece bir adet sıfır özdeğerin yer almasına yol açacaktır. Bu sebepten dolayı, öncelikle izole nokta içermeyen grafların oluşturduğu kümeler incelenerek belirlenmeye çalışılmıştır. Daha sonra ise izole noktalar da bu kümelere dâhil edilerek, incelenen kümeler genişletilmiştir. Bu sınıflandırma, genel olarak çok parçalı tam grafları ve izole noktaları içermektedir. Dolayısıyla burada verilen grafların komşuluk spektrumlarına göre belirlenebilir olup olmadıklarına da yine bu çalışmada değinilmiştir.

Graphs with All but Two Eigenvalues Equal to -1,0 or 1,0

Keywords
Cospectral graphs,
Spectral characterization,
Complete multipartite graphs

Abstract: Adjacency spectrum of a graph, consists of the eigenvalues of its adjacency matrix. In this note, we compile some results (by making a classification) about the sets of all graphs that contain at most two adjacency eigenvalues different from -1,0 or 1,0. For a given graph, an isolated vertex makes a zero eigenvalue in its adjacency spectrum. Thus, firstly the sets which contains graphs without isolated vertices are investigated. Then, these sets are extended with isolated vertices. This classification includes disjoint unions of complete multipartite graphs and isolated vertices. Hence, we also mention that graphs given in here are determined by their adjacency spectrum (shortly DAS) or non-DAS.

1. Giriş ve Önbilgiler

Bir *G grafı*, boştan farklı ve sonlu V(G) noktalar kümesi ile E(G) kenarlar kümesi tarafından teşkil edilir ve *G=(V(G),E(G))* biçiminde gösterilir. Eğer bir grafta *katlı kenar* (aynı iki nokta arasında yer alan birden fazla kenar, *multiple edge*) ve *ilmek* (bir noktayı yine kendine bağlayan kenar, *loop*) bulunmuyorsa, bu grafa *basit graf* (simple graph) denir. Bu çalışmada yer alan tüm graflar basittir ve kenarları yönlendirilmemiştir. Bir $v \in V(G)$ noktasının *derecesi* (degree of a vertex) kendisine komşu olan noktaların sayısıdır. Eğer bir noktanın derecesi sıfıra eşit ise yani *V(G)* kümesindeki noktaların hiçbirine komşu değilse bu noktaya *izole nokta* (isolated vertex) denir. $V' \subseteq V(G)$ ve $E' \subseteq E(G)$ olacak şekilde V' ve E' kümeleri için $G' = (V', E')$ grafına G grafının bir *alt grafı* (subgraph) denir. Bir grafta bazı noktaların ve bu noktalara değen tüm kenarların silinmesiyle oluşan bir alt grafa ise *indirgenmiş alt graf* (induced subgraph) denir. Bir G grafı tarafından indirgenmiş alt graf olarak içerilmesi mümkün olmayan bir grafa ise G grafı için *yasaklanmış alt graf* (forbidden subgraph) denir. Herhangi iki noktası arasında daima en az bir yol bulunabilen bir grafa *bağlantılı graf* (connected graph) denir. Bağlantılı olmayan bir grafa ise *bağlantısız graf* (disconnected graph) denir. Bir G grafının maksimal bağlantılı her bir alt grafına G grafının bir *bileşeni* (component) denir. Verilen iki G ve H grafının *ayrık birleşimi* (disjoint union) $G\mathring{\cup}H$ ile G grafının m adet kopyasının ayrık birleşimi ise mG ile gösterilir. n adet noktaya sahip *tam graf* (complete graph) K_n ile, *yol graf* (path graph) ise P_n ile gösterilir. *V(G)* noktalar kümesinin bir parçalanışı $p_1, \ldots, p_k$ olsun. Eğer aynı parçada yer alan noktalar arasında kesinlikle bir kenar bulunmuyor ve farklı parçalarda yer alan noktalar arasında daima bir kenar bulunuyor ise bu grafa *çok parçalı tam graf* (complete multipartite graph) denir ve $K_{p_1,\ldots,p_k}$ ile gösterilir. *k=2* ise bu grafa özel olarak *iki parçalı tam graf* (complete bipartite graph) denir.

*İlgili yazar: haticekamittopcu@gmail.com

Graflar matrisler yardımıyla temsil edilebilir. *G=(V(G),E(G))* grafı n adet noktaya sahip bir graf ve $i,j \in V(G)$ olsun. i ve j noktaları arasında bir kenar var ise $a_{ij}=1$; yok ise $a_{ij}=0$ biçiminde tanımlanan $A(G)=[a_{ij}]_{n\times n}$ matrisine G grafının *komşuluk matrisi* (adjacency matrix) denir. Bu matrisin özdeğerlerine G grafının *komşuluk özdeğerleri* (adjacency eigenvalues), ya da kısaca özdeğerleri denir. Komşuluk özdeğerlerinin cebirsel katları ile birlikte oluşturduğu kümeye ise G grafının *komşuluk spektrumu* (adjacency spectrum) ya da kısaca spektrumu denir. *A(G)* tamsayı bileşenli ve simetrik bir matris olduğundan, G grafının komşuluk özdeğerleri $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G)$ biçiminde gösterilebilir. Herhangi iki graf aynı komşuluk özdeğerlerine sahip ise, bu graflara komşuluk özdeğerlerine göre *kospektral graflar* (cospectral graphs) denir. Aynı sayıda noktaya ve aynı sayıda kenara sahip G ve H grafları verilsin. *V(G)* ve *V(H)* nokta kümeleri arasında noktaların birbirine komşuluğunu koruyan, birebir ve örten bir f dönüşümü bulunabiliyorsa, G ve H graflarına *izomorf graflar* (isomorphic graphs) denir. Bu durum $G \cong H$ biçiminde gösterilir. İzomorf grafların komşuluk spektrumlarının aynı olduğu açıktır. Fakat bu durumun tersi her zaman doğru değildir[1]. Eğer bir G grafı ile aynı komşuluk spektrumuna sahip olan herhangi bir graf kesinlikle G grafına izomorf oluyorsa, G ye komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir bir graf (kısaca DAS; determined by adjacency spectrum) denir. Bu çok iyi bilinen problem hakkında daha detaylı bilgi için [1-3] kaynaklarına bakılabilir.

Wang, Belardo, Huang ve Borovicanin, F_k friendship grafının komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir bir graf olduğunu iddia etmişlerdir [5]. Bu konjektürden alınan motivasyon ve daha farklı bir bakış açısı ile Cioaba, Haemers, Vermette ve Wong en fazla iki adet komşuluk özdeğeri ∓ 1 den farklı olan tüm grafları sınıflandırmışlardır [10]. Daha sonrasında aynı yazarlar tarafından en fazla iki adet komşuluk özdeğeri -2 ve 0 dan farklı olan tüm graflar sınıflandırılmıştır [9]. Yakın zamanda ise Lima, Mohammedian ve Oliveira en fazla iki adet komşuluk özdeğeri [-1,1] aralığına düşen iki parçalı olmayan tüm grafları belirlemişlerdir [7]. Bu çalışmada ise, en fazla iki adet komşuluk özdeğeri -1,0 ya da 1,0 dan farklı olan tüm graflar ile ilgili sonuçlar verilmiştir. En fazla iki adet özdeğeri (cebirsel katları da dâhil edilerek) {-1,0} ya da {1,0} dan farklı olan tüm grafların sınıflandırmaları yapılmıştır. Bu sınıflandırmalarda yer alan grafların komşuluk spektrumlarına göre belirlenebilir olup olmadıklarına da değinilmiştir.

Sonraki bölümlerde kullanılacak bazı bilgilere de bu kısımda yer verilmiştir.

Lemma 1.1. [1] n adet noktaya sahip bir G grafının komşuluk özdeğerleri $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G)$ ve G nin indirgenmiş m noktalı bir H altgrafının komşuluk özdeğerleri $\lambda_1(H) \geq \lambda_2(H) \geq \cdots \geq \lambda_m(H)$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitsizlik $i=1,\ldots,m$ için daima sağlanır.

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(H) \geq \lambda_{n-m+i}(G) \tag{1}$$

Lemma 1.2. [2,4] Bir G grafının negatif komşuluk özdeğerlerinin sayısı ρ_- ve $k = 1+\rho_-$ olsun. G grafının kesin olarak yalnızca bir adet pozitif komşuluk özdeğerine sahip olması için gerek ve yeter koşul izole olmayan tüm noktalarının k-parçalı tam graf oluşturmasıdır.

Lemma 1.3. [8] Sadece 1 adet nokta içeren parçaların sayısı k ve $k \geq 2$ olmak üzere; $K_{1,\ldots,1,m}$ grafı komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır.

Lemma 1.4. [1,2] $n \times n$ tipindeki A ve B matrisleri için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) A ve B aynı spektruma sahiptir.
(ii) A ve B aynı karakteristik polinoma sahiptir.
(iii) $i=1,\ldots,n$ olmak üzere $iz(A^i) = iz(B^i)$ dir.

Lemma 1.5. [4] s ve t pozitif tamsayılar olsun. İki parçalı tam $K_{s,t}$ grafının komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $s+t$ toplamının en küçük değeri alması koşuluyla $n = st$ olacak biçimde s ve t çarpanlarına ayrılabilmesidir.

2. En Fazla İki Adet Özdeğeri -1 ve 0 dan Farklı Olan Graflar

En fazla iki adet özdeğeri (cebirsel katları da dahil olmak üzere) -1 ve 0 dan farklı olan tüm grafların kümesini S ile gösterelim. İzole bir nokta, bir grafın komşuluk spektrumunda sadece bir adet sıfır özdeğerin yer almasına yol açacağından, aşağıdaki lemmada izole nokta içermeyen $S' \subseteq S$ kümesi incelenecektir.

Lemma 2.1. Eğer $G \in S'$ ise G grafı aşağıdaki graflardan birine kesinlikle izomorftur. p,q,k,l,m,n pozitif tamsayıları için,

(i) K_pŮK_q öyle ki komşuluk spektrumu $\{p-1, q-1, -1^{p+q-2}\}$
(ii) $K_{l,n}$ öyle ki komşuluk spektrumu $\{\mp\sqrt{ln},\ 0^{l+n-2}\}$
(iii) Bir adet nokta içeren parçaların sayısı k olmak üzere; $K_{1,\ldots,1,m}$ öyle ki komşuluk spektrumu $\{\frac{k-1\pm\sqrt{(k-1)^2-4km}}{2}, -1^{k-1},\ 0^{m-1}\}$

İspat: Eğer $G \in S'$ ise $a,b \in \mathbb{R}-\{-1,0\}$ olmak üzere $spec(G)=\{-1^f, 0^g, a, b\}$ biçimindedir. Burada f ve g sırasıyla -1 ve 0 özdeğerlerinin cebirsel katlarıdır. G en az bir pozitif komşuluk özdeğerine sahip olmak zorunda olduğundan, $a \geq b > 0$ ya da $a > 0 > b$ olmalıdır.

$a \geq b > 0$ iken inceleyelim. Bu durumda G grafının en küçük komşuluk özdeğeri -1 e eşit olacaktır. 3 noktalı yol graf için $\lambda_3(P_3) \cong -1.42$ olduğu için, Lemma 1.1'den G grafının herhangi bir bileşeni için P_3 grafı yasaklanmış bir alt graf olur. Dolayısıyla G grafının herhangi bir bileşenindeki herhangi 3 adet nokta birbirine komşu olmak zorundadır. Bu da G nin tüm bileşenlerinin birer tam graf olmasını gerektirir. Aynı zamanda G de sadece 2 adet pozitif özdeğer bulunduğundan, $p = a + 1$, $q = b + 1$, $f = p + q - 2$ ve $g = 0$ olmak üzere $G \cong K_p \mathring{U} K_q$ dir. Böylece $spec(G) = \{p-1, q-1, \ -1^{p+q-2}\}$ olur.

Şimdi de $a > 0 > b$ iken inceleyelim. Lemma 2.2'den, G çok parçalı tam graftır. Eğer G iki parçalı tam graf ise $-b = a = \sqrt{ln}, f = 0$ ve $g = l + n - 2$ olmak üzere $spec(G) = \{\mp\sqrt{ln}, \ 0^{l+n-2}\}$ olur. $c \geq 3$ için, G c-parçalı tam graf olsun. $K_{1,2,2}$ grafının negatif özdeğerleri {-2, -1.23607} olduğundan bu graf G grafının Lemma 1.1'e göre yasaklanmış bir alt grafıdır. Böylece G grafının 1den fazla noktaya sahip en fazla 1 adet parça içerebileceğini söyleriz. Buradan, bir adet nokta içeren parçaların sayısı k olmak üzere, $G \cong K_{1,\ldots,1,m}$ olur. Bu durumda $spec(G) = \{\frac{k-1\pm\sqrt{(k-1)^2-4km}}{2}, -1^{k-1}, \ 0^{m-1}\}$ elde edilir öyle ki burada $a = \frac{k-1+\sqrt{(k-1)^2-4km}}{2}$, $b = \frac{k-1-\sqrt{(k-1)^2-4km}}{2}$, $c = k+1, f = k-1$ ve $g = m-1$ dir.

Aşağıdaki sonuç yardımıyla S kümesi artık belirlenebilir.

Sonuç 2.2. $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olsun. O zaman $S = \{G\mathring{U}\alpha K_1 : G \in S'\}$ olur.

Lemma 1.3 ve Lemma 1.5 yardımıyla aşağıdaki sonuçta açıktır.

Sonuç 2.3. $G \in S$ olsun.

(i) Eğer G grafı iki parçalı tam bir grafı bileşen olarak içermiyorsa o zaman komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır.
(ii) G grafının bir bileşeni $K_{l,n}$ olsun. O zaman G grafının komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir bir graf olması için gerek ve yeter koşul $l + n$ toplamının en küçük değeri alması koşuluyla $x = ln$ olacak biçimde *l* ve *n* çarpanlarına ayrılabilmesidir.

3. En Fazla İki Adet Özdeğeri 1 ve 0 dan Farklı Olan Graflar

En fazla iki adet özdeğeri (cebirsel katları da dahil olmak üzere) 1 ve 0 dan farklı olan tüm grafların kümesini H ile gösterelim. İzole bir nokta, bir grafın komşuluk spektrumunda sadece bir adet sıfır özdeğerin yer almasına yol açacağından, aşağıdaki lemmada izole nokta içermeyen $H' \subseteq H$ kümesi incelenecektir.

Lemma 3.1. Eğer $G \in H'$ ise G grafı aşağıdaki graflardan birine kesinlikle izomorftur. l, n pozitif tamsayıları için,

(i) $\alpha \in \{1,2\}$ olmak üzere αK_2 öyle ki komşuluk spektrumu $\{-1^{\alpha}, \ 1^{\alpha}\}$
(ii) $K_{l,n}$ öyle ki komşuluk spektrumu $\{\mp\sqrt{ln}, \ 0^{l+n-2}\}$

İspat: $G \in H'$ olsun. O zaman $spec(G) = \{1^f, 0^g, a, b\}$ olacak biçimde $a, b \in \mathbb{R} - \{1,0\}$ vardır öyle ki burada f ve g sırasıyla 1 ve 0 özdeğerlerinin cebirsel katlarıdır. Buna göre, a ve b sayıları için üç durum söz konusudur; $0 < b \leq a$, $b \leq a < 0$ ya da $b < 0 < a$. Lemma 1.4'ten,

$$iz(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(G) = 0 \qquad (2)$$

elde edilir. Buradan,

$$a + b + f = 0 \qquad (3)$$

olur. Dolayısıyla a ve b sayılarının aynı anda pozitif olması mümkün değildir.

$b \leq a < 0$ iken inceleyelim. Bu durumda, G grafını pozitif özdeğerlerinin hepsi 1dir. Bu da G nin tüm bileşenlerinin K_2 grafına izomorf olması demektir. En fazla iki adet özdeğeri 1 ve 0 dan farklı olduğundan, G grafı $K_2 (= K_{1,1})$ ya da $K_2 \mathring{U} K_2$ $(= 2K_2)$ grafına izomorf olur.

$b < 0 < a$ iken inceleyelim. Bu durumda G grafının yalnızca bir adet negatif özdeğeri vardır. K_3 tam grafı ve P_4 yol grafı iki adet negatif özdeğere sahip olduklarından Lemma 1.1'e göre G grafı için yasaklanmış alt graf olurlar. Böylece çizilebilecek izole nokta içermeyen graf yalnızca çok parçalı tam graf olduğundan, G grafı çok parçalı bir tam graftır. Lemma 1.2'ye göre çok parçalı bir tam graf yalnızca bir adet pozitif özdeğer içerebileceğinden f=0 elde edilir ve aynı zamanda G grafının yalnızca bir adet negatif özdeğeri bulunduğundan G iki parçalı bir tam graf olacaktır.

Aşağıdaki sonuç yardımıyla H kümesi artık belirlenebilir.

Sonuç 3.2. $\beta \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olsun. O zaman $H = \{G\mathring{U}\beta K_1 : G \in H'\}$ olur.

Sonuç 2.3 e benzer şekilde H kümesi için de aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3. $G \in H$ olsun.

(i) Eğer G grafı iki parçalı tam bir grafı bileşen olarak içermiyorsa o zaman komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır.
(ii) G grafının bir bileşeni $K_{l,n}$ olsun. O zaman G grafının komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir

bir graf olması için gerek ve yeter koşul $l+n$ toplamının en küçük değeri alması koşuluyla $x = ln$ olacak biçimde l ve n çarpanlarına ayrılabilmesidir.

4. En Fazla İki Adet Özdeğeri ±1 ve 0 dan Farklı Olan Graflar

En fazla iki adet özdeğeri (cebirsel katları da dahil olmak üzere) ±1 ve 0 dan farklı olan ve izole nokta içermeyen tüm grafların kümesini W ile gösterelim. $W' \subseteq W$ ile de ±1 ve 0 dan farklı olan özdeğerleri aynı işarete sahip olan grafların kümesini gösterelim. Buna göre aşağıdaki lemmada $W\ '$ kümesi incelenecektir.

Lemma 4.1. Eğer $G \in W'$ ise G grafı aşağıdaki graflardan birine kesinlikle izomorftur. l, n pozitif tamsayıları için,

(i) αK_2 öyle ki komşuluk spektrumu $\{-1^{\alpha},\ 1^{\alpha}\}$
(ii) K_pŮK_q öyle ki komşuluk spektrumu $\{p-1, q-1, -1^{p+q-2}\}$

İspat: G grafının spektrumunu $\{-1^f, 1^g, 0^h, a, b\}$ biçiminde gösterelim. Burada $G \in W'$ olduğundan, a ve b aynı anda pozitif ya da aynı anda negatiftir. Her ikisi de pozitif ise G nin en küçük özdeğeri -1 olacaktır. Bu da G nin herhangi bir 3 noktalı alt grafının tam graf olduğunu dolayısıyla da G nin olası bileşenlerinin birer tam graf olduğunu gösterir. Eğer a ve b nin her ikisi de negatif ise G grafının en büyük özdeğeri 1 olacaktır. Bu da G grafının bileşenlerinin yalnızca K_2 lerden oluştuğunu gösterir.

Sonuç 4.1. $G \in W'$ olsun. Buna göre G grafı komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır.

5. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada en fazla iki adet özdeğeri -1,0 ya da 1,0'dan farklı olan grafların sınıflandırılması ve komşuluk spektrumlarına göre belirlenebilir olup olmadıkları üzerinde durulmuştur. Literatürde de en fazla iki adet özdeğer baz alınarak yapılmış çalışmalar mevcuttur [7,9,10]. Bu çalışmaların üç ya da daha fazla sayıda özdeğer baz alınarak yapılması, mevcut sınıflandırmaların daha geniş bir bakış açısıyla yapılabilmesine imkan tanıyacaktır. Aynı zamanda da daha geniş kümeler elde edilebileceği açıktır. Bu kümelerin spektrumlarına göre belirlenebilir olup olmadıklarının incelenmesi ise literatüre büyük katkı sağlayacaktır. Dolayısıyla, "En fazla 3 adet özdeğeri 1,0'dan farklı olan grafların sınıflandırılıp spektrumlarına göre belirlenebilir olup olmadıklarının incelenmesi" ve "En fazla 3 adet özdeğeri -1,0'dan farklı olan grafların sınıflandırılıp spektrumlarına göre belirlenebilir olup olmadıklarının incelenmesi" öncelikle incelenebilecek birer açık problemdir.

Teşekkür

Bu çalışma TÜBİTAK-ARDEB 117F489 no'lu proje kapsamında desteklenmiş ve üretilmiştir.

Kaynakça

[1] van Dam, E.R., Haemers, W.H. 2003. Which graphs are determined by their spectrum?. Linear Algebra and its Applications,373,241-272.

[2] Cvetkovic, D., Doob, M., Sachs, H. 1982. Spectra of graphs. Academic Press, 22s, 156s,New York.

[3] van Dam, E.R., Haemers, W.H. 2009. Developments on spectral characterizations of graphs. Discrete Mathematics, 309(3), 576-586.

[4] Ma, H., Ren, H. 2010. On the spectral characterization of the union of complete multipartite graph and some isolated vertices. Discrete Mathematics, 310, 3648-3652.

[5] Wang, J.F., Belardo, F., Huang, Q.X., Borovicanin, B. 2010. On the two largest Q-eigenvalues of graphs. Discrete Mathematics, 310, 2858-2866.

[6] Smith, J.H. 1970. Some properties of the spectrum of a graph. Combinatorial structures and their applications, Gordon and Breach, New York, 403-406.

[7] de Lima, L.S., Mohammedian, A., Oliveira, C.S. 2017. The non-bipartite graphs with all but two eigenvalues in [-1,1]. Linear and Multilinear Algebra, 65(3), 526-544.

[8] Camara, M., Haemers, W.H. 2014. Spectral characterization of almost complete graphs. Discrete Applied Mathematics, 176, 19-23.

[9] Cioaba, S.M., Haemers, W.H., Vermette, J.D. 2017. The graphs with all but two eigenvalues equal to -2 or 0. Designs, Codes and Cryptography, 84, 153-163.

[10] Cioaba, S.M., Haemers, W.H., Vermette, J.D., Wong, W. 2015. The graphs with all but two eigenvalues equal to ±1. Journal of Algebraic Combinatorics, 41, 887-897.

[11] Haemers, W.H., Liu X., Zhang, Y. 2008. Spectral characterizations of lolipop graphs. Linear Algebra and its Applications, 428(11-12), 2415-2423.