

**T.C.**  
**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GEW VE GRLW DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR**  
**YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan**  
**Halil ZEYBEK**

**Tez Danışmanı**  
**Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ**

**Matematik Anabilim Dalı**  
**Doktora Tezi**

**Mayıs 2016**  
**NEVŞEHİR**



**T.C.**  
**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GEW VE GRLW DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR**  
**YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan**  
**Halil ZEYBEK**

**Tez Danışmanı**  
**Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ**

**Matematik Anabilim Dalı**  
**Doktora Tezi**

**Mayıs 2016**  
**NEVŞEHİR**

Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ danışmanlığında Halil ZEYBEK tarafından hazırlanan “GEW ve GRLW Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Sayısal Çözümleri” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

23 / 05 / 20.16

## JÜRİ

Başkan

Prof. Dr. Hamza EROL



Üye

Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ



Üye

Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ



Üye

Doç. Dr. Yasin YAZLIK



Üye

Yrd. Doç. Dr. Turabi GEYİKLİ



ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 23.05.2016 . tarih ve . 20 - 181 . . . sayılı kararı ile onaylanmıştır.

24 / 05 / 20.16



## TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin, bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Halil ZEYBEK

## TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerimi benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, aynı zamanda kişilik olarak da bana çok şey katan Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ'a,

Tezin türkçe yazım ve imla kurallarına uygunluğunu kontrol eden ve gerekli düzeltmeleri yapan Türk Dili ve Edebiyatı öğretmeni eşim Ayşe ZEYBEK'e,

Dikkatli okumaları, değerli yorumları ve önerileri için JÜRİ ÜYELERİ'ne,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Rektörlüğü'ne, Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanlığı'na, Matematik Bölüm Başkanlığı'na ve Doktora Tezime verdiği desteklerinden dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi BAP Birimi'ne içten teşekkür ederim.

**GEW VE GRLW DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE  
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ  
(Doktora Tezi)**

**Halil ZEYBEK**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Mayıs 2016**

**ÖZET**

Bu tez çalışmasında, GEW ve GRLW denklemleri, B-spline fonksiyonlar kullanılarak kollokasyon ve Galerkin sonlu elemanlar yöntemleri ile sayısal olarak çözüldü. Von-Neumann tekniği kullanılarak, lineerleştirilmiş algoritmaların şartsız kararlı olduğu gösterildi. Sayısal algoritmalar; tek solitary dalga, iki ve üç solitary dalganın etkileşimi, Maxwellian başlangıç şartı ile dalga oluşumu ve ardışık dalgaların gelişimini içeren örneklere uygulanarak test edildi. Sayısal algoritmaların performansını kanıtlamak için,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları hesaplandı ve daha önce elde edilen sayısal sonuçlarla karşılaştırıldı. Sayısal algoritmaların kütle, momentum ve enerji ile ilgili özellikleri koruduğunu göstermek için  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  ile ifade edilen korunum sabitlerindeki değişim hesaplandı. Ayrıca, solitary dalgaların farklı zamanlardaki hareketleri grafik çizilerek gösterildi.

Tez, beş bölüm olarak tasarlandı. Tezin birinci bölümünde; GEW ve GRLW denklemleri tanıtıldı, bu denklemler için kapsamlı bir literatür araştırması yapıldı. İkinci bölümde, B-spline fonksiyonlar ve özellikleri, beş farklı lineerleştirme tekniği, dalga teorisi ve sonlu elemanlar yöntemi tanıtıldı. Tezin üçüncü ve dördüncü bölümü ana metin olarak inşa edildi. Üçüncü bölümde, GEW denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözümleri elde edildi. GRLW denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile yaklaşık çözümleri ise dördüncü bölümde verildi. Son bölüm olan beşinci bölümde ise, elde edilen sonuçlar ve öneriler sunuldu.

**Anahtar kelimeler:** *GRLW denklemleri, GEW denklemleri, Sonlu elemanlar yöntemi, B-spline, Solitary dalgalar.*

**Tez Danışman:** Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ

**Sayfa Adeti:** 149

**NUMERICAL SOLUTIONS OF THE GEW AND GRLW EQUATIONS USING  
FINITE ELEMENT METHOD**

**(Ph. D. Thesis)**

**Halil ZEYBEK**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**May 2016**

**ABSTRACT**

In this thesis work, GEW and GRLW equations are solved numerically by collocation and Galerkin finite element methods using B-spline functions. Using the von-Neumann technique, it is shown that the linearized algorithms are unconditionally stable. The numerical algorithms are tested by applying examples including the single solitary wave, the interaction of two and three solitary waves, the wave generation with Maxwellian initial condition and the development of an undular bore. To prove the performance of the numerical algorithms,  $L_2$  and  $L_\infty$  error norms are computed and they are compared with the earlier numerical results. In order to show that the numerical algorithms conserves the properties related to mass, momentum and energy, the change in conservative quantities represented by  $I_1$ ,  $I_2$  and  $I_3$  is calculated. Also, the motions of solitary waves are described at different times.

Thesis is designed as a five chapter. In the first part of thesis, GEW and GRLW equations are introduced, a comprehensive literature search for these equations is made. In the second chapter, B-spline functions and its properties, five different linearization techniques, wave theory and finite element method are presented. The third and fourth part of thesis are constructed as a main text. In the third chapter, the numerical solutions of the GEW equation are obtained by finite element method. The approximate solutions of the GRLW equation with finite element method are given in the fourth chapter. In last section, Section 5, the obtained results and the suggestions are offered.

**Keywords:** *GRLW equation, GEW equation, Finite element method, B-spline, Solitary waves.*

**Thesis Supervisor:** Asst. Prof. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ

**Page Number:** 149



## İÇİNDEKİLER

KABÜL VE ONAY SAYFASI . . . . .	I
TEZ BİLDİRİM SAYFASI . . . . .	II
TEŞEKKÜR . . . . .	III
ÖZET . . . . .	IV
ABSTRACT . . . . .	V
İÇİNDEKİLER . . . . .	VI
TABLolar LİSTESİ . . . . .	VIII
ŞEKİLLER LİSTESİ . . . . .	XII
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ . . . . .	XV
1 GİRİŞ . . . . .	1
2 TEMEL BİLGİLER . . . . .	7
2.1 B-spline Fonksiyonlar ve Özellikleri . . . . .	7
2.1.1 Kübik B-spline fonksiyonlar . . . . .	8
2.1.2 Kuintik B-spline fonksiyonlar . . . . .	10
2.1.3 Septik B-spline fonksiyonlar . . . . .	13
2.2 Lineerleştirme Teknikleri . . . . .	16
2.2.1 Normal lineerleştirme tekniği . . . . .	16
2.2.2 İki nokta lineerleştirme tekniği . . . . .	16
2.2.3 Üç nokta lineerleştirme tekniği . . . . .	17
2.2.4 Rubin-Graves lineerleştirme tekniği . . . . .	17
2.2.5 Caldwell-Smith lineerleştirme tekniği . . . . .	18
2.3 Dalga, Solitary Dalga ve Soliton . . . . .	19
2.4 Sonlu Elemanlar Yöntemi . . . . .	23
3 GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA (GEW) DENKLEMİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ . . . . .	26
3.1 GEW Denklemine Septik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü . . . . .	26
3.1.1 Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü . . . . .	32
3.1.2 Lineer kararlılık analizi . . . . .	33
3.1.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar . . . . .	34
3.1.3.1 Tek solitary dalganın hareketi . . . . .	34
3.1.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi . . . . .	39
3.1.3.3 Maxwellian başlangıç şartı . . . . .	43
3.2 GEW Denklemine Kuintik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü . . . . .	46
3.2.1 Thomas algoritması ile penta-diagonal matris sisteminin çözümü . . . . .	51
3.2.2 Lineer kararlılık analizi . . . . .	52

3.2.3	Sayısal örnekler ve sonuçlar . . . . .	52
3.2.3.1	Tek solitary dalganın hareketi . . . . .	53
3.2.3.2	İki solitary dalganın etkileşimi . . . . .	59
3.2.3.3	Maxwellian başlangıç şartı . . . . .	63
3.3	GEW Denklemının Kübik B-spline Galerkin Yöntemi ile Sayısal Çözümü . . . . .	65
3.3.1	Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü . . . . .	71
3.3.2	Lineer kararlılık analizi . . . . .	71
3.3.3	Sayısal örnekler ve sonuçlar . . . . .	72
3.3.3.1	Tek solitary dalganın hareketi . . . . .	73
3.3.3.2	İki solitary dalganın etkileşimi . . . . .	77
3.3.3.3	Üç solitary dalganın etkileşimi . . . . .	80
4	GENELLEŞTİRİLMİŞ DÜZENLENMİŞ UZUN DALGA (GRLW) DENKLEMİNİN SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ . . . . .	83
4.1	GRLW Denklemının Septik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü . . . . .	83
4.1.1	Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü . . . . .	89
4.1.2	Lineer kararlılık analizi . . . . .	90
4.1.3	Sayısal örnekler ve sonuçlar . . . . .	91
4.1.3.1	Tek solitary dalganın hareketi . . . . .	92
4.1.3.2	İki solitary dalganın etkileşimi . . . . .	97
4.1.3.3	Maxwellian başlangıç şartı . . . . .	101
4.2	GRLW Denklemının Kuintik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü . . . . .	104
4.2.1	Thomas algoritması ile penta-diagonal matris sisteminin çözümü . . . . .	108
4.2.2	Lineer kararlılık analizi . . . . .	109
4.2.3	Sayısal örnekler ve sonuçlar . . . . .	110
4.2.3.1	Tek solitary dalganın hareketi . . . . .	110
4.2.3.2	İki solitary dalganın etkileşimi . . . . .	115
4.2.3.3	Ardışık dalgaların gelişimi . . . . .	118
4.3	GRLW Denklemının Kübik B-spline Galerkin Yöntemi ile Sayısal Çözümü . . . . .	120
4.3.1	Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü . . . . .	126
4.3.2	Lineer kararlılık analizi . . . . .	126
4.3.3	Sayısal örnekler ve sonuçlar . . . . .	127
4.3.3.1	Tek solitary dalganın hareketi . . . . .	128
4.3.3.2	İki solitary dalganın etkileşimi . . . . .	133
4.3.3.3	Ardışık dalgaların gelişimi . . . . .	135
5	SONUÇLAR VE ÖNERİLER . . . . .	138
	KAYNAKLAR . . . . .	139
	ÖZGEÇMİŞ . . . . .	147

## TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 2.1	$\phi_m, \phi'_m$ ve $\phi''_m$ in düğüm noktalarındaki değerleri . . . . .	8
Tablo 2.2	$\phi_m, \phi'_m, \phi''_m(x), \phi'''_m$ ve $\phi_m^{(iv)}$ in düğüm noktalarındaki değerleri . . . . .	11
Tablo 2.3	$\phi_m, \phi'_m, \phi''_m(x), \phi'''_m, \phi_m^{(iv)}, \phi_m^{(v)}$ ve $\phi_m^{(vi)}$ in düğüm noktalarındaki değerleri . . . . .	14
Tablo 2.4	Cebirsel denklemin özellikleri . . . . .	24
Tablo 3.1	Tek solitary dalganın $p = 2, gen. = 0.25, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	36
Tablo 3.2	Tek solitary dalganın $p = 2, gen. = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	37
Tablo 3.3	Tek solitary dalganın $p = 3, gen. = 0.15, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	37
Tablo 3.4	Tek solitary dalganın $p = 3, gen. = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	38
Tablo 3.5	Tek solitary dalganın $p = 4, gen. = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	38
Tablo 3.6	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4; h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması . . . . .	39
Tablo 3.7	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2, gen. = 1, 0.5, h = 0.1, \Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri . . . . .	41
Tablo 3.8	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3, gen. = 1, 0.5, h = 0.1, \Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri . . . . .	41
Tablo 3.9	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 4, gen. = 1, 0.5, h = 0.1, \Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri . . . . .	42
Tablo 3.10	Maxwellian başlangıç şartı ve $h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $x \in [-20, 20]$ için korunum sabitleri . . . . .	44
Tablo 3.11	Tek solitary dalganın $p = 2, gen. = 0.25, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	54
Tablo 3.12	Tek solitary dalganın $p = 2, gen. = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	54
Tablo 3.13	Tek solitary dalganın $p = 3, gen. = 0.15, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	55
Tablo 3.14	Tek solitary dalganın $p = 3, gen. = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	55

Tablo 3.15	Tek solitary dalganın $p = 4$ , $gen. = 1$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	55
Tablo 3.16	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$ ; $t = 20$ ve $x \in [0, 80]$ için farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri . . . . .	57
Tablo 3.17	Tek solitary dalganın $p = 6, 8, 10$ ; $t = 20$ ve $x \in [0, 80]$ için farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri . . . . .	57
Tablo 3.18	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$ ; $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.2$ , $t = 20$ ve $x \in [0, 80]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması . . . . .	58
Tablo 3.19	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$ , $gen. = 1, 0.5$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri . . . . .	61
Tablo 3.20	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3$ , $gen. = 1, 0.5$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri . . . . .	61
Tablo 3.21	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 4$ , $gen. = 1, 0.5$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri . . . . .	61
Tablo 3.22	Maxwellian başlangıç şartı ve $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [-20, 20]$ için korunum sabitleri . . . . .	63
Tablo 3.23	Tek solitary dalganın $p = 2$ , $gen. = 0.25$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	74
Tablo 3.24	Tek solitary dalganın $p = 2$ , $gen. = 1$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	74
Tablo 3.25	Tek solitary dalganın $p = 3$ , $gen. = 0.15$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	75
Tablo 3.26	Tek solitary dalganın $p = 3$ , $gen. = 1$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	75
Tablo 3.27	Tek solitary dalganın $p = 4$ , $gen. = 1$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	75
Tablo 3.28	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$ ; $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.2$ , $t = 20$ ve $x \in [0, 80]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması . . . . .	76
Tablo 3.29	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$ , $gen. = 1, 0.5$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri . . . . .	78
Tablo 3.30	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3$ , $gen. = 1, 0.5$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri . . . . .	78
Tablo 3.31	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 4$ , $gen. = 1, 0.5$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri . . . . .	79

Tablo 3.32	Üç solitary dalganın etkileşiminin $p = 2, 3, 4$ ; $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri . . . . .	81
Tablo 4.1	Tek solitary dalganın $p = 2$ , $gen. = 1$ , $h = 0.2$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	94
Tablo 4.2	Tek solitary dalganın $p = 2$ , $gen. = 0.54772$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	94
Tablo 4.3	Tek solitary dalganın $p = 3$ , $gen. = 1$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	94
Tablo 4.4	Tek solitary dalganın $p = 3$ , $gen. = 0.6$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	95
Tablo 4.5	Tek solitary dalganın $p = 4$ , $gen. = 1$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	95
Tablo 4.6	Tek solitary dalganın $p = 4$ , $gen. = 0.6$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	95
Tablo 4.7	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$ ; $t = 10$ ve $x \in [0, 100]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması . . . . .	96
Tablo 4.8	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$ , $gen. = 2, 1$ , $h = 0.2$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 250]$ için korunum sabitleri . . . . .	98
Tablo 4.9	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3$ , $gen. = 2, 1$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 120]$ için korunum sabitleri . . . . .	99
Tablo 4.10	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 4$ , $gen. = 2, 1$ , $h = 0.125$ , $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 200]$ için korunum sabitleri . . . . .	99
Tablo 4.11	Maxwellian başlangıç şartı ve $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [-20, 60]$ için korunum sabitleri . . . . .	102
Tablo 4.12	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$ ; $c = 0.1, 0.3$ , $h = 0.2$ , $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	111
Tablo 4.13	Tek solitary dalganın $p = 6, 8, 10$ ; $c = 0.1, 0.3$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	112
Tablo 4.14	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$ ; $t = 20$ ve $x \in [0, 100]$ için farklı konum ve zaman adımıdaki hata norm değerleri . . . . .	113
Tablo 4.15	Tek solitary dalganın $p = 6, 8, 10$ ; $t = 20$ ve $x \in [0, 100]$ için farklı konum ve zaman adımıdaki hata norm değerleri . . . . .	114
Tablo 4.16	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$ ve $x \in [0, 100]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması . . . . .	114

Tablo 4.17	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$ , $gen. = 2,1$ , $h = 0.2$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 250]$ için korunum sabitleri . . . . .	116
Tablo 4.18	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3,4$ ve $gen. = 2,1$ için korunum sabitleri . . . . .	116
Tablo 4.19	Ardışık dalgaların gelişimi ve $U_0 = 0.1$ , $x_0 = 0$ , $d = 5$ , $\mu = 1/6$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.1$ , $x \in [-36, 300]$ için korunum sabitleri . . . . .	118
Tablo 4.20	Tek solitary dalganın $p = 2$ , $gen. = 1$ , $h = 0.2$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	129
Tablo 4.21	Tek solitary dalganın $p = 2$ , $gen. = 0.54772$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	129
Tablo 4.22	Tek solitary dalganın $p = 3$ , $gen. = 1$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	129
Tablo 4.23	Tek solitary dalganın $p = 3$ , $gen. = 0.6$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	130
Tablo 4.24	Tek solitary dalganın $p = 4$ , $gen. = 1$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	131
Tablo 4.25	Tek solitary dalganın $p = 4$ , $gen. = 0.6$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri . . . . .	131
Tablo 4.26	Tek solitary dalganın $p = 2,3,4,6,8,10$ , $c = 0.03,0.1$ , $h = 0.1$ , $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için hata norm değerleri . . . . .	132
Tablo 4.27	Tek solitary dalganın $p = 2,3,4$ ve $x \in [0, 100]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması . . . . .	132
Tablo 4.28	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$ , $gen. = 2,1$ , $h = 0.2$ , $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 250]$ için korunum sabitleri . . . . .	133
Tablo 4.29	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3,4$ ve $gen. = 2,1$ için korunum sabitleri . . . . .	134
Tablo 4.30	Ardışık dalgaların gelişimi için korunum sabitleri . . . . .	136

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1	Kübik B-spline şekil fonksiyonları . . . . .	9
Şekil 2.2	Kuintik B-spline şekil fonksiyonları . . . . .	11
Şekil 2.3	Septik B-spline şekil fonksiyonları . . . . .	14
Şekil 2.4	Bir su dalgasının hareketi . . . . .	20
Şekil 2.5	İki solitary dalganın farklı zamanlardaki hareketi . . . . .	22
Şekil 2.6	Sonlu elemanlar yaklaşımı . . . . .	23
Şekil 3.1	Tek solitary dalganın $p = 3$ , $gen. = 1$ , $x_0 = 30$ , $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi . . . . .	37
Şekil 3.2	Tek solitary dalganın $p = 4$ , $gen. = 1$ , $x_0 = 30$ , $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi . . . . .	38
Şekil 3.3	İki solitary dalganın $p = 3$ ; a) $t = 0$ , b) $t = 50$ , c) $t = 70$ , d) $t = 100$ 'deki hareketi . . . . .	42
Şekil 3.4	İki solitary dalganın $p = 4$ ; a) $t = 0$ , b) $t = 50$ , c) $t = 70$ , d) $t = 100$ 'deki hareketi . . . . .	43
Şekil 3.5	Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 3$ , $t = 12$ ; a) $\mu = 0.1$ , b) $\mu = 0.05$ , c) $\mu = 0.025$ , d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu . . . . .	45
Şekil 3.6	Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 4$ , $t = 12$ ; a) $\mu = 0.1$ , b) $\mu = 0.05$ , c) $\mu = 0.025$ , d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu . . . . .	45
Şekil 3.7	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$ , $c = 0.3$ , $x_0 = 30$ , $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi . . . . .	59
Şekil 3.8	İki solitary dalganın $p = 3$ ; a) $t = 0$ , b) $t = 50$ , c) $t = 70$ , d) $t = 100$ 'deki hareketi . . . . .	62
Şekil 3.9	İki solitary dalganın $p = 4$ ; a) $t = 0$ , b) $t = 50$ , c) $t = 70$ , d) $t = 100$ 'deki hareketi . . . . .	62
Şekil 3.10	Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 3$ , $t = 12$ ; a) $\mu = 0.1$ , b) $\mu = 0.05$ , c) $\mu = 0.025$ , d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu . . . . .	64
Şekil 3.11	Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 4$ , $t = 12$ ; a) $\mu = 0.1$ , b) $\mu = 0.05$ , c) $\mu = 0.025$ , d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu . . . . .	64
Şekil 3.12	Tek solitary dalganın $p = 3$ ve $c = 0.3$ , $x_0 = 30$ , $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi . . . . .	76

Şekil 3.13	Tek solitary dalganın $p = 4$ ve $c = 0.2$ , $x_0 = 30$ , $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi . . . . .	77
Şekil 3.14	İki solitary dalganın $p = 3$ ; a) $t = 10$ , b) $t = 50$ , c) $t = 70$ , d) $t = 100$ 'deki hareketi . . . . .	79
Şekil 3.15	İki solitary dalganın $p = 4$ ; a) $t = 10$ , b) $t = 50$ , c) $t = 70$ , d) $t = 100$ 'deki hareketi . . . . .	80
Şekil 3.16	Üç solitary dalganın $p = 3$ ; a) $t = 10$ , b) $t = 30$ , c) $t = 40$ , d) $t = 100$ 'deki hareketi . . . . .	82
Şekil 3.17	Üç solitary dalganın $p = 4$ ; a) $t = 10$ , b) $t = 20$ , c) $t = 40$ , d) $t = 120$ 'deki hareketi . . . . .	82
Şekil 4.1	Tek solitary dalganın $p = 3$ , $gen. = 1$ , $x_0 = 40$ , $x \in [0, 100]$ için $t = 0, 5, 10$ 'daki hareketi . . . . .	96
Şekil 4.2	Tek solitary dalganın $p = 4$ , $gen. = 1$ , $x_0 = 40$ , $x \in [0, 100]$ için $t = 0, 5, 10$ 'daki hareketi . . . . .	97
Şekil 4.3	İki solitary dalganın $p = 3$ ; a) $t = 0$ , b) $t = 3$ , c) $t = 5$ , d) $t = 6$ 'daki hareketi . . . . .	100
Şekil 4.4	İki solitary dalganın $p = 4$ ; a) $t = 0$ , b) $t = 2$ , c) $t = 4$ , d) $t = 6$ 'daki hareketi . . . . .	100
Şekil 4.5	Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 3$ , $t = 6$ ; a) $\mu = 0.1$ , b) $\mu = 0.05$ , c) $\mu = 0.025$ , d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu . . . . .	103
Şekil 4.6	Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 4$ , $t = 6$ ; a) $\mu = 0.1$ , b) $\mu = 0.05$ , c) $\mu = 0.025$ , d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu . . . . .	103
Şekil 4.7	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$ , $c = 0.1$ , $x_0 = 40$ , $x \in [0, 100]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi . . . . .	115
Şekil 4.8	İki solitary dalganın $p = 3$ ; a) $t = 0$ , b) $t = 3$ , c) $t = 5$ , d) $t = 6$ 'daki hareketi . . . . .	117
Şekil 4.9	İki solitary dalganın $p = 4$ ; a) $t = 0$ , b) $t = 2$ , c) $t = 4$ , d) $t = 6$ 'daki hareketi . . . . .	117
Şekil 4.10	$p = 2$ ; a) $t = 50$ , b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi . . .	118
Şekil 4.11	$p = 3$ ; a) $t = 50$ , b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi . . .	119
Şekil 4.12	$p = 4$ ; a) $t = 50$ , b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi . . .	119
Şekil 4.13	Tek solitary dalganın a) $p = 2$ , b) $p = 3$ , c) $p = 4$ , d) $p = 6$ , e) $p = 8$ , f) $p = 10$ ve $c = 0.1$ , $x_0 = 40$ , $x \in [0, 100]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi . .	130



Şekil 4.14	İki solitary dalğanın $p = 3$ ; a) $t = 0$ , b) $t = 3$ , c) $t = 5$ , d) $t = 6$ 'daki hareketi . . . . .	134
Şekil 4.15	İki solitary dalğanın $p = 4$ ; a) $t = 0$ , b) $t = 2$ , c) $t = 4$ , d) $t = 6$ 'daki hareketi . . . . .	135
Şekil 4.16	$p = 2$ ; a) $t = 50$ , b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi . . .	136
Şekil 4.17	$p = 3$ ; a) $t = 50$ , b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi . . .	137
Şekil 4.18	$p = 4$ ; a) $t = 50$ , b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi . . .	137



## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

<b>KdV</b>	Korteweg-de Vries
<b>mKdV</b>	Modifiye edilmiş Korteweg-de Vries
<b>GKdV</b>	Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries
<b>EW</b>	Eşit genişlikli dalga
<b>MEW</b>	Modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga
<b>GEW</b>	Genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga
<b>RLW</b>	Düzenlenmiş uzun dalga
<b>MRLW</b>	Modifiye edilmiş düzenlenmiş uzun dalga
<b>GRLW</b>	Genelleştirilmiş düzenlenmiş uzun dalga
<b>KdVB</b>	Korteweg-de Vries Burgers'
<b>K-S</b>	Kuramoto-Sivashinsky
<b>GNLS</b>	Genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger
<b>CMKdV</b>	Kompleks modifiye edilmiş Korteweg-de Vries
<b>BST</b>	Boussinesq sistemi tipi

# 1. BÖLÜM

## GİRİŞ

Lineer olmayan dalga olgusu pek çok fiziksel olayı anlamada önemli bir yere sahiptir. Değişen derinlikteki suda, uzun dalgalar hareket denklemleriyle modellenir. Küçük genlikli dalgalar için tanımlanan bu denklemler, lineer olmayan terimlere sahiptir. İlk olarak, Peregrine, pozitif  $x$  yönündeki uzun dalgaların yayılımından elde edilen düzenlenmiş uzun dalga (RLW) denklemini, kanaldaki suyun yüzeyindeki küçük genlikli uzun dalgalar için bir model olarak geliştirmiştir [1,2]. Burada, Peregrine, bir uzun dalgadan ardışık dalgaların gelişimini incelemiştir. Ona göre, uzun dalganın yükseltisi sığ suda yol alırsa, dalga dikleşir ve delik oluşturur. Benjamin ve arkadaşları, RLW denklemini daha yaygın olarak bilinen Korteweg-de Vries (KdV) denklemine alternatif bir model olarak kullanmıştır [3]. KdV denklemini, lineer olmayan dağıtıcı ve pek çok diğer fiziksel sistemlerde, küçük dalga genliği ve geniş dalga uzunluğu varsayımıyla birlikte uzun dalgaları tanımlar. Daha sonra, aynı genişlikte hem pozitif hem de negatif genliğe sahip olan eşit genişlikli dalga (EW) denklemini, Morrison ve arkadaşları tarafından RLW denklemine alternatif bir model olarak önerilmiştir [4]. Bu yüzden RLW denklemine dayanan genelleştirilmiş düzenlenmiş uzun dalga (GRLW) denklemini, genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga (GEW) denklemini ve genelleştirilmiş Korteweg-de Vries (GKdV) denklemini ile ilgilidir. Bu denklemler  $(p + 1)$ . dereceden lineer olmayan dalga denklemleridir ve nabız atışına benzer solitary dalga çözümlere sahiptir [5].

GKdV denklemini,

$$U_t + \varepsilon U^p U_x + \mu U_{xxx} = 0; \quad (1.1)$$

GEW denklemini,

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0; \quad (1.2)$$

GRLW denklemini,

$$U_t + U_x + p(p + 1)U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (1.3)$$

şeklinde olup, burada fiziksel sınır şartları  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $U \rightarrow 0$ , alt indis  $t$  ve  $x$  zaman ve boyutsal türevi ifade eder,  $\varepsilon$  ve  $p$  pozitif tamsayıdır,  $\mu$  pozitif reel sabittir.

Sınır ve başlangıç şartları

$$\begin{aligned}U(a,t) = 0, \quad U_x(a,t) = 0, \quad U_{xxx}(a,t) = 0, \\U(b,t) = 0, \quad U_x(b,t) = 0, \quad U_{xxx}(b,t) = 0, \\U(x,0) = f(x), \quad a \leq x \leq b,\end{aligned}\tag{1.4}$$

olarak seçilecektir. Burada  $f(x)$ ; çalışılan  $[a, b]$  aralığındaki bölgesel düzensizliktir ve daha sonra belirlenecektir. Akışkanlar probleminde,  $U$  su yüzeyindeki düşey yer değiştirmeye veya benzer fiziksel büyüklükle ilgilidir. Plazma uygulamalarında ise,  $U$  negatif elektrostatik potansiyeli ifade eder. Bu yüzden, (1.1), (1.2) ve (1.3) ile verilen dalga denklemlerinin solitary dalga çözümleri, sıg sulara lineer olmayan enine dalgalar, plazmadaki iyon akustik ve manyetohidrodinamik dalgalar ve lineer olmayan kristallerdeki titrecik paketler gibi zayıf lineer olmama ve dağılımlı dalgalar ile birlikte pek çok fiziksel olgunun ne anlama geldiğini ortaya çıkarır.

Aslında EW denklemi (1.2) ile verilen GEW denkleminin  $p = 1$  için özel halidir. Şu ana kadar, EW denklemi pek çok analitik ve sayısal çözüm teknikleri kullanılarak çözülmüştür. Gardner ve Gardner, kübik B-spline fonksiyonlarla beraber Galerkin sonlu elemanlar yöntemini EW denkleminde uygulamıştır [6]. Yine kuadratik B-spline fonksiyonlarla beraber Petrov-Galerkin sonlu elemanlar yöntemi, Gardner ve arkadaşları tarafından kullanılmıştır [7]. Zaki, en küçük kareler sonlu elemanlar algoritmasını EW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için sunmuştur [8]. Doğan, lineer sonlu elemanlar kullanarak Galerkin yöntemi ile EW denklemini çözmüştür [9]. Kuadratik B-spline fonksiyonlar ile birlikte iki nokta Galerkin yöntemi, Esen tarafından EW denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır [10]. Saka, kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanarak aralık bölme ve Galerkin yöntemi ile EW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmiştir [11]. Dağ ve Saka, Raslan, Fazal-i-Haq; kübik, kuartik, septik B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon yöntemini kullanarak EW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir [12–14].

(1.2) ile verilen GEW denkleminde  $p = 2$  olarak alınırsa, elde edilen denklem modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga (MEW) denklemi olarak bilinir. MEW denklemi de pek çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Esen, iki nokta Galerkin yöntemini, kuadratik B-spline fonksiyonlarla birlikte MEW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için inşa etmiştir [15]. Saka, kollokasyon sonlu elemanlar yaklaşımını MEW denkleminde uygulamıştır [16]. İslam ve arkadaşları, kuartik B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon yöntemini kullanarak MEW denkleminin sayısal olarak çözmüştür [17]. Geyikli ve Karakoç, MEW denkle-

inin çözümü için septik B-spline kollokasyon yöntemini tanıtmıştır [18]. Ayrıca, kübik B-spline şekil fonksiyonlarıyla beraber iki nokta Galerkin ve Petrov-Galerkin yöntemi, MEW denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak için Karakoç ve Geyikli tarafından tasarlanmıştır [19,20].

Bu tez çalışmasında ele aldığımız ve Bölüm 3 de çözümünü sunduğumuz GEW denklemini ele alırsak, GEW denklemi üzerinde sınırlı sayıda çalışma yapıldığını görürüz. Hamdi ve arkadaşları, genelleştirilmiş EW ve genelleştirilmiş EW-Burgers denklemlerinin tam solitary dalga çözümünü elde etmişlerdir [21]. Evans ve Raslan, Raslan; GEW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için kuadratik ve kübik B-spline kollokasyon yöntemini sunmuşlardır [5, 22]. Roshan, deneme fonksiyonu olarak kuadratik B-spline fonksiyonunu kullanarak GEW denkleminin sayısal çözümleri için Petrov-Galerkin sonlu elemanlar yöntemini araştırmıştır [23]. Panahipour, RBF kollokasyon yöntemini kullanarak GEW denklemini sayısal olarak çözmüştür [24]. Taghizadeh ve arkadaşları, GEW denkleminin tam ilerleyen dalga çözümünü elde etmek için homojen dengeleme yöntemini kurmuşlardır [25].

RLW denklemi, (1.3) ile verilen GRLW denkleminde  $p = 1$  alınarak oluşturulur. Literatürde RLW denklemi üzerinde pek çok çalışma vardır. 1960'lerde, Peregrine, ardışık dalgaların gelişimi ile beraber RLW denklemini incelemiştir [1, 2]. Morrison ve arkadaşları, RLW denkleminin solitary dalgalarının dağılımı için yaklaşık analitik teknik yöntemleri araştırmışlardır [4]. Doğan, Gardner ve arkadaşları; lineer ve kuadratik B-spline fonksiyonlarla birlikte Galerkin yaklaşımını kullanmışlardır [26, 27]. RLW denklemi için kuadratik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak kollokasyon yöntemi, Raslan tarafından önerilmiştir [28]. Yine kübik, septik, kuintik, hem sektik hem de septik B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon algoritması kullanılarak RLW denklemi sayısal olarak çözülmüştür [29–32]. Kuintik ve kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin sonlu elemanlar yöntemi bir boyutlu RLW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır [33, 34]. Mei ve Chen, RLW denklemi için lineer B-splinelar kullanarak yeni Galerkin yöntemini dizayn etmişlerdir [35]. Daha sonra, parametrik kuintik splinelara dayanan von-Neumann tekniği kullanılarak RLW denklemi sayısal olarak çözülmüştür [36].

(1.3) ile verilen GRLW denkleminde  $p = 2$  olarak alınırsa elde edilen denklem, modifiye edilmiş düzenlenmiş uzun dalga (MRLW) denklemi olarak adlandırılır. Araştırmacılar tarafından MRLW denkleminin sayısal çözümleri kuintik, kübik, kuartik, septik B-spline

sonlu elemanlara dayanan kollokasyon yöntemi kullanılarak bulunmuştur [37–42]. Ali, örgüsüz kollokasyon yöntemini MRLW denkleminin sayısal çözümü için inşa etmiştir [43]. Yakın zamanlarda, Dağ ve arkadaşları, MRLW denkleminin sayısal çözümleri için genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlarını kullanarak kollokasyon algoritmasını kurmuştur [44]. Karakoç ve Yağmurlu, MRLW denklemine kübik B-spline ile birlikte Galerkin sonlu elemanlar yaklaşımını uygulamışlardır [45].

Bu tez çalışmasında ele aldığımız ve Bölüm 4 te çözümünü araştırdığımız GRLW denklemini ele alırsak, şu ana kadar GRLW denkleminin solitary dalga çözümleri, bazı tam ve sayısal çözüm teknikleri ile bulunmuştur. Bona ve arkadaşları, GRLW denkleminin hem kararlı hem kararsız solitary dalga çözümlerini elde etmişlerdir [46]. Kaya ve El-Sayed, genelleştirilmiş KdV ve genelleştirilmiş RLW denklemlerini, Adomian ayrışım yöntemini kullanarak tam ve sayısal olarak çözmüşlerdir [47]. Hamdi ve arkadaşları, GRLW denklemi ve onun daha basit alternatif modeli olan GEW denklemi için yeni bir tam çözüm yöntemi sunmuşlardır [48]. Ramos, ardışık dalgaların oluşumu üzerindeki başlangıç şartı ile beraber GRLW denkleminin solitary dalga çözümünü elde etmek için yaklaşık yarı lineerleştirme algoritmasını kullanmıştır [49]. Kaya, EL-Danaf ve arkadaşları, Guo ve arkadaşları; GRLW denkleminin sayısal davranışlarını incelemek için sırasıyla ayrışım yöntemini, sonlu fark yaklaşımını, elemansız kp-Ritz yöntemini uygulamışlardır [50–52]. Sonlu fark, He'nin değişimli tekrarlama, Meshfree, Petrov-Galerkin sonlu elemanlar, elemansız olma yaklaşımına ve  $2N$  mertebeden yoğunlaştırılmış sonlu fark algoritmalarına dayanan sayısal yöntemler GRLW denkleminin çözümü için tanıtılmıştır [53–58]. Mohammadi, üstel B-spline sonlu elemanlara dayanan kollokasyon algoritmasını kullanarak GRLW denkleminin sayısal sonuçlarını elde etmiştir [59].

Bu tez çalışmasında, GEW ve GRLW denklemlerinin çözümleri için önerdiğimiz B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi, daha önce farklı türden lineer olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır. Genelleştirilmiş Burgers–Fisher ve genelleştirilmiş Burgers–Huxley denklemleri, kübik B-spline kollokasyon algoritması kullanılarak çözülmüştür [60]. KdVB, kompleks modifiye edilmiş KdV, genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger ve genelleştirilmiş Rosenau-RLW denklemleri, kuintik B-spline kollokasyon yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür [61–64]. Kawahara denklemi ise septik B-spline kollokasyon yöntemi kullanılarak çözülmüştür [65].

Yine, GEW ve GRLW denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için uyguladığımız

B-spline fonksiyonlarla beraber, Galerkin sonlu elemanlar yöntemi farklı türden problemlere uygulanmıştır. Galerkin yaklaşımı, Gardner ve Gardner tarafından RLW denklemine [66]; Saka ve Dağ tarafından KdVB denklemine [67]; Kutluay ve Uçar tarafından birleştirilmiş KdV denklemine [68]; Esen ve arkadaşları tarafından kesirli difüzyon ve kesirli difüzyon dalga denklemlerine [69]; yine Kutluay ve Uçar tarafından birleştirilmiş modifiye edilmiş KdV denklemine [70]; Uçar ve arkadaşları tarafından iyileştirilmiş Boussinesq tipindeki denkleme uygulanmıştır [71].

Sonlu elemanlar yöntemi üzerinde yapılan tez çalışmalarına göz atıldığında farklı tipten denklemlere uygulandığını görebiliriz. Kuadratik ve kübik B-spline fonksiyonlar kullanarak Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile KdV denkleminin sayısal çözümleri Dağ tarafından elde edilmiştir [72]. Saka, RLW ve K-S denklemlerinin çözümü için kuadratik, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon yöntemini kullanmıştır [73]. Irk, kübik ve kuintik B-spline kollokasyon yöntemi ile GNLS denklemi, CMKdV denklemi ve BST denklem sisteminin çözümlerini vermiştir [74]. B-spline şekil fonksiyonlar kullanılarak Galerkin, Petrov-Galerkin, Subdomain ve Kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi, Uçar tarafından birleştirilmiş KdV ve birleştirilmiş mKdV denklemlerine; Karakoç tarafından MEW denklemine uygulanmıştır [75,76]. Yağmurlu yaptığı tez çalışmasında, 2-boyutlu Poisson, difüzyon ve kararsız Burgers denklemlerinin sayısal çözümleri için modifiye edilmiş Galerkin yöntemini kullanmıştır [77].

Bu çalışmada ele aldığımız GEW ve GRLW dalga denklemlerinin yapısına bakıldığında,  $(p + 1)$ . dereceden lineer olmayan terimlere sahip olduğu görülür. Bu denklemlerin varsa analitik çözümlerini bulmak en iyi tercihtir. Fakat ele alınan dalga denklemlerinin lineer olmayan terimlerinden dolayı bu ve buna benzer denklemlerin genelde analitik çözümlerini elde etmek zordur. Bu aşamada, yaklaşık analitik çözüm teknikleri devreye girer. Şayet bu da mümkün olmazsa, analitik olarak çözümü zor veya imkansız olan problemlerin çözülebilmesi için uygun ve en iyi yaklaşım olan sayısal çözüm teknikleri kaçınılmaz hale gelir. Bazı durumlarda da kısmen analitik kısmen de sayısal çözüm tekniklerinin karışımını uygulamak gerekebilir.

Literatürde yapılan çalışmaları ve benzer yapıdaki lineer olmayan denklemlere uygulanan yöntemlerle elde edilen sayısal sonuçlar incelenirse, sonlu elemanlar yönteminin doğru ve etkili bir sayısal algoritma olduğu görülür. Bu nedenle, bu tez çalışmasında GEW ve GRLW

dalga denklemlerinin yaklaşıık çözümlerini elde edebilmek için sonlu elemanlar yöntemi kullanıldı. Kollokasyon ve Galerkin sonlu elemanlar algoritması ile bu dalga denklemlerinin solitary dalga çözümleri elde edildi.





## 2. BÖLÜM

### TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, B-spline fonksiyonlar ve özellikleri, GEW ve GRLW denklemlerinin lineer olmayan terimi için uygulanabilecek çeşitli lineerleştirme teknikleri, dalga teorisi ve sonlu elemanlar yöntemi hakkında temel bilgiler verilecektir.

#### 2.1 B-spline Fonksiyonlar ve Özellikleri

Yaklaşık çözüm yöntemlerinin etkili olması için seçilecek olan yöntemle birlikte uygun fonksiyonlar seçmekte önemlidir. Bunun için araştırmacılar, genellikle özellikleri bilinen polinom fonksiyonları kullanmışlardır. Fakat, polinom fonksiyonlar kullanırken çok sayıda nokta (veya fonksiyon) kullanılması, yüksek dereceden polinomların düzgün ve istenilen yaklaşımı temsil etmeyen yüksek salınımlı davranış sergilemelerine ve hesaplama zorluklarına neden olmaktadır. Bu durumda, parçalı polinomlar kullanılarak bu tür problemlerin üstesinden gelmek mümkündür. Bunun için spline fonksiyonlar olarak adlandırılan parçalı polinomlar tanımlanmıştır. Spline fonksiyonlarla hem tanımlı bölge içindeki süreklilik sağlanmış olur hem de her bir aralıkta daha küçük dereceden polinomlarla yaklaşım yapma imkanı sağlanır. Spline fonksiyonların aşağıdaki genel olarak bilinen özellikleri verilmiştir;

- Uygun bazlarla birlikte sonlu boyutlu lineer uzay oluştururlar.
- Düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine spline fonksiyonlardır.
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar esnekler, yani keskin salınım yapmazlar.
- Spline fonksiyonlar kullanıldığında yakınsaklık ve kararlılık daha kolay araştırılabilir.
- Spline fonksiyonlar bilgisayarlarda işleme, hesaplama ve depolama açısından daha uyumlu fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar kullanıldığında ortaya çıkan matrisler uygun işaretlidir ve determinant özellikleri kolay hesaplanabilir.
- Spline fonksiyonlar ve türevleri aynı anda yaklaşık olarak hesaplanabilir.

### 2.1.1 Kübik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$  sonlu aralığı içine sınırlandırılmış bir çözüm bölgesini ele alalım.  $a = x_0 < x_1 \cdots < x_N = b$  ve aralık uzunluğu  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  olmak üzere,  $x_m$  noktalarıyla  $[a, b]$  aralığı  $N$  tane eşit alt aralığa bölünebilir. Prenter [78],  $\phi_m(x)$  kübik B-spline fonksiyonları,  $m = -1, 0, 1, \dots, N+1$  olmak üzere,  $x_m$  düğüm noktalarında aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}), \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m), \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}), \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.1)$$

$\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$  kümesi  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Burada,  $\phi_m$  kübik B-spline fonksiyonu ve türevleri  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığı dışında sıfır olarak tanımlanmıştır.  $\phi_m(x)$  ve onun  $\phi'_m(x)$  birinci merteye ve  $\phi''_m(x)$  ikinci merteye türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 2.1 de verilmiştir.

Tablo 2.1  $\phi_m$ ,  $\phi'_m$  ve  $\phi''_m$  in düğüm noktalarındaki değerleri

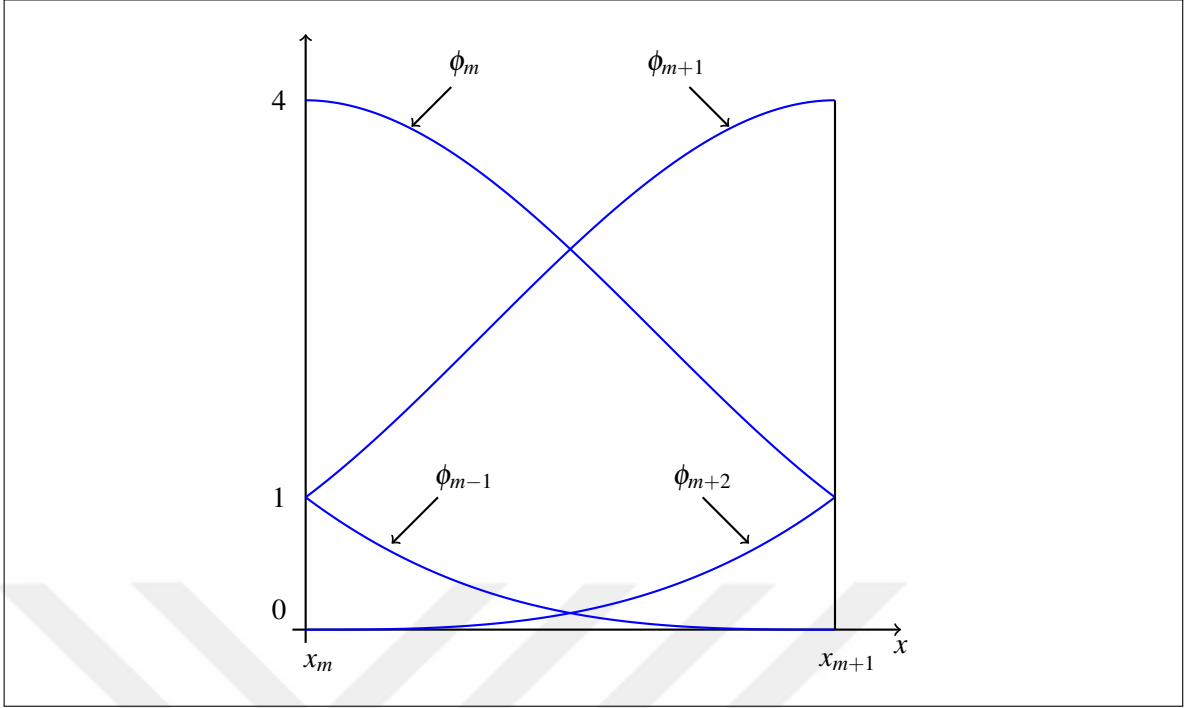
$x$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$
$\phi_m$	0	1	4	1	0
$h\phi'_m$	0	3	0	-3	0
$h^2\phi''_m$	0	6	-12	6	0

Ayrıca her bir  $\phi_m$  kübik B-spline fonksiyonu  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığında ardışık 4 tane sonlu alt aralığı kaplar. Bu yüzden, Şekil 2.1 de gösterildiği gibi her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu alt aralığı, 4 adet  $\{\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}\}$  kübik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür.

Yaklaşık çözüm  $U_N(x, t)$ , kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır. Burada  $\delta_j(t)$ , zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir ve sınır şartları ile çözüm şartları kullanılarak hesaplanır. Yaklaşık çözüm  $U_N$  ve onun  $x'$  e göre ikinci merteye



Şekil 2.1 Kübik B-spline şekil fonksiyonları

kadar olan türevi,  $x_m$  düğüm noktasında  $\delta_m$  bilinmeyen parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
 U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\
 U'_m &= \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\
 U''_m &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

olarak hesaplanır.

$0 \leq \eta \leq 1$  için  $h\eta = x - x_m$  eşitliği kullanılarak,  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı  $[0, 1]$  aralığına dönüştürülebilir. Böylece, (2.1) ile verilen kübik B-spline fonksiyonları  $\eta$  değişkenine bağlı olarak  $[0, 1]$  aralığı üzerinde,

$$\begin{aligned}
 \phi_{m-1} &= (1 - \eta)^3, \\
 \phi_m &= 1 + 3(1 - \eta) + 3(1 - \eta)^2 - 3(1 - \eta)^3, \\
 \phi_{m+1} &= 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3, \\
 \phi_{m+2} &= \eta^3
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde verilebilir. Burada  $\phi_{m-1}(x)$ ,  $\phi_m(x)$ ,  $\phi_{m+1}(x)$  ve  $\phi_{m+2}(x)$  fonksiyonları hariç tüm kübik B-spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında sıfırdır. Bu yüzden (2.2) ile verilen yaklaşım fonksiyonu,  $[0, 1]$  aralığında  $\delta_m$  eleman parametreleri ve  $\phi_m$  şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki

gibi yazılabilir:

$$U_N(\eta, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j. \quad (2.5)$$

Buradan da  $U_N$  ve onun  $\eta'$  ya göre ikinci mertebeye kadar olan türevi  $x = x_m \rightarrow \eta = 0$  noktasında  $\delta_m$  zaman parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned} U_m &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_m &= 3(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\ U''_m &= 6(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

yazılabilir.

### 2.1.2 Kuintik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$  sonlu aralığı içine sınırlandırılmış bir çözüm bölgesini ele alalım.  $a = x_0 < x_1 \cdots < x_N = b$  ve aralık uzunluğu  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  olmak üzere,  $x_m$  noktalarıyla  $[a, b]$  aralığı  $N$  tane eşit alt aralığa bölünebilir. Prenter [78],  $\phi_m(x)$  kuintik B-spline fonksiyonları,  $m = -2, -1, 0, \dots, N+2$  olmak üzere,  $x_m$  düğüm noktalarında aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

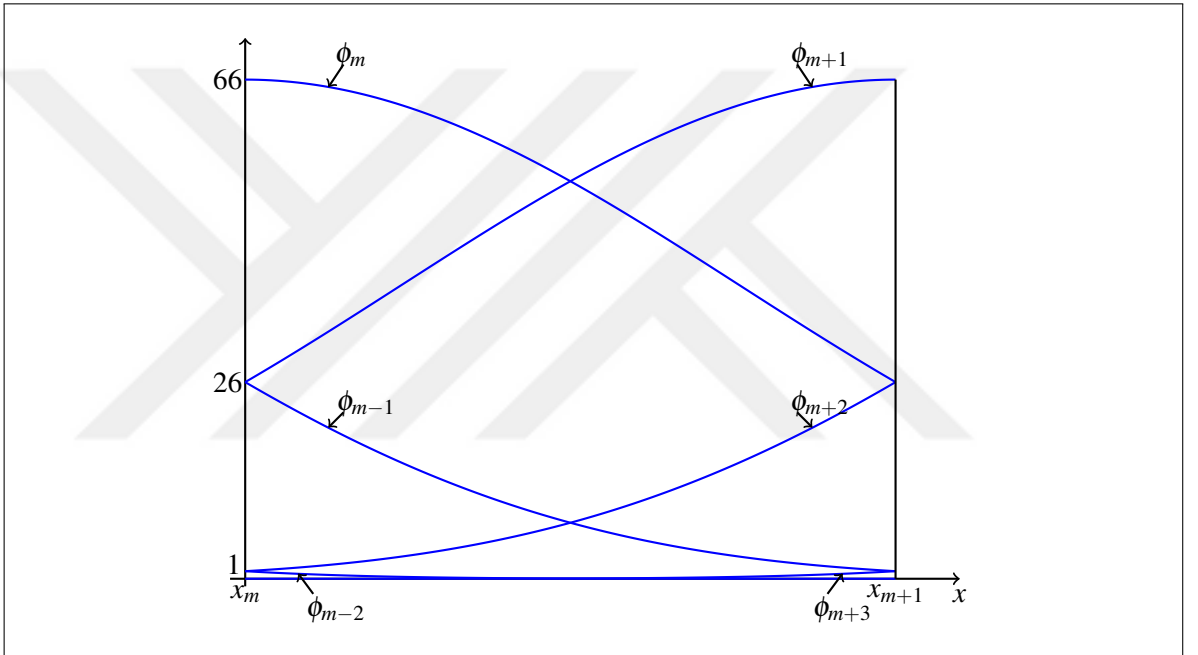
$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}) \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}) \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m) \\ (x_{m+3} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5 + 15(x_{m+1} - x)^5, & [x_m, x_{m+1}) \\ (x_{m+3} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ (x_{m+3} - x)^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}) \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.7)$$

$\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x)\}$  kümesi  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Burada  $\phi_m$  kuintik B-spline fonksiyonu ve türevleri  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  aralığı dışında sıfır olarak tanımlanmıştır.  $\phi_m(x)$  ve onun  $\phi'_m(x)$ ,  $\phi''_m(x)$ ,  $\phi'''_m(x)$  ve  $\phi_m^{(iv)}(x)$  dördüncü mertebeye kadar türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 2.2 de verilmiştir.

Ayrıca her bir  $\phi_m$  kuintik B-spline fonksiyonu  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  aralığında ardışık 6 tane sonlu alt aralığı kaplar. Bu yüzden Şekil 2.2 gösterildiği gibi her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu alt aralığı, 6 adet  $\{\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}\}$  kuintik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür.

Tablo 2.2  $\phi_m$ ,  $\phi'_m$ ,  $\phi''_m(x)$ ,  $\phi'''_m$  ve  $\phi_m^{(iv)}$ , in düğüm noktalarındaki değerleri

$x$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$
$\phi_m$	0	1	26	66	26	1	0
$h\phi'_m$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\phi''_m$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\phi'''_m$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4\phi_m^{(iv)}$	0	120	-480	720	-480	120	0



Şekil 2.2 Kuintik B-spline şekil fonksiyonları

Yaklaşık çözüm  $U_N(x, t)$ , kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-2}^{N+2} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. Burada  $\delta_j(t)$ , zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir ve sınır şartları ile çözüm şartları kullanılarak hesaplanır. Yaklaşık çözüm  $U_N$  ve onun  $x'$  e göre dördüncü

mertebeye kadar olan türevi,  $x_m$  düğüm noktasında  $\delta_m$  bilinmeyen parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
U'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U'''_m &= \frac{60}{h^3}(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U_m^{(iv)} &= \frac{120}{h^4}(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2})
\end{aligned} \tag{2.9}$$

olarak hesaplanır.

$0 \leq \eta \leq 1$  için  $h\eta = x - x_m$  eşitliği kullanılarak,  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı  $[0, 1]$  aralığına dönüştürülebilir. Bu halde, (2.7) ile verilen kuintik B-spline fonksiyonları  $\eta$  değişkenine bağlı olarak  $[0, 1]$  aralığı üzerinde,

$$\begin{aligned}
\phi_{m-2} &= 1 - 5\eta + 10\eta^2 - 10\eta^3 + 5\eta^4 - \eta^5, \\
\phi_{m-1} &= 26 - 50\eta + 20\eta^2 + 20\eta^3 - 20\eta^4 + 5\eta^5, \\
\phi_m &= 66 - 60\eta^2 + 30\eta^4 - 10\eta^5, \\
\phi_{m+1} &= 26 + 50\eta + 20\eta^2 - 20\eta^3 - 20\eta^4 + 10\eta^5, \\
\phi_{m+2} &= 1 + 5\eta + 10\eta^2 + 10\eta^3 + 5\eta^4 - 5\eta^5, \\
\phi_{m+3} &= \eta^5
\end{aligned} \tag{2.10}$$

olarak bulunur. Burada  $\phi_{m-2}(x)$ ,  $\phi_{m-1}(x)$ ,  $\phi_m(x)$ ,  $\phi_{m+1}(x)$ ,  $\phi_{m+2}(x)$  ve  $\phi_{m+3}(x)$  fonksiyonları hariç tüm kuintik B-spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında sıfırdır. Bu yüzden, (2.8) ile verilen yaklaşım fonksiyonu,  $[0, 1]$  aralığında  $\delta_m$  eleman parametreleri ve  $\phi_m$  şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(\eta, t) = \sum_{j=m-2}^{m+3} \delta_j \phi_j. \tag{2.11}$$

Böylece  $U_N$  ve onun  $\eta'$  ya göre dördüncü mertebeye kadar olan türevi,  $x = x_m \rightarrow \eta = 0$  noktasında  $\delta_m$  zaman parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
U_m &= \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
U'_m &= 5(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U''_m &= 20(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U'''_m &= 60(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U_m^{(iv)} &= 120(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2})
\end{aligned} \tag{2.12}$$

olarak elde edilir.

### 2.1.3 Septik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$  sonlu aralığı içine sınırlandırılmış bir çözüm bölgesini ele alalım.  $a = x_0 < x_1 \cdots < x_N = b$  ve aralık uzunluğu  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  olmak üzere,  $x_m$  noktalarıyla  $[a, b]$  aralığı  $N$  tane eşit alt aralığa bölünebilir.  $\phi_m(x)$  septik B-spline fonksiyonları,  $m = -3, -2, \dots, N+3$  olmak üzere  $x_m$  düğüm noktalarında Prenter [78] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.13)$$

$\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \dots, \phi_{N+2}(x), \phi_{N+3}(x)\}$  kümesi  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Burada  $\phi_m$  septik B-spline fonksiyonu ve türevleri  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığı dışında sıfır olarak tanımlanmıştır.  $\phi_m(x)$  ve onun  $\phi_m'(x)$ ,  $\phi_m''(x)$ ,  $\phi_m'''(x)$ ,  $\phi_m^{(iv)}(x)$ ,  $\phi_m^{(v)}(x)$  ve  $\phi_m^{(vi)}(x)$  altıncı mertebeye kadar türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 2.3'te verilmiştir.

Ayrıca her bir  $\phi_m$  septik B-spline fonksiyonu  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığında ardışık 8 tane sonlu alt aralığı kaplar. Bu yüzden Şekil 2.3 de gösterildiği gibi her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu alt aralığı, 8 adet  $\{\phi_{m-3}, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}, \phi_{m+4}\}$  septik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür.

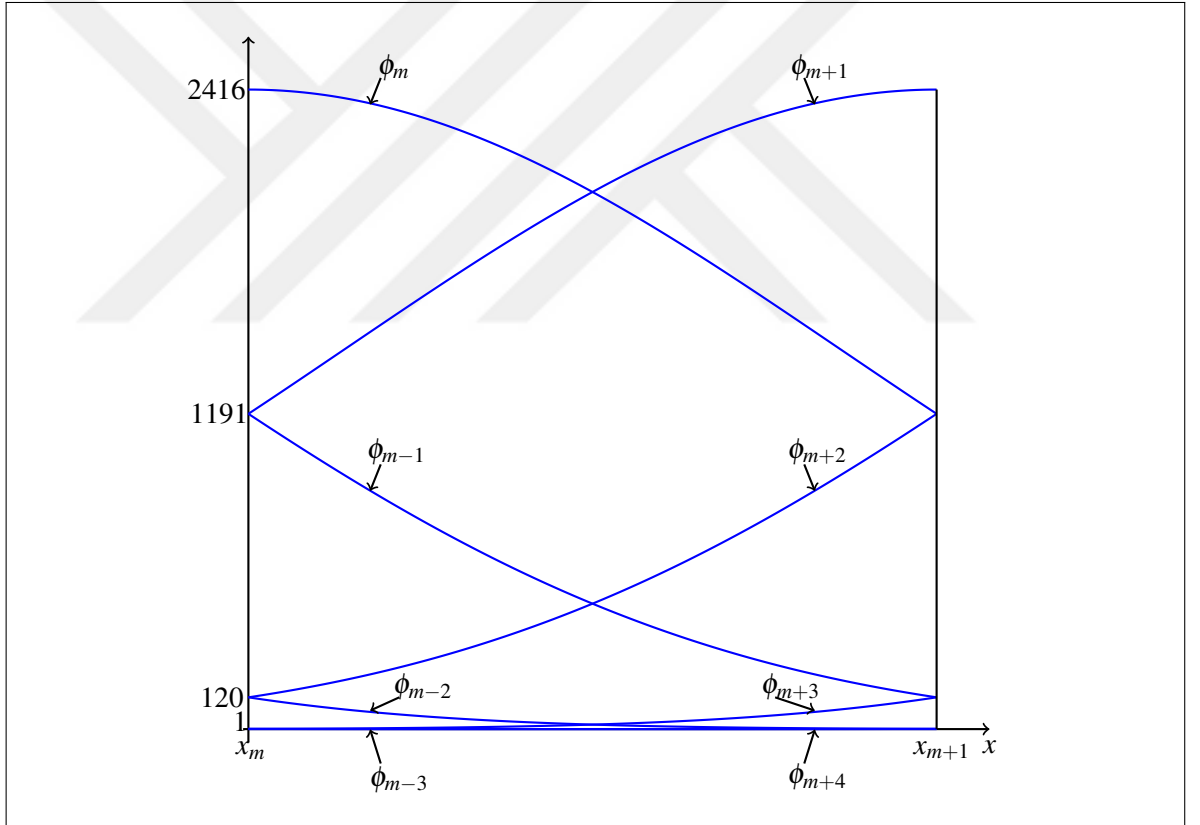
Yaklaşık çözüm  $U_N(x, t)$ , septik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-3}^{N+3} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (2.14)$$

olarak tanımlanır. Burada  $\delta_j(t)$ , zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir ve sınır şartları ile çözüm şartları kullanılarak hesaplanır. Yaklaşık çözüm  $U_N$  ve onun  $x'$  e göre altıncı merteb-

Tablo 2.3  $\phi_m, \phi'_m, \phi''_m(x), \phi'''_m, \phi_m^{(iv)}, \phi_m^{(v)}$  ve  $\phi_m^{(vi)}$  in düğüm noktalarındaki değerleri

$x$	$x_{m-4}$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$	$x_{m+4}$
$\phi_m$	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$h\phi'_m$	0	-7	-392	-1715	0	1715	392	7	0
$h^2\phi''_m$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	0
$h^3\phi'''_m$	0	-210	-1680	3990	0	-3990	1680	210	0
$h^4\phi_m^{(iv)}$	0	840	0	-7560	13440	-7560	0	840	0
$h^5\phi_m^{(v)}$	0	-2520	10080	-12600	0	12600	-10080	2520	0
$h^6\phi_m^{(vi)}$	0	5040	-30240	75600	-100800	75600	-30240	5040	0



Şekil 2.3 Septik B-spline şekil fonksiyonları

eye kadar olan türevi,  $x_m$  düğüm noktasında  $\delta_m$  bilinmeyen parametreleri cinsinden,



$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\
U'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U'''_m &= \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(iv)} &= \frac{840}{h^4}(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(v)} &= \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(vi)} &= \frac{5040}{h^6}(\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3})
\end{aligned} \tag{2.15}$$

olarak hesaplanır.

$0 \leq \eta \leq 1$  için  $h\eta = x - x_m$  eşitliği kullanılarak,  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı  $[0, 1]$  aralığına dönüştürülebilir. Bu halde, (2.13) ile verilen septik B-spline fonksiyonları  $\eta$  değişkenine bağlı olarak  $[0, 1]$  aralığı üzerinde,

$$\begin{aligned}
\phi_{m-3} &= 1 - 7\eta + 21\eta^2 - 35\eta^3 + 35\eta^4 - 21\eta^5 + 7\eta^6 - \eta^7, \\
\phi_{m-2} &= 120 - 392\eta + 504\eta^2 - 280\eta^3 + 84\eta^5 - 42\eta^6 + 7\eta^7, \\
\phi_{m-1} &= 1191 - 1715\eta + 315\eta^2 + 665\eta^3 - 315\eta^4 - 105\eta^5 + 105\eta^6 - 21\eta^7, \\
\phi_m &= 2416 - 1680\eta + 560\eta^4 - 140\eta^6 + 35\eta^7, \\
\phi_{m+1} &= 1191 + 1715\eta + 315\eta^2 - 665\eta^3 - 315\eta^4 + 105\eta^5 + 105\eta^6 - 35\eta^7, \\
\phi_{m+2} &= 120 + 392\eta + 504\eta^2 + 280\eta^3 - 84\eta^5 - 42\eta^6 + 21\eta^7, \\
\phi_{m+3} &= 1 + 7\eta + 21\eta^2 + 35\eta^3 + 35\eta^4 + 21\eta^5 + 7\eta^6 - \eta^7, \\
\phi_{m+4} &= \eta^7
\end{aligned} \tag{2.16}$$

olarak bulunur. Burada  $\phi_{m-3}(x)$ ,  $\phi_{m-2}(x)$ ,  $\phi_{m-1}(x)$ ,  $\phi_m(x)$ ,  $\phi_{m+1}(x)$ ,  $\phi_{m+2}(x)$ ,  $\phi_{m+3}(x)$  ve  $\phi_{m+4}(x)$  fonksiyonları hariç tüm septik B-spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında sıfırdır. Bu yüzden (2.14) ile verilen yaklaşım fonksiyonu,  $[0, 1]$  bölgesinde  $\delta_m$  eleman parametreleri ve  $\phi_m$  şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(\eta, t) = \sum_{j=m-3}^{m+4} \delta_j \phi_j. \tag{2.17}$$

Buradanda  $U_N$  ve onun  $\eta$ ' ya göre altıncı mertebeye kadar olan türevi  $x = x_m \rightarrow \eta = 0$

noktasında  $\delta_m$  zaman parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\
U'_m &= 7(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U''_m &= 42(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U'''_m &= 210(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(iv)} &= 840(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(v)} &= 2520(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(vi)} &= 5040(\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3})
\end{aligned} \tag{2.18}$$

olarak elde edilir.

## 2.2 Lineerleştirme Teknikleri

GEW ve GRLW denklemleri,  $U^p U_x$  şeklinde lineer olmayan terime sahiptir. Bu lineer olmayan terim için aşağıda beş farklı lineerleştirme tekniğinin uygulaması verilmiştir:

### 2.2.1 Normal lineerleştirme tekniği

$U^p U_x$  lineer olmayan teriminde  $U^p = Z_m$  olarak seçilir ve  $Z_m$ ,

kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = (\delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n)^p;$$

kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^p;$$

septik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = \left( \begin{array}{l} \delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n \\ + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n \end{array} \right)^p$$

olarak ifade edilebilir.

### 2.2.2 İki nokta lineerleştirme tekniği

$U^p U_x$  lineer olmayan terimde  $U^p = Z_m$  olarak seçilir ve  $Z_m$ ,

kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \left[ \frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right]^p = \left( \frac{\delta_{m-1}^n + 5\delta_m^n + 5\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n}{2} \right)^p ;$$

kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \left[ \frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right]^p = \left( \frac{\delta_{m-2}^n + 27\delta_{m-1}^n + 92\delta_m^n + 92\delta_{m+1}^n + 27\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n}{2} \right)^p ;$$

septik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \left[ \frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right]^p = \frac{1}{2^p} \left( \delta_{m-3}^n + 121\delta_{m-2}^n + 1311\delta_{m-1}^n + 3607\delta_m^n + 3607\delta_{m+1}^n + 1311\delta_{m+2}^n + 121\delta_{m+3}^n + \delta_{m+4}^n \right)^p$$

olarak yazılabilir.

### 2.2.3 Üç nokta lineerleştirme tekniği

$U^p U_x$  lineer olmayan terimde  $U^p = Z_m$  olarak seçilir ve  $Z_m$ ,

kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \left[ \frac{U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n}{3} \right]^p = \left( \frac{\delta_{m-2}^n + 5\delta_{m-1}^n + 6\delta_m^n + 5\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n}{3} \right)^p ;$$

kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \left[ \frac{U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n}{3} \right]^p = \frac{1}{3^p} \left( \delta_{m-3}^n + 27\delta_{m-2}^n + 93\delta_{m-1}^n + 118\delta_m^n + 93\delta_{m+1}^n + 27\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n \right)^p ;$$

septik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \left[ \frac{U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n}{3} \right]^p = \frac{1}{3^p} \left( \delta_{m-4}^n + 121\delta_{m-3}^n + 1312\delta_{m-2}^n + 3727\delta_{m-1}^n + 4798\delta_m^n + 3727\delta_{m+1}^n + 1312\delta_{m+2}^n + 121\delta_{m+3}^n + \delta_{m+4}^n \right)^p$$

olarak bulunur.

### 2.2.4 Rubin-Graves lineerleştirme tekniği

$U^p U_x$  lineer olmayan terimde  $U^{p-1} U_x = Z_m$  olarak seçilir ve daha sonra  $Z_m$ 'e Rubin-Graves [79] lineerleştirme tekniği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} Z_m &\cong [(U_m)^{p-1} (U_m)_x]^{n+1} = (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^{n+1} + (U_m^{p-1})^{n+1} (U_m)_x^n - (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^n \\ &= (U_m^n)^{p-1} (U_m^{n+1})_x + (U_m^{n+1})^{p-1} (U_m)_x - (U_m^n)^{p-1} (U_m)_x \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan da  $Z_m$ ,

kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$\begin{aligned} Z_m \cong & (\delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n)^{p-1} \frac{3}{h} (-\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1}) \\ & + (\delta_{m-1}^{n+1} + 4\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1})^{p-1} \frac{3}{h} (-\delta_{m-1}^n + \delta_{m+1}^n) \\ & - (\delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n)^{p-1} \frac{3}{h} (-\delta_{m-1}^n + \delta_{m+1}^n); \end{aligned}$$

kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$\begin{aligned} Z_m \cong & (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^{n+1} - 10\delta_{m-1}^{n+1} + 10\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1}) \\ & + (\delta_{m-2}^{n+1} + 26\delta_{m-1}^{n+1} + 66\delta_m^{n+1} + 26\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1})^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n) \\ & - (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n); \end{aligned}$$

septik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$\begin{aligned} Z_m \cong & \left[ (\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\ & \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^{n+1} - 56\delta_{m-2}^{n+1} - 245\delta_{m-1}^{n+1} + 245\delta_{m+1}^{n+1} + 56\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1}) \right] \\ & + \left[ (\delta_{m-3}^{n+1} + 120\delta_{m-2}^{n+1} + 1191\delta_{m-1}^{n+1} + 2416\delta_m^{n+1} + 1191\delta_{m+1}^{n+1} + 120\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1})^{p-1} \right. \\ & \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right] \\ & - \left[ (\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\ & \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right] \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

## 2.2.5 Caldwell-Smith lineerleştirme tekniği

$U^p U_x$  lineer olmayan terimde  $U^{p-1} U_x = Z_m$  olarak seçilir ve daha sonra  $Z_m$ 'e Caldwell-Smith [80] lineerleştirme tekniği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} Z_m \cong & [(U_m)^{p-1} (U_m)_x]^{n+1} = \frac{(U_m^{p-1})^n (U_m)_x^{n+1} + (U_m^{p-1})^{n+1} (U_m)_x^n}{2} \\ & = \frac{(U_m)^{p-1} (U_m^{n+1})_x + (U_m^{n+1})^{p-1} (U_m)_x}{2} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada  $Z_m$ ,

kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$\begin{aligned} Z_m \cong & \frac{1}{2} (\delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n)^{p-1} \frac{3}{h} (-\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1}) \\ & + \frac{1}{2} (\delta_{m-1}^{n+1} + 4\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1})^{p-1} \frac{3}{h} (-\delta_{m-1}^n + \delta_{m+1}^n); \end{aligned}$$

kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \frac{1}{2} (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^{n+1} - 10\delta_{m-1}^{n+1} + 10\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1}) \\ + \frac{1}{2} (\delta_{m-2}^{n+1} + 26\delta_{m-1}^{n+1} + 66\delta_m^{n+1} + 26\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1})^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n);$$

septik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

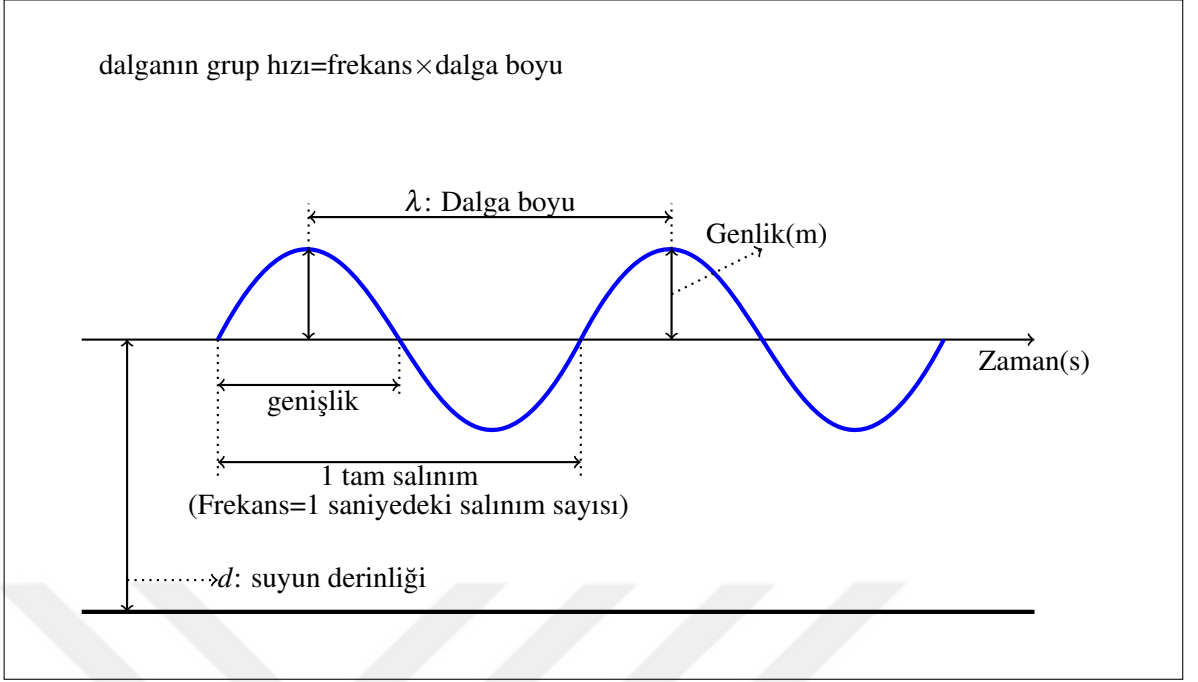
$$Z_m \cong \frac{1}{2} \left[ (\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\ \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^{n+1} - 56\delta_{m-2}^{n+1} - 245\delta_{m-1}^{n+1} + 245\delta_{m+1}^{n+1} + 56\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1}) \right] \\ + \frac{1}{2} \left[ (\delta_{m-3}^{n+1} + 120\delta_{m-2}^{n+1} + 1191\delta_{m-1}^{n+1} + 2416\delta_m^{n+1} + 1191\delta_{m+1}^{n+1} + 120\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1})^{p-1} \right. \\ \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right]$$

olarak verilebilir.

### 2.3 Dalga, Solitary Dalga ve Soliton

Dalga, bir ortamda veya bir boşlukta meydana getirilen şekil değişimi olarak tanımlanır. Dalganın bir ortamda veya bir boşlukta yayılmasına da dalga hareketi denir. Aslında dalga hareketi, titreşim hareketinin bir ortamda veya bir boşlukta iletilerek enerjinin taşınması olarak da tanımlanır. Örneğin, durgun bir suya bir cisim bırakıldığında cismin bırakıldığı yerden dışa doğru dairesel bir hareket oluşur. İşte bu hareket dalga hareketidir. Burada cismin potansiyel enerjisi, su ortamında iletilerek kinetik enerji olarak taşınmıştır. Dalgalar, titreşim doğrultusuna göre enine ve boyuna dalgalar ve taşınan enerji türüne göre mekanik ve elektromanyetik dalgalar olarak gruplandırılır. Enine dalgalar, titreşim doğrultusuna göre dik doğrultuda yayılma hareketi yapan dalgalardır. Örnek olarak, elektromanyetik dalgalar, su dalgaları, deprem dalgaları, yay dalgaları verilebilir. Boyuna dalgalar ise titreşim doğrultusuyla aynı doğrultuda yayılan dalgalardır. Buna da örnek olarak ses dalgaları, su dalgaları, deprem dalgaları ve yay dalgaları verilebilir. Yayılabilmek için maddesel bir ortama gereksinim duyan su, ses, deprem ve yay dalgaları gibi dalgalar mekanik dalgalar olarak bilinir. Diğer yandan, elektrik ve manyetik alana sahip, boşlukta yayılan, yüklerin ivmeli hareketi ile oluşturulan radyo dalgaları, kızılötesi dalgalar, X ışınları ve benzeri dalgalar elektromanyetik dalgalar olarak tanımlanır.

Şekil 2.4'te bir su dalgasının hareketi fiziksel özellikleriyle birlikte çizilmiştir. Dalgalar sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaptıkları için dalganın grup hızı sabittir. Eğer, dalga uzunluğu (genlik) bölgesel suyun derinliğinden daha kısa ise bu tip sular derin



Şekil 2.4 Bir su dalgasının hareketi

sular; dalga uzunluğu bölgesel su derinliğinden daha uzun ise bu çeşit sular sığ sular olarak adlandırılır.

Solitary dalgalar, şekil, büyüklük ve grup hızında herhangi bir değişiklik olmadan yayılan dalgalar olarak bilinir. Solitonlar ise bu özelliklere ek olarak, başka bir solitary dalga ile çarpışma sonrası özelliklerini muhafaza eden lineer olmayan dalgalardır. (Bu aşamadan sonra solitary dalga ve soliton teorisi hakkında verilen bilgilerin çoğu, Irk [74] tarafından yapılan tez çalışmasından alınmıştır). John Scott Russell [81], soliton teorisini en iyi anlatan şu doğa olayını aktarmıştır:

*“İki çift at tarafından dar bir kanal boyunca hızla çekilen bir botun hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durduğunda, bota hareket sağlayan kanaldaki su kütlesi durmadı ve su kütlesi şiddetli bir çalkalanma şeklinde botun uç kısmı etrafında toplandı ve aniden botu arkasında bırakarak, büyük bir hızla harekete geçti. Büyük bir solitary dalga yüksekliğine sahip olarak düşündüğüm formdaki, dairesel ve düzgün bir su kütlelerinin kanal boyunca şekil veya hızını bozmadan yoluna devam ettiğini gördüm. Bu dalga formunu, at üzerinde takip ettim ve yaklaşık 30 feet mesafe sonunda 8 veya 9 mil/saat hızında, ilk baştaki orijinal şeklinde ve yarı yüksekliğinde yuvarlanır halde gördüm. Yüksekliği kademeli olarak azaldı ve yaklaşık 1 veya 2 mil takip sonunda, kanalın kenarlarında kaybolduğunu gördüm.*

*İşte 1834 yılının Ağustos ayı, ilk kez ötelenme dalgası olarak adlandırdığım bu ilginç ve güzel olayı gözleme şansı bulduğum zamandı.”*

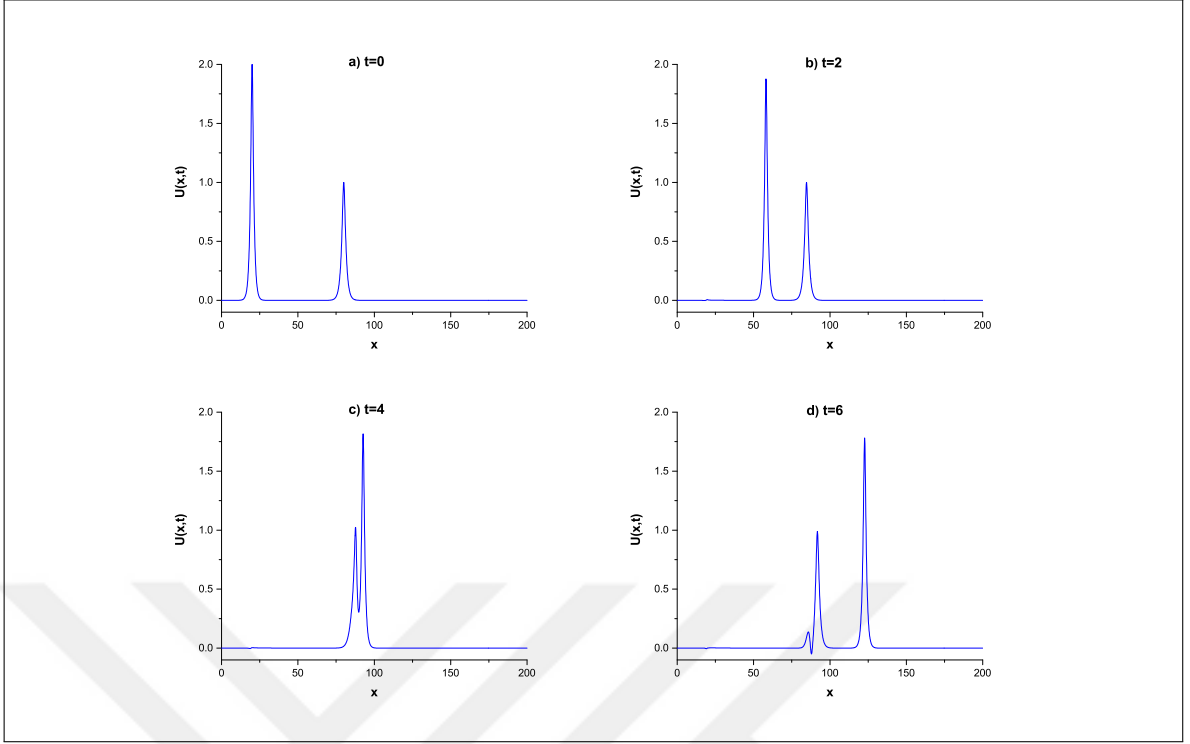
Bu gözlemlerine, laboratuvar ortamında solitary dalgaları (ötelenme dalgaları) elde edebilmek için farklı deneyler yaparak devam eden Russell, solitary dalgalarının aşağıdaki özelliklerini tespit etmiştir:

- Solitary dalgaları  $h \sec h^2(k(x - vt))$  yapısındadır.
- Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, bağımsız iki veya daha fazla solitary dalgası üretir.
- Normal dalgaların aksine solitary dalgalar birleşmez. Bu nedenle küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilir. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar ya da dikleşerek sönecek şekilde hareket ederken, solitary dalgaları ise kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilir.
- $g$  yerçekimi ivmesi,  $d$  suyun derinliği ve  $A$  solitary dalğanın ulaşabileceği maksimum yükseklik(yani genlik) olmak üzere bir solitary dalğanın hızı,

$$v = \sqrt{g(d + A)}$$

ile ifade edilir.

Bu sonuçlardan da anlaşıldığı üzere, genliği büyük olan solitary dalga hızlı hareket eder. Yani bir solitary dalğanın hızı genliği ile doğru orantılı olup normal dalgalardan farklı davranış sergiler. “Örneğin, biri alçak diğeri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulağımız her iki sesi aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında solitary dalgalar kullanılsaydı, yüksek sesi daha önce duymamız gerekirdi. İnsan vücudundaki sinirler arasındaki iletişim ise normal dalgalar ile yapılmaz. Sıcak bir çay bardağını elimize aldığımızda , sıcaklığı kademeli olarak hissederken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir fırının içine elimizi yaklaştırdığımızda, sıcaklığı hemen hissederken elimizi çekeriz. Dolayısıyla sinirlerimiz bir nevi solitary dalgası oluşturarak beynimize bilgiyi en kısa şekilde, normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletir.”



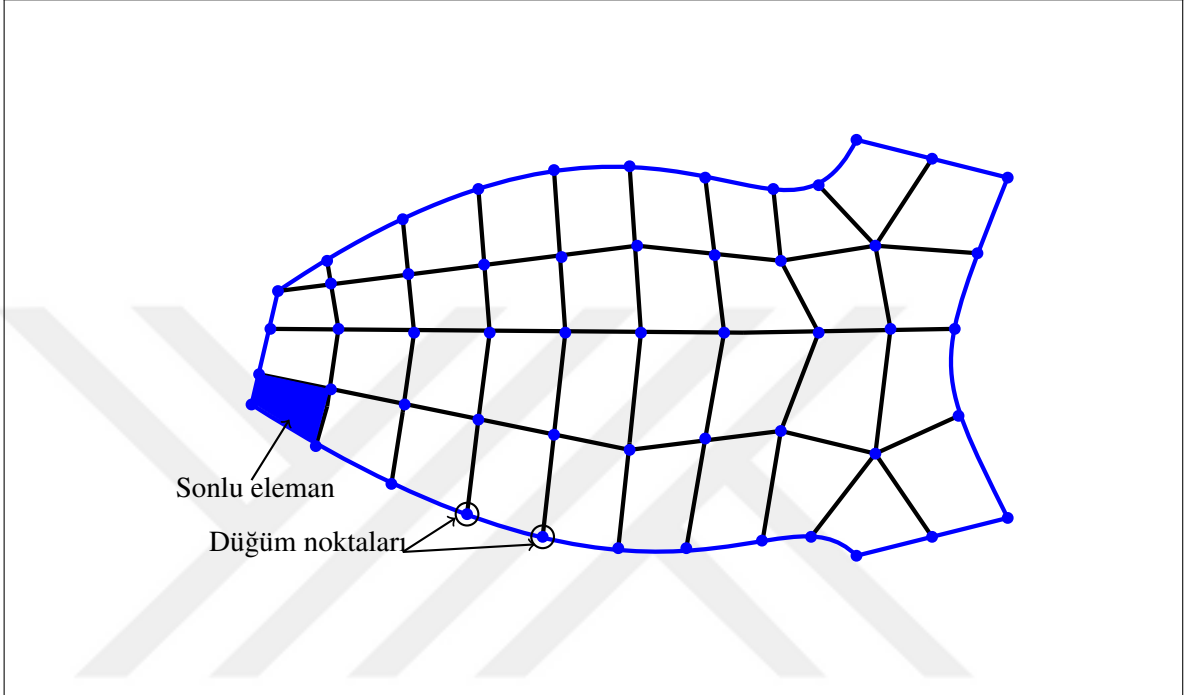
Şekil 2.5 İki solitary dalganın farklı zamanlardaki hareketi

Şekil 2.5'te, iki solitary dalganın zaman ilerledikçe hareketi gözlemlendi. Şekilden görüldüğü gibi genliği büyük olan dalganın hızı büyüktür ve başlangıçta konum olarak ilerde olan küçük genlikli dalgayı yakalamaktadır. Daha sonra iki dalganın çarpışması gerçekleşir ve hızlı olan dalga öne geçer. Son olarak, bu dalgalar mevcut yapılarını bozmadan ilerlemeye devam eder, yani soliton olarak davranır. Bu yüzden, solitary dalgalar solitonumsu dalgalar olarak ifade edilebilir. Sonuç olarak, solitonlar çarpışma sonrası mevcut yapılarını koruması, enerjilerini çok az kaybetmesi ve uzun mesafe yol almaları nedeniyle akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, plazma fiziği, laser fiziği, süperiletkenlik fiziği, biyofizik, elektrik ve elektromanyetik dalgaların iletimi, telekomünikasyon, lineer olmayan optik ve iletişim alanı gibi pek çok önemli alanda kullanılmaktadır. Bu çalışmada ele alınan denklemlerin de sonlu elemanlar yöntemi ile soliton çözümleri edilmiştir.



## 2.4 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi, matematiksel fizik ve mühendislikte sınır şartları verilen ve bir kısmi diferansiyel denklemle ifade edilen problemin yaklaşık çözümünü elde etme tekniğidir.



Şekil 2.6 Sonlu elemanlar yaklaşımı

Basit bir mantıkla, aşağıdaki adımlar uygulanarak sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözümler elde edilebilir:

1. Öncelikle çözüm bölgesi Şekil 2.6'da gösterildiği gibi iki veya daha çok düğüm noktası ile birbirine bağlanmış çok sayıda basit, küçük sonlu elemanlara bölünür. Bu adım ele alınan yapıyı basitleştirme adımudur. Çünkü ele alınan yapının tümü için yaklaşık çözüm bulmak zordur.
2. İkinci adımda, bir elemanın davranışını yaklaşık olarak temsil eden fonksiyon seçilir. Burada fonksiyonun seçimi daha önce yapılan yaklaşımlara bağlı olarak öngörülür veya deneme yapılarak çözüm aranır. Bu çalışmada B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak yaklaşım yapılmıştır.
3. Matematiksel fizik ve mühendislikte ele alınan birçok problem lineer veya lineer ol-

mayan kısmi diferansiyel denklemlerle modellenebilir. Ele alınan problemin fiziksel yapısı dikkate alınarak türevli denklemler oluşturulur.

4. Türevli denklemlerde bir elemanın davranışını temsil eden yaklaşık çözüm ve türevleri yerine yazılarak bir eleman için cebirsel denklem elde edilir.
5. Eşzamanlı olarak elde edilen sonlu elemanların düğüm noktalarındaki cebirsel denklemleri kullanılıp, bu sisteme sınır koşulları uygulanır ve elde edilen cebirsel denkleme dahil edilerek,

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

şeklinde cebirsel denklem sistemi(matris form) elde edilir. Buradaki cebirsel denklemin özellikleri Tablo 2.4'te verilmiştir.

Tablo 2.4 Cebirsel denklemin özellikleri

Kavram	Özellik $[K]$	Davranış $\{u\}$	Kuvvet $\{F\}$
Esneklik	katılık	yer değiştirme	güç
Isı	iletkenlik	sıcaklık	ısı kaynağı
Akışkanlar	akışmazlık	hız	cisim kuvveti
Elektrostatik	elektrik geçirgenliği	elektriksel potansiyel	elektrik

6. Bu cebirsel denklem sisteminden bilinmeyen davranışın çözümü  $\{u\}$  bulunur ve böylece bölge üzerinde model yapının yaklaşık davranışı elde edilmiş olur.

Sonlu elemanlar yönteminin genel olarak bilinen avantajları şunlardır:

- Düzgün olmayan ve karmaşık geometriye sahip yapılara kolaylıkla uygulanabilir.
- Gerekğinde geometrik yapının karmaşıklaştığı yerde sonlu eleman daha küçük parçalara ayrılarak daha hassas çözümler elde edilebilir.
- Karma sistemlerde her eleman için farklı tipten yaklaşım fonksiyonu kullanılabilir.
- Düğüm noktaları birleştirilerek eşzamanlı olarak elde edilmiş cebirsel denklem sistemlerine sınır şartları, basit bir satır sütun işlemiyle dahil edilebilir. Yani istenildiğinde farklı sınır koşulları kolay bir şekilde işleme dahil edilebilir.

- Mühendislik uygulamalarında kullanılacak birçok yazılım mevcuttur.(Bu çalışmada Fortran programı kullanılmıştır.)
- Yukarıda verdiğimiz özellikler dikkate alınarak, sonlu elemanlar yöntemi dalga yayılımı, ısı iletimi, akışkanlar mekaniği, yapısal analizler, yapı mühendisliği, elektromanyetik hesaplamalar, makine mühendisliği, uçak mühendisliği, inşaat mühendisliği, yorulma analizi, aerodinamik, gürültü ve titreşim analizi, gerilme analizi darbe analizi, sismik deprem analizi gibi pek çok alanda kullanılmaktadır.



### 3. BÖLÜM

#### GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA (GEW) DENKLEMİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde GEW denkleminin kollokasyon ve Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözümleri bulunmuştur. Yaklaşım fonksiyonları olarak kübik, kuintik ve septik B-spline fonksiyonlar kullanılmıştır. Sayısal yöntemin lineer kararlılık analizi için Von Neumann tekniği uygulanmıştır. Lineerleştirme tekniği olarak Bölüm 2 de açıklanan lineerleştirme tekniklerinden normal, iki nokta ve Rubin-Graves lineerleştirme teknikleri seçilmiştir. Beş farklı lineerleştirme tekniği, yöntemlerin Fortran programı ile sayısal yöntemin uygulama kısmında kullanılmıştır. Fakat bu çalışmada sadece kullanılan yöntemle göre en iyi sayısal çözümü veren lineerleştirme tekniği sunulmuştur. Sonlu elemanlar yaklaşımı, tek solitary dalga, iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve Maxwellian başlangıç şartı ile dalganın oluşumu içeren örnekler üzerinde çalışılmıştır. Bu örnekler için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları, kütle, momentum ve enerji ile ilgili  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitleri hesaplanmıştır.

#### 3.1 GEW Denkleminin Septik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü

GEW denklemi,

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xx} = 0 \quad (3.1)$$

olarak ifade edilir. Burada fiziksel sınır şartları  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $U \rightarrow 0$ , alt indis  $t$  ve  $x$  zaman ve boyutsal türevi ifade eder,  $\varepsilon$  ve  $p$  pozitif tamsayıdır,  $\mu$  pozitif sabittir.

Sınır ve başlangıç şartları,

$$\begin{aligned} U(a,t) = 0, \quad U_x(a,t) = 0, \quad U_{xxx}(a,t) = 0, \\ U(b,t) = 0, \quad U_x(b,t) = 0, \quad U_{xxx}(b,t) = 0, \\ U(x,0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (3.2)$$

olarak seçilecektir.

Çözüme başlamak için öncelikle  $[a,b]$  sonlu aralığı içine sınırlandırılmış çözüm bölgesi ele alınır. Aralık uzunluğu  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  ve  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  olmak üzere,  $[a,b]$  aralığı  $x_m$  düğüm noktalarıyla  $N$  tane eşit alt aralığa parçalanır. Prenter [78],  $\phi_m(x)$  septik B-spline fonksiyonları,  $m = -3, -2, \dots, N+3$  olmak üzere  $x_m$  düğüm noktalarında

aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.3)$$

$\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \dots, \phi_{N+2}(x), \phi_{N+3}(x)\}$  kümesi  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Her bir septik B-spline  $\phi_m$  fonksiyonu ardışık 8 tane sonlu alt aralığı örter. Bu yüzden her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu alt aralığı 8 adet B-spline fonksiyonu tarafından örtülür.  $U_N(x, t)$  yaklaşık çözümü, septik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (3.4)$$

olarak tanımlanır. Burada  $\delta_m(t)$ , zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir, sınır şartları ve GEW denkleminin septik B-spline kollokasyon formu kullanılarak belirlenecektir. (3.3) ile verilen B-spline fonksiyonlar, (3.4) yaklaşık çözümünde yerine yazılırsa, yaklaşık çözüm  $U_m$  ve onun  $x'$  e göre  $U'_m, U''_m$  türevleri,  $x_m$  düğüm noktasında  $\delta_m$  bilinmeyen parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned} U_m &= \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\ U'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

olarak elde edilir. Böylece  $U$  değişimi  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı üzerinde aşağıdaki gibi yazılır:

$$U = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m \delta_m. \quad (3.6)$$

Şimdi, düğüm noktalarıyla beraber kollokasyon noktalarını tanımlamak için denklem (3.5) ile verilen  $U_m$  ve onun  $x$ 'e göre türevleri, denklem (3.1) ile verilen GEW denkleminde yerine yazılırsa; Normal lineerleştirme tekniği için,

$$\begin{aligned} & \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\ & + \frac{7\varepsilon Z_m}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & - \frac{42\mu}{h^2} (\dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

şeklinde birleştirilmiş adi diferansiyel denklemlerin bir kümesi elde edilir. Burada,

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = \begin{pmatrix} \delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n \\ + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n \end{pmatrix}^p$$

olarak alınmıştır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için, çözüm yönteminin aşağıdaki genel formu elde edilir:

$$\begin{aligned} & \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\ & + \varepsilon Z_m (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & - \frac{42\mu}{h^2} (\dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Burada,

$$\begin{aligned} Z_m \cong [(U_m)^{p-1}(U_m)_x]^{n+1} &= (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^{n+1} + (U_m^{p-1})^{n+1} (U_m)_x^n - (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^n \\ &= (U_m^n)^{p-1} (U_m^{n+1})_x + (U_m^{n+1})^{p-1} (U_m^n)_x - (U_m^n)^{p-1} (U_m^n)_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_m \cong & \left[ (\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\ & \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^{n+1} - 56\delta_{m-2}^{n+1} - 245\delta_{m-1}^{n+1} + 245\delta_{m+1}^{n+1} + 56\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1}) \right] \\ & + \left[ (\delta_{m-3}^{n+1} + 120\delta_{m-2}^{n+1} + 1191\delta_{m-1}^{n+1} + 2416\delta_m^{n+1} + 1191\delta_{m+1}^{n+1} + 120\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1})^{p-1} \right. \\ & \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right] \\ & - \left[ (\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\ & \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right] \end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve her iki genel denklemde “.” zamana göre türevi ifade eder. (3.7) ve (3.8) ile verilen genel çözüm denklemlerinde bulunan zamana göre bilinmeyen parametreler olan  $\delta_m$  ve zamana göre türevleri olan  $\dot{\delta}_m$  katsayılarına sırasıyla,

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \quad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (3.9)$$

formülleri ile verilen Crank-Nicolson ve klasik ileri sonlu fark yaklaşımı uygulanarak, bu genel denklemler basitleştirilebilir. Bu durumda, normal lineerleştirme tekniği için  $i = m - 3, m - 2, \dots, m + 2, m + 3$  olmak üzere,  $\delta_i^{n+1}$  ve  $\delta_i^n$  bilinmeyen zaman parametrelerine göre iki ardışık zaman adımı  $n$  ve  $n + 1$  arasındaki tekrarlı bağıntısı,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (3.10)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (1 - EZ_m - M), & \gamma_2 &= (120 - 56EZ_m - 24M), \\ \gamma_3 &= (1191 - 245EZ_m - 15M), & \gamma_4 &= (2416 + 80M), \\ \gamma_5 &= (1191 + 245EZ_m - 15M), & \gamma_6 &= (120 + 56EZ_m - 24M), \\ \gamma_7 &= (1 + EZ_m - M), \\ m &= 0, 1, \dots, N, & E &= \frac{7\varepsilon}{2h} \Delta t, & M &= \frac{42\mu}{h^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için tekrarlı bağıntısı,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_5 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_7 \delta_{m-1}^n + \gamma_8 \delta_m^n + \gamma_7 \delta_{m+1}^n + \gamma_6 \delta_{m+2}^n + \gamma_5 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (3.12)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (1 + EZ_m - M), & \gamma_2 &= (120 + 120EZ_m - 24M), \\ \gamma_3 &= (1191 + 1191EZ_m - 15M), & \gamma_4 &= (2416 + 2416EZ_m + 80M), \\ \gamma_5 &= (1 - EZ_m - M), & \gamma_6 &= (120 - 120EZ_m - 24M), \\ \gamma_7 &= (1191 - 1191EZ_m - 15M), & \gamma_8 &= (2416 - 2416EZ_m + 80M), \\ m &= 0, 1, \dots, N, & E &= \frac{\varepsilon \Delta t}{2}, & M &= \frac{42\mu}{h^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

(3.10) ve (3.12) ile verilen cebirsel denklem sistemleri  $N + 1$  tane lineer denklemden oluşur, fakat bu sistemde  $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$  parametrelerinden oluşan  $N + 7$  tane bilinmeyen vardır. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 6 tane ek şart ihtiyacı vardır. Gerekli 6 tane ek şart (3.2) ile verilen sınır şartları kullanılarak elde edilir. Sınır şartlarının cebirsel denklem sistemine basit bir şekilde dahil edilmesi olarak ifade edilen bu işlemin benzeri, aşağıda iterasyonu başlatabilmek için  $d^0$  başlangıç değerinin belirlenmesi aşamasında açıklanmıştır. Bu şekilde  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$  parametreleri, (3.10) ve (3.12) cebirsel denklem sisteminden yok edilir. Bu işlemlerden sonra

$d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  olmak üzere,  $N + 1$  tane bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi (matris form) oluşur:

$$A\mathbf{d}^{n+1} = B\mathbf{d}^n. \quad (3.14)$$

$A$  ve  $B$  matrisleri,  $(N + 1) \times (N + 1)$  boyutlu 7 sütun elemanlı matrislerdir (septa-diagonal matris olarak adlandırılır) ve bu matris denklemini aşağıda alt bölüm 3.1.1 de açıklandığı gibi Fortran programında Thomas algoritması (septa-diagonal algoritma) kullanılarak çözülmüştür. Lineer olmayan terim  $Z_m$  deki eleman parametresine,

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

formülü ile verilen iç iterasyon her bir zaman adımında üç veya dört defa uygulanarak çözüm iyileştirilmiştir.

### Başlangıç iterasyonu

(3.10) ve (3.12) ile verilen tekrarlama bağıntılarında iterasyonu başlatabilmek için  $d^0$  başlangıç değeri belirlenmelidir. Yaklaşık çözüm başlangıç parametreleri cinsinden,

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m^0(t)$$

olarak yazılabilir. Bu yaklaşık çözümde  $\delta_m^0$  bilinmeyen parametrelerini belirleyebilmek için başlangıç şartı ve aşağıdaki sınır noktalarındaki türevler kullanılır:

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) &= U(x_m, 0); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(a, 0) = 0, \quad (U_N)_{xxx}(a, 0) = 0, \\ (U_N)_x(b, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(b, 0) = 0, \quad (U_N)_{xxx}(b, 0) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Başlangıç şartı  $\delta_m$  parametreleri cinsinden,

$$\delta_{-3} + 120\delta_{-2} + 1191\delta_{-1} + 2416\delta_0 + 1191\delta_1 + 120\delta_2 + \delta_3 = U(x_0, 0),$$

$$\delta_{-2} + 120\delta_{-1} + 1191\delta_0 + 2416\delta_1 + 1191\delta_2 + 120\delta_3 + \delta_4 = U(x_1, 0),$$

$$\delta_{-1} + 120\delta_0 + 1191\delta_1 + 2416\delta_2 + 1191\delta_3 + 120\delta_4 + \delta_5 = U(x_2, 0),$$

$$\delta_0 + 120\delta_1 + 1191\delta_2 + 2416\delta_3 + 1191\delta_4 + 120\delta_5 + \delta_6 = U(x_3, 0),$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\delta_{N-6} + 120\delta_{N-5} + 1191\delta_{N-4} + 2416\delta_{N-3} + 1191\delta_{N-2} + 120\delta_{N-1} + \delta_N = U(x_{N-3}, 0),$$

$$\delta_{N-5} + 120\delta_{N-4} + 1191\delta_{N-3} + 2416\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} + 120\delta_N + \delta_{N+1} = U(x_{N-2}, 0),$$

$$\delta_{N-4} + 120\delta_{N-3} + 1191\delta_{N-2} + 2416\delta_{N-1} + 1191\delta_N + 120\delta_{N+1} + \delta_{N+2} = U(x_{N-1}, 0),$$

$$\delta_{N-3} + 120\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} + 2416\delta_N + 1191\delta_{N+1} + 120\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = U(x_N, 0)$$



(3.16)

olarak yazılır. Görüldüğü gibi elde edilen bu sistem  $N + 1$  tane cebirsel denkleme ve  $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$  parametrelerinden oluşan  $N + 7$  tane bilinmeyene sahiptir. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 6 tane ek şarta ihtiyaç vardır. Bunun için başlangıç şartının (3.15) ile verilen sınır noktalarındaki türevleri kullanılır. Türevli sınır koşulları  $\delta_m$  parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
& -\delta_{-3} - 56\delta_{-2} - 245\delta_{-1} + 245\delta_1 + 56\delta_2 + \delta_3 = 0, \\
& \delta_{-3} + 24\delta_{-2} + 15\delta_{-1} - 80\delta_0 + 15\delta_1 + 24\delta_2 + \delta_3 = 0, \\
& -\delta_{-3} - 8\delta_{-2} + 19\delta_{-1} - 19\delta_1 + 8\delta_2 + \delta_3 = 0, \\
& -\delta_{N-3} - 56\delta_{N-2} - 245\delta_{N-1} + 245\delta_{N+1} + 56\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0, \\
& \delta_{N-3} + 24\delta_{N-2} + 15\delta_{N-1} - 80\delta_N + 15\delta_{N+1} + 24\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0, \\
& -\delta_{N-3} - 8\delta_{N-2} + 19\delta_{N-1} - 19\delta_{N+1} + 8\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olarak elde edilir. Bu denklemlerden  $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})$  parametreleri çekilirse aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\delta_{-3} &= \frac{1}{3}(-280\delta_0 + 105\delta_1 + 168\delta_2 + 10\delta_3), \\
\delta_{-2} &= \frac{220}{27}\delta_0 - \frac{55}{18}\delta_1 - \frac{35}{9}\delta_2 - \frac{11}{54}\delta_3, \\
\delta_{-1} &= -\frac{40}{27}\delta_0 + \frac{14}{9}\delta_1 + \frac{8}{9}\delta_2 + \frac{1}{27}\delta_3, \\
\delta_{N+1} &= -\frac{40}{27}\delta_N + \frac{14}{9}\delta_{N-1} + \frac{8}{9}\delta_{N-2} + \frac{1}{27}\delta_{N-3}, \\
\delta_{N+2} &= \frac{220}{27}\delta_N - \frac{55}{18}\delta_{N-1} - \frac{35}{9}\delta_{N-2} - \frac{11}{54}\delta_{N-3}, \\
\delta_{N+3} &= \frac{1}{3}(-280\delta_N + 105\delta_{N-1} + 168\delta_{N-2} + 10\delta_{N-3}).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Bu ifadeler (3.16) ile verilen denklem de yerine yazılırsa,  $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})$  parametreleri yok edilir. Bu işlemle beraber  $d^0$  başlangıç değerinin aşağıdaki matris formu elde edilir:

$$Wd^0 = b.$$

Burada

$$W = \begin{bmatrix} 1536 & 2712 & 768 & 24 & & & & & & \\ \frac{82731}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{10063.5}{81} & 1 & & & & & \\ \frac{9600}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96474}{81} & 120 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \\ & & & & & 1 & 120 & \frac{96474}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{9600}{81} \\ & & & & & & 1 & \frac{10063.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{82731}{81} \\ & & & & & & & 24 & 768 & 2712 & 1536 \end{bmatrix},$$

$$d^0 = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-2}, \delta_{N-1}, \delta_N)^T,$$

$$b = (U(x_0, 0), U(x_1, 0), \dots, U(x_{N-1}, 0), U(x_N, 0))^T.$$

Bu matris denkleminde  $d^0$  başlangıç değeri Thomas algoritması ile çözümlenerek elde edilir.

Başlangıç değerinin bulunmasıyla beraber (3.14) ile verilen matris sisteminde  $n = 0$  için sağ taraf belirlenmiştir. Buradan da matrisin sol tarafı, Thomas algoritması ile bulunur. Böylece istenilen zaman adımında bir önceki parametreden bulunan değerler kullanılarak (iterasyon yapılarak), GEW denkleminin sayısal çözümleri bulunmuş olur.

### 3.1.1 Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü

Fortran programında kullanıldığı gibi ve Zaki [82] tarafından da verildiği gibi, septa-diagonal matris sisteminin Thomas algoritması ile çözümü aşağıdaki gibi açıklanabilir: Septa-diagonal sistem,

$$a_i \delta_{i-3} + b_i \delta_{i-2} + c_i \delta_{i-1} + d_i \delta_i + e_i \delta_{i+1} + f_i \delta_{i+2} + g_i \delta_{i+3} = h_i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$a_0 = b_0 = c_0 = a_1 = b_1 = a_2 = g_{N-2} = g_{N-1} = f_{N-1} = g_N = f_N = e_N = 0.$$

İlk aşamada, parametreler aşağıdaki gibi seçilir:

$$\alpha_0 = b_0, \quad \beta_0 = c_0, \quad \mu_0 = d_0, \quad \zeta_0 = \frac{e_0}{\mu_0}, \quad \lambda_0 = \frac{f_0}{\mu_0}, \quad \eta_0 = \frac{g_0}{\mu_0}, \quad \gamma_0 = \frac{h_0}{\mu_0},$$

$$\alpha_1 = b_1, \quad \beta_1 = c_1, \quad \mu_1 = d_1 - \beta_1 \zeta_0, \quad \zeta_1 = \frac{e_1 - \beta_1 \lambda_0}{\mu_1}, \quad \lambda_1 = \frac{f_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1},$$

$$\eta_1 = \frac{g_1}{\mu_1}, \quad \gamma_1 = \frac{h_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1}$$

ve

$$\alpha_2 = b_2, \quad \beta_2 = c_2 - \alpha_2 \zeta_0, \quad \mu_2 = d_2 - \lambda_0 \alpha_2 - \beta_2 \zeta_1, \quad \zeta_2 = \frac{e_2 - \eta_0 \alpha_2 - \beta_2 \lambda_1}{\mu_2},$$

$$\lambda_2 = \frac{f_2 - \beta_2 \eta_1}{\mu_2}, \quad \eta_2 = \frac{g_2}{\mu_2}, \quad \gamma_2 = \frac{h_2 - \alpha_2 \gamma_0 - \beta_2 \gamma_1}{\mu_2}.$$

İkinci adımda, aşağıdaki parametreler hesaplanır:

$$\alpha_i = b_i - a_i \zeta_{i-3}, \quad \beta_i = c_i - a_i \lambda_{i-3} - \alpha_i \zeta_{i-2}, \quad \mu_i = d_i - a_i \eta_{i-3} - \lambda_{i-2} \alpha_i - \beta_i \zeta_{i-1},$$

$$\zeta_i = \frac{e_i - \eta_{i-2} \alpha_i - \beta_i \lambda_{i-1}}{\mu_i}, \quad \lambda_i = \frac{f_i - \beta_i \eta_{i-1}}{\mu_i}, \quad \eta_i = \frac{g_i}{\mu_i},$$

$$\gamma_i = \frac{h_i - \beta_i \gamma_{i-1} - \alpha_i \gamma_{i-2} - a_i \gamma_{i-3}}{\mu_i}, \quad i = 3, 4, \dots, N.$$

Son olarak çözüm,

$$\delta_i = \gamma_i - \zeta_i \delta_{i+1} - \lambda_i \delta_{i+2} - \eta_i \delta_{i+3}, \quad i = 0, 1, \dots, N-4, N-3,$$

$$\delta_{N-2} = \gamma_{N-2} - \lambda_{N-2} \delta_N - \eta_{N-2} \delta_{N-1}, \quad \delta_{N-1} = \gamma_{N-1} - \eta_{N-1} \delta_N, \quad \delta_N = \gamma_N$$

olarak elde edilir.

### 3.1.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal algoritmanın lineer olarak kararlılığını belirleyebilmek için Von-Neumann kararlılık analizi kullanılacaktır. Bunun için GEW denkleminin  $U^p U_x$  lineer olmayan terimindeki  $U^p$  teriminin, bölgesel olarak sabit olduğu varsayılır. Daha sonra  $k$  mod numarası ve  $h$  eleman büyüklüğü olmak üzere,

$$\delta_m^n = \xi^n e^{imkh} \quad (i = \sqrt{-1})$$

ile verilen Fourier mod (3.10) ile verilen denklem de yerine yerleştirilirse, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \xi^{n+1} e^{i(m-3)kh} + \gamma_2 \xi^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_3 \xi^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \xi^{n+1} e^{imkh} \\ & + \gamma_5 \xi^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_6 \xi^{n+1} e^{i(m+2)kh} + \gamma_7 \xi^{n+1} e^{i(m+3)kh} = \\ & \gamma_7 \xi^n e^{i(m-3)kh} + \gamma_6 \xi^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_5 \xi^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \xi^n e^{imkh} \\ & + \gamma_3 \xi^n e^{i(m+1)kh} + \gamma_2 \xi^n e^{i(m+2)kh} + \gamma_1 \xi^n e^{i(m+3)kh}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Şimdi,  $e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$  Euler formülü (3.19) ile verilen denklem de uygulanır ve gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa büyüme faktörü olan  $\xi$ ,

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib}$$

olarak edilir. Burada

$$a = \gamma_4 + (\gamma_5 + \gamma_3) \cos[hk] + (\gamma_6 + \gamma_2) \cos[2hk] + (\gamma_7 + \gamma_1) \cos[3hk],$$

$$b = (\gamma_5 - \gamma_3) \sin[hk] + (\gamma_6 - \gamma_2) \sin[2hk] + (\gamma_7 - \gamma_1) \sin[3hk].$$

$|\xi|$  nin modülü 1 dir. Bu yüzden lineerleştirilmiş algoritma şartsız kararlıdır.

### 3.1.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Bu bölümde sayısal algoritma, tek solitary dalga, iki solitary dalga arasındaki ilişki ve Maxwellian başlangıç şartını içeren üç örnek üzerine uygulanmıştır. Bu üç test problemi başlangıç şartının farklı değerleri kullanılarak oluşturulmuştur. Sayısal yöntemin doğruluğunu göstermek ve daha önceki sayısal sonuçlarla elde edilen sonuçları karşılaştırabilmek için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları, aşağıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|$$

elde edilmiştir. Evans ve Raslan [22] GEW denkleminin analitik çözümünü

$$U(x, t) = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{p}{2\sqrt{\delta}}(x - ct - x_0) \right]} \quad (3.20)$$

olarak ifade etmiştir. Burada,  $gen. = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}}$  dalganın genliği,  $c$  pozitif  $x$  yönünde hareket eden dalganın sabit hızı ve  $x_0$  keyfi sabittir.

Ayrıca Evans ve Raslan [22] tarafından verilen ve solitary dalganın kütle, momentum ve enerji ile ilgili üç hareket sabiti olan,

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \delta U_x^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b U^{p+2} dx \quad (3.21)$$

parametrelerindeki değişim miktarı gözlemlenerek sayısal algoritmanın özellikleri koruduğu gösterilmiştir.

#### 3.1.3.1 Tek solitary dalganın hareketi

Bu problem için denklem (3.20) de  $t = 0$  alınması ile edilen başlangıç şartı kullanılacaktır.  $p$ ,  $c$  ve  $gen.$  nin farklı değerleri için beş farklı parametre kümesi oluşturulmuştur. Bu beş parametre kümesinin diğer değerleri  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$ ,  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $x_0 = 30$ ,  $0 \leq x \leq 80$  olarak seçilmiştir ve sayısal hesaplamalar  $t = 20$  zamanına kadar yapılmıştır.

İlk olarak,  $p = 2$  ve  $c = 1/32$  olarak alındı. Bu parametrelere göre solitary dalga  $gen. = 0.25$  genliğine sahip olur.  $I_1, I_2, I_3$  korunum sabitleri ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sayısal algoritma kullanılarak, normal ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.1’de gösterilmiştir. Tablo 3.1’de görüldüğü gibi,  $I_1 \times 10^5, I_2 \times 10^5$  ve  $I_3 \times 10^5$  korunum sabitlerinin başlangıç hesabındaki değişim, sırasıyla 0.0038, 0.0027 ve 0.0002 den daha azdır. Ayrıca  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının büyüklüğü istenildiği kadar küçüktür ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği ile elde edilen sonuçlar normal lineerleştirme tekniği ile elde edilen sonuçlardan küçük kalmaktadır.

İkinci olarak,  $p = 2$  ve  $c = 1/2$  değerleri alındığında, solitary dalga  $gen. = 1$  genliğine sahip olur.  $I_1, I_2, I_3$  korunum sabitleri ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sayısal yöntem kullanılarak, normal ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.2’de verilmiştir. Tablo 3.2 incelendiğinde  $I_1 \times 10^3, I_2 \times 10^3$  ve  $I_3 \times 10^3$  korunum sabitlerinin başlangıç durumundaki değişim miktarı, sırasıyla 0.0005, 0.0017 ve 0.0017 den daha azdır.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının sayısal değeri yeterince küçüktür. Eğer, iki farklı lineerleştirme tekniği ile elde edilen hata norm değerleri karşılaştırılacak olursa hesaplama için Rubin-Graves lineerleştirme tekniğinin daha etkili olduğu görülmektedir.

Üçüncü olarak, eğer  $p = 3$  ve  $c = 0.001$  parametre değerleri alınır, solitary dalga  $gen. = 0.15$  büyüklüğüne sahip olur. Bu parametre değerleri için  $I_1, I_2, I_3$  korunum sabitleri ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları Tablo 3.3’de sunulmuştur. Tablo 3.3 den gözlemlendiği gibi  $I_1 \times 10^6, I_2 \times 10^6$  ve  $I_3 \times 10^6$  korunum sabitlerindeki değişim hesaplama süresince sırasıyla 0.0001, 0.0001 ve 0.0001 değerlerinden daha küçük kalmaktadır.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları değerlendirildiği zaman, Rubin-Graves ile elde edilen sayısal sonuç daha iyi olmakla beraber, elde edilen norm değerleri hesaplama süresince oldukça küçük bulunmuştur.

$p = 3$  ve  $c = 0.3$  için solitary dalga  $gen. = 1$  yüksekliğine sahiptir. Elde edilen sayısal sonuçlar Tablo 3.4’te gösterilmiştir. Tablo 3.4’ten açıkça görülür ki  $I_1 \times 10^3, I_2 \times 10^3$  ve  $I_3 \times 10^3$  korunum sabitlerinin sayısal değerinde meydana gelen değişim miktarı 0.0637, 0.1606 ve 0.1607 den küçük kalmaktadır.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata norm değerleri ise arzu edildiği gibi küçüktür ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği normal lineerleştirme tekniğine göre programın çalıştırıldığı süre boyunca daha iyi sonuçlar vermektedir. Diğer yandan, seçilen bu parametre değerlerine göre solitary dalganın konum ve hareketi farklı zamanlarda Şekil 3.1’de çizilmiştir. Bu şekilde, dalga  $t = 0$  zamanından  $t = 10$  ve  $t = 20$  zamanına doğru

ilerledikçe beklendiği gibi sağa doğru şekil, hız ve büyüklüğünü kaybetmeden hareket etmektedir. Yani, bu dalgalar solitary dalga özelliğine sahiptirler.

Son olarak,  $p = 4$  ve  $c = 0.2$  büyüklükleri için solitary dalga  $gen. = 1$  genliğine sahiptir. Elde edilen sayısal değerler Tablo 3.5'te listelenmiştir. Tablo 3.5'ten belirlendiği gibi  $I_1 \times 10^3$ ,  $I_2 \times 10^3$  ve  $I_3 \times 10^3$  korunum sabitlerinin başlangıç değerine göre sayısal değişimleri, sırasıyla 0.1305, 0.2822 ve 0.2823 değerlerinden daha az olmaktadır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak elde edilen hata değerleri normal lineerleştirme tekniğine göre daha küçüktür ve elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata norm değerleri istenildiği kadar küçüktür. Solitary dalganın farklı zaman periyotlarındaki hareketi Şekil 3.2'de tasvir edilmiştir. Şekil 3.2 gösterir ki, elde edilen çözüm tahmin edildiği gibi bir solitary dalga oluşturur. Diğer bir deyişle, zaman ilerledikçe dalgalar şekil, hız ve genliklerini kaybetmeden yoluna devam eden solitary dalgalarıdır.

Tablo 3.1 Tek solitary dalganın  $p = 2$ ,  $gen. = 0.25$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

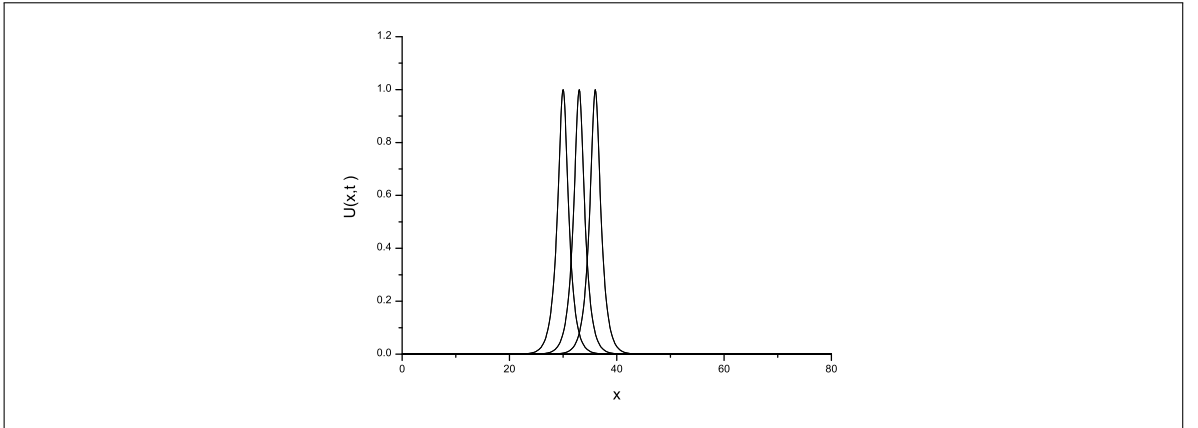
$t$		0	5	10	15	20
$I_1$	Normal	0.7853966	0.7853966	0.7853965	0.7853965	0.7853965
	Rub.-Grav.	0.7853966	0.7853966	0.7853966	0.7853966	0.7853965
$I_2$	Normal	0.1666664	0.1666663	0.1666663	0.1666663	0.1666663
	Rub.-Grav.	0.1666664	0.1666663	0.1666663	0.1666663	0.1666663
$I_3$	Normal	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083
	Rub.-Grav.	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083
$L_2 \times 10^5$	Normal	0.00000000	0.03067279	0.06285007	0.09693233	0.13336822
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.02900012	0.05967250	0.09243870	0.12775844
$L_\infty \times 10^5$	Normal	0.00000000	0.01989833	0.04083748	0.06230627	0.08399884
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.01721060	0.03441138	0.05158717	0.06887276

Tablo 3.2 Tek solitary dalganın  $p = 2$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

$t$		0	5	10	15	20
$I_1$	Normal	3.1415863	3.1415861	3.1415859	3.1415857	3.1415854
	Rub.-Grav.	3.1415863	3.1415864	3.1415862	3.1415860	3.1415858
$I_2$	Normal	2.6666616	2.6666613	2.6666610	2.6666607	2.6666604
	Rub.-Grav.	2.6666616	2.6666616	2.6666611	2.6666606	2.6666600
$I_3$	Normal	1.3333283	1.3333275	1.3333272	1.3333269	1.3333266
	Rub.-Grav.	1.3333283	1.3333283	1.3333278	1.3333272	1.3333267
$L_2$	Normal	0.00000000	0.00438263	0.00853676	0.01262954	0.01671823
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00421699	0.00849425	0.01279079	0.01708960
$L_\infty$	Normal	0.00000000	0.00289068	0.00539302	0.00789694	0.01040121
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00261076	0.00524102	0.00787126	0.01050088

Tablo 3.3 Tek solitary dalganın  $p = 3$ ,  $gen. = 0.15$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

$t$		0	5	10	15	20
$I_1$	Normal	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154
	Rub.-Grav.	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154
$I_2$	Normal	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807
	Rub.-Grav.	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807
$I_3 \times 10^4$	Normal	0.7330748	0.7330748	0.7330748	0.7330748	0.7330748
	Rub.-Grav.	0.7330748	0.7330748	0.7330748	0.7330748	0.7330748
$L_2 \times 10^7$	Normal	0.00000000	0.01575841	0.03157299	0.04744419	0.06337251
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.01574216	0.03154053	0.04739557	0.06330776
$L_\infty \times 10^7$	Normal	0.00000000	0.00855102	0.01715751	0.02582082	0.03454222
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00855128	0.01715803	0.02582167	0.03454333



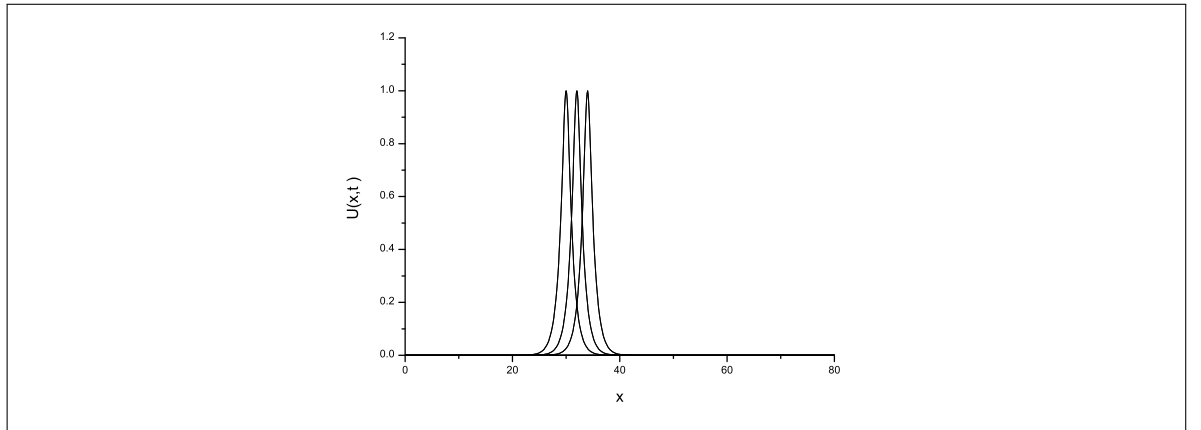
Şekil 3.1 Tek solitary dalganın  $p = 3$ ,  $gen. = 1$ ,  $x_0 = 30$ ,  $x \in [0, 80]$  için  $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi

Tablo 3.4 Tek solitary dalganın  $p = 3$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

$t$		0	5	10	15	20
$I_1$	Normal	2.8043580	2.8043577	2.8043575	2.8043572	2.8043570
	Rub.-Grav.	2.8043580	2.8043425	2.8043265	2.8043104	2.8042943
$I_2$	Normal	2.4639101	2.4639097	2.4639094	2.4639090	2.4639086
	Rub.-Grav.	2.4639101	2.4638709	2.4638305	2.4637900	2.4637496
$I_3$	Normal	0.9855618	0.9855613	0.9855610	0.9855606	0.9855602
	Rub.-Grav.	0.9855618	0.9855225	0.9854821	0.9854416	0.9854012
$L_2$	Normal	0.00000000	0.00204205	0.00404586	0.00603031	0.00800997
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00166798	0.00341195	0.00522557	0.00708099
$L_\infty$	Normal	0.00000000	0.00144917	0.00275209	0.00406426	0.00537733
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00114859	0.00234526	0.00356386	0.00480353

Tablo 3.5 Tek solitary dalganın  $p = 4$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

$t$		0	5	10	15	20
$I_1$	Normal	2.6220516	2.6220514	2.6220512	2.6220510	2.6220508
	Rub.-Grav.	2.6220516	2.6220193	2.6219866	2.6219539	2.6219211
$I_2$	Normal	2.3561915	2.3561912	2.3561909	2.3561905	2.3561902
	Rub.-Grav.	2.3561915	2.3561216	2.3560509	2.3559801	2.3559093
$I_3$	Normal	0.7853952	0.7853948	0.7853945	0.7853942	0.7853939
	Rub.-Grav.	0.7853952	0.7853252	0.7852545	0.7851837	0.7851130
$L_2$	Normal	0.00000000	0.00105910	0.00211286	0.00316045	0.00420836
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00075057	0.00156686	0.00245793	0.00341485
$L_\infty$	Normal	0.00000000	0.00078877	0.00151318	0.00223807	0.00296955
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00055460	0.00116121	0.00180868	0.00249360



Şekil 3.2 Tek solitary dalganın  $p = 4$ ,  $gen. = 1$ ,  $x_0 = 30$ ,  $x \in [0, 80]$  için  $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi



Tablo 3.6’da elde edilen korunum sabitlerinin ve hata norm büyüklüklerinin  $t = 20$  anındaki sayısal sonuçları, [5, 22, 23] çalışmalarında verilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu tablodan görüldüğü gibi, elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının büyüklükleri  $p = 2, 3$  parametresi için diğer çalışmalardan daha küçüktür;  $p = 4$  parametresi için ise elde edilen diğer sonuçlarla hemen hemen aynıdır. Ayrıca  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitlerinin sayısal yöntem kullanılarak elde edilen değerleri, daha önce yapılan çalışmalarda verilen sayısal değerlerle uyumlu bulunmuştur.

Tablo 3.6 Tek solitary dalganın  $p = 2, 3, 4$ ;  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

	$p$	2	3	4
$I_1$	QBSC [22]	0.78528640		
	CBSC [5]	0.78466760	0.65908330	
	CBSPG [23]	0.78539800	0.41891600	2.62206000
	SBSC	0.78539650	0.41891540	2.62192110
$I_2$	QBSC [22]	0.16658180		
	CBSC [5]	0.16643400	0.05938137	
	CBSPG [23]	0.16666900	0.05497830	2.35615000
	SBSC	0.16666630	0.05498070	2.35590930
$I_3$	QBSC [22]	0.00520600		
	CBSC [5]	0.00519380	0.00006871	
	CBSPG [23]	0.00520829	0.00007330	0.78534400
	SBSC	0.00520830	0.00007330	0.78511300
$L_2 \times 10^3$	QBSC [22]	0.15695390		
	CBSC [5]	0.19588780	0.51496770	
	CBSPG [23]	0.00250172	0.00006407	2.30499000
	SBSC	0.00127758	0.00000633	3.41485000
$L_\infty \times 10^3$	QBSC [22]	0.20214760		
	CBSC [5]	0.17443300	0.32060590	
	CBSPG [23]	0.00275164	0.00008206	1.88285000
	SBSC	0.00068872	0.00000345	2.49360000

### 3.1.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi

İkinci problem olarak, aynı yönde pozitif  $gen. = 1$  ve  $gen. = 0.5$  genliklerine sahip iki solitary dalga arasındaki etkileşim çalışılmıştır. Bu problem için,

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\frac{c_i(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{p}{2\sqrt{\delta}}(x - x_i) \right] \quad (3.22)$$

ile verilen başlangıç şartı kullanılmıştır. Burada  $i = 1, 2$  olmak üzere  $c_i$  ve  $x_i$  keyfi sabitlerdir.  $p$  ve  $c_i$  nin farklı değerleri için üç farklı parametre kümesi alınmıştır. Diğer tüm parametreler

bu problem için  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 30$  ve  $0 \leq x \leq 80$  olarak seçilmiştir.

İlk olarak,  $p = 2$ ,  $c_1 = 0.5$  ve  $c_2 = 0.125$  parametre değerleri alınmıştır. Program  $t = 0$  dan  $t = 60$  zamanına kadar çalıştırılmıştır.  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitlerinin sayısal değerleri Tablo 3.7 de listelenmiştir. Tablo 3.7 den anlaşıldığı gibi  $I_1 \times 10^3$ ,  $I_2 \times 10^3$  ve  $I_3 \times 10^3$  ile verilen kütle, momentum ve enerji ile ilgili üç korunum sabitinde meydana gelen değişim Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için sırasıyla 0.0013, 0.0002 ve 0.005 ten daha küçük kalmaktadır. Normal lineerleştirme tekniği ile elde edilen korunum sabitlerinin sayısal değerleri,  $t = 60$  zamanına kadar neredeyse değişmeden kalmaktadır. Ayrıca elde ettiğimiz korunum sabitlerinin sayısal değerleri, kuadratik Petrov-Galerkin yöntemi [23] ile elde edilen sonuçlara çok yakındır.

İkinci olarak,  $p = 3$ ,  $c_1 = 0.3$  ve  $c_2 = 0.0375$  parametre değerlerini seçildi. Sayısal algoritma  $t = 100$  zamanına kadar çalıştırılarak  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitlerinin sayısal değerleri Tablo 3.8'de gösterilmiştir. Tablo 3.8 den anlaşıldığı gibi  $I_1 \times 10^3$ ,  $I_2 \times 10^3$  ve  $I_3 \times 10^3$  korunum sabitlerinin değişimi, Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için 0.002, 0.0001 ve 0.0005 değerlerinden daha az olmaktadır. Normal lineerleştirme tekniği için elde edilen korunum sabitleri ise, programın çalışması süresince neredeyse sabit kalmaktadır. Diğer yandan korunum sabitlerinin elde ettiğimiz sayısal değerleri, [23] ile verilen çalışmadaki sonuçlarla oldukça uyumludur. Şekil 3.3, iki solitary dalga arasındaki ilişkiyi farklı zaman periyotlarında tasvir etmektedir. Şekilde gözlemlendiği gibi,  $t = 0$  anında genliği büyük olan dalga genliği küçük olan dalganın konum olarak gerisindedir. Solitary dalga teorisinde de açıklandığı gibi, genliği büyük olan dalganın hızı büyük olduğu için zaman ilerledikçe konumca önde olan küçük genlikli dalgayı yakalar.  $t = 50$  anı civarında iki solitary dalga arasındaki etkileşim başlar, diğer bir deyişle bir dalga diğer dalganın üzerine biner.  $t = 70$  anında dalgalar ayrılmaya başlar.  $t = 100$  zamanında ise dalgalar belirgin olarak ayrılır ve büyük genlikli dalga önde, küçük genlikli dalga arkada başlangıç şekil, hız ve büyüklüklerini koruyarak yollarına devam ederler. Sonuç olarak, iki solitary dalga aynı yönde ilerlerken etkileşim gerçekleşir ve çarpışmadan sonra özelliklerini çok az kaybederek uzun mesafe yol alabilirler. Yani bu dalgalar solitonlardır.

Son olarak,  $p = 4$ ,  $c_1 = 0.2$  ve  $c_2 = 1/80$  parametre değerleri alındı. Sayısal hesaplamalar  $t = 120$  zamanına kadar yapıldı.  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitleri sayısal yöntemin özellikleri ko-

ruduğunu göstermek için hesaplandı ve sonuçlar Tablo 3.9’da verildi. Tablo 3.9 da görüldüğü gibi  $I_1 \times 10^4$ ,  $I_2 \times 10^4$  ve  $I_3 \times 10^4$  sabitlerindeki değişim Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için 0.01, 0.001 ve 0.005 den daha küçük kalmaktadır. Normal lineerleştirme tekniği için ise bu sabitler neredeyse değişmeden kalmaktadır. Ayrıca korunum sabitlerinin sayısal sonuçları, kuadratik Petrov-Galerkin yöntemi [23] ile elde edilen sonuçlara çok yakındır. İki solitary dalganın hareketi farklı zaman aşamalarında Şekil 3.4’te resmedilmiştir. Bu şekilden şu sonuç çıkarılır:  $t = 0$  anında büyük genlikli dalga küçük genlikli dalganın solundadır.  $t = 50$  anında büyük genlikli dalga küçük genlikli dalgayı yakalar ve  $t = 70$  anında iki dalga arasındaki etkileşim başlar.  $t = 100$  anında ise solitary dalgalar ayrılır ve artık büyük genlikli dalga küçük genlikli dalganın sağındadır. Solitary dalgalar, özelliklerini çarpışmadan sonra koruduğu ve bu şekilde uzun bir müddet yol aldıkları için solitonlardır.

Tablo 3.7 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 2$ ,  $gen. = 1, 0.5$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri

$t$		0	10	20	30	40	50	60
$I_1$	Normal	4.7123733	4.7123745	4.7123745	4.7123745	4.7123745	4.7123745	4.7123745
	Rub.-Grav.	4.7123733	4.7123745	4.7123743	4.7123665	4.7123702	4.7123746	4.7123747
	CBSPG [23]	4.7123900	4.7123900	4.7123900	4.7123900	4.7123900	4.7123900	4.7123900
$I_2$	Normal	3.3333294	3.3333294	3.3333294	3.3333295	3.3333295	3.3333295	3.3333295
	Rub.-Grav.	3.3333294	3.3333294	3.3333290	3.3333139	3.3333214	3.3333296	3.3333296
	CBSPG [23]	3.3332400	3.3332400	3.3332400	3.3332400	3.3333300	3.3333800	3.3333300
$I_3$	Normal	1.4166643	1.4166643	1.4166642	1.4166594	1.4166615	1.4166644	1.4166644
	Rub.-Grav.	1.4166643	1.4166643	1.4166639	1.4166446	1.4166532	1.4166642	1.4166644
	CBSPG [23]	1.1416660	1.1416660	1.1416660	1.1416640	1.1416650	1.1416660	1.1416660

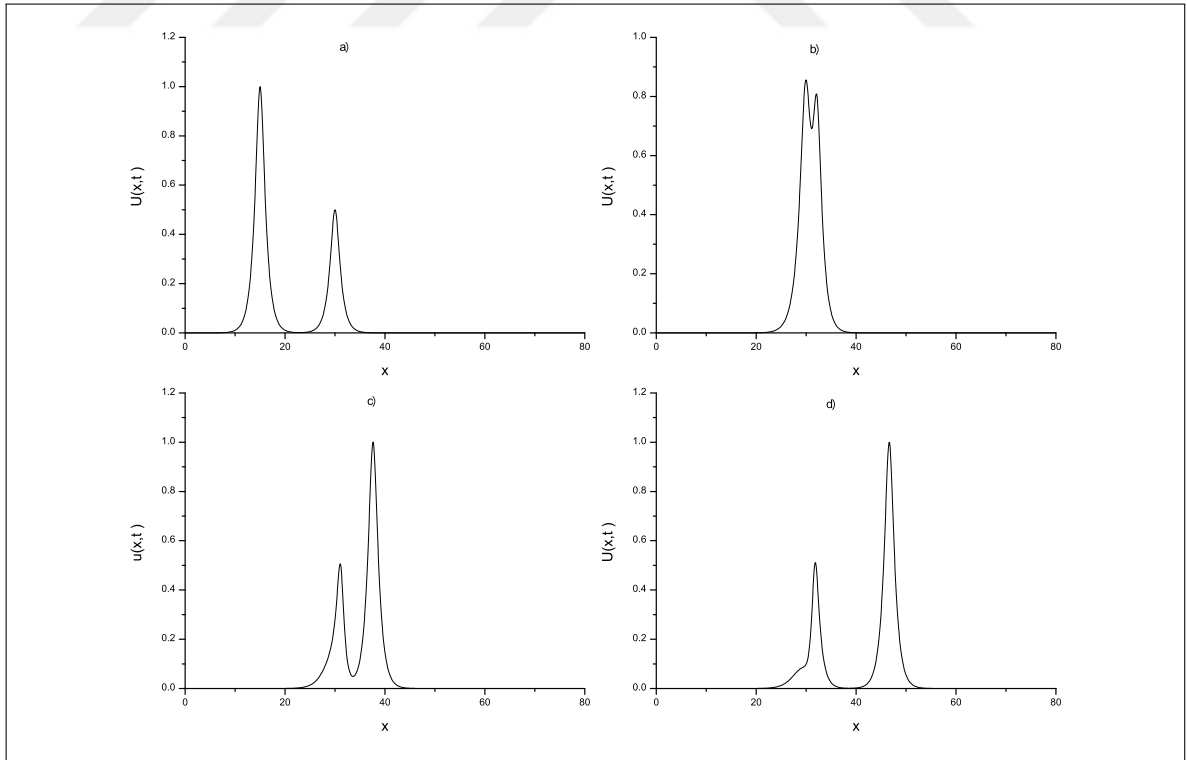
Tablo 3.8 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 3$ ,  $gen. = 1, 0.5$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri

$t$		0	10	20	40	60	80	90	100
$I_1$	Normal	4.2065320	4.2065329	4.2065330	4.2065330	4.2065330	4.2065330	4.2065330	4.2065330
	Rub.-Grav.	4.2065320	4.2065328	4.2065328	4.2065303	4.2065314	4.2065325	4.2065324	4.2065323
	CBSPG [23]	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500
$I_2$	Normal	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892
	Rub.-Grav.	3.0798892	3.0798889	3.0798887	3.0798842	3.0798862	3.0798879	3.0798877	3.0798875
	CBSPG [23]	3.9797700	2.0798600	3.0798200	3.0798600	3.0798700	3.0799100	3.0797400	3.0797200
$I_3$	Normal	1.0163623	1.0163623	1.0163623	1.0163619	1.0163620	1.0163624	1.0163625	1.0163625
	Rub.-Grav.	1.0163623	1.0163621	1.0163619	1.0163573	1.0163585	1.0163606	1.0163604	1.0163602
	CBSPG [23]	1.0163400	1.0163400	1.0163400	1.0163400	1.0163300	1.0163300	1.0163300	1.0163400

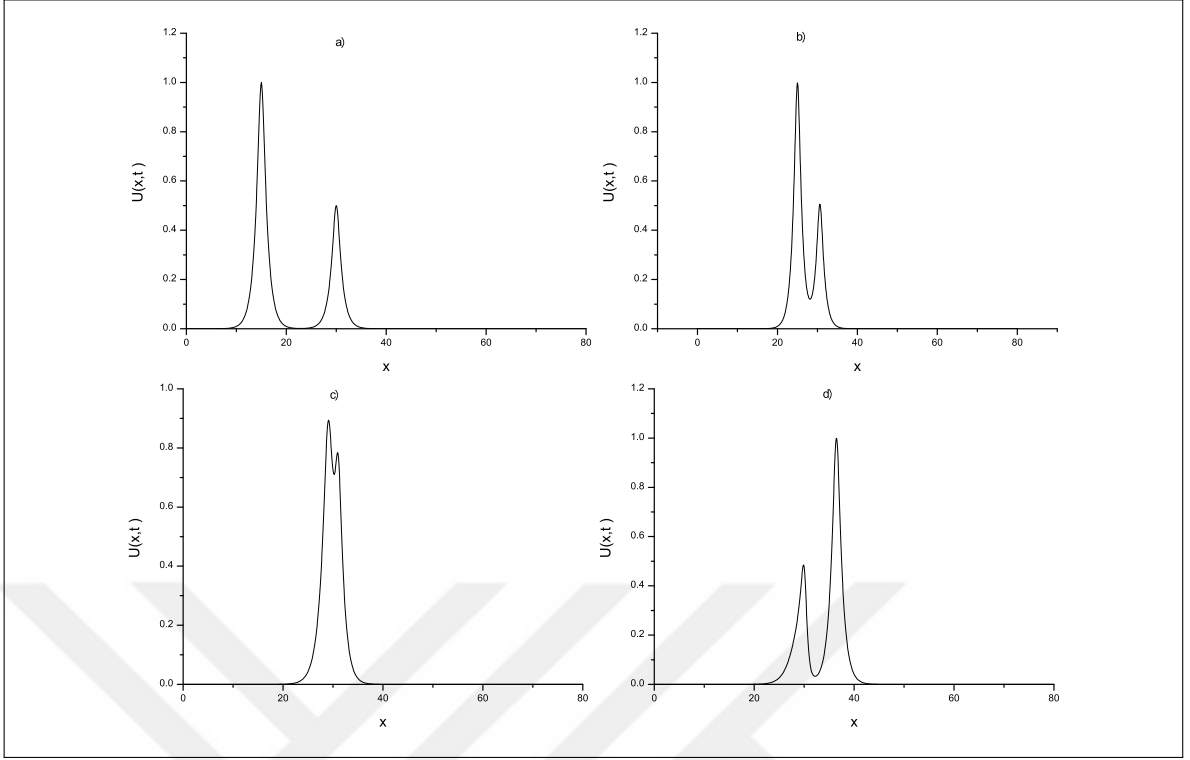
Tablo 3.9 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 4$ ,  $gen. = 1, 0.5$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 80]$

için korunum sabitleri

$t$		0	10	20	40	60	80	100	120
$I_1$	Normal	3.9330730	3.9330737	3.9330738	3.9330738	3.9330738	3.9330738	3.9330738	3.9330739
	Rub.-Grav.	3.9330730	3.9330736	3.9330735	3.9330732	3.9330702	3.9330709	3.9330728	3.9330725
	CBSPG [23]	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330800
$I_2$	Normal	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406
	Rub.-Grav.	2.9452406	2.9452403	2.9452401	2.9452394	2.9452339	2.9452353	2.9452384	2.9452379
	CBSPG [23]	2.9451200	2.9451800	2.9451700	2.9451500	2.9450500	2.9450600	2.9450800	2.9451100
$I_3$	Normal	0.7976683	0.7976683	0.7976683	0.7976683	0.7976680	0.7976679	0.7976684	0.7976684
	Rub.-Grav.	0.7976683	0.7976680	0.7976677	0.7976671	0.7976617	0.7976622	0.7976655	0.7976649
	CBSPG [23]	0.7976140	0.7976120	0.7976110	0.7976120	0.7976220	0.7976130	0.7976110	0.7976110



Şekil 3.3 İki solitary dalganın  $p = 3$ ; a)  $t = 0$ , b)  $t = 50$ , c)  $t = 70$ , d)  $t = 100$ 'deki hareketi



Şekil 3.4 İki solitary dalganın  $p = 4$ ; a)  $t = 0$ , b)  $t = 50$ , c)  $t = 70$ , d)  $t = 100$ 'deki hareketi

### 3.1.3.3 Maxwellian başlangıç şartı

Son problem olarak, (3.1) ile verilen denklem

$$U(x, 0) = \text{Exp}(-x^2), \quad -20 \leq x \leq 20 \quad (3.23)$$

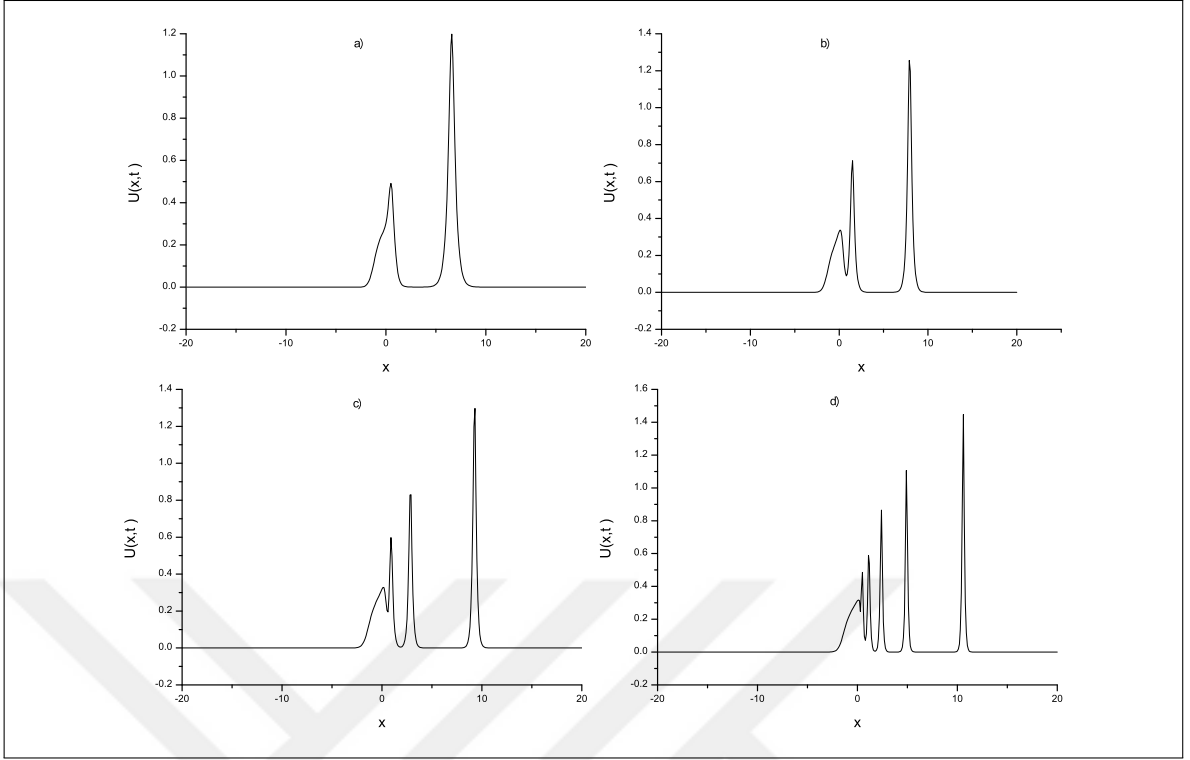
şeklinde verilen Maxwellian başlangıç şartı ile beraber ele alınmıştır. Bu durumda çözümün davranışı  $\mu$  değerlerine bağlıdır. Bu yüzden,  $\mu = 0.01$ ,  $\mu = 0.025$ ,  $\mu = 0.05$ ,  $\mu = 0.1$  ve  $p = 2, 3, 4$  parametreleri seçilerek solitary dalganın davranışı incelenmiştir. Sayısal değerler  $t = 12$  anına kadar gözlemlenmiştir. Hareket sabitlerinin sayısal değerleri farklı  $\mu$  değerleri için Tablo 3.10'da sunulmuştur.  $I_1 \times 10^3$ ,  $I_2 \times 10^3$  ve  $I_3 \times 10^3$  hareket sabitlerinin başlangıç değerine göre değişimi sırasıyla  $p = 2$  için 0.03, 0.07 ve 0.2;  $p = 3$  için 0.05, 0.2 ve 0.2;  $p = 4$  için 0.08, 0.2 ve 0.6 dan daha küçük kalmaktadır. Üstelik  $t = 12$  de elde edilen korunum sabitleri ile [23] te verilen sayısal sonuçlar arasındaki fark oldukça küçüktür.

Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 Maxwellian başlangıç şartına göre solitary dalgaların gelişimini göstermektedir. Bu şekillerde görüldüğü gibi  $\mu = 0.1$  değeri için sadece bir tane kararlı dalga görünür.  $\mu = 0.05$  olduğu zaman iki tane kararlı solitary dalga görünür. Üç ve beş tane kararlı dalga ise sırasıyla  $\mu = 0.025$  ve  $\mu = 0.01$  parametre değerlerinde oluşur. Bu

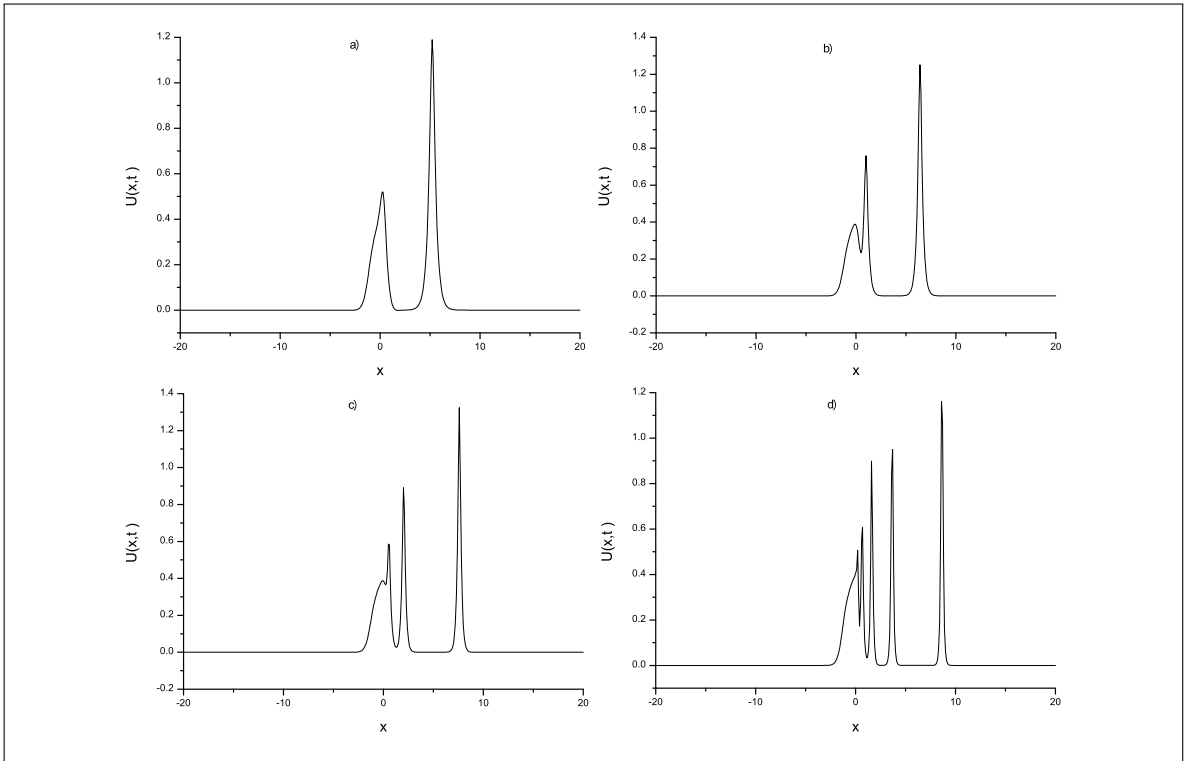
şekillerden sonuç olarak şunu söyleyebiliriz: Eğer  $\mu$  değeri azaltılırsa, oluşan kararlı solitary dalga sayısı artmaktadır.

Tablo 3.10 Maxwellian başlangıç şartı ve  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [-20, 20]$  için korunum sabitleri

$\mu$	$t$	$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
		$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.010	0	1.772453	1.265847	0.886226	1.772453	1.265847	0.792665	1.772453	1.265847	0.723601
	4	1.773567	1.272162	0.913749	1.776431	1.280719	0.851731	1.803566	1.363095	1.083499
	8	1.774354	1.273668	0.905325	1.782107	1.293911	0.847407	1.805571	1.392182	1.468426
	12	1.773219	1.267638	0.897781	1.788222	1.329233	1.014441	1.757360	1.218707	0.577822
CBS PG [23]	12	1.772400	1.265800	0.886200	1.772400	1.266500	0.794700	1.772500	1.266900	0.725300
0.025	0	1.772453	1.284646	0.886226	1.772453	1.284646	0.792665	1.772453	1.284646	0.723601
	4	1.772624	1.285168	0.887871	1.772841	1.285658	0.799622	1.776099	1.298322	0.787247
	8	1.772635	1.285208	0.887926	1.772963	1.285086	0.792383	1.770003	1.274934	0.705119
	12	1.772636	1.285180	0.887737	1.772636	1.283938	0.793308	1.777013	1.302710	0.808295
CBS PG [23]	12	1.772400	1.283500	0.885600	1.772300	1.283400	0.791000	1.772400	1.284900	0.724300
0.050	0	1.772453	1.315979	0.886226	1.772453	1.315979	0.792665	1.772453	1.315979	0.723601
	4	1.772519	1.316150	0.886577	1.772578	1.316226	0.793414	1.772432	1.315294	0.722397
	8	1.772520	1.316152	0.886582	1.772577	1.316198	0.793400	1.772717	1.316536	0.726374
	12	1.772520	1.316151	0.886579	1.772592	1.316254	0.793420	1.773333	1.318824	0.731885
CBS PG [23]	12	1.772400	1.316000	0.886100	1.772400	1.315600	0.792200	1.772400	1.317700	0.724500
0.100	0	1.772453	1.378645	0.886226	1.772453	1.378645	0.792665	1.772453	1.378645	0.723601
	4	1.772478	1.378707	0.886327	1.772501	1.378748	0.792856	1.772530	1.378826	0.724088
	8	1.772479	1.378707	0.886327	1.772500	1.378745	0.792853	1.772531	1.378843	0.724131
	12	1.772479	1.378707	0.886327	1.772499	1.378742	0.792847	1.772524	1.378812	0.724054
CBS PG [23]	12	1.772400	1.378500	0.886100	1.772400	1.378700	0.792600	1.773400	1.383600	0.722400



Şekil 3.5 Maxwellian başlangıç şartı ve  $p = 3$ ,  $t = 12$ ; a)  $\mu = 0.1$ , b)  $\mu = 0.05$ , c)  $\mu = 0.025$ , d)  $\mu = 0.01$  değerleri için dalgaların oluşumu



Şekil 3.6 Maxwellian başlangıç şartı ve  $p = 4$ ,  $t = 12$ ; a)  $\mu = 0.1$ , b)  $\mu = 0.05$ , c)  $\mu = 0.025$ , d)  $\mu = 0.01$  değerleri için dalgaların oluşumu

### 3.2 GEW Denklemine Kuintik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü

GEW denklemi aşağıdaki forma sahiptir:

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0. \quad (3.24)$$

Burada fiziksel sınır şartları  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $U \rightarrow 0$ , alt indis  $t$  ve  $x$  zaman ve boyutsal türevi ifade eder,  $\varepsilon$  ve  $p$  pozitif tamsayıdır,  $\mu$  pozitif sabittir.

Denklemin türevli yapısı ve kuintik B-spline şekil fonksiyonları dikkate alınarak, sınır ve başlangıç şartları

$$\begin{aligned} U(a,t) &= 0, & U_x(a,t) &= 0, \\ U(b,t) &= 0, & U_x(b,t) &= 0, \\ U(x,0) &= f(x), & a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (3.25)$$

şeklinde seçilir.

$[a, b]$  aralığında tanımlanmış bir çözüm bölgesini düşünelim. Aralık uzunluğu  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  ve  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  olmak üzere,  $[a, b]$  aralığı  $x_m$  düğüm noktalarıyla  $N$  tane eşit alt aralığa bölünür.  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturan  $\phi_m(x)$  ( $m = -2, -1, \dots, N+2$ ) kuintik B-spline fonksiyonları,  $x_m$  düğüm noktalarında Prenter [78] tarafından

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}) \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}) \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m) \\ (x_{m+3} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5 + 15(x_{m+1} - x)^5, & [x_m, x_{m+1}) \\ (x_{m+3} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ (x_{m+3} - x)^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.26)$$

olarak tanımlanmıştır. Her bir kuintik B-spline  $\phi_m$  fonksiyonu ardışık 6 tane sonlu alt aralığı örter. Bu yüzden her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu alt aralığı 6 adet B-spline fonksiyonu tarafından örtülür.  $U_N(x, t)$  yaklaşık çözümü, kuintik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (3.27)$$



olarak ifade edilir. Burada  $\delta_m(t)$ , zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir, sınır şartları ve GEW denkleminin kuintik B-spline kollokasyon şartı kullanılarak bulunacaktır. (3.26) ile verilen B-spline fonksiyonlar, (3.27) ile verilen yaklaşık çözüm de yerine yerleştirilerek, yaklaşık çözüm  $U_m$  ve onun  $x$ 'e göre ikinci mertebeye kadar olan türevleri,  $x_m$  düğüm noktasında  $\delta_m$  bilinmeyen parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\ U'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ U''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

olarak hesaplanır. Böylece  $U$  değişimi  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı üzerinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m \delta_m. \quad (3.29)$$

Denklem (3.28) ile verilen  $U_m$  ve onun  $x$ 'e göre türevleri, denklem (3.24) ile verilen GEW denkleminde kullanılırsa: Normal lineerleştirme tekniği için,

$$\begin{aligned} &\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2} \\ &+ \frac{5\varepsilon Z_m}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ &- \frac{20\mu}{h^2}(\dot{\delta}_{m-2} + 2\dot{\delta}_{m-1} - 6\dot{\delta}_m + 2\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

şeklinde kollokasyon şartının genel formu elde edilir. Burada,

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^p$$

olarak alınmıştır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için, birleştirilmiş adi diferansiyel denklemlerin bir kümesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} &\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2} \\ &+ \varepsilon Z_m(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ &- \frac{20\mu}{h^2}(\dot{\delta}_{m-2} + 2\dot{\delta}_{m-1} - 6\dot{\delta}_m + 2\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Burada,

$$\begin{aligned} Z_m &\cong [(U_m)^{p-1}(U_m)_x]^{n+1} = (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^{n+1} + (U_m^{p-1})^{n+1} (U_m)_x^n - (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^n \\ &= (U_m^n)^{p-1} (U_m^{n+1})_x + (U_m^{n+1})^{p-1} (U_m)_x - (U_m^n)^{p-1} (U_m)_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_m \cong & (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^{n+1} - 10\delta_{m-1}^{n+1} + 10\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1}) \\
& + (\delta_{m-2}^{n+1} + 26\delta_{m-1}^{n+1} + 66\delta_m^{n+1} + 26\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1})^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n) \\
& - (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^{n+1} - 10\delta_{m-1}^{n+1} + 10\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1})
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve her iki genel denklemde “.” zamana göre türevi ifade eder. (3.30) ve (3.31) ile verilen genel çözüm denklemlerinde bulunan zamana göre bilinmeyen parametreler olan  $\delta_m$  ve zamana göre türevleri olan  $\dot{\delta}_m$  katsayılarına sırasıyla,

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \quad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (3.32)$$

formülleri ile verilen Crank-Nicolson ve klasik ileri sonlu fark yaklaşımı uygulanır. Bu halde, normal lineerleştirme tekniği için  $\delta_i^{n+1}$  ve  $\delta_i^n$  bilinmeyen zaman parametrelerine göre iki ardışık zaman adımı  $n$  ve  $n+1$  arasındaki tekrarlama bağıntısı,

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\
& = \gamma_5 \delta_{m-2}^n + \gamma_4 \delta_{m-1}^n + \gamma_3 \delta_m^n + \gamma_2 \delta_{m+1}^n + \gamma_1 \delta_{m+2}^n
\end{aligned} \quad (3.33)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (1 - EZ_m - M), \quad \gamma_2 = (26 - 10EZ_m - 2M), \quad \gamma_3 = (66 + 6M), \\
\gamma_4 &= (26 + 10EZ_m - 2M), \quad \gamma_5 = (1 + EZ_m - M), \\
m &= 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{5\varepsilon}{2h} \Delta t, \quad M = \frac{20\mu}{h^2}.
\end{aligned} \quad (3.34)$$

Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için tekrarlama bağıntısı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_1 \delta_{m+2}^{n+1} \\
& = \gamma_4 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_6 \delta_m^n + \gamma_5 \delta_{m+1}^n + \gamma_4 \delta_{m+2}^n.
\end{aligned} \quad (3.35)$$

Burada,

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (1 + EZ_m - M), \quad \gamma_2 = (26 + 26EZ_m - 2M), \quad \gamma_3 = (66 + 66EZ_m + 6M), \\
\gamma_4 &= (1 - EZ_m - M), \quad \gamma_5 = (26 - 26EZ_m - 2M), \quad \gamma_6 = (66 - 66EZ_m + 6M), \\
m &= 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{\varepsilon \Delta t}{2}, \quad M = \frac{20\mu}{h^2}.
\end{aligned} \quad (3.36)$$

(3.33) ve (3.35) ile verilen cebirsel denklem sistemleri  $N+1$  tane lineer denklem ve  $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$  parametrelerinden oluşan  $N+5$  tane bilinmeyenden oluşur. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 4 tane ek şarta ihtiyaç vardır. Gerekli 4 tane ek şart (3.25) ile verilen sınır şartları kullanılarak elde edilir. Sınır şartlarının cebirsel denklem

sistemine basit bir şekilde dahil edilmesi olarak ifade edilen bu aşamanın benzeri, aşağıda iterasyonu başlatabilmek için  $d^0$  başlangıç değerinin belirlenmesi aşamasında verilmiştir. Böylece  $\delta_{-2}, \delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  parametreleri, (3.33) ve (3.35) ile verilen cebirsel denklem sistemlerinden silinir. Bu işlemlerden sonra  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  olmak üzere,  $N + 1$  tane bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi (matris form) oluşur:

$$A\mathbf{d}^{n+1} = B\mathbf{d}^n. \quad (3.37)$$

$A$  ve  $B$  matrisleri,  $(N + 1) \times (N + 1)$  boyutlu 5 sütun elemanlı matrislerdir (penta-diagonal matris olarak adlandırılır) ve bu matris denklemini aşağıda alt bölüm 3.2.1'de açıklandığı gibi Fortran programında Thomas algoritması (penta-diagonal algoritma) kullanılarak çözülmüştür. Lineer olmayan terim  $Z_m$  deki eleman parametresine

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

formülü ile verilen iç iterasyon her bir zaman adımında üç veya dört defa uygulanarak çözüm iyileştirilmiştir.

### Başlangıç iterasyonu

(3.33) ve (3.35) ile verilen tekrarlama bağıntılarında iterasyonu başlatabilmek için  $d^0$  başlangıç değeri bulunmalıdır. Yaklaşık çözümün başlangıç şartı,

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m^0(t)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşık çözümde  $\delta_m^0$  bilinmeyen parametrelerini belirleyebilmek için başlangıç şartı ve aşağıdaki sınır noktalarındaki türevler kullanılır:

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) &= U(x_m, 0); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(a, 0) = 0, \\ (U_N)_x(b, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(b, 0) = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Başlangıç şartı  $\delta_m$  parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2 &= U(x_0, 0), \\
\delta_{-1} + 26\delta_0 + 66\delta_1 + 26\delta_2 + \delta_3 &= U(x_1, 0), \\
\delta_0 + 26\delta_1 + 66\delta_2 + 26\delta_3 + \delta_4 &= U(x_2, 0), \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\delta_{N-4} + 26\delta_{N-3} + 66\delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + \delta_N &= U(x_{N-2}, 0), \\
\delta_{N-3} + 26\delta_{N-2} + 66\delta_{N-1} + 26\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_{N-1}, 0), \\
\delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + 66\delta_N + 26\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= U(x_N, 0)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

olarak yazılır. Bu denklem sistemi  $N + 1$  tane cebirsel denkleme ve  $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$  parametrelerinden oluşan  $N + 5$  tane bilinmeyene sahiptir. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 4 tane ek şarta ihtiyaç vardır. Bunun için başlangıç şartının (3.38) ile verilen sınır noktalarındaki türevleri kullanılır. Türevli sınır koşulları  $\delta_m$  parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
-\delta_{-2} - 10\delta_{-1} + 10\delta_1 + \delta_2 &= 0, \\
\delta_{-2} + 2\delta_{-1} - 6\delta_0 + 2\delta_1 + \delta_2 &= 0, \\
-\delta_{N-2} - 10\delta_{N-1} + 10\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= 0, \\
\delta_{N-2} + 2\delta_{N-1} - 6\delta_N + 2\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

olarak hesaplanır. Bu denklemlerden  $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})$  parametreleri çekilirse aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} &= \frac{1}{2}(15\delta_0 - 10\delta_1 - 3\delta_2), \\
\delta_{-1} &= -\frac{3}{4}\delta_0 + \frac{3}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2, \\
\delta_{N+1} &= -\frac{3}{4}\delta_N + \frac{3}{2}\delta_{N-1} + \frac{1}{4}\delta_{N-2}, \\
\delta_{N+2} &= \frac{1}{2}(15\delta_N - 10\delta_{N-1} - 3\delta_{N-2}).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Bu ifadeler (3.39) ile verilen denklem de yerine yazılırsa,  $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})$  parametreleri yok edilir. Bu işlemle beraber  $d^0$  başlangıç değerinin aşağıdaki matris formu elde edilir:

$$Wd^0 = b.$$

Burada,

$$W = \begin{bmatrix} 54 & 60 & 6 & & & & & & & \\ 25.25 & 67.5 & 26.25 & 1 & & & & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & \\ & & & & 1 & 26.25 & 67.5 & 25.25 & & \\ & & & & & 6 & 60 & 54 & & \end{bmatrix},$$

$$d^0 = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-2}, \delta_{N-1}, \delta_N)^T,$$

$$b = (U(x_0, 0), U(x_1, 0), \dots, U(x_{N-1}, 0), U(x_N, 0))^T.$$

Bu matris denkleminde  $d^0$  başlangıç değeri Thomas algoritması ile çözümlenerek elde edilir.

Başlangıç değerinin bulunmasıyla beraber (3.37) ile verilen matris sisteminde  $n = 0$  için sağ taraf belirlenmiştir. Buradan da matrisin sol tarafı, Thomas algoritması ile bulunur. Böylece istenilen zaman adımında bir önceki parametreden bulunan değerler kullanılarak (iterasyon yapılarak) GEW denkleminin sayısal çözümleri bulunmuş olur.

### 3.2.1 Thomas algoritması ile penta-diagonal matris sisteminin çözümü

Fortran programında tasarlandığı gibi penta-diagonal matris sisteminin Thomas algoritması ile çözümünü aşağıdaki adımlar gerçekleştirilerek bulunur: Penta-diagonal sistem,

$$a_i \delta_{i-2} + b_i \delta_{i-1} + c_i \delta_i + d_i \delta_{i+1} + e_i \delta_{i+2} = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

olarak ifade edilebilir. İlk aşamada, parametreler aşağıdaki gibi kurulur:

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = c_0, \quad \mu_0 = \frac{d_0}{\beta_0}, \quad \zeta_0 = \frac{e_0}{\beta_0}, \quad \lambda_0 = \frac{f_0}{\beta_0},$$

$$\alpha_1 = b_0, \quad \beta_1 = c_1 - \alpha_1 \mu_0, \quad \mu_1 = \frac{d_1 - \alpha_1 \zeta_0}{\beta_1}, \quad \zeta_1 = \frac{e_1}{\beta_1}, \quad \lambda_1 = \frac{f_1 - \alpha_1 \lambda_0}{\beta_1}.$$

İkinci adımda, aşağıdaki parametreler hesaplanır:

$$\alpha_i = b_{i-1} - a_{i-2} \mu_{i-2}, \quad \beta_i = c_i - \alpha_i \mu_{i-1} - a_{i-2} \zeta_{i-2}, \quad \mu_i = \frac{d_i - \alpha_i \zeta_{i-1}}{\beta_i},$$

$$\zeta_i = \frac{e_i}{\beta_i}, \quad \lambda_i = \frac{f_i - \alpha_i \lambda_{i-1} - a_{i-2} \lambda_{i-2}}{\beta_i}, \quad i = 2, 3, \dots, N.$$

Şu anda çözüm,

$$\delta_N = \lambda_N, \quad \delta_{N-1} = \lambda_{N-1} - \mu_{N-1} \delta_N,$$

$$\delta_i = \lambda_i - \zeta_i \delta_{i+2} - \mu_i \delta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-3, N-2$$

olarak bulunur.

### 3.2.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal yöntemin lineer kararlılığını araştırmak için Von-Neumann yaklaşımı kullanılacak ve GEW denkleminin  $U^P U_x$  lineer olmayan terimindeki  $U^P$  teriminin bölgesel olarak sabit olduğu varsayılacaktır. Daha sonra,  $k$  mod numarası ve  $h$  eleman büyüklüğü olmak üzere,

$$\delta_m^n = \xi^n e^{imkh} \quad (i = \sqrt{-1})$$

ile verilen Fourier mod (3.33) ile verilen denklem de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \xi^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_2 \xi^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_3 \xi^{n+1} e^{i(m)kh} + \gamma_4 \xi^{n+1} e^{i(m+1)kh} \\ & + \gamma_5 \xi^{n+1} e^{i(m+2)kh} = \\ & \gamma_5 \xi^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_4 \xi^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_3 \xi^n e^{i(m)kh} + \gamma_2 \xi^n e^{i(m+1)kh} \\ & + \gamma_1 \xi^n e^{i(m+2)kh} \end{aligned} \quad (3.42)$$

eşitliği elde edilir.  $e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$  Euler formülü (3.42) ile verilen denklem de uygulanır ve gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa büyüme faktörü olan  $\xi$ ,

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib}$$

olarak edilir. Burada,

$$a = \gamma_3 + (\gamma_4 + \gamma_2) \cos[hk] + (\gamma_5 + \gamma_1) \cos[2hk],$$

$$b = (\gamma_4 - \gamma_2) \sin[hk] + (\gamma_5 - \gamma_1) \sin[2hk].$$

$|\xi|$  nin modülü 1 dirki bu ise lineerleştirilmiş algoritmanın şartsız kararlı olduğu anlamındadır.

### 3.2.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Bu bölümde sayısal algoritma, tek solitary dalga, iki solitary dalga arasındaki ilişki ve Maxwellian başlangıç şartını içeren üç test problemi üzerinde çalışılmıştır. (3.44) ile verilen hareket sabitleri sayısal yaklaşımın kütle, momentum ve enerji ile ilgili özellikleri koruduğunu göstermek için hesaplanmıştır. Sayısal yöntemin doğruluğunu kanıtlamak ve literatürde verilen sayısal sonuçlarla elde edilen sonuçları karşılaştırabilmek için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata

normları, aşağıdaki eşitlikler kullanılarak hesaplanmıştır:

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{exact} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{exact} - (U_N)_j|.$$

Evans ve Raslan [22], GEW denkleminin analitik çözümünü

$$U(x,t) = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{p}{2\sqrt{\mu}}(x-ct-x_0) \right]} \quad (3.43)$$

şeklinde ifade etmiştir. Burada  $gen. = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}}$  dalganın genliği,  $c$  pozitif  $x$  yönünde hareket eden dalganın sabit hızı ve  $x_0$  keyfi sabittir.

Solitary dalganın kütle, momentum ve enerji ile ilgili üç korunum sabiti aşağıdaki gibi verilir:

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu U_x^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b U^{p+2} dx. \quad (3.44)$$

### 3.2.3.1 Tek solitary dalganın hareketi

İlk olarak, (3.24) ile verilen GEW denklemi, (3.43) ile verilen denklem de  $t = 0$  alınarak elde edilen başlangıç şartı ile beraber düşünülmüştür. İki farklı lineerleştirme tekniği (Normal ve Rubin-Graves) ile birlikte sayısal yöntem uygulanarak,  $t = 0$  dan  $t = 20$  ye kadar korunum sabitlerindeki değişim ve hata norm değerleri araştırılmıştır. Bunun için,  $p$ ,  $c$ ,  $gen. = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}}$  parametrelerinin farklı değerleri ve  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$ ,  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $x_0 = 30$ ,  $0 \leq x \leq 80$  parametre değerleri alınarak beş parametre kümesi inşa edilmiştir.

İlk durumda,  $p = 2$ ,  $c = 1/32$  ve  $c = 1/2$  parametrelerini alındı. Bu parametreler  $gen. = 0.25$  ve  $gen. = 1$  genliklerini üretir. Elde edilen sonuçlar, Tablo 3.11 ve Tablo 3.12’de listelenmiştir. Tablo 3.11 den gözlemlendiği gibi her iki lineerleştirme tekniği için hesaplama boyunca korunum sabitleri hemen hemen aynı kalmaktadır. Tablo 3.12 gösterirki:  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  korunum sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişim oranı, sırasıyla %0.009, %0.03, %0.03 değerlerinden daha küçük bulunmuştur. Ayrıca,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının büyüklükleri her iki tabloda oldukça küçük ölçülmüştür. Yine Rubin-Graves lineerleştirme tekniği ile hesaplanan hata normları, hesaplama boyunca Normal lineerleştirme tekniği ile hesaplandan daha küçüktür.

İkinci durumda,  $p = 3$ ,  $c = 0.001$  ve  $c = 0.3$  için  $gen. = 0.15$  ve  $gen. = 1$  dalga büyüklükleri elde edilir. Sayısal sonuçlar, Tablo 3.13 ve Tablo 3.14’de verilmiştir. Tablo 3.13 den

görüldüğü gibi hareket sabitleri zamanla hemen hemen değişmeden kalır. Tablo 3.12 ye göre ise  $I_1, I_2, I_3$  korunum sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişim oranı, sırasıyla %0.007, %0.02 ve %0.02 den küçük olmaktadır. Üstelik, hata normlarının sayısal değeri beklenildiği kadar küçüktür ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği daha etkili bir lineerleştirmedir.

Son durumda,  $p = 4$  ve  $c = 0.2$  parametreleri seçildi. Bu parametreye göre solitary dalga  $gen. = 1$  yüksekliğine sahip olur. Tablo 3.15'den açıkça görülmektedir ki: Üç korunum sabitinde meydana gelen değişim oranı %0.02, %0.03 ve %0.03 değerlerinden daha küçüktür. Buna ilaveten, Rubin-Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak elde edilen hata normlarının değeri, normal lineerleştirme tekniğine göre daha azdır ve elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata norm değerleri istenildiği kadar küçüktür.

Tablo 3.11 Tek solitary dalganın  $p = 2$ ,  $gen. = 0.25$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

$t$		0	5	10	15	20
$I_1$	Normal	0.7853966	0.7853966	0.7853965	0.7853965	0.7853965
	Rub.-Gra.	0.7853966	0.7853966	0.7853966	0.7853966	0.7853966
$I_2$	Normal	0.1666664	0.1666663	0.1666663	0.1666663	0.1666663
	Rub.-Gra.	0.1666664	0.1666664	0.1666664	0.1666664	0.1666664
$I_3$	Normal	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083
	Rub.-Gra.	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083
$L_2 \times 10^5$	Normal	0.0000000	0.03366038	0.06865677	0.10532104	0.14404828
	Rub.-Gra.	0.0000000	0.03127090	0.06398038	0.09850392	0.13526316
$L_\infty \times 10^5$	Normal	0.0000000	0.02509311	0.05215679	0.08029086	0.10853345
	Rub.-Gra.	0.0000000	0.02105067	0.04383634	0.06759518	0.09151024

Tablo 3.12 Tek solitary dalganın  $p = 2$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

$t$		0	5	10	15	20
$I_1$	Normal	3.1415863	3.1373888	3.1332323	3.1291144	3.1250343
	Rub.-Gra.	3.1415863	3.1416080	3.1416294	3.1416508	3.1416722
$I_2$	Normal	2.6666616	2.6610537	2.6555067	2.6500168	2.6445829
	Rub.-Gra.	2.6666616	2.6667229	2.6667836	2.6668444	2.6669051
$I_3$	Normal	1.3333283	1.3277256	1.3221957	1.3167341	1.3113394
	Rub.-Gra.	1.3333283	1.3333895	1.3334503	1.3335110	1.3335718
$L_2$	Normal	0.0000000	0.00665826	0.01742910	0.03232178	0.05132106
	Rub.-Gra.	0.0000000	0.00419982	0.00841618	0.01260569	0.01675092
$L_\infty$	Normal	0.0000000	0.00474985	0.01201728	0.02183195	0.03416753
	Rub.-Gra.	0.0000000	0.00259399	0.00517928	0.00773610	0.01026391



Tablo 3.13 Tek solitary dalganın  $p = 3$ ,  $gen. = 0.15$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

$t$		0	5	10	15	20
$I_1$	Normal	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154
	Rub.-Gra.	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154
$I_2$	Normal	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807
	Rub.-Gra.	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807
$I_3 \times 10^4$	Normal	0.0000733	0.0000733	0.0000733	0.0000733	0.0000733
	Rub.-Gra.	0.0000733	0.0000733	0.0000733	0.0000733	0.0000733
$L_2 \times 10^7$	Normal	0.00000000	0.04797509	0.09597025	0.14398271	0.19200973
	Rub.-Gra.	0.00000000	0.04795135	0.09592277	0.14391151	0.19191480
$L_\infty \times 10^7$	Normal	0.00000000	0.05730697	0.11490440	0.17357780	0.23297300
	Rub.-Gra.	0.00000000	0.05727720	0.11485490	0.17350253	0.23287122

Tablo 3.14 Tek solitary dalganın  $p = 3$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

$t$		0	5	10	15	20
$I_1$	Normal	2.8043580	2.8043577	2.8043575	2.8043572	2.8043570
	Rub.-Gra.	2.8043580	2.8043425	2.8043265	2.8043104	2.8042943
$I_2$	Normal	2.4639101	2.4639097	2.4639093	2.4639090	2.4639086
	Rub.-Gra.	2.4639101	2.4638708	2.4638304	2.4637900	2.4637495
$I_3$	Normal	0.9855618	0.9855613	0.9855609	0.9855606	0.9855602
	Rub.-Gra.	0.9855618	0.9855224	0.9854821	0.9854416	0.9854011
$L_2$	Normal	0.00000000	0.00204427	0.00404918	0.00603437	0.00801470
	Rub.-Gra.	0.00000000	0.00166962	0.00341489	0.00522937	0.00708553
$L_\infty$	Normal	0.00000000	0.00145300	0.00275623	0.00406885	0.00538237
	Rub.-Gra.	0.00000000	0.00114839	0.00234552	0.00356458	0.00480470

Tablo 3.15 Tek solitary dalganın  $p = 4$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

$t$		0	5	10	15	20
$I_1$	Normal	2.6220516	2.6220514	2.6220512	2.6220510	2.6220508
	Rub.-Gra.	2.6220516	2.6220211	2.6219902	2.6219593	2.6219284
$I_2$	Normal	2.3561914	2.3561911	2.3561907	2.3561904	2.3561901
	Rub.-Gra.	2.3561914	2.3561273	2.3560625	2.3559975	2.3559327
$I_3$	Normal	0.7853952	0.7853948	0.7853945	0.7853942	0.7853939
	Rub.-Gra.	0.7853952	0.7853310	0.7852662	0.7852013	0.7851364
$L_2$	Normal	0.00000000	0.00106260	0.00211868	0.00316779	0.00421697
	Rub.-Gra.	0.00000000	0.00075110	0.00156412	0.00244690	0.00339086
$L_\infty$	Normal	0.00000000	0.00079729	0.00152151	0.00224723	0.00297952
	Rub.-Gra.	0.00000000	0.00055248	0.00115512	0.00179553	0.00247031

Diğer taraftan, farklı konum ve zaman adımlarında hata normlarının büyüklüğünü göstermek için  $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$ ,  $c = 0.03, 0.1, 0.3$ ,  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $x_0 = 30$ ,  $x \in [0, 80]$  parametre değerleri kullanılmıştır. Hesaplanan veriler, Tablo 3.16 ve Tablo 3.17’de sunulmuştur. Bu iki tablodan çıkarılabilecek sonuç şudur:  $p$  ve  $c$  değerlerinin artırılmasıyla beraber doğal olarak solitary dalganın *gen.* genlik değeri de artar. Solitary dalganın genlik değerinin artırılması ile beraber hata norm değerlerinin de büyüdüğü gözlemlenir.  $h$  konum adımı ve  $\Delta t$  zaman adımının değeri azaltıldıkça, hata norm değerlerinin azaldığı görülmektedir. Bu yüzden,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının sayısal değeri, konum adımı  $h = 0.1$ , zaman adımı  $\Delta t = 0.01$  parametre değerleri için en küçüktür ve sırasıyla  $0.262 \times 10^{-3}$ ,  $0.253 \times 10^{-3}$  den daha küçüktür.  $L_\infty$  hata norm değeri, hesaplama süresince  $L_2$  hata normundan daima küçük kalmaktadır. Tek solitary dalganın hareketi,  $t = 0, 10, 20$  zamanlarında Şekil 3.7’de çizilmiştir. Bu şekle göre,  $p$  değerinin artırılması ile beraber dalganın genliği (yüksekliği) artmaktadır.  $t = 0$  dan  $t = 20$  zamanına kadar dalgalar sağa doğru hız, şekil ve genliklerini değiştirmeden hareket eder. Yani beklendiği gibi solitary dalga olarak hareket eder.

Tablo 3.18’de elde edilen sayısal sonuçlarla, daha önce çeşitli çalışmalarla elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır [5, 15, 17, 19, 22, 23]. Bu tablodan açıkça görülmektedir ki: Üç korunum sabitinin sayısal değeri daha önceki çalışmalarla uyumludur. Hata norm değerleri ise diğer çalışmalarda elde edilen değerlerinden daha küçük bulunmuştur.

Tablo 3.16 Tek solitary dalganın  $p = 2, 3, 4$ ;  $t = 20$  ve  $x \in [0, 80]$  için farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri

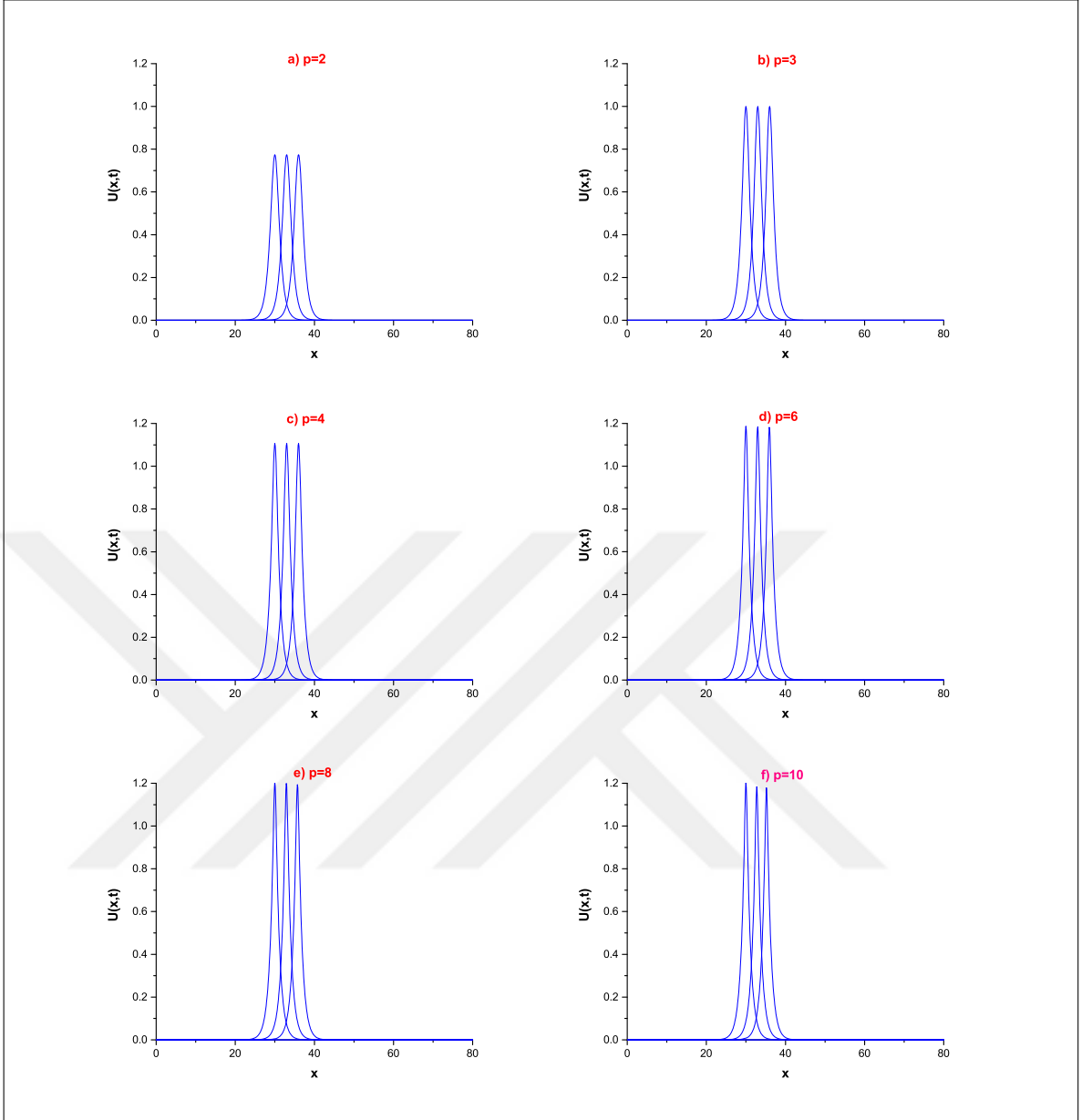
		p=2			p=3			p=4			
$c \rightarrow$		0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	
$gen. \rightarrow$		0.24	0.44	0.77	0.46	0.69	1.00	0.62	0.84	1.10	
h	$\Delta t$										
	0.1	0.01	0.0005	0.005	0.051	0.001	0.009	0.082	0.004	0.014	0.111
	0.2	0.01	0.0039	0.014	0.036	0.024	0.063	0.144	0.080	0.183	0.426
$L_2 \times 10^3$	0.1	0.05	0.0005	0.008	0.221	0.001	0.018	0.494	0.004	0.031	0.837
	0.2	0.05	0.0039	0.016	0.198	0.024	0.069	0.537	0.080	0.195	1.120
	0.1	0.2	0.0011	0.064	2.878	0.003	0.178	7.085	0.008	0.327	14.165
	0.1	0.01	0.0003	0.003	0.035	0.002	0.006	0.058	0.006	0.008	0.080
	0.2	0.01	0.0047	0.011	0.026	0.032	0.053	0.115	0.117	0.162	0.355
$L_\infty \times 10^3$	0.1	0.05	0.0003	0.005	0.140	0.002	0.012	0.338	0.006	0.020	0.601
	0.2	0.05	0.0047	0.013	0.129	0.032	0.059	0.381	0.117	0.174	0.849
	0.1	0.2	0.0008	0.040	1.775	0.003	0.122	4.804	0.009	0.239	10.250

Tablo 3.17 Tek solitary dalganın  $p = 6, 8, 10$ ;  $t = 20$  ve  $x \in [0, 80]$  için farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri

		p=6		p=8		p=10		
$c \rightarrow$		0.03	0.1	0.03	0.1	0.03	0.1	
$gen. \rightarrow$		0.80	0.98	0.90	1.05	0.95	1.08	
h	$\Delta t$							
	0.1	0.01	0.015	0.036	0.042	0.095	0.102	0.261
	0.2	0.01	0.438	1.192	2.657	9.556	16.085	59.734
$L_2 \times 10^3$	0.1	0.05	0.016	0.071	0.042	0.158	0.103	0.384
	0.2	0.05	0.438	1.224	2.658	9.626	16.088	59.918
	0.1	0.2	0.023	0.813	0.054	2.066	0.125	5.460
	0.1	0.01	0.024	0.031	0.062	0.091	0.143	0.252
	0.2	0.01	0.678	1.142	3.062	8.212	14.057	47.756
$L_\infty \times 10^3$	0.1	0.05	0.024	0.058	0.063	0.141	0.144	0.350
	0.2	0.05	0.678	1.169	3.063	8.262	14.059	47.886
	0.1	0.2	0.030	0.643	0.073	1.731	0.160	4.742

Tablo 3.18 Tek solitary dalganın  $p = 2, 3, 4$ ;  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$ ,  $t = 20$  ve  $x \in [0, 80]$  için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

	Methods	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
$p = 2$ $c = 1/32$	CubBSC [5]	0.19588	0.17443	0.78466	0.16643	0.00519
	QuadBSC [22]	0.15695	0.20214	0.78528	0.16658	0.00520
	QuadBSLG [15]	0.08100	0.04596			
	CubBSLG [19]	0.07833	0.04448			
	QuadBSPG [23]	0.00250	0.00275	0.78539	0.16666	0.00520
	QuarBSC [17]	0.00157	0.00104	0.78539	0.16666	0.00520
	QuinBSC	0.00135	0.00091	0.78539	0.16666	0.00520
$p = 3$ $c = 0.001$	CubBSC [5]	0.514967	0.320605	0.65908	0.05938	0.000068
	QuadBSPG [23]	0.000064	0.000082	0.41891	0.05497	0.000073
	QuinBSC	0.000019	0.000023	0.41891	0.05498	0.000073
$p = 4$ $c = 0.2$	QuadBSPG [23]	2.30499	1.88285	2.62206	2.35615	0.78534
	QuinBSC	3.39086	2.47031	2.62192	2.35593	0.78513



Şekil 3.7 Tek solitary dalganın  $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$ ,  $c = 0.3$ ,  $x_0 = 30$ ,  $x \in [0, 80]$  için  $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi

### 3.2.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi

İkinci problem olarak, iki pozitif solitary dalganın etkileşimi aşağıdaki başlangıç şartı kullanılarak araştırılmıştır:

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt[p]{\frac{c_i(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{p}{2\sqrt{\mu}}(x - x_i) \right]. \quad (3.45)$$

Burada  $i = 1, 2$  olmak üzere,  $c_i$  ve  $x_i$  keyfi sabitlerdir. (3.45) ile verilen denklem,  $gen. = 1$  ve  $gen. = 0.5$  genliklerine sahip, aynı yönde iki farklı solitary dalga üretir.  $p$ ,  $c_i$  nin farklı

değerleri ve  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $x_1 = 15, x_2 = 30, 0 \leq x \leq 80$  parametre değerleri seçilerek üç farklı parametre kümesi oluşturulmuştur.

İlk olarak,  $p = 2$ ,  $c_1 = 0.5$  ve  $c_2 = 0.125$  olarak seçildi. Program  $t = 60$  zamanına kadar çalıştırılmıştır. Korunum sabitlerinin sayısal değeri, Tablo 3.19'da gösterilmiştir. Bu tabloya göre korunum sabitlerinin  $t = 0$  dan  $t = 60$  anına kadar değişimi, sırasıyla %0.0007, %0.002 ve %0.002 değerlerinden daha küçük bulunmuştur. Üstelik, sayısal sonuçlar Petrov-Galerkin yöntemi [23] ile hesaplanan sonuçlarla uyumludur.

İkinci durumda,  $p = 3$ ,  $c_1 = 0.3$  ve  $c_2 = 0.0375$  parametre değerleri alındı. Sayısal hesaplama  $t = 100$  zamanına kadar yapılmıştır. Hesaplanan veriler, Tablo 3.20'de verilmiştir. Bu tablodan gözlemlendiği gibi hesaplama süresince korunum sabitlerindeki değişim oranı %0.0002, %0.0005 ve %0.0006 den küçük bulunmuştur. Üç hareket sabitinin sayısal değerleri Petrov-Galerkin yöntemi [23] ile verilen sonuçlara çok yakındır. Seçilen bu parametrelere göre iki solitary dalganın farklı zamanlardaki hareketi Şekil 3.8'de çizilmiştir. Bu şekilden de görüldüğü gibi, başlangıçta  $gen. = 1$  genlikli solitary dalga  $gen. = 0.5$  genlikli dalganın gerisindedir. Zamanla arkadaki dalga öndeki dalgayı yakalar ve  $t = 50$  anında diğer dalganın üstüne biner. Daha sonra dalgalar ayrılarak başlangıç formlarına geri dönmeye başlar.  $t = 100$  anında ise dalgalar belirgin olarak ayrıktır ve  $gen.$ , hız ve şekillerini muhafaza etmiştir. Buna göre elde edilen solitary dalgalara solitonlardır denir.

Son olarak,  $p = 4$ ,  $c_1 = 0.2$  ve  $c_2 = 1/80$  olarak seçildi. Sayısal program  $t = 0$  dan  $t = 120$  ye kadar çalıştırılmıştır. Sayısal veriler, Tablo 3.21'de listelenmiştir. Bu tabloya göre korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim, sırasıyla %0.0003, %0.0007 ve %0.0007 değerlerinden daha küçüktür. Ayrıca korunum sabitleri Petrov-Galerkin yöntemi [23] ile elde edilen sonuçlarla uyumludur. İki solitary dalga arasındaki etkileşim farklı zaman adımlarında Şekil 3.9'da gösterilmiştir. Bu şekilden açıkça görülmektedir ki: Başlangıçta büyük genlikli solitary dalga, küçük genlikli solitary dalganın solundadır. Zaman ilerledikçe büyük genlikli dalga küçük genlikli dalgayı yakalar ve etkileşim başlar. Daha sonra dalgalar ayrılarak, kendi şekil, hız ve büyüklüklerinde yollarına devam eder. Bu ise elde edilen solitary dalgaların soliton davranışı yaptığını söyler.

Tablo 3.19 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 2$ ,  $gen. = 1,0.5$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri

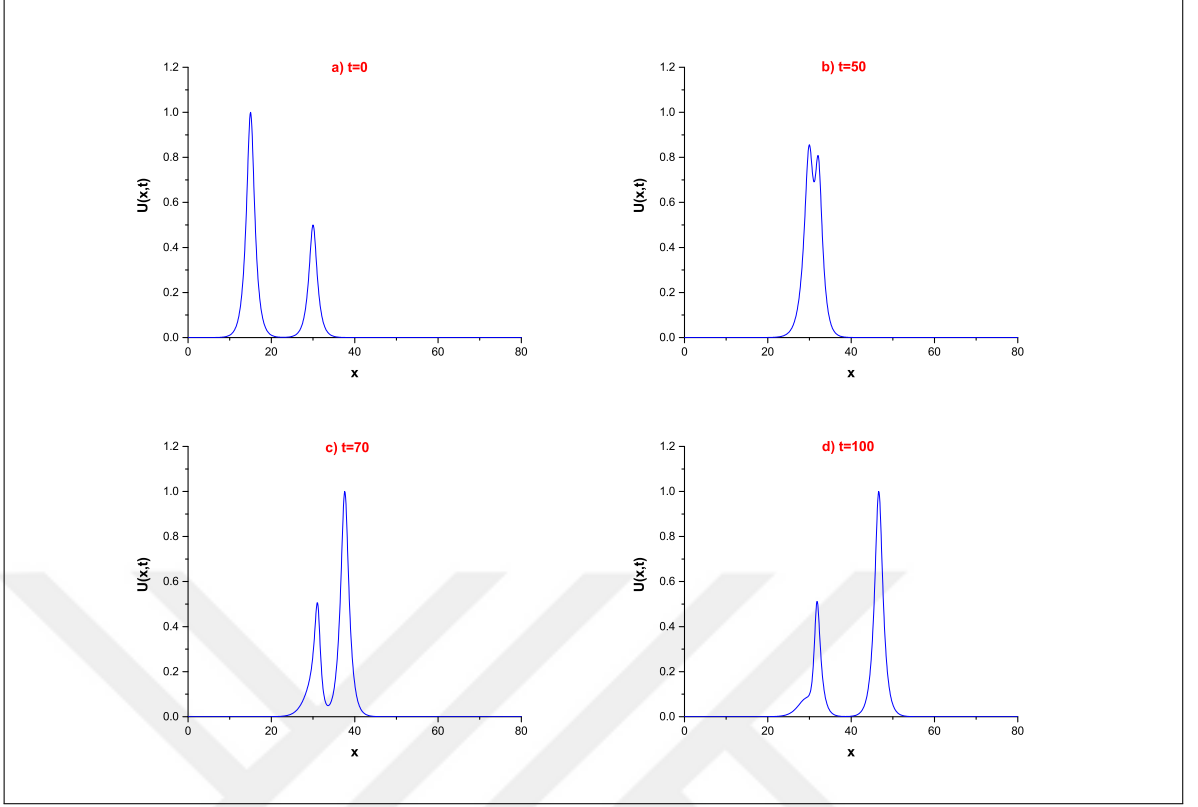
$t$		0	10	20	30	40	50	60
$I_1$	Normal	4.71237	4.71237	4.71237	4.71237	4.71237	4.71237	4.71237
	Rub.-Gra.	4.71237	4.71237	4.71237	4.71236	4.71237	4.71237	4.71237
	PG [23]	4.71239	4.71239	4.71239	4.71239	4.71239	4.71239	4.71239
$I_2$	Normal	3.33332	3.33332	3.33332	3.33332	3.33332	3.33332	3.33332
	Rub.-Gra.	3.33332	3.33332	3.33332	3.33331	3.33332	3.33332	3.33332
	PG [23]	3.33324	3.33324	3.33324	3.33324	3.33333	3.33338	3.33333
$I_3$	Normal	1.41666	1.41666	1.41666	1.41665	1.41666	1.41666	1.41666
	Rub.-Gra.	1.41666	1.41666	1.41666	1.41664	1.41665	1.41666	1.41666
	PG [23]	1.14166	1.14166	1.14166	1.14166	1.14166	1.14166	1.14166

Tablo 3.20 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 3$ ,  $gen. = 1,0.5$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri

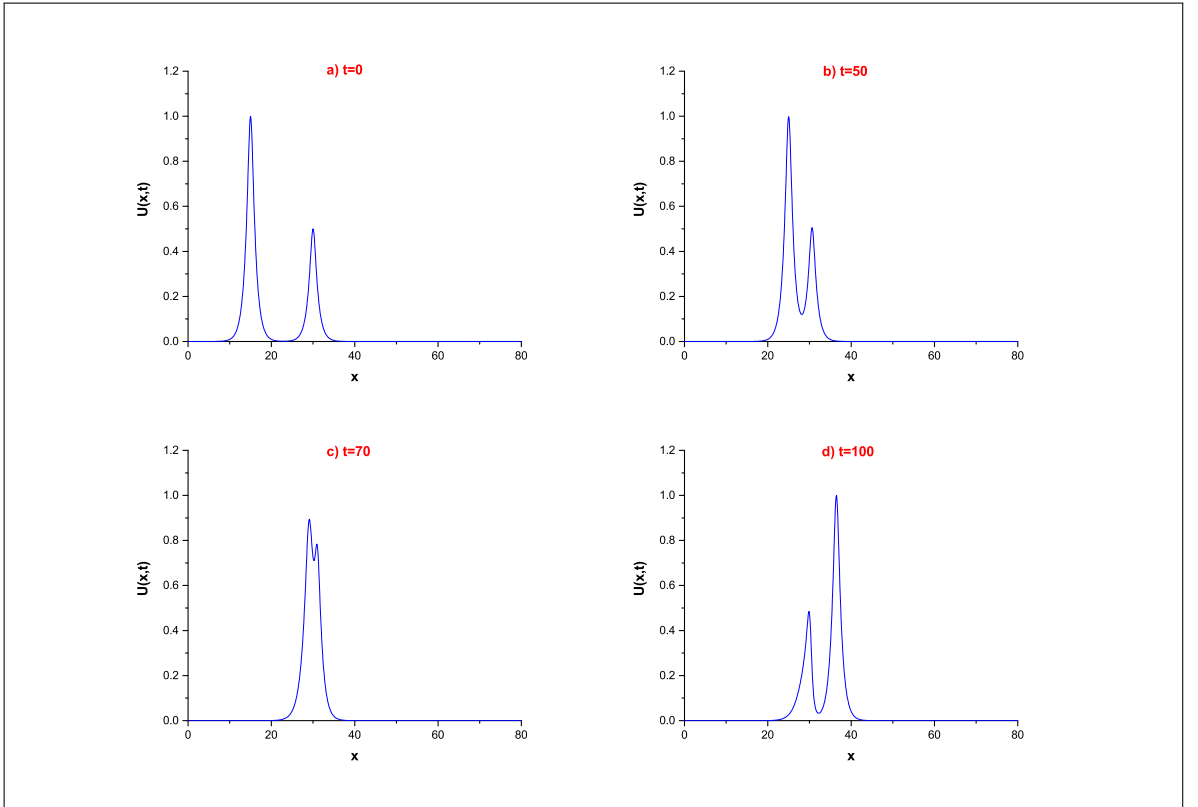
$t$		0	10	20	40	60	80	90	100
$I_1$	Normal	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653
	Rub.-Gra.	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653
	PG [23]	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655
$I_2$	Normal	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988
	Rub.-Gra.	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988
	PG [23]	3.97977	2.07986	3.07982	3.07986	3.07987	3.07991	3.07974	3.07972
$I_3$	Normal	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636
	Rub.-Gra.	1.01636	1.01636	1.01636	1.01635	1.01635	1.01636	1.01636	1.01636
	PG [23]	1.01634	1.01634	1.01634	1.01634	1.01633	1.01633	1.01633	1.01634

Tablo 3.21 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 4$ ,  $gen. = 1,0.5$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri

$t$		0	10	20	40	60	80	100	120
$I_1$	Normal	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307
	Rub.-Gra.	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307
	PG [23]	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309
$I_2$	Normal	2.94524	2.94524	2.94524	2.94524	2.94524	2.94524	2.94523	2.94523
	Rub.-Gra.	2.94524	2.94524	2.94523	2.94523	2.94523	2.94523	2.94523	2.94523
	PG [23]	2.94512	2.94518	2.94517	2.94515	2.94505	2.94506	2.94508	2.94511
$I_3$	Normal	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766
	Rub.-Gra.	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766
	PG [23]	0.79761	0.79761	0.79761	0.79761	0.79762	0.79761	0.79761	0.79761



Şekil 3.8 İki solitary dalganın  $p = 3$ ; a)  $t = 0$ , b)  $t = 50$ , c)  $t = 70$ , d)  $t = 100$ 'deki hareketi



Şekil 3.9 İki solitary dalganın  $p = 4$ ; a)  $t = 0$ , b)  $t = 50$ , c)  $t = 70$ , d)  $t = 100$ 'deki hareketi



### 3.2.3.3 Maxwellian başlangıç şartı

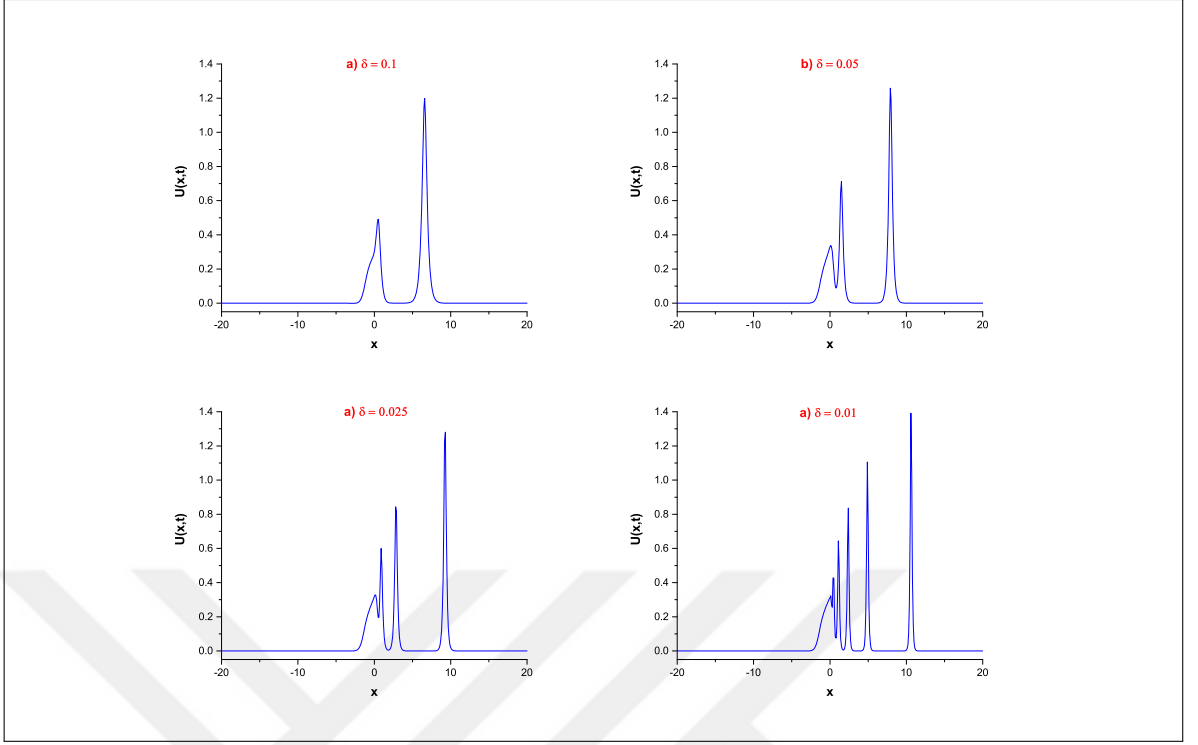
Son olarak, (3.24) ile verilen denklem,

$$U(x, 0) = \text{Exp}(-x^2), \quad -20 \leq x \leq 20 \quad (3.46)$$

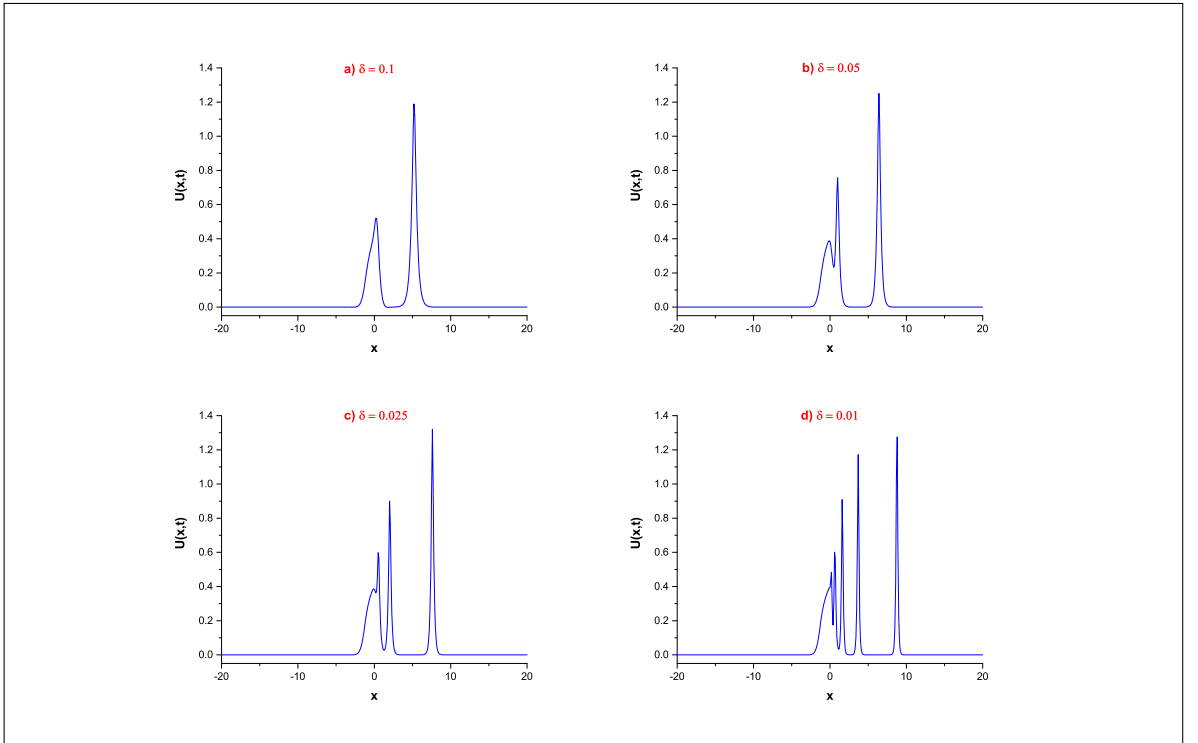
şeklinde verilen Maxwellian başlangıç şartı ile beraber ele alındı. Bilindiği gibi bu durumda  $\mu$  değerinin seçimi çözümün davranışını etkiler. Bu sebeple  $\mu = 0.01$ ,  $\mu = 0.025$ ,  $\mu = 0.05$ ,  $\mu = 0.1$  ve  $p = 2, 3, 4$  parametreleri seçilmiştir. Korunum sabitlerindeki değişim  $t = 12$  anına kadar gözlemlenmiştir ve elde edilen sayısal sonuçlar Tablo 3.22’de listelenmiştir. Bu tabloya göre,  $\mu$  değeri arttıkça korunum sabitlerinde meydana gelen değişim gittikçe küçülmektedir ve %0.08 den daha küçük kalmaktadır. Farklı  $\mu$  değerlerine göre solitary dalgaların oluşumu, Şekil 3.10 ve Şekil 3.11’de gösterilmiştir. Bu şekillerden açıkça görülürki:  $\mu$  değeri azaltıldıkça, Maxwellian başlangıç şartına göre oluşan kararlı solitary dalga sayısı artmaktadır.

Tablo 3.22 Maxwellian başlangıç şartı ve  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [-20, 20]$  için korunum sabitleri

$\mu$	$t$	$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
		$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.01	0	1.7724	1.2658	0.8862	1.7724	1.2658	0.7926	1.7724	1.2658	0.7236
	4	1.7732	1.2678	0.9061	1.7786	1.2847	0.8782	1.7855	1.2931	0.7715
	8	1.7742	1.2736	0.9234	1.7868	1.3131	0.9691	1.8014	1.3622	1.2362
	12	1.7739	1.2711	0.9123	1.7813	1.2901	0.8664	1.8156	1.3901	1.2707
	PG [23]	12	1.7724	1.2658	0.8862	1.7724	1.2665	0.7947	1.7725	1.2669
0.025	0	1.7724	1.2846	0.8862	1.7724	1.2846	0.7926	1.7724	1.2846	0.7236
	4	1.7725	1.2846	0.8880	1.7731	1.2863	0.8056	1.7763	1.2967	0.7891
	8	1.7725	1.2846	0.8881	1.7733	1.2859	0.7996	1.7711	1.2762	0.7129
	12	1.7725	1.2846	0.8881	1.7730	1.2837	0.7946	1.7791	1.3056	0.8198
	PG [23]	12	1.7724	1.2835	0.8856	1.7723	1.2834	0.7910	1.7724	1.2849
0.05	0	1.7724	1.3159	0.8862	1.7724	1.3159	0.7926	1.7724	1.3159	0.7236
	4	1.7724	1.3159	0.8864	1.7725	1.3159	0.7938	1.7726	1.3155	0.7253
	8	1.7724	1.3159	0.8864	1.7725	1.3159	0.7939	1.7729	1.3168	0.7297
	12	1.7724	1.3159	0.8864	1.7725	1.3160	0.7940	1.7735	1.3188	0.7345
	PG [23]	12	1.7724	1.3160	0.8861	1.7724	1.3156	0.7922	1.7724	1.3177
0.1	0	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7926	1.7724	1.3786	0.7236
	4	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7928	1.7725	1.3786	0.7243
	8	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7928	1.7725	1.3787	0.7243
	12	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7928	1.7725	1.3786	0.7243
	PG [23]	12	1.7724	1.3785	0.8861	1.7724	1.3787	0.7926	1.7734	1.3836



Şekil 3.10 Maxwellian başlangıç şartı ve  $p = 3$ ,  $t = 12$ ; a)  $\mu = 0.1$ , b)  $\mu = 0.05$ , c)  $\mu = 0.025$ , d)  $\mu = 0.01$  değerleri için dalgaların oluşumu



Şekil 3.11 Maxwellian başlangıç şartı ve  $p = 4$ ,  $t = 12$ ; a)  $\mu = 0.1$ , b)  $\mu = 0.05$ , c)  $\mu = 0.025$ , d)  $\mu = 0.01$  değerleri için dalgaların oluşumu

### 3.3 GEW Denkleminin Kübik B-spline Galerkin Yöntemi ile Sayısal Çözümü

GEW denklemi,

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (3.47)$$

şeklinde verilir. Burada fiziksel sınır şartları  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $U \rightarrow 0$  olarak verilir, alt indis  $t$  ve  $x$  zamana ve boyuta göre türevi temsil eder,  $\varepsilon$  ve  $p$  pozitif tamsayı,  $\mu$  ise pozitif sabittir.

Başlangıç şartı olarak

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.48)$$

ve sınır şartları

$$\begin{aligned} U(a, t) = 0, \quad U_x(a, t) = 0, \\ U(b, t) = 0, \quad U_x(b, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

olarak belirlenmiştir.

İlk aşamada,  $[a, b]$  sonlu aralığına sınırlandırılmış çözüm bölgesi, aralık uzunluğu  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  ve  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  olmak üzere,  $x_m$  düğüm noktalarıyla  $N$  tane eşit alt aralığa bölünür.  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturan  $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_{N+1}(x)\}$  kübik B-spline fonksiyonları,  $x_m$  düğüm noktalarında aşağıdaki gibi ifade edilir [78]:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}), \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m), \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}), \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}), \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.50)$$

Burada her bir kübik B-spline  $\phi_m$  fonksiyonu ardışık 4 tane sonlu alt aralığı örttüğü için, her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu alt aralığı 4 adet B-spline fonksiyonu tarafından örtülür.  $U_N(x, t)$  yaklaşık çözüm fonksiyonu, kübik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki formda verilir:

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t). \quad (3.51)$$

Burada  $\delta_m(t)$ , zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir, sınır ve ağırlıklı kalan şartları kullanılarak bulunacaktır.

$0 \leq \eta \leq 1$  olmak üzere  $h\eta = x - x_m$  eşitliği kullanılarak  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı  $[0, 1]$  aralığına dönüştürülebilir. Bu dönüşüm uygulanarak (3.50) ile verilen kübik B-spline fonksiyonları  $\eta$  değişkenine bağlı olarak  $[0, 1]$  aralığı üzerinde,

$$\begin{aligned}\phi_{m-1} &= (1 - \eta)^3, \\ \phi_m &= 1 + 3(1 - \eta) + 3(1 - \eta)^2 - 3(1 - \eta)^3, \\ \phi_{m+1} &= 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3, \\ \phi_{m+2} &= \eta^3\end{aligned}\tag{3.52}$$

olarak tanımlanır. Burada şunu belirtmeliyiz ki:  $\phi_{m-1}(x)$ ,  $\phi_m(x)$ ,  $\phi_{m+1}(x)$  ve  $\phi_{m+2}(x)$  fonksiyonları hariç tüm kübik B-spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığı üzerinde sıfır olarak ifade edilir. Bu nedenle (3.51) ile verilen yaklaşım fonksiyonu,  $[0, 1]$  bölgesinde  $\delta_{m-1}$ ,  $\delta_m$ ,  $\delta_{m+1}$ ,  $\delta_{m+2}$  eleman parametreleri ve  $\phi_{m-1}$ ,  $\phi_m$ ,  $\phi_{m+1}$ ,  $\phi_{m+2}$  şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılır:

$$U_N(\eta, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j.\tag{3.53}$$

(3.52) ile verilen kübik B-spline fonksiyonlar ve (3.53) ile verilen yaklaşık çözüm kullanılarak,  $U$  ve onun  $\eta$ ' ya göre  $U'$ ,  $U''$  türevleri  $\eta = 0$  noktasında  $\delta_m$  parametrelerine göre aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\begin{aligned}U_m &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_m &= 3(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\ U''_m &= 6(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}).\end{aligned}\tag{3.54}$$

Burada ' ve '' ,  $\eta$  değişkenine göre birinci ve ikinci türevi sembolize etmektedir. Galerkin yaklaşımı,  $W(x)$  ağırlık fonksiyonu ile beraber (3.47) ile verilen probleme uygulanarak, (3.47) ile verilen model denklemin aşağıdaki gibi zayıf formu elde edilir:

$$\int_a^b W(U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt}) dx = 0.\tag{3.55}$$

$x \rightarrow \eta$  değişken değişimi (3.55) ile verilen integral denkleminde uygulanırsa

$$\int_0^1 W \left( U_t + \frac{\varepsilon}{h} \hat{U}^p U_\eta - \frac{\mu}{h^2} U_{\eta\eta t} \right) d\eta = 0\tag{3.56}$$

elde edilir. Burada  $\dot{U}$ , integrali basitleştirmek için bir eleman üzerinde sabit olarak alınmıştır. (3.56) ile verilen denkleme birkez kısmi integrasyon uygulanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_0^1 [W(U_t + \lambda U_\eta) + \beta W_\eta U_{\eta t}] d\eta = \beta W U_{\eta t} |_0^1. \quad (3.57)$$

Burada  $\lambda = \frac{\varepsilon \dot{U}^p}{h}$  ve  $\beta = \frac{\mu}{h^2}$  dir.

Ağırlık fonksiyonu  $W(x)$  yerine, (3.52) ile verilen kübik B-spline yaklaşım fonksiyonu alınır ve (3.53) ile verilen yaklaşık çözüm, (3.57) ile verilen denklem de yerine yazılırsa,

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} [(\int_0^1 \phi_i \phi_j + \beta \phi_i' \phi_j') d\eta - \beta \phi_i \phi_j' |_0^1] \delta_j^e + \sum_{j=m-1}^{m+2} (\lambda \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\eta) \delta_j^e = 0 \quad (3.58)$$

bulunur. Burada  $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$  ve “.”  $t$  ye göre türevi ifade etmektedir. Bu son denklem matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$[A^e + \beta(B^e - C^e)] \dot{\delta}^e + \lambda D^e \delta^e = 0. \quad (3.59)$$

(3.59) ile verilen matris denkleminin elaman matrisleri de aşağıdaki gibidir:

$$A_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j d\eta = \frac{1}{140} \begin{bmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' d\eta = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 18 & 21 & -36 & -3 \\ 21 & 102 & -87 & -36 \\ -36 & -87 & 102 & 21 \\ -3 & -36 & 21 & 18 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = \phi_i \phi_j' |_0^1 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\eta = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -10 & -9 & 18 & 1 \\ -71 & -150 & 183 & 38 \\ -38 & -183 & 150 & 71 \\ -1 & -18 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Altındisler  $i, j = m-1, m, m+1, m+2$  dir. Buradaki  $\lambda$  katsayısındaki  $\dot{U}^p$  terimi için iki nokta lineerleştirme tekniği kullanılarak,

$$\lambda \cong \frac{\varepsilon}{h} \left[ \frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right]^p = \frac{\varepsilon}{2^p h} (\delta_{m-1}^n + 5\delta_m^n + 5\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^p$$

olarak yazılır. Tüm elemanların katkısını beraber düşünerek (3.59) ile verilen matris denkleminin aşağıdaki formu elde edilir:

$$[A + \beta(B - C)]\dot{\delta} + \lambda D\delta = 0. \quad (3.60)$$

Burada  $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$  düğüm noktasındaki parametrelerdir.  $A, B, C$  ve  $\lambda D$  septa-diagonal matrislerdir ve bu matrislerin  $m$ . satırları,

$$A = \frac{1}{140} (1, 120, 1191, 2416, 1191, 120, 1), \quad B = \frac{1}{10} (-3, -72, -45, 240, -45, -72, -3),$$

$$C = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad D = \frac{1}{20} (-1, -56, -245, 0, 245, 56, 1),$$

$$\lambda D = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -\lambda_1, -18\lambda_1 - 38\lambda_2, 9\lambda_1 - 183\lambda_2 - 71\lambda_3, 10\lambda_1 + 150\lambda_2 - 150\lambda_3 - 10\lambda_4, \\ 71\lambda_2 + 183\lambda_3 - 9\lambda_4, 38\lambda_3 + 18\lambda_4, \lambda_4 \end{pmatrix}$$

şeklinde dir. Burada,

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon}{2^p h} (\delta_{m-2} + 5\delta_{m-1} + 5\delta_m + \delta_{m+1})^p,$$

$$\lambda_2 = \frac{\varepsilon}{2^p h} (\delta_{m-1} + 5\delta_m + 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^p,$$

$$\lambda_3 = \frac{\varepsilon}{2^p h} (\delta_m + 5\delta_{m+1} + 5\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^p,$$

$$\lambda_4 = \frac{\varepsilon}{2^p h} (\delta_{m+1} + 5\delta_{m+2} + 5\delta_{m+3} + \delta_{m+4})^p.$$

(3.60) ile verilen denkleme,  $\dot{\delta} = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t}$  ileri sonlu fark ve  $\delta = \frac{1}{2}(\delta^n + \delta^{n+1})$  Crank-Nicolson yaklaşımları uygulanırsa, aşağıdaki septa-diagonal matris sistemine ulaşılır:

$$[A + \beta(B - C) + \frac{\lambda \Delta t}{2} D]\delta^{n+1} = [A + \beta(B - C) - \frac{\lambda \Delta t}{2} D]\delta^n. \quad (3.61)$$

Bu aşamadan sonra (3.49) ile verilen sınır şartları matris denkleminde (cebirsal denklem sistemine) dahil edilerek,  $(N+3) \times (N+3)$  boyutlu matris sistemi (3.61),  $(N+1) \times (N+1)$  boyutlu matris sistemine dönüşür. Bu işlem aşaması sınır değerlerinin işleme basit bir şekilde dahil edilmesi olarak bilinir ve başlangıç iterasyonun hesaplanması kısmında açıklanmıştır.  $A, B, C$  ve  $D$  matrislerinin  $m$ . satırları 7 elemanlıdır, bu yüzden (3.61) ile verilen cebirsal denklem sistemi 7 sütun elemanlı diagonal matrislerden oluşur (septa-diagonal matris olarak adlandırılır). Septa-diagonal matris sistemi de Thomas algoritması ile aşağıda alt bölüm

3.3.1'de açıklandığı gibi kolaylıkla çözülür. Bu çözüm prosedüründe lineer olmamanın üstesinden gelebilmek için her bir zaman adımında

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

formülü ile üç veya dört defa iç iterasyon uygulanarak çözüm iyileştirilir. Tüm bu işlemlerden sonra (3.61) ile verilen matris denklem sisteminin basit bir sonucu olan iki zaman adımı  $n$  ve  $n + 1$  arasındaki tekrarlama bağıntısı,

$$\begin{aligned} \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} = \\ \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (3.62)$$

olarak yazılır. Burada,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{140} - \frac{3\beta}{10} - \frac{\lambda \Delta t}{40}, & \gamma_2 &= \frac{120}{140} - \frac{72\beta}{10} - \frac{56\lambda \Delta t}{40}, \\ \gamma_3 &= \frac{1191}{140} - \frac{45\beta}{10} - \frac{245\lambda \Delta t}{40}, & \gamma_4 &= \frac{2416}{140} + \frac{240\beta}{10}, \\ \gamma_5 &= \frac{1191}{140} - \frac{45\beta}{10} + \frac{245\lambda \Delta t}{40}, & \gamma_6 &= \frac{120}{140} - \frac{72\beta}{10} + \frac{56\lambda \Delta t}{40}, \\ \gamma_7 &= \frac{1}{140} - \frac{3\beta}{10} + \frac{\lambda \Delta t}{40}. \end{aligned}$$

### Başlangıç iterasyonu

(3.61) ile verilen cebirsel denklem sisteminde iterasyonu başlatabilmek için  $d^0$  başlangıç değeri (3.63) ile verilen başlangıç şartları kullanılarak hesaplanır. Yaklaşık çözümün başlangıç formu,

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0(t)$$

olarak yazılabilir. Başlangıç şartı ve sınır noktalarındaki türevler ise

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) = U(x_m, 0) = f(x); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) = 0, \quad (U_N)_x(b, 0) = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

olarak alınır. Başlangıç şartı ve sınır noktalarındaki türevler  $\delta_m$  parametrelerine göre

aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
-3\delta_{-1} + 3\delta_1 &= U'(x_0, 0), \\
\delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 &= U(x_0, 0), \\
\delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 &= U(x_1, 0), \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\delta_{N-2} + 4\delta_{N-1} + \delta_N &= U(x_{N-1}, 0), \\
\delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_N, 0), \\
-3\delta_{-1} + 3\delta_1 &= U'(x_0, 0).
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Bu denklemlerin matris olarak ifadesi

$$\begin{bmatrix}
-3 & 0 & 3 & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & & \\
& & \ddots & & & & \\
& & & 1 & 4 & 1 & \\
& & & -3 & 0 & 3 & \\
& & & & & & 
\end{bmatrix}_{(N+3) \times (N+3)}
\begin{bmatrix}
\delta_{-1}^0 \\
\delta_0^0 \\
\vdots \\
\delta_N^0 \\
\delta_{N+1}^0
\end{bmatrix}_{(N+3) \times 1}
=
\begin{bmatrix}
U'(x_0, 0) \\
U(x_0, 0) \\
\vdots \\
U(x_N, 0) \\
U'(x_N, 0)
\end{bmatrix}_{(N+3) \times 1}$$

şekindedir. Burada da görüldüğü gibi soldaki matrisin boyutu  $(N+3) \times (N+3)$  dir. Bu denklem sisteminde verilen sınır noktalarındaki türev şartından  $\delta_{-1} = \delta_1$  ve  $\delta_{N-1} = \delta_{N+1}$  olarak çekilir ve  $(\delta_{-1}, \delta_{N+1})$  parametreleri matris sisteminden yok edilir. Böylece matris sistemi  $(N+1) \times (N+1)$  boyutlu matris sistemine dönüşür:

$$\begin{bmatrix}
4 & 2 & 0 & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & & \\
& & \ddots & & & & \\
& & & 1 & 4 & 1 & \\
& & & 0 & 2 & 4 & \\
& & & & & & 
\end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}
\begin{bmatrix}
\delta_0^0 \\
\delta_1^0 \\
\vdots \\
\delta_{N-1}^0 \\
\delta_N^0
\end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}
=
\begin{bmatrix}
U(x_0, 0) \\
U(x_1, 0) \\
\vdots \\
U(x_{N-1}, 0) \\
U(x_N, 0)
\end{bmatrix}_{(N+1) \times 1},$$

Elde edilen bu matris denklemini 3 sütun elemanlı tri-diagonal matris sistemidir. Bu matris sisteminden bilinmeyen parametreler de Fortran programı yardımıyla Thomas algoritması (tri-diagonal algoritma) kullanılarak hesaplanır.

Başlangıç değerinin bulunmasıyla beraber (3.61) ile verilen matris sisteminde  $n = 0$  için sağ taraf belirlenmiştir. Matrisin sol tarafı ise Thomas algoritması ile bulunur. Böylece istenilen



zaman adımında bir önceki parametreden bulunan değerler kullanılarak (iterasyon yapılarak) GEW denkleminin sayısal çözümü bulunmuş olur.

### 3.3.1 Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü

Septa-diagonal sistem aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$a_i \delta_{i-3} + b_i \delta_{i-2} + c_i \delta_{i-1} + d_i \delta_i + e_i \delta_{i+1} + f_i \delta_{i+2} + g_i \delta_{i+3} = h_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Burada  $a_0 = b_0 = c_0 = a_1 = b_1 = a_2 = g_{N-2} = g_{N-1} = f_{N-1} = g_N = f_N = e_N = 0$  alınmıştır.

Öncelikle, parametreler aşağıdaki gibi seçilir:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= b_0, & \beta_0 &= c_0, & \mu_0 &= d_0, & \zeta_0 &= \frac{e_0}{\mu_0}, & \lambda_0 &= \frac{f_0}{\mu_0}, & \eta_0 &= \frac{g_0}{\mu_0}, & \gamma_0 &= \frac{h_0}{\mu_0}, \\ \alpha_1 &= b_1, & \beta_1 &= c_1, & \mu_1 &= d_1 - \beta_1 \zeta_0, & \zeta_1 &= \frac{e_1 - \beta_1 \lambda_0}{\mu_1}, & \lambda_1 &= \frac{f_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1}, \\ \eta_1 &= \frac{g_1}{\mu_1}, & \gamma_1 &= \frac{h_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= b_2, & \beta_2 &= c_2 - \alpha_2 \zeta_0, & \mu_2 &= d_2 - \lambda_0 \alpha_2 - \beta_2 \zeta_1, & \zeta_2 &= \frac{e_2 - \eta_0 \alpha_2 - \beta_2 \lambda_1}{\mu_2}, \\ \lambda_2 &= \frac{f_2 - \beta_2 \eta_1}{\mu_2}, & \eta_2 &= \frac{g_2}{\mu_2}, & \gamma_2 &= \frac{h_2 - \alpha_2 \gamma_0 - \beta_2 \gamma_1}{\mu_2}. \end{aligned}$$

Daha sonra, aşağıdaki parametreler bulunur:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= b_i - a_i \zeta_{i-3}, & \beta_i &= c_i - a_i \lambda_{i-3} - \alpha_i \zeta_{i-2}, & \mu_i &= d_i - a_i \eta_{i-3} - \lambda_{i-2} \alpha_i - \beta_i \zeta_{i-1}, \\ \zeta_i &= \frac{e_i - \eta_{i-2} \alpha_i - \beta_i \lambda_{i-1}}{\mu_i}, & \lambda_i &= \frac{f_i - \beta_i \eta_{i-1}}{\mu_i}, & \eta_i &= \frac{g_i}{\mu_i}, \\ \gamma_i &= \frac{h_i - \beta_i \gamma_{i-1} - \alpha_i \gamma_{i-2} - a_i \gamma_{i-3}}{\mu_i}, & i &= 3, 4, \dots, N. \end{aligned}$$

Bu iki adımdan sonra çözüm aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\delta_{N-2} = \gamma_{N-2} - \lambda_{N-2} \delta_N - \eta_{N-2} \delta_{N-1}, \quad \delta_{N-1} = \gamma_{N-1} - \eta_{N-1} \delta_N, \quad \delta_N = \gamma_N,$$

$$\delta_i = \gamma_i - \zeta_i \delta_{i+1} - \lambda_i \delta_{i+2} - \eta_i \delta_{i+3}, \quad i = 0, 1, \dots, N-4, N-3.$$

### 3.3.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal algoritmanın lineer kararlılık analizi için Fourier yöntemi kullanıldı. GRLW denkleminin  $U^p U_x$  lineer olmayan terimindeki  $U^p$  teriminin bölgesel olarak sabit olduğu varsayılarak işleme başlanır.  $k$  mod numarası ve  $h$  eleman büyüklüğü olmak üzere,

$$\delta_m^n = g^n e^{imkh} \quad (i = \sqrt{-1})$$

ile verilen Fourier mod (3.62) ile verilen denklem de yerine yazılırsa, bu işlem aşağıdaki eşitliği üretir:

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 g^{n+1} e^{i(m-3)kh} + \gamma_2 g^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_3 g^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 g^{n+1} e^{i(m)kh} \\
& + \gamma_5 g^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_6 g^{n+1} e^{i(m+2)kh} + \gamma_7 g^{n+1} e^{i(m+3)kh} = \\
& \gamma_7 g^n e^{i(m-3)kh} + \gamma_6 g^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_5 g^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 g^n e^{i(m)kh} \\
& + \gamma_3 g^n e^{i(m+1)kh} + \gamma_2 g^n e^{i(m+2)kh} + \gamma_1 g^n e^{i(m+3)kh}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Şimdi,  $e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$  olarak ifade edilen Euler formülü (3.65) ile verilen denklem de kullanılır ve gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa,

$$g = \frac{a - ib}{a + ib}$$

büyüme faktörü elde edilir. Burada,

$$a = \gamma_4 + (\gamma_5 + \gamma_3) \cos[hk] + (\gamma_6 + \gamma_2) \cos[2hk] + (\gamma_7 + \gamma_1) \cos[3hk],$$

$$b = (\gamma_5 - \gamma_3) \sin[hk] + (\gamma_6 - \gamma_2) \sin[2hk] + (\gamma_7 - \gamma_1) \sin[3hk].$$

$|g|$  nin modülü 1 dir. Bu da lineerleştirilmiş algoritmanın şartsız kararlı olduğunu gösterir.

### 3.3.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Bu bölümde, iki nokta lineerleştirme tekniği uygulanarak Galerkin sonlu elemanlar yöntemi tek solitary dalga, iki ve üç solitary dalganın etkileşimi problemlerini içeren örnekler üzerinde çalışılmıştır. Bu üç örnek başlangıç şartının farklı değerleri kullanılarak oluşturulmuştur.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları, sunulan sayısal yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu kanıtlamak için (3.67) ile verilen tam solitary dalga çözüm ve

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|$$

hata norm eşitlikleri kullanılarak hesaplanmıştır. Buna ilaveten, sayısal yaklaşımın kütle, momentum ve enerji ile ilgili özellikleri koruduğunu göstermek için,

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu U_x^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b U^{p+2} dx \tag{3.66}$$

korunum sabitlerindeki değişim hesaplanmıştır. Evans ve Raslan [22] tarafından sunulan GEW dekleminin tam solitary dalga çözümü aşağıdaki forma sahiptir:

$$U(x, t) = \sqrt{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \sec h^2 \left[ \frac{p}{2\sqrt{\mu}} (x - ct - x_0) \right]. \tag{3.67}$$

Burada  $gen. = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}}$  dalganın genliği,  $c$  pozitif  $x$  yönünde hareket eden dalganın sabit hızı ve  $x_0$  keyfi sabittir.

### 3.3.3.1 Tek solitary dalganın hareketi

Bu problem için başlangıç şartı

$$U(x, 0) = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \sec h^2 \left[ \frac{p}{2\sqrt{\mu}}(x - x_0) \right],$$

olarak alındı. [5, 22, 23] çalışmaları ile uyumlu olması için  $p$ ,  $c$  ve  $gen. = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}}$  parametrelerinin farklı değerleri,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$ ,  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $x_0 = 30$ ,  $0 \leq x \leq 80$  parametre değerleri kullanılarak beş parametre kümesi oluşturulmuştur. Sayısal algoritma  $t = 0$  dan  $t = 20$  anına kadar çalıştırılmıştır.

İlk durumda,  $p = 2$ ,  $c = 1/32$  ve  $c = 1/2$  büyüklükleri seçildi Bu parametrelere göre solitary dalgalar sırasıyla,  $gen. = 0.25$  ve  $gen. = 1$  genliklerine sahip olur. Hesaplanan korunum sabitlerinin ve hata normlarının sayısal değerleri Tablo 3.23 ve Tablo 3.24'de sunulmuştur. Tablo 3.23'e göre  $I_1, I_2, I_3$  korunum sabitlerindeki değişim  $0.3 \times 10^{-6}$  dan daha küçüktür.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata norm değerleri ise sırasıyla,  $7.9 \times 10^{-5}$  ve  $4.5 \times 10^{-5}$  değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır. Tablo 3.24'ye göre ise  $I_1, I_2, I_3$  korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranları, sırasıyla %2, %3 ve %3 değerlerinden daha az hesaplanmıştır.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sırasıyla, 0.039 ve 0.027 den küçük kalmaktadır.

İkinci olarak,  $p = 3$ ,  $c = 0.001$  ve  $c = 0.3$  değerleri için solitary dalgalar  $gen. = 0.15$  ve  $gen. = 1$  genliklerini üretir. Hesaplanan korunum sabitlerinin ve hata normlarının sayısal değerleri Tablo 3.25 ve Tablo 3.26'de verilmiştir. Tablo 3.25'den görüldüğü gibi hesaplama süresince korunum sabitleri hemen hemen değişmeden kalmaktadır.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata norm değerleri ise sırasıyla,  $0.29 \times 10^{-5}$  ve  $0.19 \times 10^{-5}$  değerlerinden daha küçük bulunmuştur. Tablo 3.26 incelendiğinde ise  $I_1, I_2, I_3$  korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranları, sırasıyla %2, %3 ve %3 değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sırasıyla, 0.017 ve 0.014 den daha küçük bulunmuştur.

Son olarak,  $p = 4$  ve  $c = 0.2$  parametre değeri alındı. Bu parametreye göre, solitary dalga  $gen. = 1$  yüksekliğine sahip olur. Korunum sabitlerinin ve hata normlarının hesaplanan değerleri Tablo 3.27'de gösterilmiştir. Tablo 3.27;  $I_1, I_2, I_3$  korunum sabitlerindeki değişim oranının %2 den daha küçük olduğunu ifade etmektedir. Diğer yandan,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata norm-

larının sayısal değeride 0.0090 ve 0.0083 den daha küçük hesaplanmıştır.

Tek solitary dalganın  $t = 0, 10, 20$  zamanlarındaki hareketleri Şekil 3.12 ve Şekil 3.13'de çizilmiştir. Bu şekillerden anlaşıldığı gibi sayısal yöntem ile elde edilen çözüm bir solitary dalga hareketi oluşturur. Bu solitary dalga, zaman ilerledikçe hemen hemen değişmeyen hızla, şekil ve yüksekliğini koruyarak sağa doğru hareket etmektedir.

Tablo 3.28'de elde edilen sayısal sonuçlarla daha önceki çalışmalarda bulunan sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu tabloya bakıldığında kollokasyon yöntemi ile ve Galerkin yöntemi ile elde edilen korunum sabitleri birbirine çok yakındır ve daha önceki çalışmalarla oldukça uyumludur. Hata norm değerleri değerlendirildiğinde ise daha önceki bölümlerde kollokasyon yöntemi ile elde edilen değerler daha küçük bulunmuştur.  $L_\infty$  hata normunun Galerkin yöntemi ile elde edilen sayısal değeri  $p = 2$  için  $0.45 \times 10^{-4}$ ;  $p = 3$  için  $0.19 \times 10^{-5}$ ;  $p = 4$  için  $8.22 \times 10^{-3}$  değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır. Bu değerlendirmelere göre sayısal algoritmanın verimli bir yöntem olduğu söylenebilir.

Tablo 3.23 Tek solitary dalganın  $p = 2$ ,  $gen. = 0.25$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
0	0.7853966	0.1666661	0.0052083	0.00000000	0.00000000
5	0.7853966	0.1666662	0.0052083	2.00511050	1.10880256
10	0.7853967	0.1666662	0.0052083	3.99064595	2.22513057
15	0.7853967	0.1666662	0.0052083	5.93886201	3.34204308
20	0.7853968	0.1666663	0.0052083	7.83378959	4.44850332

Tablo 3.24 Tek solitary dalganın  $p = 2$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0	3.1415863	2.6666583	1.3333283	0.00000000	0.00000000
5	3.1458905	2.6724969	1.3391718	0.01650411	0.01116168
10	3.1502060	2.6783543	1.3450481	0.02812323	0.01888483
15	3.1545617	2.6842736	1.3509996	0.03526213	0.02393891
20	3.1589605	2.6902580	1.3570299	0.03803037	0.02629007

Tablo 3.25 Tek solitary dalganın  $p = 3$ ,  $gen. = 0.15$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^7$	$L_\infty \times 10^7$
0	0.4189154	0.0549805	0.0000733	0.00000000	0.00000000
5	0.4189154	0.0549805	0.0000733	7.06255100	4.57700375
10	0.4189154	0.0549805	0.0000733	14.12494884	9.16012912
15	0.4189154	0.0549805	0.0000733	21.18707557	13.74545441
20	0.4189154	0.0549805	0.0000733	28.24881328	18.32910252

Tablo 3.26 Tek solitary dalganın  $p = 3$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

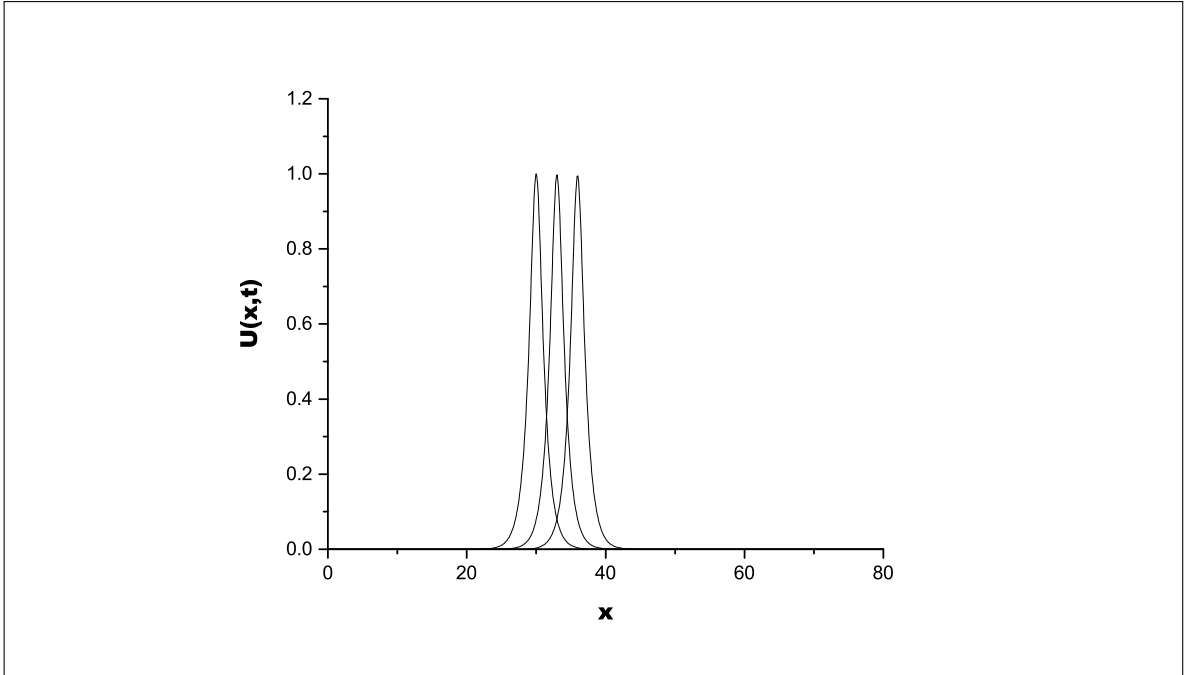
Zaman	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0	2.8043580	2.4639009	0.9855618	0.00000000	0.00000000
5	2.8079094	2.4691674	0.9908334	0.01048354	0.00825708
10	2.8114726	2.4744442	0.9961351	0.01657542	0.01277205
15	2.8150809	2.4797940	1.0015278	0.01850263	0.01460246
20	2.8187398	2.4852249	1.0070200	0.01655637	0.01370453

Tablo 3.27 Tek solitary dalganın  $p = 4$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

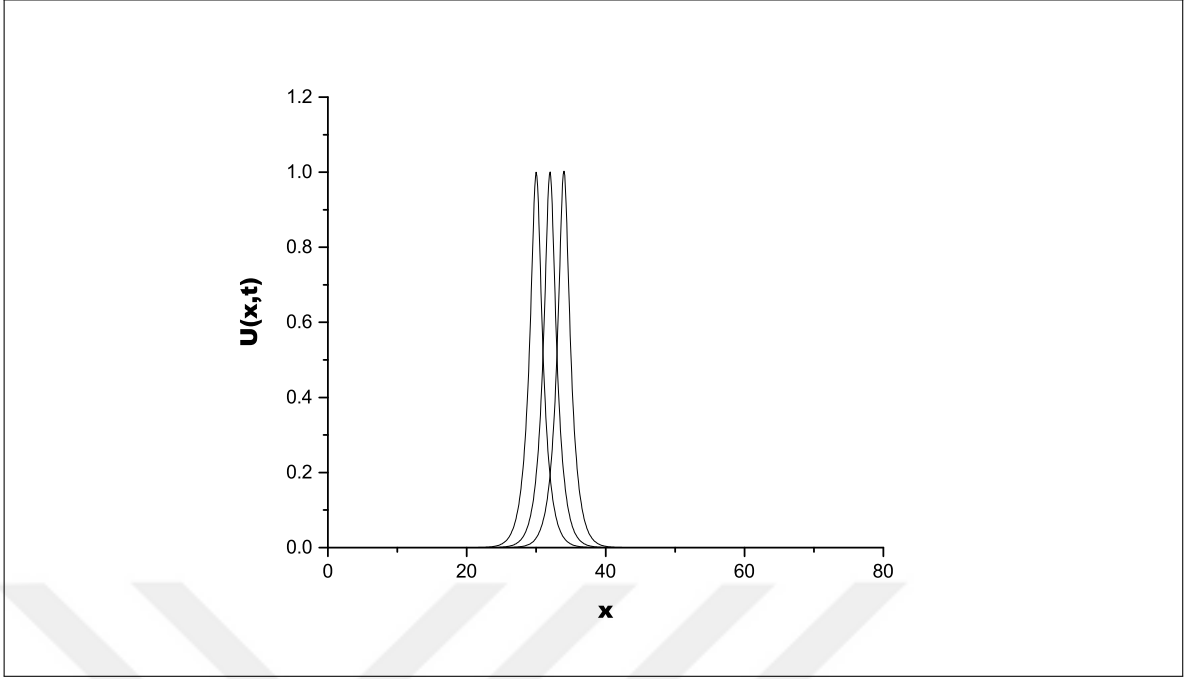
Zaman	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2$	$L_\infty$
0	2.6220516	2.3561722	0.7853952	0.00000000	0.00000000
5	2.6247173	2.3603671	0.7895906	0.00691120	0.00632109
10	2.6273729	2.3645238	0.7937683	0.01055235	0.00914085
15	2.6300579	2.3687299	0.7980116	0.01104764	0.00976358
20	2.6327833	2.3730032	0.8023383	0.00890617	0.00821991

Tablo 3.28 Tek solitary dalganın  $p = 2, 3, 4$ ;  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.2$ ,  $t = 20$  ve  $x \in [0, 80]$  için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

Yöntemler		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
$p = 2$ $c = 1/32$	CubBSC [5]	0.19588	0.17443	0.78466	0.16643	0.00519
	QuadBSC [22]	0.15695	0.20214	0.78528	0.16658	0.00520
	QuadBSLG [15]	0.08100	0.04596			
	CubBSLG [19]	0.07833	0.04448			
	QuadBSPG [23]	0.00250	0.00275	0.78539	0.16666	0.00520
	QuarBSC [17]	0.00157	0.00104	0.78539	0.16666	0.00520
	SepBSC	0.00127	0.00068	0.78539	0.16666	0.00520
	QuinBSC	0.00135	0.00091	0.78539	0.16666	0.00520
	CubBSLG	0.07833	0.04448	0.78539	0.16666	0.00520
$p = 3$ $c = 0.001$	CubBSC [5]	0.514967	0.320605	0.65908	0.05938	0.000068
	QuadBSPG [23]	0.000064	0.000082	0.41891	0.05497	0.000073
	SepBSC	0.000006	0.000003	0.41891	0.05498	0.000073
	QuinBSC	0.000019	0.000023	0.41891	0.05498	0.000073
	CubBSLG	0.002824	0.001832	0.41891	0.05498	0.000073
$p = 4$ $c = 0.2$	QuadBSPG [23]	2.30499	1.88285	2.62206	2.35615	0.78534
	SepBSC	3.41485	2.49360	2.62192	2.35590	0.78511
	QuinBSC	3.39086	2.47031	2.62192	2.35593	0.78513
	CubBSLG	8.90617	8.21991	2.63278	2.37300	0.80233



Şekil 3.12 Tek solitary dalganın  $p = 3$  ve  $c = 0.3$ ,  $x_0 = 30$ ,  $x \in [0, 80]$  için  $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi



Şekil 3.13 Tek solitary dalganın  $p = 4$  ve  $c = 0.2$ ,  $x_0 = 30$ ,  $x \in [0, 80]$  için  $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi

### 3.3.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi

İkinci problem olarak, aşağıdaki başlangıç koşulu kullanılmıştır:

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\frac{c_i(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{p}{2\sqrt{\mu}}(x - x_i) \right]. \quad (3.68)$$

Bu başlangıç şartı  $gen. = 1$  ve  $gen. = 0.5$  genliklerine sahip aynı yönde hareket eden iki pozitif solitary dalga üretir. Burada  $c_i$  ve  $x_i$ ,  $i = 1, 2$  keyfi sabitlerdir.

İlk parametreler  $p = 2$ ,  $c_1 = 0.5$  ve  $c_2 = 0.125$ ; ikinci parametreler  $p = 3$ ,  $c_1 = 0.3$  ve  $c_2 = 0.0375$ ; üçüncü parametreler  $p = 4$ ,  $c_1 = 0.2$  ve  $c_2 = 1/80$  alınarak üç farklı parametre kümesi oluşturulmuştur. Bilgisayar programı sırasıyla,  $t = 60, 100$  ve  $120$  zamanına kadar çalıştırılmıştır. [5,22,23] çalışmaları ile uyumlu olması için diğer parametreler  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $x_1 = 15, x_2 = 30, 0 \leq x \leq 80$  olarak düşünülmüştür.

Sayısal algoritmanın özellikleri koruduğunu kanıtlamak için  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitleri hesaplanarak Tablo 3.29, Tablo 3.30 ve Tablo 3.31'de sunulmuştur. Bu üç tabloya göre  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranları sırasıyla, %0.1, %0.5 ve %0.8 değerlerinden daha küçük bulunmuştur. Üstelik, hesaplanan korunum sabitleri [23] çalışması ile elde edilen sonuçlara yakındır .

İki solitary dalganın farklı zaman adımlarındaki hareketleri Şekil 3.14 ve Şekil 3.15’de gösterilmiştir. Bu şekillere göre, başlangıçta yüksekliği fazla olan dalga yüksekliği az olan dalganın gerisindedir. Zaman ilerledikçe yüksekliği fazla olan dalga diğer dalgayı yakalar ve üstüne biner. Yani iki dalga arasındaki etkileşim gerçekleşir. Daha sonra dalgalar ayrılmaya başlar. Belirli bir zaman sonra büyük genlikli dalga önde, küçük genlikli dalga arkada olarak başlangıç hız, şekil ve genliklerini koruyarak yollarına devam eder. Sonuç olarak, solitary dalgaların bu hareketine göre solitonlardır denilebilir.

Tablo 3.29 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 2$ ,  $gen. = 1,0.5$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri

Zaman	$I_1$		$I_2$		$I_3$	
	Galerkin	Pet.-Gal. [23]	Galerkin	Pet.-Gal. [23]	Galerkin	Pet.-Gal. [23]
0	4.71237	4.71239	3.33332	3.33324	1.41666	1.14166
10	4.71236	4.71239	3.33331	3.33324	1.41665	1.14166
20	4.71235	4.71239	3.33332	3.33324	1.41666	1.14166
30	4.71260	4.71239	3.33416	3.33324	1.41758	1.14166
40	4.71234	4.71239	3.33345	3.33333	1.41699	1.14166
50	4.71210	4.71239	3.33290	3.33338	1.41652	1.14166
60	4.71213	4.71239	3.33296	3.33333	1.41651	1.14166

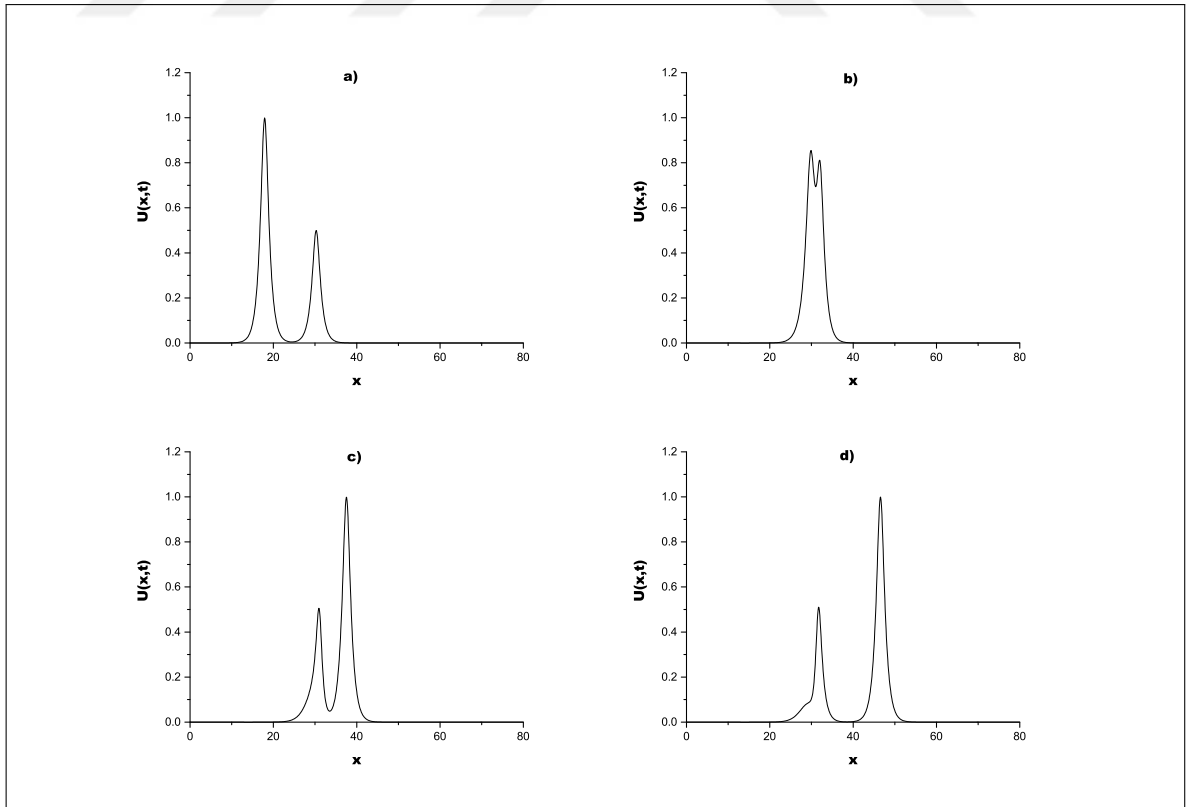
Tablo 3.30 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 3$ ,  $gen. = 1,0.5$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri

Zaman	$I_1$		$I_2$		$I_3$	
	Galerkin	Pet.-Gal. [23]	Galerkin	Pet.-Gal. [23]	Galerkin	Pet.-Gal. [23]
0	4.20653	4.20655	3.07987	3.97977	1.01636	1.01634
10	4.20653	4.20655	3.07989	2.07986	1.01637	1.01634
20	4.20652	4.20655	3.07988	3.07982	1.01635	1.01634
30	4.20653	4.20655	3.07991	3.07980	1.01638	1.01634
40	4.20677	4.20655	3.08050	3.07986	1.01698	1.01634
50	4.20793	4.20655	3.08362	3.07981	1.02059	1.01633
60	4.20616	4.20655	3.07947	3.07987	1.01654	1.01633
70	4.20558	4.20655	3.07863	3.07976	1.01629	1.01634
80	4.20509	4.20655	3.07800	3.07991	1.01620	1.01633
90	4.20490	4.20655	3.07777	3.07974	1.01616	1.01633
100	4.20503	4.20655	3.07797	3.07972	1.01616	1.01634

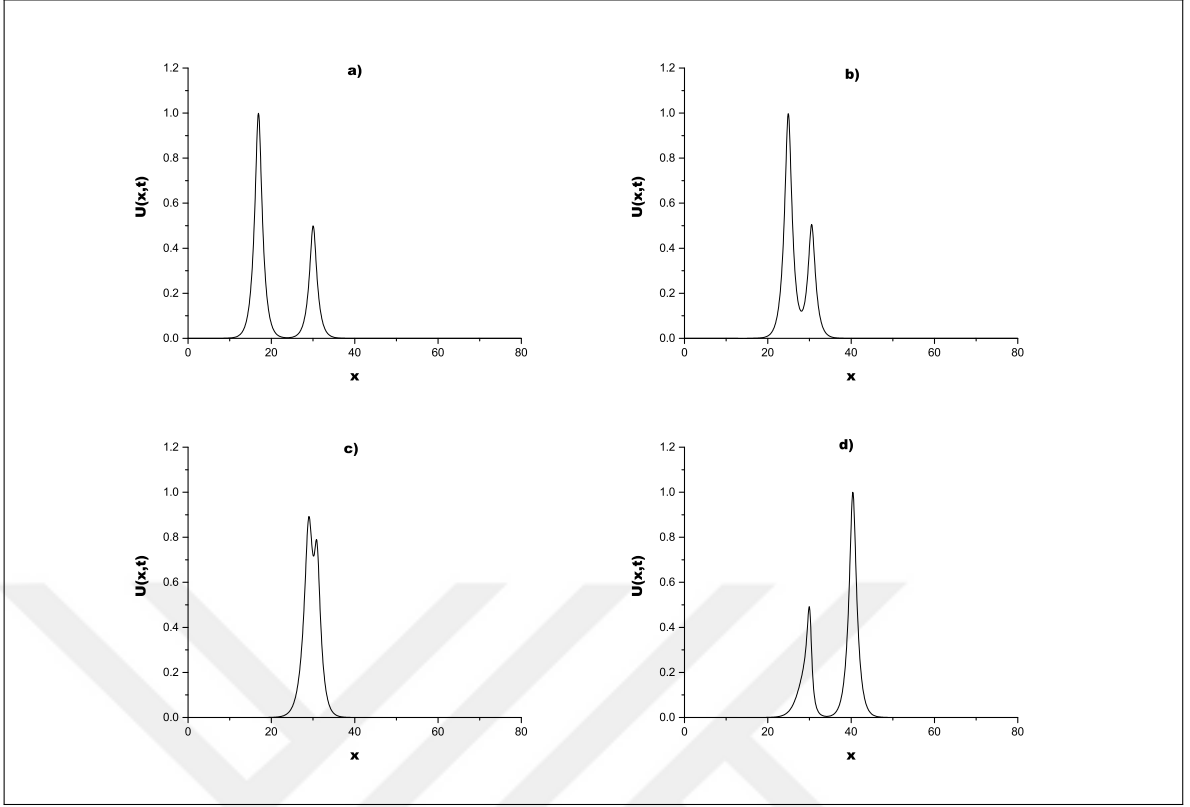


Tablo 3.31 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 4$ ,  $gen. = 1,0.5$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri

Zaman	$I_1$		$I_2$		$I_3$	
	Galerkin	Pet.-Gal. [23]	Galerkin	Pet.-Gal. [23]	Galerkin	Pet.-Gal. [23]
0	3.93307	3.93309	2.94521	2.94512	0.79766	0.79761
10	3.93310	3.93309	2.94529	2.94518	0.79773	0.79761
20	3.93309	3.93309	2.94527	2.94517	0.79771	0.79761
30	3.93309	3.93309	2.94527	2.94510	0.79770	0.79761
40	3.93310	3.93309	2.94529	2.94515	0.79773	0.79761
50	3.93320	3.93309	2.94553	2.94504	0.79795	0.79761
60	3.93388	3.93309	2.94703	2.94505	0.79942	0.79762
70	3.93601	3.93307	2.95212	2.94510	0.80505	0.79763
80	3.93285	3.93309	2.94529	2.94506	0.79862	0.79761
90	3.93222	3.93309	2.94436	2.94520	0.79812	0.79761
100	3.93161	3.93309	2.94366	2.94508	0.79805	0.79761
110	3.93095	3.93309	2.94291	2.94517	0.79799	0.79761
120	3.93026	3.93308	2.94212	2.94511	0.79794	0.79761



Şekil 3.14 İki solitary dalganın  $p = 3$ ; a)  $t = 10$ , b)  $t = 50$ , c)  $t = 70$ , d)  $t = 100$ 'deki hareketi



Şekil 3.15 İki solitary dalganın  $p = 4$ ; a)  $t = 10$ , b)  $t = 50$ , c)  $t = 70$ , d)  $t = 100$ 'deki hareketi

### 3.3.3.3 Üç solitary dalganın etkileşimi

Son problemi için (3.47) problemi,

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^3 \sqrt[p]{\frac{c_i(p+1)(p+2)}{2\varepsilon} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{p}{2\sqrt{\mu}}(x - x_i) \right]} \quad (3.69)$$

şeklinde verilen başlangıç şartı ile beraber ele alındı. Burada  $c_i$  ve  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  keyfi sabitlerdir. Bu başlangıç şartına göre farklı genliklere sahip aynı yönde hareket eden üç adet pozitif solitary dalga oluşur.

İlk parametreler  $p = 2$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0.5$  ve  $c_3 = 0.125$ ; ikinci parametreler  $p = 3$ ,  $c_1 = 0.5$ ,  $c_2 = 0.3$  ve  $c_3 = 0.0375$ ; üçüncü parametreler  $p = 4$ ,  $c_1 = 0.5$ ,  $c_2 = 0.2$  ve  $c_3 = 1/80$  alınarak üç farklı parametre kümesi oluşturulmuştur. Bu parametrelere göre sırasıyla,  $p = 2$  için  $gen. = 1.41$ ,  $gen. = 1$ ,  $gen. = 0.5$ ;  $p = 3$  için  $gen. = 1.19$ ,  $gen. = 1$ ,  $gen. = 0.5$ ;  $p = 4$  için  $gen. = 1.26$ ,  $gen. = 1$ ,  $gen. = 0.5$  genliklerine sahip üç solitary dalga oluşur. Bilgisayar hesaplaması sırasıyla,  $t = 60$ ,  $100$  ve  $120$  zamanına kadar yapılmıştır. Diğer parametreler  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 15$ ,  $x_3 = 30$ ,  $0 \leq x \leq 80$  olarak alınmıştır.

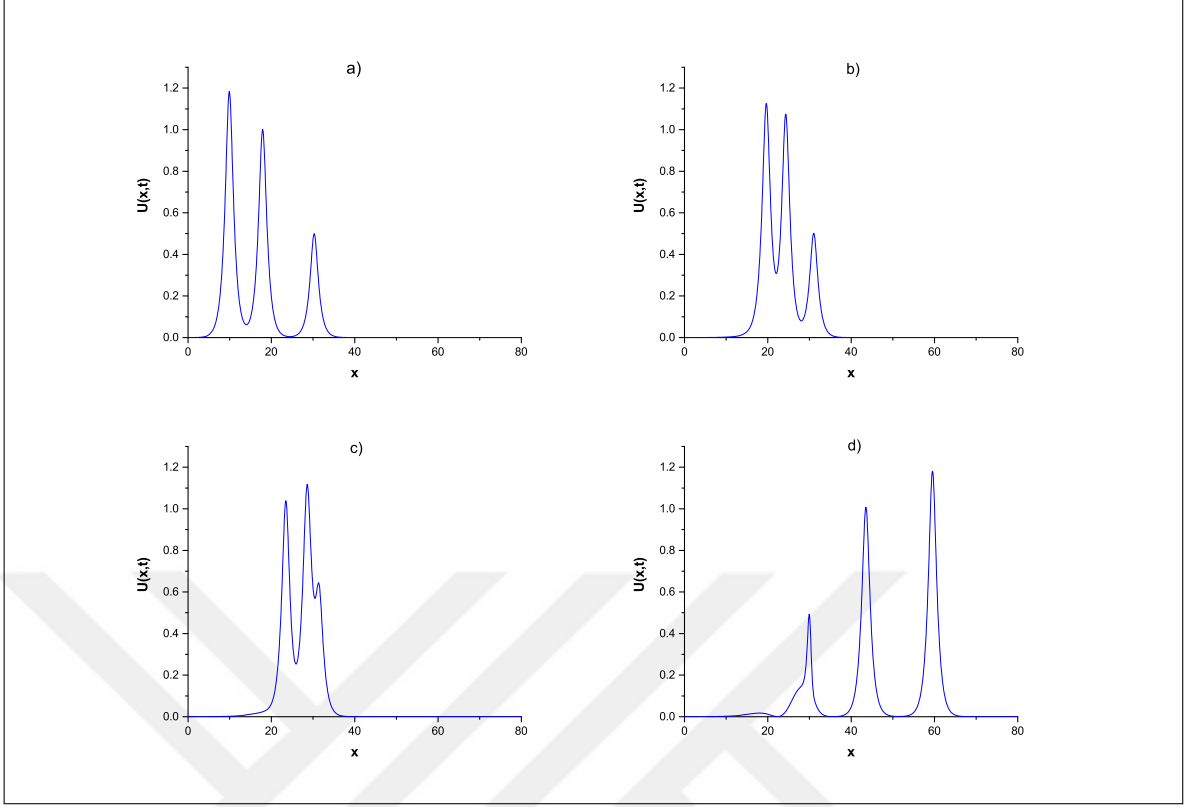
Sayısal yöntemin performansını göstermek için  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  ile verilen korunum sabitleri

hesaplanarak Tablo 3.32’da gösterilmiştir. Bu tabloda görüldüğü gibi  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranları sırasıyla,  $p = 2$  için %2, %0.5 ve %0.9;  $p = 3$  için %2, %0.9 ve %0.4;  $p = 4$  için %2, %2 ve %3 değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır.

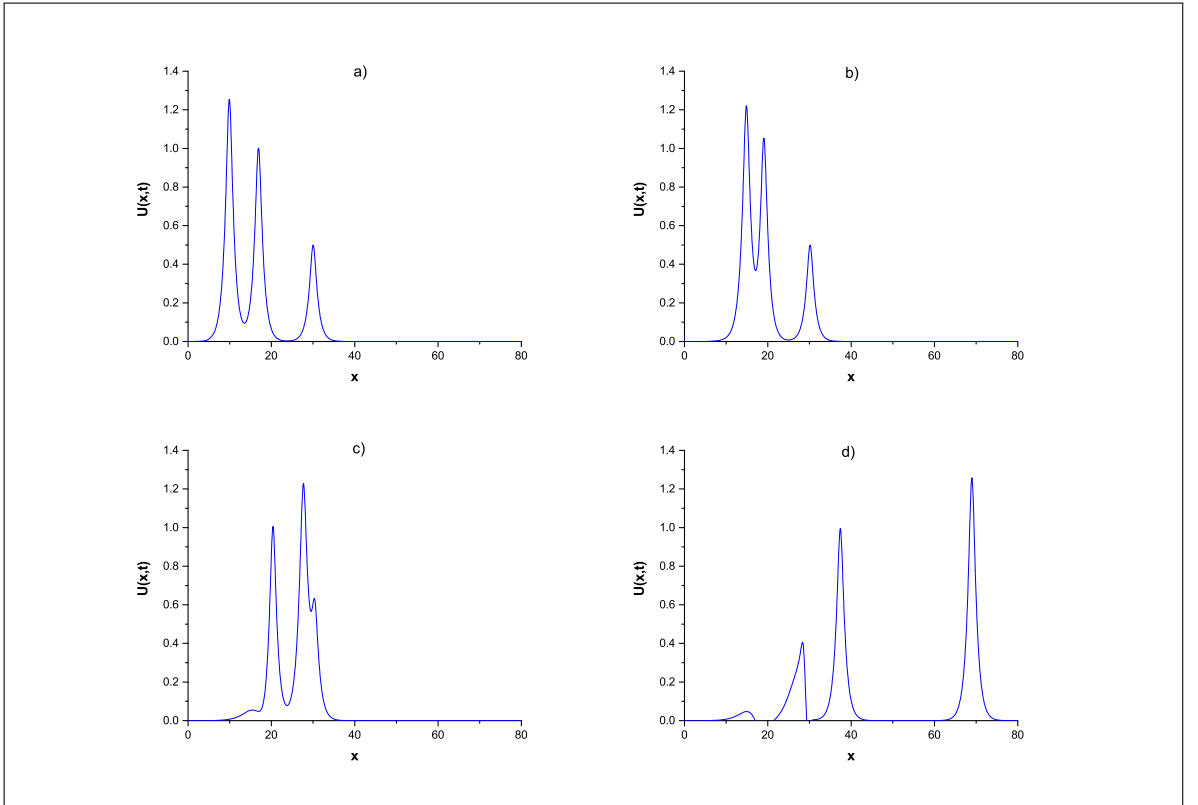
Üç solitary dalganın zaman ilerledikçe hareketleri Şekil 3.16 ve Şekil 3.17’de grafik çizilerek gösterilmiştir. Bu grafiklere göre, üç solitary başlangıçta  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 15$  ve  $x_3 = 30$  noktalarına konumlandırılmıştır. Büyük genliğe sahip dalganın hızı da büyüktür. Bu yüzden en gerideki dalga, önce ikinci dalgayı yakalar ve etkileşim gerçekleşir. Daha sonra birinci dalgayı yakalar. Bu aşamada ikinci dalganın birinci dalga ile etkileşimi gerçekleşir. Yani üç dalga birbiri ile çarpışır. Son olarak dalgalar ayrılır ve en büyük genlikli dalga en önde, en küçük genlikli dalga en arkada yolarına devam eder. Görüldüğü gibi üç solitary dalga çarpışmadan sonra başlangıç genlik, hız ve şekillerini koruyarak ilerlemeye devam eder. Bu sonuca göre iki solitary dalganın etkileşiminde de olduğu gibi, bu hareket solitary dalgaların solitonlar olduğu sonucunu kuvvetlendirmektedir.

Tablo 3.32 Üç solitary dalganın etkileşiminin  $p = 2, 3, 4$ ;  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 80]$  için korunum sabitleri

Zaman	$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0	9.13523	8.66728	6.75308	7.51814	6.54380	3.32686	7.21754	6.67095	3.90382
10	9.15501	8.66697	6.75198	7.53123	6.54356	3.32614	7.22965	6.67025	3.90161
20	9.15467	8.66620	6.75085	7.53134	6.54358	3.32630	7.23002	6.67143	3.90599
30	9.15444	8.66571	6.74918	7.53134	6.54380	3.32718	7.22808	6.66689	3.89879
40	9.15386	8.66470	6.74804	7.53214	6.54619	3.33083	7.22947	6.67099	3.90801
50	9.15311	8.66298	6.74559	7.53168	6.54490	3.32784	7.22775	6.66653	3.89572
60	9.15283	8.66267	6.74422	7.52943	6.54002	3.32441	7.22768	6.66705	3.89508
70				7.52914	6.54043	3.32484	7.22855	6.66985	3.89691
80				7.52774	6.53879	3.32440	7.22309	6.65880	3.88825
90				7.52618	6.53688	3.32393	7.22361	6.66097	3.88790
100				7.52481	6.53512	3.32347	7.22284	6.65988	3.88568
110							7.22186	6.65849	3.88324
120							7.22075	6.65705	3.88081



Şekil 3.16 Üç solitary dalganın  $p = 3$ ; a)  $t = 10$ , b)  $t = 30$ , c)  $t = 40$ , d)  $t = 100$ 'deki hareketi



Şekil 3.17 Üç solitary dalganın  $p = 4$ ; a)  $t = 10$ , b)  $t = 20$ , c)  $t = 40$ , d)  $t = 120$ 'deki hareketi

## 4. BÖLÜM

### GENELLEŞTİRİLMİŞ DÜZENLENMİŞ UZUN DALGA (GRLW) DENKLEMİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde GRLW denkleminin kollokasyon ve Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. Yaklaşık çözüm kübik, kuintik ve septik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak aranmıştır. Sayısal yöntemin lineer olarak kararlı olup olmadığını belirlemek için Von Neumann tekniği kullanılmıştır. Lineerleştirme tekniği olarak Bölüm 2 de açıkladığımız lineerleştirme tekniklerinden normal, iki nokta ve Rubin-Graves lineerleştirme teknikleri uygulanmıştır. Beş farklı lineerleştirme tekniği, yöntemlerin Fortran programı ile sayısal yöntemin uygulama kısmında kullanılmıştır. Fakat bu çalışmada sadece kullanılan yönteme göre en iyi sayısal çözümü veren lineerleştirme tekniği sunulmuştur. Sonlu elemanlar yaklaşımı, tek solitary dalga, iki solitary dalganın etkileşimi, Maxwellian başlangıç şartı ile dalganın oluşumu ve ardışık dalgaların gelişimini içeren örnekler üzerinde çalışılmıştır. Bu örnekler için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları, kütle, momentum ve enerji ile ilgili  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitleri (hareket sabitleri) hesaplanmıştır.

#### 4.1 GRLW Denkleminin Septik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü

GRLW denklemi,

$$U_t + U_x + p(p+1)U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada fiziksel sınır şartları  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $U \rightarrow 0$ , alt indis  $t$  ve  $x$  zaman ve boyutsal türevi ifade eder,  $p$  pozitif tamsayıdır,  $\mu$  pozitif sabittir.

Sınır ve başlangıç şartları,

$$\begin{aligned} U(a,t) = 0, \quad U_x(a,t) = 0, \quad U_{xxx}(a,t) = 0, \\ U(b,t) = 0, \quad U_x(b,t) = 0, \quad U_{xxx}(b,t) = 0, \\ U(x,0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (4.2)$$

olarak alınacaktır.

$[a,b]$  sonlu aralığı içine sınırlandırılmış problemin çözüm bölgesini düşünelim. Aralık uzunluğu  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  ve  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  olmak üzere,  $[a,b]$  aralığı  $x_m$  düğüm noktalarıyla  $N$  tane eşit alt aralığa bölünür. Prenter [78],  $\phi_m(x)$  septik B-spline

fonksiyonları,  $m = -3, -2, \dots, N+3$  olmak üzere  $x_m$  düğüm noktalarında

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlamıştır.  $\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \dots, \phi_{N+2}(x), \phi_{N+3}(x)\}$  kümesi  $[a, b]$  çözüm bölgesi üzerinde bir baz oluşturur. Her bir septik B-spline  $\phi_m$  fonksiyonu ardışık 8 tane sonlu alt aralığı örter. Bu sebeple her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu alt aralığı 8 adet B-spline fonksiyonu tarafından örtülür.  $U_N(x, t)$  yaklaşık çözümü, septik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (4.4)$$

olarak ifade edilir. Burada  $\delta_m(t)$ , zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir, sınır şartları ve GRLW denkleminin septik B-spline kollokasyon şartları oluşturularak bulunacaktır. (4.3) ile verilen B-spline fonksiyonlar ve (4.4) ile verilen yaklaşık çözüm birlikte değerlendirilerek, yaklaşım fonksiyonu  $U_m$  ve onun  $x'$  e göre  $U'_m, U''_m$  türevleri,  $x_m$  düğüm noktasında  $\delta_m$  bilinmeyen parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned} U_m &= \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\ U'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

olarak elde edilir. Böylece  $U$  değişimi  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı üzerinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$U = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m \delta_m. \quad (4.6)$$

Şimdi, düğüm noktalarıyla beraber kollokasyon şartını oluşturmak için (4.5) ile verilen denklemdaki  $U_m$  ve onun  $x$ 'e göre türevleri, (4.1) ile verilen GRLW denklemine yerine yazılırsa; Normal lineerleştirme tekniği için,

$$\begin{aligned}
& \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\
& + \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
& + \frac{7p(p+1)Z_m}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
& - \frac{42\mu}{h^2} \left( \dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklinde birleştirilmiş adi diferansiyel denklemlerin bir kümesi elde edilir. Burada,

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = \begin{pmatrix} \delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n \\ + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n \end{pmatrix}^p$$

olarak alınmıştır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için,

$$\begin{aligned}
& \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\
& + \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
& + p(p+1)Z_m (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
& - \frac{42\mu}{h^2} \left( \dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

olarak kollokasyon şartının genel haline ulaşılır. Burada,

$$\begin{aligned}
Z_m \cong [(U_m)^{p-1}(U_m)_x]^{n+1} &= (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^{n+1} + (U_m^{p-1})^{n+1} (U_m)_x^n - (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^n \\
&= (U_m)^{p-1} (U_m^{n+1})_x + (U_m^{n+1})^{p-1} (U_m)_x - (U_m)^{p-1} (U_m)_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_m \cong & \left[ (\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\
& \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^{n+1} - 56\delta_{m-2}^{n+1} - 245\delta_{m-1}^{n+1} + 245\delta_{m+1}^{n+1} + 56\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1}) \right] \\
& + \left[ (\delta_{m-3}^{n+1} + 120\delta_{m-2}^{n+1} + 1191\delta_{m-1}^{n+1} + 2416\delta_m^{n+1} + 1191\delta_{m+1}^{n+1} + 120\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1})^{p-1} \right. \\
& \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right] \\
& - \left[ (\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\
& \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right]
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve her iki genel denklemde “.” zamana göre türevi ifade eder. (4.7) ve (4.8) ile verilen kollokasyon denklemlerinde bulunan zamana göre bilinmeyen parametreleri  $\delta_m$  ve

zamana göre türevleri olan  $\dot{\delta}_m$  parametrelerine,

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \quad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (4.9)$$

Crank-Nicolson ve klasik ileri sonlu fark yaklaşımı uygulanır. Bu durumda, normal lineerleştirme tekniği için  $\delta_i^{n+1}$  ve  $\delta_i^n$  parametrelerine göre iki ardışık zaman adımı  $n$  ve  $n+1$  arasındaki tekrarlı bağıntısı,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (4.10)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (1 - E - p(p+1)EZ_m - M), & \gamma_2 &= (120 - 56E - 56p(p+1)EZ_m - 24M), \\ \gamma_3 &= (1191 - 245E - 245p(p+1)EZ_m - 15M), & \gamma_4 &= (2416 + 80M), \\ \gamma_5 &= (1191 + 245E + 245p(p+1)EZ_m - 15M), & \gamma_6 &= (120 + 56E + 56p(p+1)EZ_m - 24M), \\ \gamma_7 &= (1 + E + p(p+1)EZ_m - M), \\ m &= 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{7}{2h}\Delta t, \quad M = \frac{42\mu}{h^2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için tekrarlı bağıntısı,

$$\begin{aligned} & \beta_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \beta_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \beta_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \beta_4 \delta_m^{n+1} + \beta_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \beta_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \beta_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \beta_8 \delta_{m-3}^n + \beta_9 \delta_{m-2}^n + \beta_{10} \delta_{m-1}^n + \beta_{11} \delta_m^n + \beta_{12} \delta_{m+1}^n + \beta_{13} \delta_{m+2}^n + \beta_{14} \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (4.12)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (1 - E + KZ_m - M), & \beta_2 &= (120 - 56E + 120KZ_m - 24M), \\ \beta_3 &= (1191 - 245E + 1191KZ_m - 15M), & \beta_4 &= (2416 + 2416KZ_m + 80M), \\ \beta_5 &= (1191 + 245E + 1191KZ_m - 15M), & \beta_6 &= (120 + 56E + 120KZ_m - 24M), \\ \beta_7 &= (1 + E + KZ_m - M), \\ \beta_8 &= (1 + E - KZ_m - M), & \beta_9 &= (120 + 56E - 120KZ_m - 24M), \\ \beta_{10} &= (1191 + 245E - 1191KZ_m - 15M), & \beta_{11} &= (2416 - 2416KZ_m + 80M), \\ \beta_{12} &= (1191 - 245E - 1191KZ_m - 15M), & \beta_{13} &= (120 - 56E - 120KZ_m - 24M), \\ \beta_{14} &= (1 - E - KZ_m - M), \\ m &= 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{7}{2h}\Delta t, \quad K = \frac{p(p+1)}{2}\Delta t, \quad M = \frac{42\mu}{h^2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$



(4.10) ve (4.12) ile verilen cebirsel denklem sistemleri  $N + 1$  tane lineer denklemden oluşur, fakat bu sistemde  $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$  parametrelerinden oluşan  $N + 7$  tane bilinmeyen vardır. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 6 tane ek şarta ihtiyaç vardır. Gerekli 6 tane ek şart (4.2) ile verilen sınır şartları kullanılarak elde edilir. Sınır şartlarının cebirsel denklem sistemine basit bir şekilde dahil edilmesi olarak ifade edilen bu işlemin benzeri, aşağıda iterasyonu başlatabilmek için  $d^0$  başlangıç değerinin belirlenmesi aşamasında açıklanmıştır. Bu şekilde  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$  parametreleri (4.10) ve (4.12) ile verilen cebirsel denklem sistemlerinden yok edilir. Bu işlemlerden sonra  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  olmak üzere,  $N + 1$  tane bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi (matris form) oluşur:

$$A d^{n+1} = B d^n. \quad (4.14)$$

$A$  ve  $B$  matrisleri,  $(N + 1) \times (N + 1)$  boyutlu 7 sütun elemanlı matrislerdir (septa-diagonal matris olarak adlandırılır) ve bu matris denklemini aşağıda alt bölüm 4.1.1'de açıklandığı gibi Fortran programında Thomas algoritması (septa-diagonal algoritma) kullanılarak çözülmüştür. Lineer olmayan terim  $Z_m$  deki eleman parametresine

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

formülü ile verilen iç iterasyon her bir zaman adımında üç veya dört defa uygulanarak çözüm iyileştirilmiştir.

### **Başlangıç iterasyonu**

(4.10) ve (4.12) ile verilen tekrarlama bağıntılarında,  $d^0$  başlangıç değeri bulunarak iterasyon başlatılır. Yaklaşım fonksiyonu, başlangıç parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m^0(t).$$

Bu yaklaşımdaki  $\delta_m^0$  bilinmeyen parametrelerini belirleyebilmek için başlangıç şartı ve aşağıdaki sınır noktalarındaki türevler kullanılır:

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) &= U(x_m, 0); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(a, 0) = 0, \quad (U_N)_{xxx}(a, 0) = 0, \\ (U_N)_x(b, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(b, 0) = 0, \quad (U_N)_{xxx}(b, 0) = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Başlangıç şartı  $\delta_m$  parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
\delta_{-3} + 120\delta_{-2} + 1191\delta_{-1} + 2416\delta_0 + 1191\delta_1 + 120\delta_2 + \delta_3 &= U(x_0, 0), \\
\delta_{-2} + 120\delta_{-1} + 1191\delta_0 + 2416\delta_1 + 1191\delta_2 + 120\delta_3 + \delta_4 &= U(x_1, 0), \\
\delta_{-1} + 120\delta_0 + 1191\delta_1 + 2416\delta_2 + 1191\delta_3 + 120\delta_4 + \delta_5 &= U(x_2, 0), \\
\delta_0 + 120\delta_1 + 1191\delta_2 + 2416\delta_3 + 1191\delta_4 + 120\delta_5 + \delta_6 &= U(x_3, 0), \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\delta_{N-6} + 120\delta_{N-5} + 1191\delta_{N-4} + 2416\delta_{N-3} + 1191\delta_{N-2} + 120\delta_{N-1} + \delta_N &= U(x_{N-3}, 0), \\
\delta_{N-5} + 120\delta_{N-4} + 1191\delta_{N-3} + 2416\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} + 120\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_{N-2}, 0), \\
\delta_{N-4} + 120\delta_{N-3} + 1191\delta_{N-2} + 2416\delta_{N-1} + 1191\delta_N + 120\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= U(x_{N-1}, 0), \\
\delta_{N-3} + 120\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} + 2416\delta_N + 1191\delta_{N+1} + 120\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= U(x_N, 0)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

olarak düzenlenir. Elde edilen bu sistem  $N + 1$  tane cebirsel denkleme ve  $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$  parametrelerinden oluşan  $N + 7$  tane bilinmeyene sahiptir. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 6 tane ek şarta ihtiyaç vardır. Bunun için başlangıç şartının (4.15) ile verilen sınır noktalarındaki türevleri kullanılır. Türevli sınır koşulları  $\delta_m$  parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
-\delta_{-3} - 56\delta_{-2} - 245\delta_{-1} + 245\delta_1 + 56\delta_2 + \delta_3 &= 0, \\
\delta_{-3} + 24\delta_{-2} + 15\delta_{-1} - 80\delta_0 + 15\delta_1 + 24\delta_2 + \delta_3 &= 0, \\
-\delta_{-3} - 8\delta_{-2} + 19\delta_{-1} - 19\delta_1 + 8\delta_2 + \delta_3 &= 0, \\
-\delta_{N-3} - 56\delta_{N-2} - 245\delta_{N-1} + 245\delta_{N+1} + 56\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= 0, \\
\delta_{N-3} + 24\delta_{N-2} + 15\delta_{N-1} - 80\delta_N + 15\delta_{N+1} + 24\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= 0, \\
-\delta_{N-3} - 8\delta_{N-2} + 19\delta_{N-1} - 19\delta_{N+1} + 8\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olarak elde edilir. Bu denklemlerden  $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})$  parametreleri

$$\begin{aligned}
\delta_{-3} &= \frac{1}{3}(-280\delta_0 + 105\delta_1 + 168\delta_2 + 10\delta_3), \\
\delta_{-2} &= \frac{220}{27}\delta_0 - \frac{55}{18}\delta_1 - \frac{35}{9}\delta_2 - \frac{11}{54}\delta_3, \\
\delta_{-1} &= -\frac{40}{27}\delta_0 + \frac{14}{9}\delta_1 + \frac{8}{9}\delta_2 + \frac{1}{27}\delta_3, \\
\delta_{N+1} &= -\frac{40}{27}\delta_N + \frac{14}{9}\delta_{N-1} + \frac{8}{9}\delta_{N-2} + \frac{1}{27}\delta_{N-3}, \\
\delta_{N+2} &= \frac{220}{27}\delta_N - \frac{55}{18}\delta_{N-1} - \frac{35}{9}\delta_{N-2} - \frac{11}{54}\delta_{N-3}, \\
\delta_{N+3} &= \frac{1}{3}(-280\delta_N + 105\delta_{N-1} + 168\delta_{N-2} + 10\delta_{N-3})
\end{aligned} \tag{4.18}$$



İlk aşamada, parametreler aşağıdaki gibi seçilir:

$$\alpha_0 = b_0, \quad \beta_0 = c_0, \quad \mu_0 = d_0, \quad \zeta_0 = \frac{e_0}{\mu_0}, \quad \lambda_0 = \frac{f_0}{\mu_0}, \quad \eta_0 = \frac{g_0}{\mu_0}, \quad \gamma_0 = \frac{h_0}{\mu_0},$$

$$\alpha_1 = b_1, \quad \beta_1 = c_1, \quad \mu_1 = d_1 - \beta_1 \zeta_0, \quad \zeta_1 = \frac{e_1 - \beta_1 \lambda_0}{\mu_1}, \quad \lambda_1 = \frac{f_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1},$$

$$\eta_1 = \frac{g_1}{\mu_1}, \quad \gamma_1 = \frac{h_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1},$$

ve

$$\alpha_2 = b_2, \quad \beta_2 = c_2 - \alpha_2 \zeta_0, \quad \mu_2 = d_2 - \lambda_0 \alpha_2 - \beta_2 \zeta_1, \quad \zeta_2 = \frac{e_2 - \eta_0 \alpha_2 - \beta_2 \lambda_1}{\mu_2},$$

$$\lambda_2 = \frac{f_2 - \beta_2 \eta_1}{\mu_2}, \quad \eta_2 = \frac{g_2}{\mu_2}, \quad \gamma_2 = \frac{h_2 - \alpha_2 \gamma_0 - \beta_2 \gamma_1}{\mu_2}.$$

İkinci adımda, aşağıdaki parametreler bulunur:

$$\alpha_i = b_i - a_i \zeta_{i-3}, \quad \beta_i = c_i - a_i \lambda_{i-3} - \alpha_i \zeta_{i-2}, \quad \mu_i = d_i - a_i \eta_{i-3} - \lambda_{i-2} \alpha_i - \beta_i \zeta_{i-1},$$

$$\zeta_i = \frac{e_i - \eta_{i-2} \alpha_i - \beta_i \lambda_{i-1}}{\mu_i}, \quad \lambda_i = \frac{f_i - \beta_i \eta_{i-1}}{\mu_i}, \quad \eta_i = \frac{g_i}{\mu_i},$$

$$\gamma_i = \frac{h_i - \beta_i \gamma_{i-1} - \alpha_i \gamma_{i-2} - a_i \gamma_{i-3}}{\mu_i}, \quad i = 3, 4, \dots, N.$$

Son olarak çözüm,

$$\delta_i = \gamma_i - \zeta_i \delta_{i+1} - \lambda_i \delta_{i+2} - \eta_i \delta_{i+3}, \quad i = 0, 1, \dots, N-4, N-3,$$

$$\delta_{N-2} = \gamma_{N-2} - \lambda_{N-2} \delta_N - \eta_{N-2} \delta_{N-1}, \quad \delta_{N-1} = \gamma_{N-1} - \eta_{N-1} \delta_N, \quad \delta_N = \gamma_N.$$

olarak hesaplanır.

#### 4.1.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal yöntemin lineer olarak kararlı olup-olmadığını tespit edebilmek için Von-Neumann kararlılık analizi kullanılacaktır. Öncelikle, GRLW denkleminin  $U^p U_x$  lineer olmayan terimindeki  $U^p$  teriminin bölgesel olarak sabit olduğu kabul edilir. Daha sonra  $k$  mod numarası ve  $h$  eleman genişliği olmak üzere,

$$\delta_m^n = \xi^n e^{imkh} \quad (i = \sqrt{-1})$$

ile verilen Fourier mod, (4.10) ile verilen denklem de uygulanarak, aşağıdaki form elde edilir:

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \xi^{n+1} e^{i(m-3)kh} + \gamma_2 \xi^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_3 \xi^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \xi^{n+1} e^{imkh} \\ & + \gamma_5 \xi^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_6 \xi^{n+1} e^{i(m+2)kh} + \gamma_7 \xi^{n+1} e^{i(m+3)kh} = \\ & \gamma_7 \xi^n e^{i(m-3)kh} + \gamma_6 \xi^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_5 \xi^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \xi^n e^{imkh} \\ & + \gamma_3 \xi^n e^{i(m+1)kh} + \gamma_2 \xi^n e^{i(m+2)kh} + \gamma_1 \xi^n e^{i(m+3)kh}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

$e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$  Euler formülü (4.19) ile verilen denklem de yerine yazılır ve gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa büyüme faktörü olan  $\xi$ ,

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib}$$

olarak edilir. Burada,

$$a = \gamma_4 + (\gamma_5 + \gamma_3) \cos[hk] + (\gamma_6 + \gamma_2) \cos[2hk] + (\gamma_7 + \gamma_1) \cos[3hk],$$

$$b = (\gamma_5 - \gamma_3) \sin[hk] + (\gamma_6 - \gamma_2) \sin[2hk] + (\gamma_7 - \gamma_1) \sin[3hk].$$

$|\xi|$  nin modülü 1 dir. Bu yüzden lineerleştirilmiş algoritma şartsız kararlıdır.

#### 4.1.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Bu bölümde sayısal yöntem, başlangıç şartının farklı değerleri kullanılarak oluşturulan tek solitary dalga, iki solitary dalga arasındaki ilişki ve Maxwellian başlangıç şartını içeren üç test problemi üzerinde çalışılmıştır. Sayısal yöntemin doğruluğunu göstermek ve daha önceki sayısal sonuçlarla elde edilen sonuçları karşılaştırabilmek için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları,

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|$$

ile verilen normlar kullanılarak elde edilmiştir. Gardner ve arkadaşları [37] tarafından yapılan çalışmada, GRLW denkleminin tam çözümü,

$$U(x,t) = \sqrt[2p]{\frac{c(p+2)}{2p} \sec h^2 \left[ \frac{p}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}} (x - (c+1)t - x_0) \right]} \quad (4.20)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Burada  $gen. = \sqrt[2p]{\frac{c(p+2)}{2p}}$  dalganın genliği,  $c+1$  pozitif  $x$  yönünde hareket eden dalganın sabit hızı ve  $x_0$  keyfi sabittir.

Sayısal algoritmanın kütle, momentum ve enerjisi ile ilgili özelliklerini koruduğunu göstermek için,

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu U_x^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b [U^4 - \mu U_x^2] dx \quad (4.21)$$

parametrelerindeki değişim hesaplanmıştır.

#### 4.1.3.1 Tek solitary dalganın hareketi

Bu problem için korunum sabitleri ve hata normları, normal ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği uygulanarak elde edilmiştir. Başlangıç şartı olarak (4.20) ile verilen denklem de  $t = 0$  alınması ile elde edilen fonksiyon kullanılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar, daha önce verilen [37, 40, 56] sonuçlarla karşılaştırılmıştır.  $p$ ,  $c$ ,  $h$ ,  $\Delta t$  ve  $gen.$  nin farklı değerleri;  $\mu = 1$ ,  $x_0 = 40$  ve  $0 \leq x \leq 100$  nin aynı değerleri alınarak altı farklı parametre kümesi inşa edilmiştir. Sayısal program  $t = 10$  veya  $t = 20$  anına kadar çalıştırılmıştır.

İlk durumda,  $p = 2$ ,  $c = 1$ ,  $h = 0.2$  ve  $\Delta t = 0.025$  parametre değerleri düşünüldü. Bu değerlere göre solitary dalga  $gen. = 1$  yüksekliğine sahip olur. Sayısal algoritma  $t = 10$  zamanına kadar çalıştırılmış ve elde edilen sonuçlar Tablo 4.1'de gösterilmiştir. Bu tablodan çıkarılabilir sonuç şudur: Normal lineerleştirme tekniği için hesaplanan korunum sabitleri  $t = 10$  zamanına kadar hemen hemen aynı kalmaktadır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için  $I_1 \times 10^3$ ,  $I_2 \times 10^3$  ve  $I_3 \times 10^3$  hareket sabitleri, sırasıyla 0.0001, 0.2 ve 0.2 değerlerinden daha küçük bulunmuştur. Ayrıca  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının büyüklüğü beklenildiği kadar küçüktür ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği ile elde edilenler normal lineerleştirme tekniğiyle elde edilenlerden hesaplama boyunca küçük kalmaktadır.

İkinci durumda,  $p = 2$ ,  $c = 0.3$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.01$  için solitary dalga  $gen. = 0.54772$  genliğine sahip olur. Sayısal sonuçlar  $t = 0$  dan  $t = 20$  zamanına kadar elde edilmiştir. Elde edilen değerler Tablo 4.2'de listelenmiştir. Tablo 4.2'ye göre normal lineerleştirme tekniği uygulanarak hesaplanan korunum sabitleri, zaman ilerledikçe hemen hemen değişmeden kalmaktadır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniği uygulandığında ise,  $I_1 \times 10^5$ ,  $I_2 \times 10^5$  ve  $I_3 \times 10^5$  sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişimi 0.03, 0.2 ve 0.2 değerlerinden daha küçük ölçülmüştür. Hata normları ise oldukça küçük bulunmuştur ve sayısal yöntem için Rubin-Graves lineerleştirme tekniği daha etkili bulunmuştur.

Üçüncü olarak, eğer  $p = 3$ ,  $c = 6/5$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.025$  olarak seçildi. Solitary dalga  $gen. = 1$  büyüklüğüne sahip olur. Deneyler  $t = 10$  zamanına kadar yapılmıştır. Bu parametre değerleri için korunum sabitleri ve hata normaları Tablo 4.3'de sunulmuştur. Bu tablodan gözlemlendiği gibi korunum sabitleri için normal lineerleştirme tekniği ile elde edilen sonuçlar daha iyidir.  $I_1 \times 10^3$ ,  $I_2 \times 10^3$  ve  $I_3 \times 10^3$  hareket sabitlerinin Rubin-Graves lineerleştirme tekniği ile elde edilen sonuçları ise, sırasıyla 0.06, 0.2 ve 0.2 değerlerinden daha küçük kalmaktadır.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları değerlendirildiğinde ise, Rubin-Graves ile

elde edilen sayısal sonuç daha iyi olmakla beraber, elde edilen norm değerleri hesaplama süresince oldukça küçük bulunmuştur. Bir dalganın hareketi Şekil 4.1’de çizilmiştir. Bu şekilden anlaşıldığı gibi zaman ilerledikçe dalga beklendiği gibi sağa doğru sabit hız ve hemen hemen değişmeyen genlikle hareket etmektedir. Bu ise solitary dalga tanımına uygundur.

Dördüncü durumda,  $p = 3$ ,  $c = 0.3$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.01$  parametre değerleri alındı. Böylece dalga  $gen. = 0.6$  genliğine sahip olur. Çözümler  $t = 10$  anına kadar elde edilmiştir ve sonuçlar Tablo 4.4’te sunulmuştur. Bu tabloya göre, normal lineerleştirme tekniği ile elde edilen hareket sabitleri, hesaplama süresince hemen hemen değişmeden kalmaktadır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniğine göre  $I_1 \times 10^5$ ,  $I_2 \times 10^5$  ve  $I_3 \times 10^5$  sabitlerinde meydana gelen değişim 0.02, 0.2 ve 0.2 den küçük bulunmuştur. Buna ilaveten, hata norm değerleri beklendiği gibi küçüktür ve Rubin-Graves ile uygulaması daha etkilidir.

$p = 4$ ,  $c = 4/3$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.025$  olarak seçildi. Solitary dalganın yüksekliği  $gen. = 1$  olur. Bu parametrelere göre hesaplamalar  $t = 10$  anına kadar çalıştırılmıştır. Sonuçlar Tablo 4.5’te verilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranı %0.004 ve daha küçüktür.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ise, hesaplama boyunca  $0.34 \times 10^{-2}$  den daha küçük ölçülmüştür. Şekil 4.2’de elde edilen sayısal sonuçların bir dalga hareketi oluşturduğu görülmektedir. Bu dalgalar, zaman ilerledikçe sabit hızda ve büyüklüklerini muhafaza ederek ilerleyen solitary dalgadır.

Son olarak,  $p = 4$ ,  $c = 0.3$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.01$  parametreleri için dalga  $gen. = 0.6$  genliğine sahiptir. Bilgisayar programı  $t = 10$  anına kadar çalıştırılmış ve hesaplamalar Tablo 4.6’da listelenmiştir. Diğer parametre değerlerinde de olduğu gibi, normal lineerleştirme tekniği ile elde edilen korunum sabitleri hemen hemen değişmeden kalmaktadır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniği ile elde edilen hareket sabitlerindeki değişim oranı %0.0003 den daha küçük hesaplanmıştır.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ise hesaplama boyunca, sırasıyla  $0.13 \times 10^{-3}$  ve  $0.63 \times 10^{-4}$  den daha küçük ölçülmüştür.

Tablo 4.7’de korunum sabitleri ve hata normları  $t = 10$  anında farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu sonuçlara göre korunum sabitleri diğer çalışmalarda elde edilen sonuçlara yakındır.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının büyüklükleri ise, diğer çalışmalardan daha küçüktür ve sırasıyla  $2.58 \times 10^{-3}$  ve  $1.35 \times 10^{-3}$  den daha küçük bulunmuştur.

Tablo 4.1 Tek solitary dalganın  $p = 2$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

$t$		0	2	4	6	8	9	10
$I_1$	Normal	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661
	Rub.-Grav.	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661
$I_2$	Normal	3.2998227	3.2998227	3.2998227	3.2998227	3.2998227	3.2998227	3.2998227
	Rub.-Grav.	3.2998227	3.2997808	3.2997415	3.2997248	3.2997180	3.2997162	3.2997151
$I_3$	Normal	1.4142046	1.4142046	1.4142045	1.4142045	1.4142045	1.4142045	1.4142045
	Rub.-Grav.	1.4142046	1.4142465	1.4142858	1.4143025	1.4143093	1.4143111	1.4143122
$L_2 \times 10^3$	Normal	0.00000000	0.60716949	1.14063868	1.64433340	2.13954492	2.38609516	2.63246332
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.56248008	1.08566992	1.58675627	2.08032250	2.32602024	2.57148152
$L_\infty \times 10^3$	Normal	0.00000000	0.36598695	0.63405702	0.88886854	1.14126892	1.26720221	1.39306406
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.31854916	0.58528925	0.83879372	1.08975930	1.21494581	1.34021078

Tablo 4.2 Tek solitary dalganın  $p = 2$ ,  $gen. = 0.54772$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

$t$		0	4	8	12	16	18	20
$I_1$	Normal	3.5820205	3.5820205	3.5820205	3.5820206	3.5820205	3.5820205	3.5820204
	Rub.-Grav.	3.5820205	3.5820205	3.5820205	3.5820206	3.5820206	3.5820205	3.5820204
$I_2$	Normal	1.3450941	1.3450941	1.3450941	1.3450941	1.3450941	1.3450941	1.3450941
	Rub.-Grav.	1.3450941	1.3450945	1.3450949	1.3450952	1.3450954	1.3450955	1.3450956
$I_3$	Normal	0.1537283	0.1537283	0.1537283	0.1537283	0.1537283	0.1537283	0.1537283
	Rub.-Grav.	0.1537283	0.1537280	0.1537275	0.1537272	0.1537270	0.1537269	0.1537268
$L_2 \times 10^4$	Normal	0.00000000	0.23672179	0.47619933	0.71790890	0.96089487	1.08268831	1.20462362
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.23418686	0.47177441	0.71193992	0.95355112	1.07469409	1.19599766
$L_\infty \times 10^4$	Normal	0.00000000	0.09872538	0.20175604	0.30567565	0.40978331	0.46185354	0.51392349
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.09904113	0.20198201	0.30544405	0.40924890	0.46114976	0.51304090

Tablo 4.3 Tek solitary dalganın  $p = 3$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

$t$		0	2	4	6	8	9	10
$I_1$	Normal	3.7971850	3.7971850	3.7971850	3.7971850	3.7971850	3.7971850	3.7971850
	Rub.-Grav.	3.7971850	3.7971746	3.7971643	3.7971539	3.7971436	3.7971385	3.7971333
$I_2$	Normal	2.8812522	2.8812522	2.8812522	2.8812522	2.8812522	2.8812522	2.8812522
	Rub.-Grav.	2.8812523	2.8811910	2.8811373	2.8811139	2.8811003	2.8810949	2.8810899
$I_3$	Normal	0.9729661	0.9730958	0.9731319	0.9731417	0.9731447	0.9731453	0.9731457
	Rub.-Grav.	0.9729661	0.9730274	0.9730811	0.9731045	0.9731181	0.9731235	0.9731285
$L_2 \times 10^3$	Normal	0.00000000	1.90329843	3.69133655	5.45488983	7.21419106	8.09357939	8.97298352
	Rub.-Grav.	0.00000000	1.53511864	3.06287331	4.60591335	6.17668280	6.97351539	7.77816967
$L_\infty \times 10^3$	Normal	0.00000000	1.16955458	2.17410995	3.17420400	4.17483173	4.67535458	5.17598210
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.88908301	1.75051811	2.62846490	3.52598420	3.98164296	4.44187369



Tablo 4.4 Tek solitary dalganın  $p = 3$ ,  $gen. = 0.6$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

$t$		0	2	4	6	8	9	10
$I_1$	Normal	3.6776069	3.6776069	3.6776069	3.6776069	3.6776070	3.6776070	3.6776070
	Rub.-Grav.	3.6776069	3.6776070	3.6776070	3.6776070	3.6776069	3.6776069	3.6776069
$I_2$	Normal	1.5657604	1.5657604	1.5657604	1.5657604	1.5657604	1.5657604	1.5657604
	Rub.-Grav.	1.5657604	1.5657607	1.5657612	1.5657615	1.5657618	1.5657619	1.5657620
$I_3$	Normal	0.2268462	0.2268462	0.2268462	0.2268462	0.2268462	0.2268462	0.2268462
	Rub.-Grav.	0.2268462	0.2268459	0.2268455	0.2268451	0.2268448	0.2268447	0.2268446
$L_2 \times 10^4$	Normal	0.00000000	0.17328588	0.34661331	0.52006829	0.69360491	0.78037511	0.86713653
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.15717557	0.31406200	0.47113473	0.62819930	0.70668688	0.78513671
$L_\infty \times 10^4$	Normal	0.00000000	0.08009713	0.15772492	0.23706868	0.31711953	0.35713873	0.39714589
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.07211019	0.14548091	0.21877988	0.29201943	0.32854583	0.36501241

Tablo 4.5 Tek solitary dalganın  $p = 4$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

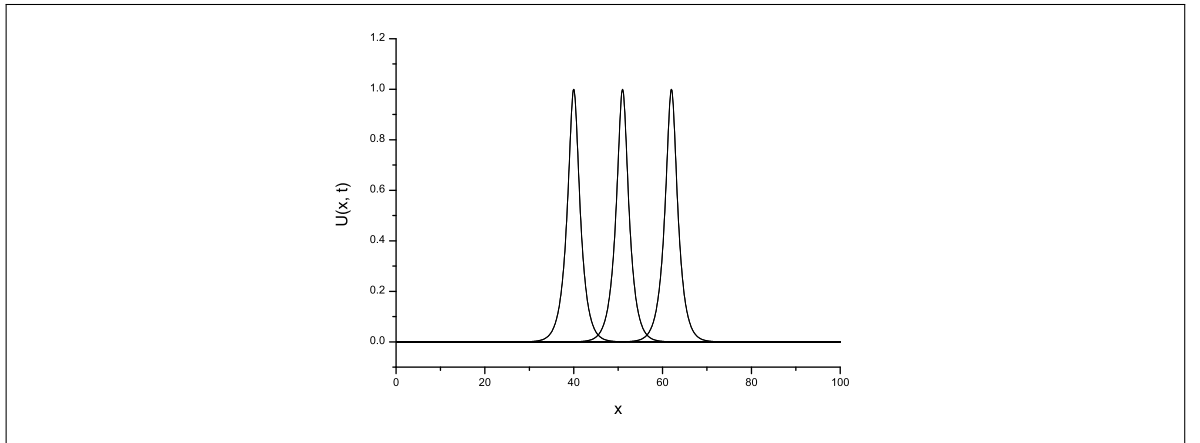
$t$		0	2	4	6	8	9	10
$I_1$	Normal	3.4687090	3.4687090	3.4687090	3.4687090	3.4687090	3.4687090	3.4687090
	Rub.-Grav.	3.4687090	3.4687016	3.4686942	3.4686868	3.4686793	3.4686756	3.4686719
$I_2$	Normal	2.6716961	2.6716961	2.6716961	2.6716961	2.6716961	2.6716961	2.6716961
	Rub.-Grav.	2.6716961	2.6716916	2.6716801	2.6716720	2.6716648	2.6716614	2.6716580
$I_3$	Normal	0.7291997	0.7292453	0.7292551	0.7292575	0.7292582	0.7292583	0.7292584
	Rub.-Grav.	0.7291998	0.7292043	0.7292158	0.7292239	0.7292311	0.7292345	0.7292379
$L_2 \times 10^3$	Normal	0.00000000	0.68380580	1.35202774	2.01856221	2.68509298	3.01840343	3.35174007
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.47718681	0.98480922	1.52387541	2.09512659	2.39288065	2.69870907
$L_\infty \times 10^3$	Normal	0.00000000	0.43263300	0.83440039	1.24065060	1.64702738	1.84815798	2.04973389
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.29861347	0.60821892	0.93545672	1.28679533	1.46559601	1.65600236

Tablo 4.6 Tek solitary dalganın  $p = 4$ ,  $gen. = 0.6$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

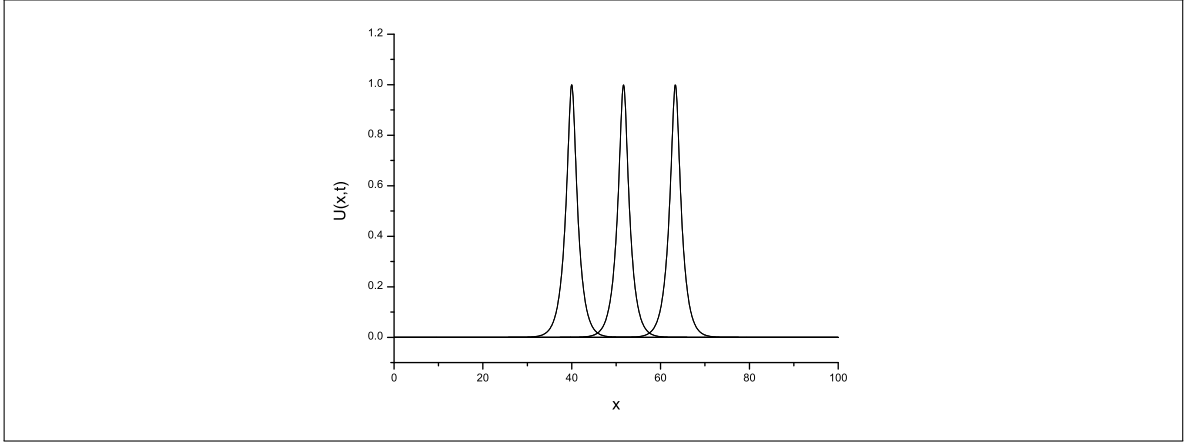
$t$		0	2	4	6	8	9	10
$I_1$	Normal	3.7592865	3.7592865	3.7592865	3.7592865	3.7592865	3.7592865	3.7592865
	Rub.-Grav.	3.7592865	3.7592865	3.7592865	3.7592864	3.7592864	3.7592864	3.7592863
$I_2$	Normal	1.7300238	1.7300238	1.7300238	1.7300238	1.7300238	1.7300238	1.7300238
	Rub.-Grav.	1.7300239	1.7300244	1.7300250	1.7300254	1.7300256	1.7300258	1.7300259
$I_3$	Normal	0.2894189	0.2894191	0.2894192	0.2894192	0.2894192	0.2894192	0.2894192
	Rub.-Grav.	0.2894189	0.2894183	0.2894178	0.2894174	0.2894171	0.2894170	0.2894169
$L_2 \times 10^4$	Normal	0.00000000	0.25417530	0.50867400	0.76378746	1.01967310	1.14789286	1.27628477
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.19937853	0.39600506	0.59159317	0.78622772	0.88322868	0.98004530
$L_\infty \times 10^4$	Normal	0.00000000	0.13193138	0.25511505	0.37848569	0.50227119	0.56431519	0.62645346
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.09833776	0.19527926	0.29108460	0.38611041	0.43351464	0.48083798

Tablo 4.7 Tek solitary dalganın  $p = 2,3,4$ ;  $t = 10$  ve  $x \in [0,100]$  için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

$p$		2	3	4
		$gen. = 1, h = 0.2, \Delta t = 0.025$	$gen. = 0.6, h = 0.1, \Delta t = 0.01$	$gen. = 0.6, h = 0.1, \Delta t = 0.01$
$I_1$	CBSC+PA-CN [37]	4.44000000		
	CBSC-CN [37]	4.44200000		
	CBSC [40]	4.44288000		
	QBSPG [56]	4.44288000	3.67755000	3.75923000
	SBSC	4.44286610	3.67760690	3.75928630
$I_2$	CBSC+PA-CN [37]	3.29600000		
	CBSC-CN [37]	3.29900000		
	CBSC [40]	3.29983000		
	QBSPG [56]	3.29981000	1.56574000	1.72999000
	SBSC	3.29971510	1.56576200	1.73002590
$I_3$	CBSC+PA-CN [37]	1.41100000		
	CBSC-CN [37]	1.41300000		
	CBSC [40]	1.41420000		
	QBSPG [56]	1.41416000	0.22683700	0.28940600
	SBSC	1.41431220	0.22684460	0.28941690
$L_2 \times 10^3$	CBSC+PA-CN [37]	20.30000000		
	CBSC-CN [37]	16.39000000		
	CBSC [40]	9.30196000		
	QBSPG [56]	3.00533000	0.07197600	0.12253900
	SBSC	2.57148152	0.07851367	0.09800453
$L_\infty \times 10^3$	CBSC+PA-CN [37]	11.20000000		
	CBSC-CN [37]	9.24000000		
	CBSC [40]	5.43718000		
	QBSPG [56]	1.68749000	0.03772280	0.06620700
	SBSC	1.34021078	0.03650124	0.04808379



Şekil 4.1 Tek solitary dalganın  $p = 3$ ,  $gen. = 1$ ,  $x_0 = 40$ ,  $x \in [0,100]$  için  $t = 0, 5, 10$ 'daki hareketi



Şekil 4.2 Tek solitary dalganın  $p = 4$ ,  $gen. = 1$ ,  $x_0 = 40$ ,  $x \in [0, 100]$  için  $t = 0, 5, 10$ 'daki hareketi

#### 4.1.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi

Bu problem için, aynı yönde pozitif  $gen. = 2$  ve  $gen. = 1$  genliklerine sahip iki solitary dalga arasındaki etkileşim,

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\frac{c_i(p+2)}{2p}} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{p}{2} \sqrt{\frac{c_i}{\mu(c_i+1)}} (x - x_i) \right] \quad (4.22)$$

ile verilen başlangıç şartı kullanılarak çalışılmıştır. Burada  $i = 1, 2$  olmak üzere,  $c_i$  ve  $x_i$  keyfi sabitlerdir.  $p$  ve  $c_i$  nin farklı değerleri için üç farklı parametre kümesi oluşturulmuştur.

İlk durumda,  $p = 2$ ,  $c_1 = 4$ ,  $c_2 = 1$ ,  $x_1 = 25$ ,  $x_2 = 55$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $\mu = 1$  ve  $0 \leq x \leq 250$  parametre kümesi seçildi. Sayısal program  $t = 0$  dan  $t = 20$  zamanına kadar çalıştırılmıştır.  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitlerinin sayısal değeri, Tablo 4.8'de sunulmuştur. Bu tabloya göre  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişim oranı, sırasıyla %0.00002, %0.00004 ve %0.5 den daha küçüktür. Ayrıca elde edilen sonuçlar quintik B-spline Petrov-Galerkin yöntemi [56] ile elde edilen sonuçlara çok yakın bulunmuştur.

İkinci şart olarak  $p = 3$ ,  $c_1 = 48/5$ ,  $c_2 = 6/5$ ,  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 50$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\mu = 1$  ve  $0 \leq x \leq 120$  parametre değerleri alındı. Sayısal hesaplamalar  $t = 6$  anına kadar yapılmıştır. Korunum sabitlerinin sayısal değeri, Tablo 4.9'da verilmiştir. Bu tablodan gözlemlendiği gibi korunum sabitlerindeki değişim oranı, normal lineerleştirme tekniği için daha küçüktür ve bu değişim oranı Roshan'ın elde ettiği sonuçlara [56] yakındır. Şekil 4.3'te, iki solitary dalganın farklı zamanlardaki hareketi çizilmiştir. Bu şekle göre başlangıç anında genliği büyük olan dalga genliği küçük olan dalganın solundadır. Zaman ilerledikçe genliği büyük olan dalga, küçük genlikli dalgayı yakalar.  $t = 3$  zamanı civarında bir dalga diğer dalganın

üzerine biner.  $t = 5$  anında dalgalar ayrılmaya başlar.  $t = 6$  anında ise dalgalar belirgin olarak ayrılır ve büyük genlikli dalga önde, küçük genlikli dalga arkada başlangıç şekil, hız ve büyüklüklerini koruyarak yollarına devam eder. Sonuç olarak, iki solitary dalga aynı yönde ilerlerken etkileşim gerçekleşir ve çarpışmadan sonra başlangıç şekillerine dönerek uzun mesafe yol alabilir. Yani bu dalgalar solitonlardır.

Son olarak,  $p = 4$ ,  $c_1 = 64/3$ ,  $c_2 = 4/3$ ,  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 80$ ,  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\mu = 1$  ve  $0 \leq x \leq 200$  değerleri düşünüldü. Bilgisayar programı  $t = 6$  anına kadar çalıştırılmıştır ve korunum sabitlerinin sayısal değeri Tablo 4.10'da gösterilmiştir. Korunum sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişimi yeterince küçüktür ve bu sayısal değerler Roshan'ın elde ettiği sonuçlarla [56] uyumludur. Diğer taraftan, sayısal yöntem uygulanarak elde edilen iki solitary dalganın hareketi Şekil 4.4'te gösterilmiştir. Büyük genlikli solitary dalga  $t = 0$  da küçük genlikli dalganın solundadır. Zamanla gerideki dalga öndeki dalgayı yakalar ve etkileşim başlar. Daha sonra bu iki dalga ayrılır ve başlangıç formlarını koruyarak yollarına devam eder. Bu yüzden solitary dalgalar solitonlardır.

Tablo 4.8 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 2$ ,  $gen. = 2, 1$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 250]$  için korunum sabitleri

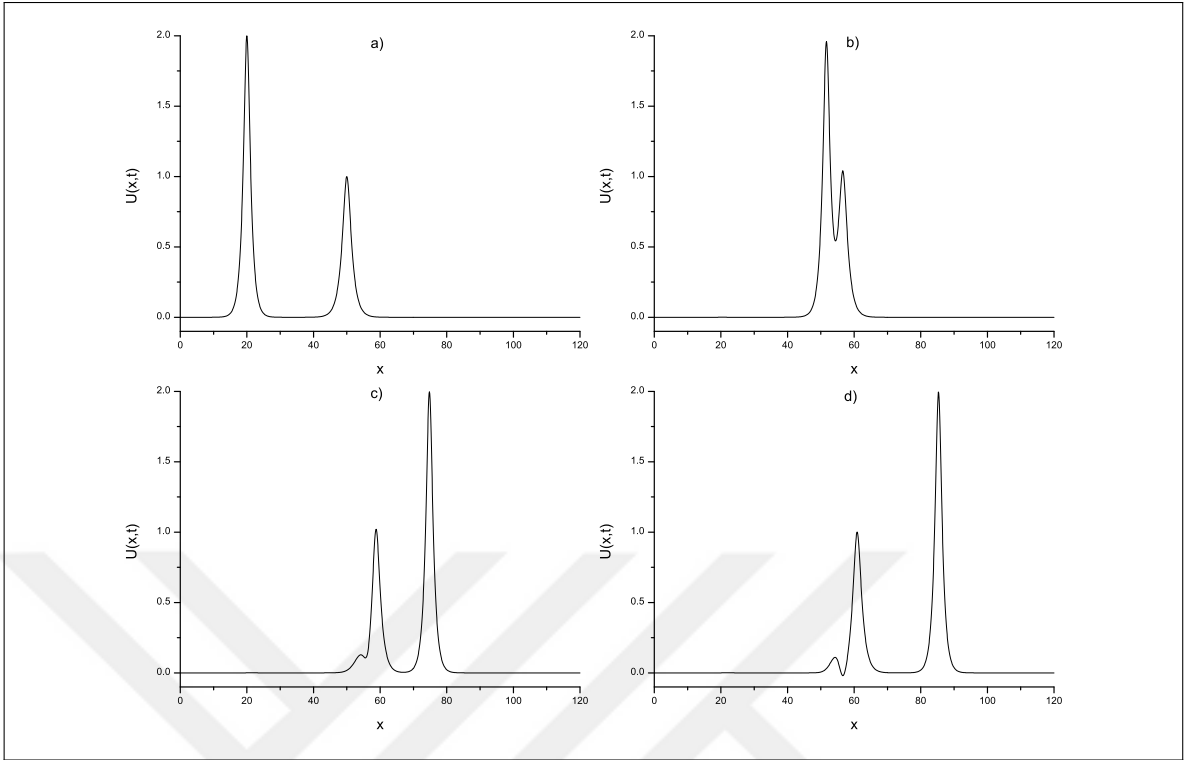
$t$		0	4	8	12	16	18	20
$I_1$	Normal	11.4676542	11.4676542	11.4676542	11.4676542	11.4676541	11.4676541	11.4676541
	Rub.-Grav.	11.4676542	11.4676484	11.4668849	11.4676777	11.4676555	11.4676490	11.4676452
	QBSPG [56]	11.4677000	11.4677000	11.4677000	11.4677000	11.4677000	11.4677000	11.4677000
$I_2$	Normal	14.6292089	14.6292088	14.6292088	14.6292087	14.6292087	14.6292087	14.6292086
	Rub.-Grav.	14.6292089	14.6277880	14.1400014	14.6803731	14.6442435	14.6350836	14.6309639
	QBSPG [56]	14.6286000	14.6292000	14.6229000	14.6299000	14.6295000	14.6296000	14.6299000
$I_3$	Normal	22.8803575	22.8803204	22.8759840	22.8803706	22.8803978	22.8803925	22.8803901
	Rub.-Grav.	22.8803575	22.8817784	23.3695650	22.8291933	22.8653229	22.8744828	22.8786025
	QBSPG [56]	22.8788000	22.8811000	22.8798000	22.8803000	22.8805000	22.8807000	22.8806000

Tablo 4.9 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 3$ ,  $gen. = 2, 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 120]$  için korunum sabitleri

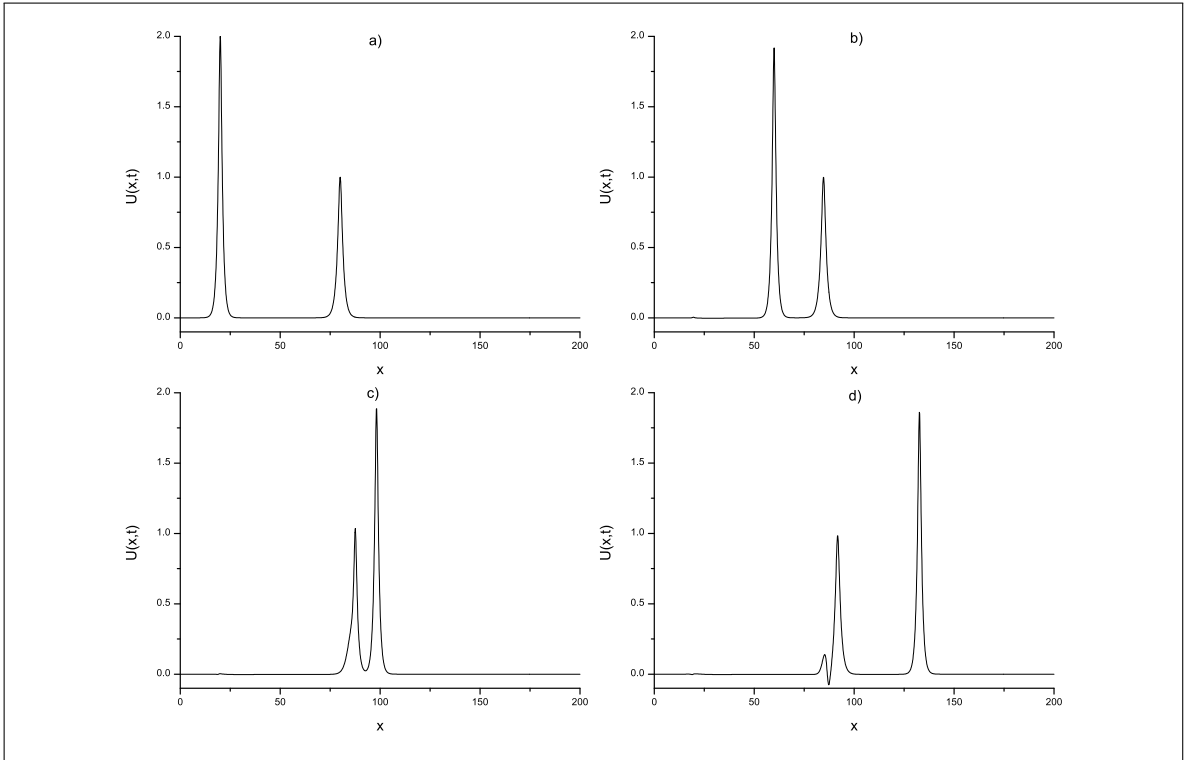
$t$		0	1	2	3	4	5	6
$I_1$	Normal	9.6907772	9.6907774	9.6907776	9.6907778	9.6907778	9.6907780	9.6907782
	Rub.-Grav.	9.6907772	9.6894501	9.6881175	9.6850972	9.6860154	9.6847993	9.6834620
	QBSPG [56]	9.6907500	9.6907400	9.6907400	9.6907400	9.6907400	9.6907400	9.6907400
$I_2$	Normal	12.9443914	12.9443919	12.9443925	12.9443930	12.9443932	12.9443937	12.9443943
	Rub.-Grav.	12.9443914	12.9432906	12.9390629	12.3046064	12.9703128	13.0538036	13.0027533
	QBSPG [56]	12.9444000	12.9459000	12.9452000	12.9379000	12.9453000	12.9457000	12.9454000
$I_3$	Normal	17.0186758	17.0236820	17.0256746	17.9687428	16.9816963	16.9181837	16.9520240
	Rub.-Grav.	17.0186758	17.0197766	17.0240043	17.6584608	16.9927544	16.9092637	16.9603139
	QBSPG [56]	17.0184000	16.9819000	16.9835000	17.0591000	16.9261000	16.8781000	16.9113000

Tablo 4.10 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 4$ ,  $gen. = 2, 1$ ,  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 200]$  için korunum sabitleri

$t$		0	1	2	3	4	5	6
$I_1$	Normal	8.8342728	8.8342136	8.8341602	8.8341068	8.8340534	8.8340001	8.8339467
	Rub.-Grav.	8.8342728	8.6690235	8.5641864	8.4846626	8.4354647	8.3773932	8.3271616
	QBSPG [56]	8.8342700	8.8342700	8.8420400	8.8420500	8.8420900	8.8342100	8.8343400
$I_2$	Normal	12.1708877	12.1707034	12.1705372	12.1703713	12.1702053	12.1700395	12.1698737
	Rub.-Grav.	12.1708877	12.0300916	11.9395989	11.8340526	11.9770970	11.9162211	11.8147229
	QBSPG [56]	12.1697000	12.3179000	12.3700000	12.4530000	12.5703000	12.6304000	12.6103000
$I_3$	Normal	14.0294238	14.4197656	14.4134423	14.3841812	14.3516241	14.3210739	14.2929015
	Rub.-Grav.	14.0294238	14.1702200	14.2607126	14.3662589	14.2232145	14.2840904	14.3855886
	QBSPG [56]	14.0302000	13.8420000	13.9607000	14.0887000	13.9805000	14.2357000	14.6974000



Şekil 4.3 İki solitary dalganın  $p = 3$ ; a)  $t = 0$ , b)  $t = 3$ , c)  $t = 5$ , d)  $t = 6$ 'daki hareketi



Şekil 4.4 İki solitary dalganın  $p = 4$ ; a)  $t = 0$ , b)  $t = 2$ , c)  $t = 4$ , d)  $t = 6$ 'daki hareketi

### 4.1.3.3 Maxwellian başlangıç şartı

Son olarak, (4.1) ile verilen denklem aşağıdaki Maxwellian başlangıç şartı ile beraber düşünüldü:

$$U(x, 0) = \text{Exp}(-x^2), \quad -20 \leq x \leq 60. \quad (4.23)$$

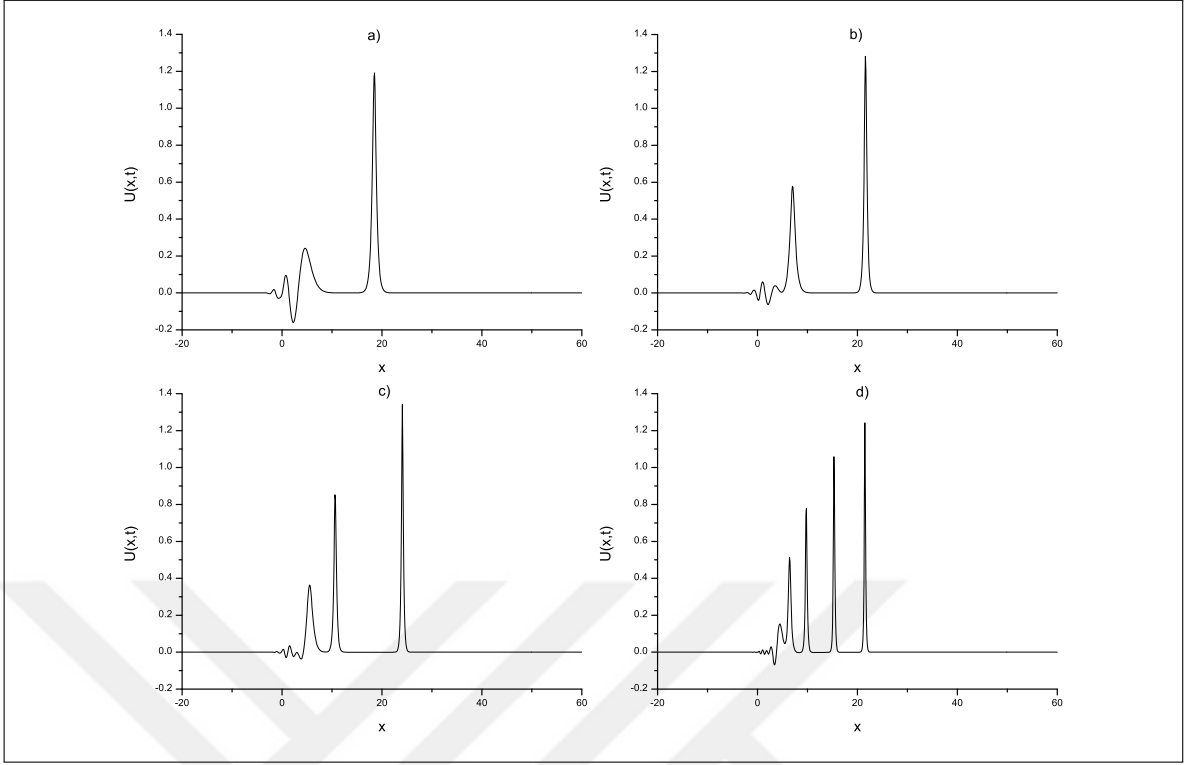
Bu durumda çözümün davranışının  $\mu$  değerine bağlı olarak değiştiği bilinmektedir. Bu yüzden,  $\mu = 0.01$ ,  $\mu = 0.025$ ,  $\mu = 0.05$ ,  $\mu = 0.1$  ve  $p = 2, 3, 4$ . parametre değerlerine göre dalganın oluşumu incelenmiştir. Sayısal algoritma  $t = 6$  anına kadar çalıştırılmıştır. Hareket sabitlerinin sayısal değerleri farklı  $\mu$  değerleri için Tablo 4.11'de sunulmuştur.  $I_1 \times 10^2$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  sabitlerinin hesaplama süresince değişimi, sırasıyla  $p = 2$  için 0.0001, 0.1 ve 0.1;  $p = 3$  için 0.0005, 0.2 ve 0.2;  $p = 4$  için 0.2, 0.3 ve 0.3 olarak ölçülmüştür. Elde edilen sayısal sonuçlar ile Petrov-Galerkin yöntemi [56] ile elde edilen sonuçlar arasındaki fark  $t = 6$  zamanında çok küçüktür.

Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da, Maxwellian başlangıç şartına göre solitary dalgaların oluşumu çizilmiştir. Bu şekillerde görüldüğü gibi  $\mu = 0.1$  değeri için sadece bir tane kararlı dalga ve yanında bir kaç tane küçük belirsiz dalga oluşur.  $\mu = 0.05$  olduğu zaman, iki tane kararlı solitary dalga oluşur. Üç ve dört tane kararlı dalga ise, sırasıyla  $\mu = 0.025$  ve  $\mu = 0.01$  parametre değerlerinde oluşur. Yine bu dalgaların yanında bir kaç tane belirsiz dalga oluşmuştur. Buradan şunu söyleyebiliriz: Eğer  $\mu$  değeri azaltılırsa, oluşan kararlı solitary dalga sayısı artmaktadır.

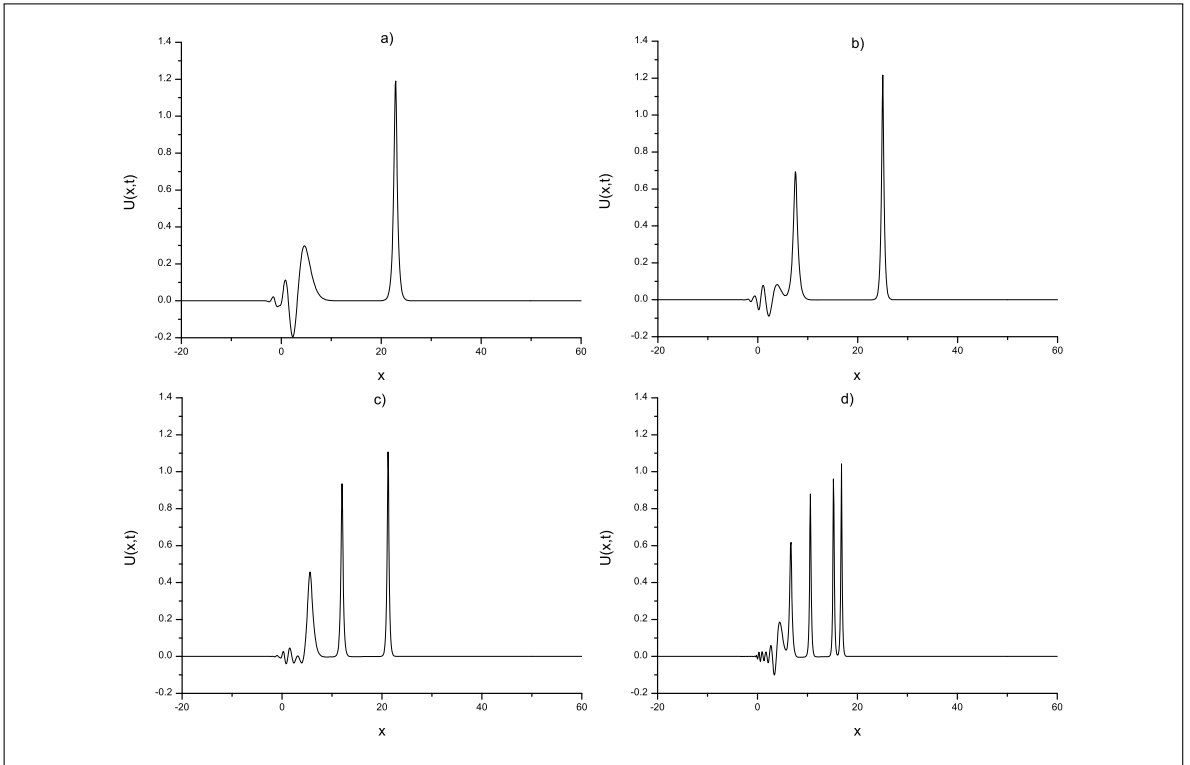
Tablo 4.11 Maxwellian başlangıç şartı ve  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [-20, 60]$  için korunum sabitleri

$\mu$	$t$	$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
		$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.1	0	1.772453	1.378645	0.760895	1.772453	1.378645	0.760895	1.772453	1.378645	0.760895
	2	1.772453	1.472878	0.666662	1.772452	1.548191	0.591349	1.772110	1.591837	0.547703
	4	1.772453	1.472838	0.666702	1.772451	1.546329	0.593211	1.771702	1.588948	0.550592
	6	1.772453	1.472598	0.666942	1.772449	1.545540	0.594000	1.771297	1.587779	0.551761
	QBSPG [56]	6	1.772450	1.380900	0.761900	1.772450	1.384330	0.599080	1.772450	1.389450
0.05	0	1.772453	1.315979	0.823561	1.772453	1.315979	0.823561	1.772453	1.315979	0.823561
	2	1.772453	1.457911	0.681630	1.772376	1.514843	0.624697	1.753662	1.535874	0.603666
	4	1.772453	1.456986	0.682554	1.772272	1.514131	0.625409	1.741625	1.528679	0.610862
	6	1.772453	1.455748	0.683792	1.772168	1.513035	0.626505	1.733910	1.523490	0.616050
	QBSPG [56]	6	1.772390	1.319510	0.825686	1.772480	1.323940	0.624720	1.772120	1.451680
0.025	0	1.772453	1.284646	0.854894	1.772453	1.284646	0.854894	1.772453	1.284646	0.854894
	2	1.772454	1.446475	0.693065	1.768943	1.502469	0.637071	1.693029	1.482414	0.657126
	4	1.772452	1.450770	0.688770	1.764956	1.501801	0.637740	1.682425	1.476250	0.663290
	6	1.772451	1.450891	0.688649	1.761477	1.498994	0.640546	1.674869	1.468703	0.670837
	QBSPG [56]	6	1.772380	1.290110	0.854909	1.772350	1.308060	0.635790	1.772490	1.296260
0.01	0	1.772453	1.265847	0.873693	1.772453	1.265847	0.873693	1.772453	1.265847	0.873693
	2	1.772512	1.438944	0.700596	1.720433	1.456451	0.683090	1.651315	1.437490	0.702051
	4	1.772403	1.443961	0.695579	1.706008	1.450265	0.689276	1.644999	1.439995	0.699545
	6	1.772190	1.443723	0.695817	1.700567	1.451593	0.687947	1.633634	1.431710	0.707830
	QBSPG [56]	6	1.772490	1.283150	0.892359	1.772450	1.276270	0.632880	1.756480	1.405770





Şekil 4.5 Maxwellian başlangıç şartı ve  $p = 3$ ,  $t = 6$ ; a)  $\mu = 0.1$ , b)  $\mu = 0.05$ , c)  $\mu = 0.025$ , d)  $\mu = 0.01$  değerleri için dalgaların oluşumu



Şekil 4.6 Maxwellian başlangıç şartı ve  $p = 4$ ,  $t = 6$ ; a)  $\mu = 0.1$ , b)  $\mu = 0.05$ , c)  $\mu = 0.025$ , d)  $\mu = 0.01$  değerleri için dalgaların oluşumu

## 4.2 GRLW Denkleminin Kuintik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü

GRLW denklemi,

$$U_t + U_x + p(p+1)U^p U_x - \mu U_{xx} = 0 \quad (4.24)$$

şeklinde tanımlanır. Burada fiziksel sınır şartları  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $U \rightarrow 0$ , alt indis  $t$  ve  $x$  zaman ve boyutsal türevi ifade eder,  $p$  pozitif tamsayıdır,  $\mu$  pozitif sabittir.

Sınır ve başlangıç şartları,

$$\begin{aligned} U(a,t) &= 0, & U_x(a,t) &= 0, \\ U(b,t) &= 0, & U_x(b,t) &= 0, \\ U(x,0) &= f(x), & a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (4.25)$$

olarak alınacaktır.

$[a, b]$  sonlu aralığına sınırlandırılmış çözüm bölgesini düşünelim. Aralık uzunluğu  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  ve  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  olmak üzere,  $[a, b]$  aralığı  $x_m$  düğüm noktalarıyla  $N$  tane eşit alt aralığa bölünür.  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturan  $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_{N+2}(x)\}$  kuintik B-spline fonksiyonları,  $x_m$  düğüm noktalarında,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}) \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}) \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m) \\ (x_{m+3} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5 + 15(x_{m+1} - x)^5, & [x_m, x_{m+1}) \\ (x_{m+3} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ (x_{m+3} - x)^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}) \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.26)$$

şeklinde tanımlanmıştır [78]. Her bir kuintik B-spline  $\phi_m$  fonksiyonu ardışık 6 tane sonlu alt aralığı örter. Bu yüzden her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu alt aralığı 6 adet B-spline fonksiyonu tarafından örtülür.  $U_N(x, t)$  global yaklaşımı, kuintik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (4.27)$$

olarak ifade edilir. Burada  $\delta_m(t)$ , zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir, sınır şartları ve GRLW denkleminin kuintik B-spline kollokasyon şartı kullanılarak belirlenecektir. (4.26)

ile verilen B-spline fonksiyonlar, (4.27) ile verilen yaklaşım fonksiyonunda kullanılarak, yaklaşım fonksiyonu  $U_m$  ve onun  $x$ 'e göre ikinci mertebeye kadar olan türevleri,  $x_m$  düğüm noktasında  $\delta_m$  bilinmeyen parametrelerine göre aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\ U'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ U''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Bu ifade ile birlikte  $U$  değişimi  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı üzerinde

$$U = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m \delta_m \quad (4.29)$$

olarak yeniden yazılabilir. (4.28) ile verile denklem de  $U_m$  ve onun  $x$ 'e göre türevleri, denklem (4.24) ile verilen GRLW denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \left( \dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2} \right) \\ & + \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ & + p(p+1)Z_m(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ & - \frac{20\mu}{h^2}(\dot{\delta}_{m-2} + 2\dot{\delta}_{m-1} - 6\dot{\delta}_m + 2\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

olarak çözüm yaklaşımının genel formu elde edilir. Burada  $Z_m$  lineer olmayan terimi ve bu terime Rubin-Graves lineerleştirme tekniği uygulanmış formu,

$$\begin{aligned} Z_m &\cong [(U_m)^{p-1}(U_m)_x]^{n+1} = (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^{n+1} + (U_m^{p-1})^{n+1} (U_m)_x^n - (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^n \\ &= (U_m^n)^{p-1} (U_m^{n+1})_x + (U_m^{n+1})^{p-1} (U_m)_x - (U_m^n)^{p-1} (U_m)_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_m &\cong (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^{n+1} - 10\delta_{m-1}^{n+1} + 10\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1}) \\ &+ (\delta_{m-2}^{n+1} + 26\delta_{m-1}^{n+1} + 66\delta_m^{n+1} + 26\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1})^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n) \\ &- (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n) \end{aligned}$$

şeklinde ve “.” zamana göre türevi ifade eder. (4.30) ile verilen genel çözüm denkleminde bulunan zamana göre bilinmeyen parametreleri  $\delta_m$  ve zamana göre türevleri  $\dot{\delta}_m$  katsayılarına sırasıyla,

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \quad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (4.31)$$

formülleri ile verilen Crank-Nicolson ve klasik ileri sonlu fark yaklaşımı uygulanır. Böylece  $\delta_i^{n+1}$  ve  $\delta_i^n$  bilinmeyen zaman parametrelerine göre iki ardışık zaman adımı  $n$  ve  $n+1$

arasındaki tekrarlıma bağıntısı,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\ & = \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_7 \delta_{m-1}^n + \gamma_8 \delta_m^n + \gamma_9 \delta_{m+1}^n + \gamma_{10} \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (4.32)$$

olarak hesaplanır. Buradaki  $\gamma$  katsayıları,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (1 - K + EZ_m - M), & \gamma_2 &= (26 - 10K + 26EZ_m - 2M), \\ \gamma_3 &= (66 + 66EZ_m + 6M), & \gamma_4 &= (26 + 10K + 26EZ_m - 2M), \\ \gamma_5 &= (1 + K + EZ_m - M), & \gamma_6 &= (1 + K - EZ_m - M), \\ \gamma_7 &= (26 + 10K - 26EZ_m - 2M), & \gamma_8 &= (66 - 66EZ_m + 6M), \\ \gamma_9 &= (26 - 10K - 26EZ_m - 2M), & \gamma_{10} &= (1 - K - EZ_m - M), \\ m &= 0, 1, \dots, N, & K &= \frac{5\Delta t}{2h}, & E &= \frac{p(p+1)\Delta t}{2}, & M &= \frac{20\mu}{h^2} \end{aligned} \quad (4.33)$$

şeklindedir.

(4.32) ile verilen cebirsel denklem sistemi  $N + 1$  tane lineer denklem ve  $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$  parametrelerinden oluşan  $N + 5$  tane bilinmeyenden oluşur. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 4 tane ek şarta ihtiyaç vardır. Gerekli 4 tane ek şart (4.25) ile verilen sınır şartları kullanılarak elde edilir. Sınır şartlarının cebirsel denklem sistemine basit bir şekilde dahil edilmesi olarak ifade edilen bu aşamanın benzeri, aşağıda iterasyonu başlatabilmek için  $d^0$  başlangıç değerinin belirlenmesi aşamasında verilmiştir. Bu işlemlerden sonra  $\delta_{-2}, \delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  parametreleri, (4.32) ile verilen cebirsel denklem sisteminden silinir. Bu durumda  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  olmak üzere,  $N + 1$  tane bilinmeyenli aşağıdaki cebirsel denklem sistemi (matris form) elde edilir:

$$A d^{n+1} = B d^n. \quad (4.34)$$

$A$  ve  $B$  matrisleri,  $(N + 1) \times (N + 1)$  boyutlu 5 sütun elemanlı matrislerdir (penta-diagonal matris olarak adlandırılır) ve bu matris denklemini aşağıda alt bölüm 4.2.1'de açıklandığı gibi Fortran programında Thomas algoritması (penta-diagonal algoritma) kullanılarak çözülmüştür. Çözüm aşamasında, lineer olmayan terim  $Z_m$  deki eleman parametresine,

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

formülü ile verilen iç iterasyon her bir zaman adımında üç veya dört defa uygulanarak çözüm iyileştirilmiştir.

## Başlangıç iterasyonu

(4.32) ile verilen tekrarlar bağıntısında iterasyonu başlatılabilmek için,  $d^0$  başlangıç değeri (4.35) ile verilen başlangıç şartları kullanılarak hesaplanmalıdır. Yaklaşık çözümün başlangıç şartı,

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m^0(t)$$

şeklindedir. Başlangıç şartı ve sınır noktalarındaki türevleri,

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) &= U(x_m, 0); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(a, 0) = 0, \\ (U_N)_x(b, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(b, 0) = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

olarak verilir. Başlangıç şartı  $\delta_m$  parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned} \delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2 &= U(x_0, 0), \\ \delta_{-1} + 26\delta_0 + 66\delta_1 + 26\delta_2 + \delta_3 &= U(x_1, 0), \\ \delta_0 + 26\delta_1 + 66\delta_2 + 26\delta_3 + \delta_4 &= U(x_2, 0), \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots & \\ \delta_{N-4} + 26\delta_{N-3} + 66\delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + \delta_N &= U(x_{N-2}, 0), \\ \delta_{N-3} + 26\delta_{N-2} + 66\delta_{N-1} + 26\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_{N-1}, 0), \\ \delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + 66\delta_N + 26\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= U(x_N, 0) \end{aligned} \quad (4.36)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemleri  $N + 1$  tane cebirsel denkleme ve  $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$  parametrelerinden oluşan  $N + 5$  tane bilinmeyene sahiptir. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 4 tane ek şartı ihtiyaç vardır. Bunun için başlangıç şartının (4.35) ile verilen sınır noktalarındaki türevleri kullanılır. Türevli sınır koşulları  $\delta_m$  parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} -\delta_{-2} - 10\delta_{-1} + 10\delta_1 + \delta_2 &= 0, \\ \delta_{-2} + 2\delta_{-1} - 6\delta_0 + 2\delta_1 + \delta_2 &= 0, \\ -\delta_{N-2} - 10\delta_{N-1} + 10\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= 0, \\ \delta_{N-2} + 2\delta_{N-1} - 6\delta_N + 2\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$



Öncelikle parametreler,

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = c_0, \quad \mu_0 = \frac{d_0}{\beta_0}, \quad \zeta_0 = \frac{e_0}{\beta_0}, \quad \lambda_0 = \frac{f_0}{\beta_0},$$

$$\alpha_1 = b_0, \quad \beta_1 = c_1 - \alpha_1 \mu_0, \quad \mu_1 = \frac{d_1 - \alpha_1 \zeta_0}{\beta_1}, \quad \zeta_1 = \frac{e_1}{\beta_1}, \quad \lambda_1 = \frac{f_1 - \alpha_1 \lambda_0}{\beta_1}$$

olarak belirlenir. Daha sonra aşağıdaki parametreler bulunur:

$$\alpha_i = b_{i-1} - a_{i-2} \mu_{i-2}, \quad \beta_i = c_i - \alpha_i \mu_{i-1} - a_{i-2} \zeta_{i-2}, \quad \mu_i = \frac{d_i - \alpha_i \zeta_{i-1}}{\beta_i},$$

$$\zeta_i = \frac{e_i}{\beta_i}, \quad \lambda_i = \frac{f_i - \alpha_i \lambda_{i-1} - a_{i-2} \lambda_{i-2}}{\beta_i}, \quad i = 2, 3, \dots, N.$$

Bu iki adımdan sonra  $\delta_m$  bilinmeyen parametreleriyle çözüm aşağıdaki gibi bulunur:

$$\delta_N = \lambda_N, \quad \delta_{N-1} = \lambda_{N-1} - \mu_{N-1} \delta_N,$$

$$\delta_i = \lambda_i - \zeta_i \delta_{i+2} - \mu_i \delta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-3, N-2.$$

#### 4.2.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal algoritmanın lineer kararlılığını araştırmak için Von-Neumann tekniği takip edilecektir. GRLW denkleminin  $U^p U_x$  lineer olmayan terimindeki  $U^p$  teriminin bölgesel olarak sabit olduğu kabul edilecektir. Sunulan sayısal algoritmadaki aynı adımlar uygulanarak,

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3 \delta_m^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\ & = \alpha_5 \delta_{m-2}^n + \alpha_4 \delta_{m-1}^n + \alpha_3 \delta_m^n + \alpha_2 \delta_{m+1}^n + \alpha_1 \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (4.39)$$

şeklinde tekrarlı bağıntısı elde edili. Burada,

$$\alpha_1 = (1 - K - KEZ_m - M), \quad \alpha_2 = (26 - 10K - 10KEZ_m - 2M), \quad \alpha_3 = (66 + 6M),$$

$$\alpha_4 = (26 + 10K + 10KEZ_m - 2M), \quad \alpha_5 = (1 + K + KEZ_m - M),$$

$$m = 0, 1, \dots, N, \quad K = \frac{5\Delta t}{2h}, \quad E = \frac{p(p+1)\Delta t}{2}, \quad M = \frac{20\mu}{h^2}.$$

Daha sonra,  $k$  mod numarası ve  $h$  eleman büyüklüğü olmak üzere,

$$\delta_m^n = \xi^n e^{imkh} \quad (i = \sqrt{-1})$$

ile verilen Fourier mod (4.39) ile verilen denklem de yerine yazılırsa, bu işlem aşağıdaki eşitliği üretir:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \xi^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \alpha_2 \xi^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \alpha_3 \xi^{n+1} e^{i(m)kh} + \alpha_4 \xi^{n+1} e^{i(m+1)kh} \\ & + \alpha_5 \xi^{n+1} e^{i(m+2)kh} = \\ & \alpha_5 \xi^n e^{i(m-2)kh} + \alpha_4 \xi^n e^{i(m-1)kh} + \alpha_3 \xi^n e^{i(m)kh} + \alpha_2 \xi^n e^{i(m+1)kh} \\ & + \alpha_1 \xi^n e^{i(m+2)kh} \end{aligned} \quad (4.40)$$

$e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$  Euler formülü (4.40) ile verilen denklem de kullanılır ve gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa büyüme faktörü olan  $\xi$ ,

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$a = \alpha_3 + (\alpha_4 + \alpha_2) \cos[hk] + (\alpha_5 + \alpha_1) \cos[2hk],$$

$$b = (\alpha_4 - \alpha_2) \sin[hk] + (\alpha_5 - \alpha_1) \sin[2hk].$$

$|\xi|$  nin modülü 1 dir, öyleki lineerleştirilmiş algoritma şartsız kararlıdır.

### 4.2.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Bu bölümde sayısal yöntem tek solitary dalga, iki solitary dalganın etkileşimi ve ardışık dalganın gelişimini kapsayan üç örneğe uygulanmıştır.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları, sayısal algoritmanın doğruluğunu ve etkinliğini test etmek için hesaplanmıştır. Bunun için GRLW denkleminin (4.41) ile verilen tam çözümü ve aşağıdaki norm eşitlikleri kullanılacaktır:

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|.$$

Gardner ve arkadaşları [37], Roshan [56] tarafından GRLW dekleminin tam çözümü,

$$U(x, t) = \sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p} \sec^2 \left[ \frac{p}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}} (x - (c+1)t - x_0) \right]} \quad (4.41)$$

olarak verilmiştir. Burada  $\sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p}}$  dalganın genliği,  $c+1$  pozitif  $x$  yönünde ilerleyen dalganın hızı ve  $x_0$  keyfi sabittir. Buna ilaveten, sayısal algoritmanın kütle, momentum ve enerji ile ilgili özellikleri koruduğunu ifade etmek için,

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu(U_x)^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b [U^4 - \mu(U_x)^2] dx \quad (4.42)$$

olarak verilen korunum sabitlerindeki değişim araştırılmıştır.

#### 4.2.3.1 Tek solitary dalganın hareketi

İlk örnek, (4.41) ile verilen denklem de  $t = 0$  alınması ile elde edilen başlangıç şartı kullanılarak oluşturulmuştur. Düzgün ve karşılaştırılabilir sayısal sonuçlara ulaşabilmek için, daha önce yapılan makale çalışmaları [33, 37, 39, 40, 43, 56, 59] referans alınmıştır. Bu



makalelerle uyumlu olması için  $\mu = 1$ ,  $x_0 = 40$ ,  $x \in [0, 100]$  parametreleri ve  $p$ ,  $c$ , konum adımı  $h$ , zaman adımı  $\Delta t$  parametrelerinin farklı değerleri seçilmiştir. Deneyler  $t = 20$  anına kadar çalıştırılmıştır.

İlk durumda,  $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$ ;  $c = 0.1, 0.3$ ;  $h = 0.2, 0.1$ ;  $\Delta t = 0.01$  parametreleri düşünülmüştür. Bu parametrelere göre hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları Tablo 4.12 ve Tablo 4.13'te sunulmuştur. Bu tablolardan gözlemlendiği gibi  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  korunum sabitlerinin tüm hesaplama süresince başlangıç hesabına göre değişim oranı %0.03 den daha küçüktür.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları artan  $p$ ,  $c$  ve zaman değerleriyle beraber yeterince küçük kalmaktadır ve  $L_\infty$  hata normu  $L_2$  normundan daima küçüktür.  $c = 0.1$  parametresi için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları hesaplama boyunca sırasıyla  $0.85 \times 10^{-4}$  ve  $0.34 \times 10^{-4}$  değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır.

Tablo 4.12 Tek solitary dalganın  $p = 2, 3, 4$ ;  $c = 0.1, 0.3$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

p=2		$I_1$		$I_2$		$I_3$		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
Zaman	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	
0	3.29490	3.58195	0.68342	1.34507	0.02412	0.15372	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	3.29492	3.58195	0.68342	1.34507	0.02412	0.15372	0.040	0.095	0.029	0.051	
10	3.29493	3.58195	0.68342	1.34507	0.02412	0.15372	0.075	0.159	0.035	0.076	
15	3.29494	3.58195	0.68342	1.34506	0.02412	0.15372	0.101	0.207	0.036	0.095	
20	3.29493	3.58195	0.68342	1.34506	0.02412	0.15372	0.120	0.376	0.066	0.175	
p=3		$I_1$		$I_2$		$I_3$		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
Zaman	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	
0	4.06256	3.67753	1.13387	1.56573	0.09289	0.22683	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	4.06258	3.67753	1.13387	1.56573	0.09289	0.22683	0.048	0.217	0.032	0.121	
10	4.06260	3.67753	1.13387	1.56573	0.09289	0.22684	0.088	0.400	0.038	0.203	
15	4.06261	3.67753	1.13387	1.56573	0.09289	0.22684	0.116	0.581	0.039	0.284	
20	4.06260	3.67753	1.13386	1.56572	0.09289	0.22684	0.137	0.918	0.073	0.438	
p=4		$I_1$		$I_2$		$I_3$		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
Zaman	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	
0	4.55093	3.75921	1.49159	1.72999	0.18389	0.28940	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	4.55095	3.75921	1.49159	1.72999	0.18389	0.28941	0.059	0.402	0.034	0.231	
10	4.55097	3.75921	1.49159	1.72998	0.18389	0.28941	0.106	0.803	0.041	0.421	
15	4.55098	3.75921	1.49159	1.72998	0.18389	0.28941	0.142	1.235	0.042	0.627	
20	4.55097	3.75921	1.49159	1.72998	0.18389	0.28941	0.176	1.868	0.078	0.915	

Tablo 4.13 Tek solitary dalganın  $p = 6, 8, 10$ ;  $c = 0.1, 0.3$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

p=6		$I_1$		$I_2$		$I_3$		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
Zaman	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	
0	5.12921	3.86622	1.98857	1.94334	0.36740	0.37760	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	5.12924	3.86622	1.98857	1.94334	0.36740	0.37760	0.236	0.752	0.092	0.402	
10	5.12926	3.86622	1.98857	1.94334	0.36740	0.37760	0.458	1.554	0.179	0.823	
15	5.12927	3.86622	1.98857	1.94333	0.36740	0.37760	0.661	2.429	0.259	1.282	
20	5.12926	3.86622	1.98857	1.94333	0.36740	0.37760	0.848	3.390	0.333	1.785	

p=8		$I_1$		$I_2$		$I_3$		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
Zaman	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	
0	5.45779	3.92982	2.30588	2.07217	0.51946	0.43167	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	5.45781	3.92982	2.30589	2.07217	0.51946	0.43167	0.268	1.204	0.108	0.690	
10	5.45783	3.92981	2.30589	2.07216	0.51946	0.43168	0.499	3.012	0.200	1.699	
15	5.45785	3.92981	2.30589	2.07214	0.51946	0.43170	0.686	5.690	0.273	3.184	
20	5.45784	3.92980	2.30589	2.07212	0.51946	0.43172	0.822	9.520	0.322	5.296	

p=10		$I_1$		$I_2$		$I_3$		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
Zaman	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	
0	5.66906	3.97136	2.52266	2.15744	0.63820	0.46614	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	5.66908	3.97134	2.52266	2.15742	0.63819	0.46615	0.297	2.271	0.124	1.380	
10	5.66910	3.97133	2.52266	2.15737	0.63819	0.46620	0.536	7.775	0.220	4.595	
15	5.66912	3.97131	2.52267	2.15729	0.63819	0.46629	0.700	19.017	0.280	11.082	
20	5.66911	3.97129	2.52267	2.15714	0.63819	0.46643	0.764	39.763	0.288	22.983	

İkinci olarak, farklı hız, konum adımı ve zaman adımlarında hata normlarının büyüklüğünü incelendi. Bu amaçla,  $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$ ;  $c = 0.03, 0.1, 0.3$ ;  $h = 0.1, 0.2$ ;  $\Delta t = 0.01, 0.025, 0.1$  parametreleri ile çalışıldı.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının sayısal sonuçları, Tablo 4.14 ve Tablo 4.15'te listelenmiştir. Bu tablolar da hata normları yeterince küçük ölçülmüştür ve  $L_\infty$  hata normu  $L_2$  hata normundan daima küçük kalmaktadır. Eğer  $c = 0.1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  parametre değerleri seçilirse, program süresince  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $1.5 \times 10^{-3}$  ve  $0.8 \times 10^{-3}$  den daha küçük kalmaktadır.

Tablo 4.16'da elde edilen korunum sabitlerinin ve hata normlarının sonuçları ile daha önceki makalelerde elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması yapılmıştır. Bu tabloya göre  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  korunum sabitleri daha önce hesaplanan değerleri ile hemen hemen aynıdır. Ayrıca bu tablodan açıkça görülmektedir ki; Hata norm değerleri daha önce hesaplanan sonuçlardan daha küçük bulunmuştur. Bu iki sonuç ise algoritmanın doğruluğunu kanıtlamaktadır.

Diğer taraftan tek solitary dalganın farklı zamanlarda ve farklı  $p$  değerlerindeki hareketi Şekil 4.7'de çizilmiştir. Bu şekle göre artan  $p$  değerine göre dalganın genliği doğru orantılı

olduğundan, dalganın yüksekliği de artmaktadır.  $t = 0$  dan  $t = 20$  zamanına kadar dalga hareketi incelendiğinde, dalganın genlik, hız ve şeklinde herhangi bir bozulma olmadan sağa doğru ilerlediği görülmektedir. Yani bu dalgalar solitary dalgadır.

Tablo 4.14 Tek solitary dalganın  $p = 2, 3, 4$ ;  $t = 20$  ve  $x \in [0, 100]$  için farklı konum ve zaman adımlarındaki hata norm değerleri

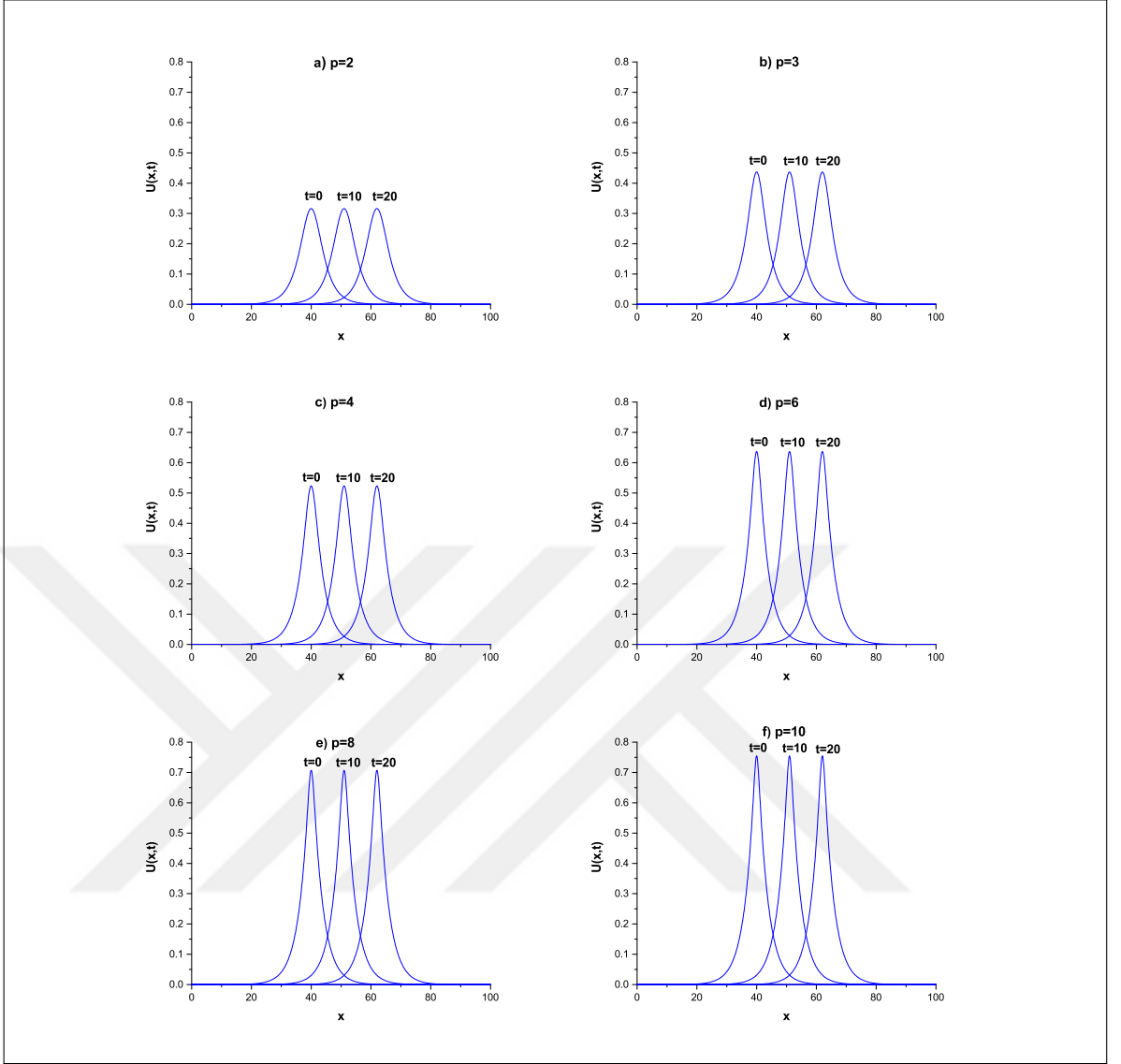
		p=2			p=3			p=4			
$c \rightarrow$		0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	
$gen. \rightarrow$		0.17	0.31	0.54	0.29	0.43	0.62	0.38	0.52	0.68	
$h$	$\Delta t$										
$L_2 \times 10^3$	0.1	0.010	1.002	0.044	0.119	1.343	0.062	0.157	1.585	0.073	0.195
	0.2	0.010	0.889	0.012	0.037	1.192	0.013	0.091	1.407	0.017	0.186
	0.1	0.025	1.002	0.064	0.328	1.343	0.109	0.593	1.585	0.158	0.988
	0.2	0.025	0.889	0.025	0.248	1.192	0.055	0.530	1.407	0.101	0.981
	0.1	0.100	1.004	0.488	4.323	1.353	1.035	8.561	1.611	1.795	16.850
	0.2	0.100	0.891	0.452	4.244	1.201	0.986	8.499	1.430	1.741	16.842
$L_\infty \times 10^3$	0.1	0.010	0.403	0.014	0.051	0.541	0.022	0.072	0.638	0.027	0.095
	0.2	0.010	0.403	0.006	0.017	0.541	0.007	0.043	0.638	0.007	0.091
	0.1	0.025	0.403	0.023	0.143	0.541	0.042	0.277	0.638	0.064	0.482
	0.2	0.025	0.403	0.009	0.105	0.541	0.022	0.245	0.638	0.042	0.475
	0.1	0.100	0.403	0.199	1.894	0.541	0.433	4.016	0.638	0.766	8.235
	0.2	0.100	0.403	0.185	1.854	0.541	0.414	3.984	0.638	0.744	8.213

Tablo 4.15 Tek solitary dalganın  $p = 6, 8, 10$ ;  $t = 20$  ve  $x \in [0, 100]$  için farklı konum ve zaman adımlarındaki hata norm değerleri

		p=6			p=8			p=10			
$c \rightarrow$		0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	
$gen. \rightarrow$		0.52	0.63	0.76	0.60	0.70	0.81	0.66	0.75	0.84	
h	$\Delta t$										
$L_2 \times 10^3$	0.1	0.010	1.900	0.084	0.339	2.094	0.082	0.952	2.225	0.076	3.976
	0.2	0.010	1.686	0.049	0.699	1.858	0.158	2.887	1.974	0.521	13.291
	0.1	0.025	1.901	0.296	2.954	2.095	0.590	12.175	2.228	1.461	57.247
	0.2	0.025	1.686	0.268	3.316	1.859	0.679	14.108	1.976	1.926	66.443
$L_\infty \times 10^3$	0.1	0.010	0.765	0.033	0.178	0.843	0.032	0.529	0.896	0.028	2.298
	0.2	0.010	0.765	0.021	0.366	0.843	0.074	1.591	0.896	0.257	7.601
	0.1	0.025	0.765	0.128	1.563	0.843	0.274	6.802	0.896	0.724	33.005
	0.2	0.025	0.765	0.119	1.750	0.843	0.317	7.808	0.896	0.954	38.021

Tablo 4.16 Tek solitary dalganın  $p = 2, 3, 4$  ve  $x \in [0, 100]$  için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

		Methods	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
$p = 2$		CBSC-CN [37]	16.3900	9.2400	4.4420	3.2990	1.4130
$c = 1$		CBSC+PA-CN [37]	20.3000	11.2000	4.4400	3.2960	1.4110
$h = 0.2$		CBSC [40]	9.3019	5.4371	4.4428	3.2998	1.4142
$\Delta t = 0.025$		MFC [43]	3.9140	2.0190	4.4428	3.2997	1.4141
$t = 10$		QBSPG [56]	3.0053	1.6874	4.4428	3.2998	1.4141
		QBSC [39]	2.4155	1.0797	4.4431	3.3003	1.4146
		EBSC [59]	2.3909	1.0647	4.4428	3.2998	1.4142
		QBSC	2.5893	1.3518	4.4428	3.2997	1.4143
$p = 3$		QBSPG [56] t=5	0.0409	0.0238	3.6775	1.5657	0.2268
$c = 0.3$		t=10	0.0719	0.0377	3.6775	1.5657	0.2268
$h = 0.1$		QBSC t=5	0.0393	0.0182	3.6776	1.5657	0.2268
$\Delta t = 0.01$		t=10	0.0787	0.0365	3.6776	1.5657	0.2268
$p = 4$		QBSPG [56] t=5	0.0542	0.0382	3.7592	1.7299	0.2894
$c = 0.3$		t=10	0.1225	0.0662	3.7592	1.7299	0.2894
$h = 0.1$		QBSC t=5	0.0497	0.0244	3.7592	1.7300	0.2894
$\Delta t = 0.01$		t=10	0.0987	0.0483	3.7592	1.7300	0.2894



Şekil 4.7 Tek solitary dalganın  $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$ ,  $c = 0.1$ ,  $x_0 = 40$ ,  $x \in [0, 100]$  için  $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi

#### 4.2.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi

İkinci olarak, 2 ve 1 genliklerine sahip aynı yönde hareket eden iki pozitif solitary dalganın etkileşimi,

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 p \sqrt{\frac{c_i(p+2)}{2p}} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{p}{2} \sqrt{\frac{c_i}{\mu(c_i+1)}} (x - x_i) \right] \quad (4.43)$$

olarak verilen başlangıç şartı kullanılarak araştırılmıştır. Burada  $c_i$  ve  $x_i$ ,  $i = 1, 2$  keyfi sabitlerdir.

Sayısal çalışma için, ilk parametreler  $p = 2$ ,  $c_1 = 4$ ,  $c_2 = 1$ ,  $x_1 = 25$ ,  $x_2 = 55$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $\mu = 1$ ,  $x \in [0, 250]$ ; ikinci parametreler  $p = 3$ ,  $c_1 = 48/5$ ,  $c_2 = 6/5$ ,  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 50$ ,

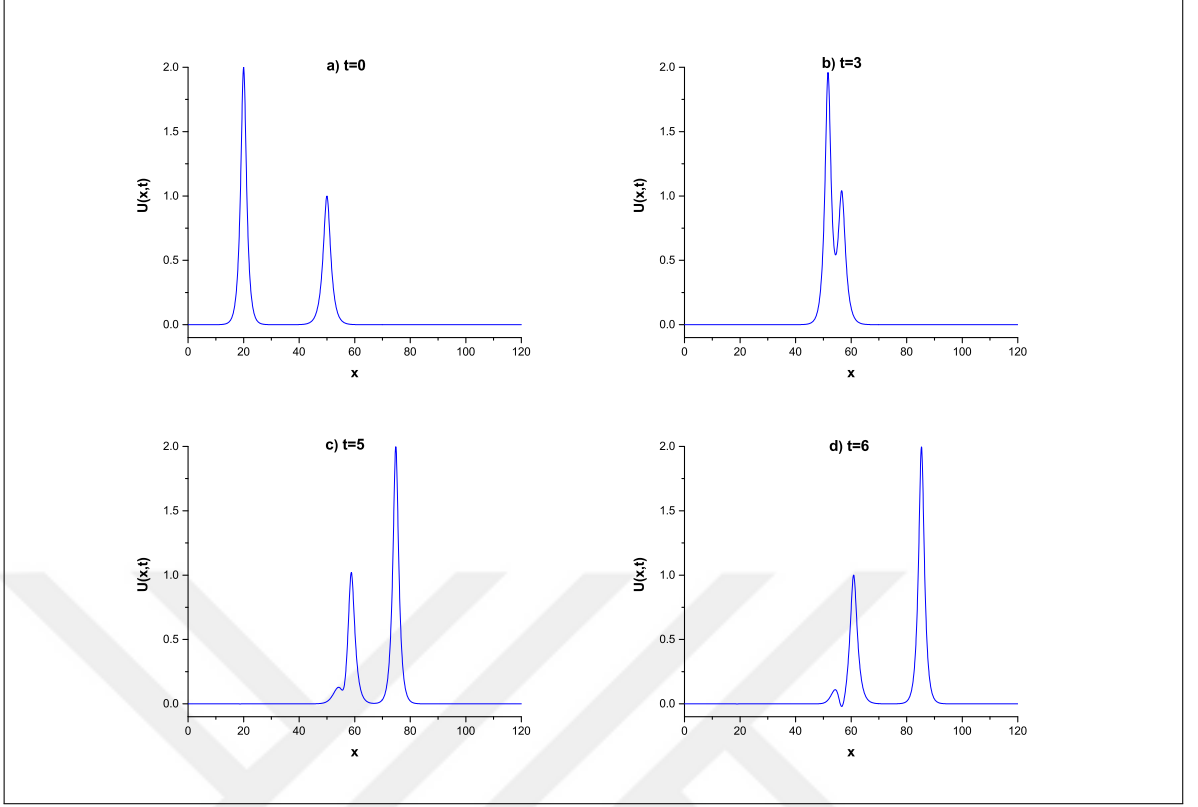
$h = 0.1, \Delta t = 0.01, \mu = 1, x \in [0, 120]$  ve üçüncü parametreler  $p = 4, c_1 = 64/3, c_2 = 4/3, x_1 = 20, x_2 = 80, h = 0.125, \Delta t = 0.01, \mu = 1, x \in [0, 200]$  olarak seçilmiştir. Sayısal veriler Tablo 4.17 ve Tablo 4.18'de gösterilmiştir. Bu tablolara göre korunum sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişimleri, oldukça küçüktür ve sonuçlar Roshan'ın elde ettiği sonuçlarla uyumludur [56]. Diğer yandan iki solitary dalganın farklı zaman adımlarındaki hareketi Şekil 4.8 ve Şekil 4.9'da gösterilmiştir. Bu şekillerde görüldüğü gibi, başlangıçta büyük genliğe sahip dalga küçük genliğe sahip dalganın gerisindedir. Zamanla büyük genlikli dalga küçük genlikli dalgayı yakalar ve aynı yönde ilerleyen bu iki dalga çarpışır. Daha sonra bu iki dalga ayrılarak büyük genlikli dalga öne geçerek yollarına devam eder. Bu iki dalganın aynı yönde ilerlerken çarpışması gerçekleştikten sonra dalgaların şekil, hız ve büyüklük gibi kavramları etkilenmez ya da çok az değişir. Bu yüzden bu iki dalga solitondur.

Tablo 4.17 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 2, gen. = 2, 1, h = 0.2, \Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 250]$  için korunum sabitleri

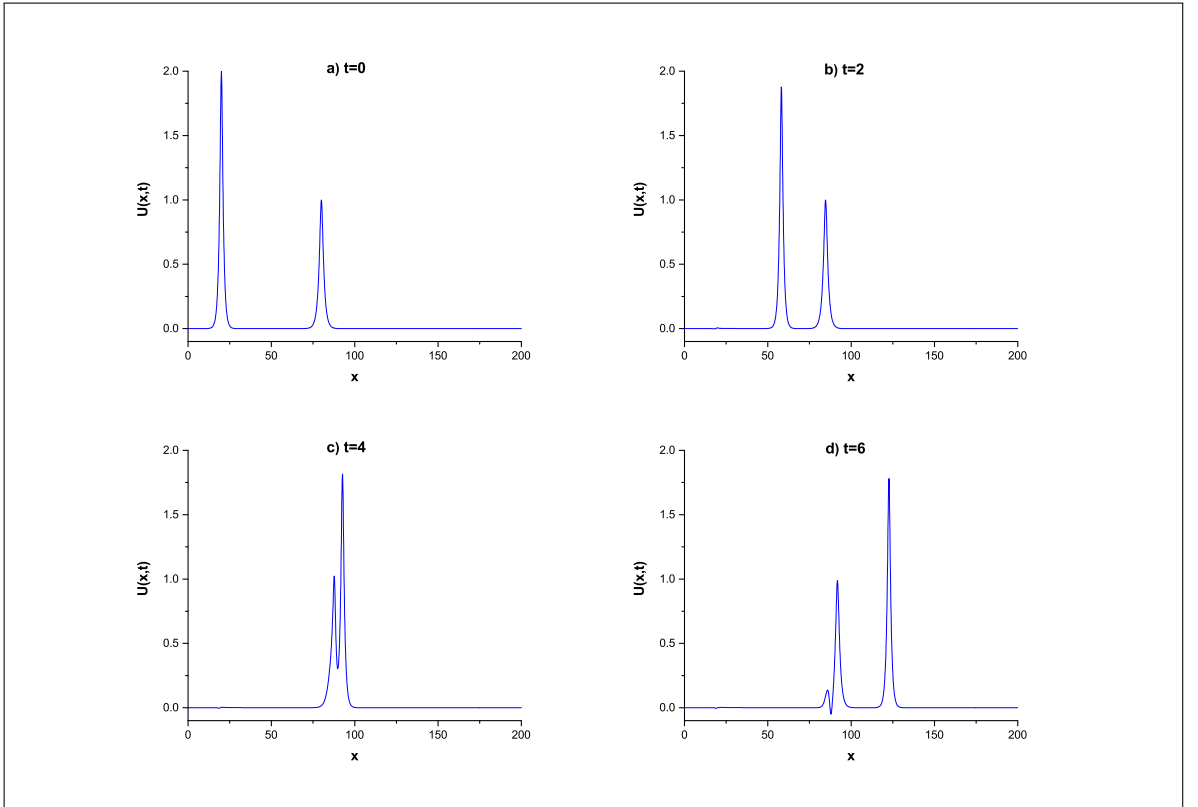
Zaman ↓	$I_1$		$I_2$		$I_3$	
	QBSC	QBSPG [56]	QBSC	QBSPG [56]	QBSC	QBSPG [56]
0	11.4676	11.4677	14.6292	14.6286	22.8803	22.8788
4	11.4676	11.4677	14.6277	14.6292	22.8818	22.8811
8	11.4668	11.4677	14.1399	14.6229	23.3695	22.8798
12	11.4676	11.4677	14.6803	14.6299	22.8292	22.8803
16	11.4676	11.4677	14.6442	14.6295	22.8653	22.8805
20	11.4676	11.4677	14.6309	14.6299	22.8786	22.8806

Tablo 4.18 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 3, 4$  ve  $gen. = 2, 1$  için korunum sabitleri

Zaman	0	1	2	3	4	5	6
$p=3$							
$I_1$	9.6907	9.6894	9.6881	9.6851	9.6860	9.6848	9.6835
$I_2$	12.9443	12.9433	12.9391	12.3044	12.9704	13.0539	13.0028
$I_3$	17.0186	17.0197	17.0239	17.6586	16.9926	16.9091	16.9601
$p=4$							
$I_1$	8.8342	8.6650	8.5662	8.4965	8.4529	8.4089	8.3702
$I_2$	12.1708	11.9332	11.7919	11.6913	11.4644	11.7254	11.5990
$I_3$	14.0294	14.2670	14.4083	14.5090	14.7358	14.4748	14.6012



Şekil 4.8 İki solitary dalganın  $p = 3$ ; a)  $t = 0$ , b)  $t = 3$ , c)  $t = 5$ , d)  $t = 6$ 'daki hareketi



Şekil 4.9 İki solitary dalganın  $p = 4$ ; a)  $t = 0$ , b)  $t = 2$ , c)  $t = 4$ , d)  $t = 6$ 'daki hareketi

### 4.2.3.3 Ardışık dalgaların gelişimi

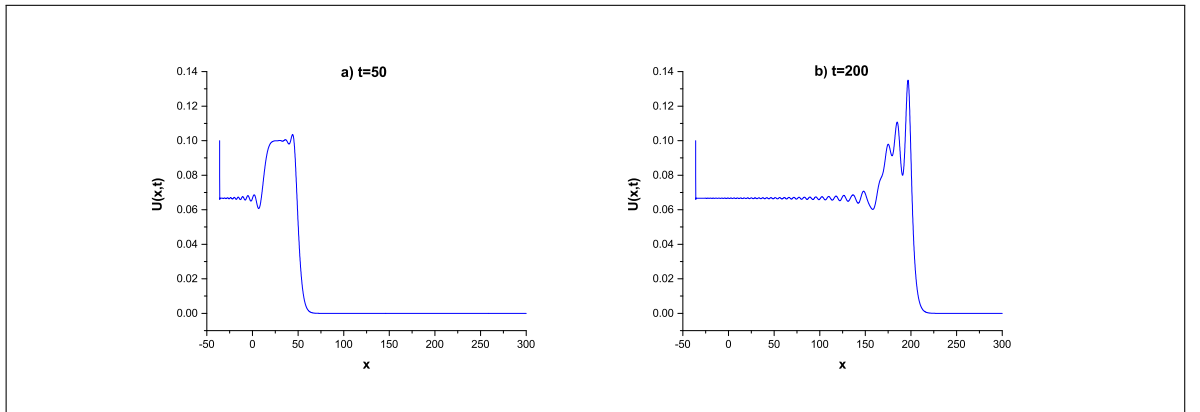
Son olarak, ardışık dalgaların gelişimi aşağıdaki başlangıç şartı ile beraber incelenmiştir:

$$U(x, 0) = \frac{1}{2}U_0 \left[ 1 - \tanh\left(\frac{x - x_c}{d}\right) \right]. \quad (4.44)$$

Bu başlangıç şartı  $t = 0$  anında denge seviyesinden yukarıda bulunan suyun yükseltisini belirtir.  $d$  durgun su ve derin su arasındaki eğimi temsil eder. (4.44) ile verilen su seviyesinin değişimindeki büyüklük,  $x = x_c$  noktasına yerleştirilmiştir. Daha önce sunulan çalışmalar [1, 34, 35] ile uyumlu olması için  $U_0 = 0.1, \mu = 1/6, x_c = 0, d = 5, h = 0.1, \Delta t = 0.1, x \in [-36, 300]$  parametreleri kullanılmıştır. Üç korunum sabitinin sayısal değeri, Tablo 4.19'da verilmiştir. Bu tabloya göre üç hareket sabitinin değişimi, yüksek zaman periyotunda bile beklenen seviyededir. Ardışık dalgaların hareketi Şekil 4.10, Şekil 4.11 ve Şekil 4.12'de çizilmiştir. Bu üç şekilden anlaşıldığı gibi, seçilen bu başlangıç büyüklüğüne göre uzun bir müddet solitary dalgalarda çok az büyüklü dalgalanmalar oluşur. Daha sonra solitary dalganın ani bir sıçrama hareketi ile genliği büyür ve daha sonra dalga sönmeye başlar.

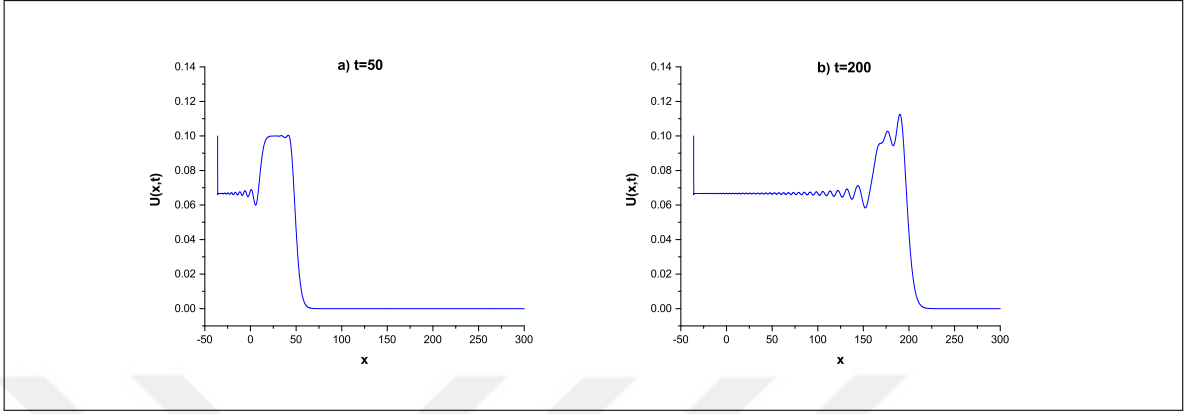
Tablo 4.19 Ardışık dalgaların gelişimi ve  $U_0 = 0.1, x_0 = 0, d = 5, \mu = 1/6, h = 0.1, \Delta t = 0.1, x \in [-36, 300]$  için korunum sabitleri

Zaman ↓	$I_1$			$I_2$			$I_3$		
	p=2	p=3	p=4	p=2	p=3	p=4	p=2	p=3	p=4
0	3.6049	3.6049	3.6049	0.3372	0.3372	0.3372	0.0014	0.0014	0.0014
50	7.0244	6.9980	6.9954	0.5694	0.5668	0.5665	0.0041	0.0041	0.0041
100	10.3873	10.3343	10.3290	0.7946	0.7893	0.7888	0.0051	0.0051	0.0051
150	13.7503	13.6706	13.6626	1.0198	1.0119	1.0110	0.0061	0.0061	0.0061
200	17.1133	17.0069	16.9961	1.2450	1.2344	1.2333	0.0071	0.0071	0.0071

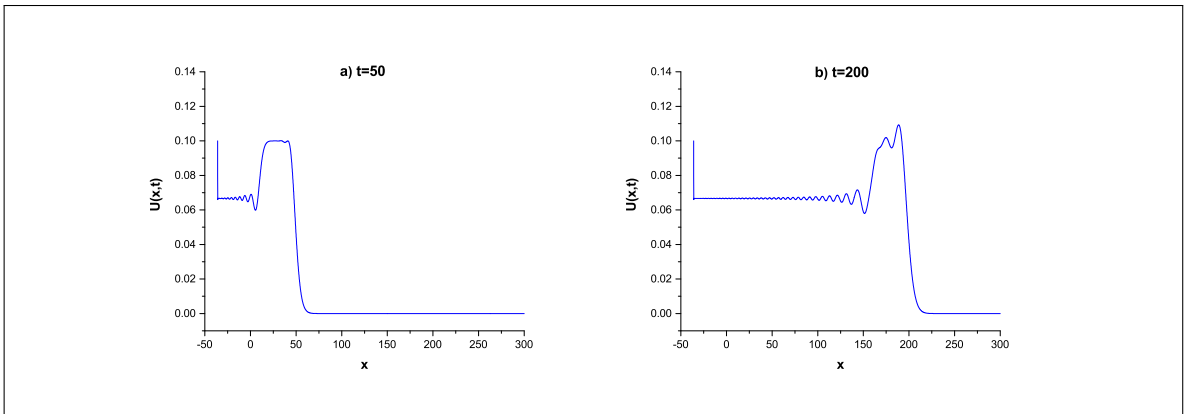


Şekil 4.10  $p = 2$ ; a)  $t = 50$ , b)  $t = 200$  değerleri için ardışık dalgaların gelişimi





Şekil 4.11  $p = 3$ ; a)  $t = 50$ , b)  $t = 200$  değerleri için ardışık dalgaların gelişimi



Şekil 4.12  $p = 4$ ; a)  $t = 50$ , b)  $t = 200$  değerleri için ardışık dalgaların gelişimi

### 4.3 GRLW Denkleminin Kübik B-spline Galerkin Yöntemi ile Sayısal Çözümü

GRLW denklemi aşağıdaki forma sahiptir:

$$U_t + U_x + p(p+1)U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad (4.45)$$

burada fiziksel sınır şartları  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $U \rightarrow 0$ , alt indis  $t$  ve  $x$  zaman ve boyutsal türevi temsil eder,  $p$  pozitif tamsayı,  $\mu$  ise pozitif sabittir.

Başlangıç şartı olarak,

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (4.46)$$

ve sınır şartları

$$\begin{aligned} U(a, t) = 0, \quad U_x(a, t) = 0, \\ U(b, t) = 0, \quad U_x(b, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

olarak alınmıştır.

Öncelikle,  $[a, b]$  sonlu aralığına sınırlandırılmış çözüm bölgesi, aralık uzunluğu  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  ve  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  olmak üzere,  $x_m$  düğüm noktalarıyla  $N$  tane eşit alt aralığa bölünür.  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturan  $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_{N+1}(x)\}$  kübik B-spline fonksiyonları  $x_m$  düğüm noktalarında

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}), \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m), \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}), \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.48)$$

şeklinde tanımlanmıştır [78]. Her bir kübik B-spline  $\phi_m$  fonksiyonu ardışık 4 tane sonlu alt aralığı örter. Bu yüzden her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu alt aralığı 4 adet B-spline fonksiyonu tarafından örtülür.  $U_N(x, t)$  yaklaşım fonksiyonu,

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (4.49)$$

şeklinde kübik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden tanımlanır. Burada  $\delta_m(t)$ , zamana bağlı bilinmeyen parametreler olup sınır ve ağırlıklı kalan şartları kullanılarak hesaplanacaktır.

Şimdi  $0 \leq \eta \leq 1$  olmak üzere  $h\eta = x - x_m$  eşitliği kullanılarak  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı  $[0, 1]$  aralığına dönüştürülebilir. Bu halde, (4.48) ile verilen kübik B-spline fonksiyonlarının  $\eta$  değişkenine bağlı olarak  $[0, 1]$  aralığı üzerinde,

$$\begin{aligned}\phi_{m-1} &= (1 - \eta)^3, \\ \phi_m &= 1 + 3(1 - \eta) + 3(1 - \eta)^2 - 3(1 - \eta)^3, \\ \phi_{m+1} &= 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3, \\ \phi_{m+2} &= \eta^3\end{aligned}\tag{4.50}$$

olarak elde edilir. Burada şunu belirtmeliyizki:  $\phi_{m-1}(x)$ ,  $\phi_m(x)$ ,  $\phi_{m+1}(x)$  ve  $\phi_{m+2}(x)$  fonksiyonları hariç tüm kübik B-spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında sıfırdır. Bu yüzden (4.49) ile verilen yaklaşım fonksiyonu,  $[0, 1]$  bölgesinde  $\delta_{m-1}$ ,  $\delta_m$ ,  $\delta_{m+1}$ ,  $\delta_{m+2}$  eleman parametreleri ve  $\phi_{m-1}$ ,  $\phi_m$ ,  $\phi_{m+1}$ ,  $\phi_{m+2}$  şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$U_N(\eta, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j.\tag{4.51}$$

(4.50) ile verilen denklem ve (4.51) ile verilen denklem birlikte değerlendirilerek,  $U$  ve onun  $\eta$ ' ya göre  $U'$ ,  $U''$  türevlerinin  $x = x_m$  alındığında  $\eta = 0$  olup  $\delta_m$  parametrelerine göre değerleri

$$\begin{aligned}U_m &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_m &= 3(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\ U''_m &= 6(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})\end{aligned}\tag{4.52}$$

şeklinde. Burada  $'$  ve  $''$ ,  $\eta$  değişkenine göre birinci ve ikinci türevi sembolize etmektedir. Galerkin yaklaşımı,  $W(x)$  ağırlık fonksiyonu ile beraber (4.45) ile verilen denkleme uygulanarak, (4.45) ile verilen denklemin zayıf formu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\int_a^b W(U_t + U_x + p(p+1)U^p U_x - \mu U_{xxt}) dx = 0.\tag{4.53}$$

$x \rightarrow \eta$  değişken değişimi (4.53) ile verilen integral denklemine uygulanırsa,

$$\int_0^1 W \left( U_t + \frac{1}{h} U_\eta + \frac{p(p+1)}{h} \dot{U}^p U_\eta - \frac{\mu}{h^2} U_{\eta\eta t} \right) d\eta = 0\tag{4.54}$$

elde edilir. Burada  $\dot{U}$ , integrali basitleştirmek için bir eleman üzerinde sabit olarak düşünülmüştür. Daha sonra (4.54) ile verilen denkleme birkez kısmi integrasyon uygulanırsa, bu işlem aşağıdaki eşitliği üretir:

$$\int_0^1 [W(U_t + \frac{(1+\lambda)}{h} U_\eta) + \beta W_\eta U_{\eta t}] d\eta = \beta W U_{\eta t} \Big|_0^1,\tag{4.55}$$

burada  $\lambda = p(p+1)U^p$  ve  $\beta = \frac{\mu}{h^2}$  dir.

Ağırlık fonksiyonu  $W(x)$  yerine, (4.50) ile verilen kübik B-spline yaklaşım fonksiyonu alınır ve (4.51) ile verilen yaklaşık çözüm, (4.55) ile verilen denklem de yerine yazılırsa,

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} [(\int_0^1 \phi_i \phi_j + \beta \phi_i' \phi_j') d\eta - \beta \phi_i \phi_j|_0^1] \delta_j^e + \sum_{j=m-1}^{m+2} (\frac{1+\lambda}{h} \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\eta) \delta_j^e = 0 \quad (4.56)$$

bulunur. Burada  $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$  ve “.”  $t$  ye göre türevi ifade eder. Bu son denklem matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$[A^e + \beta(B^e - C^e)] \delta^e + \frac{(1+\lambda)}{h} D^e \delta^e = 0. \quad (4.57)$$

(4.57) ile verilen matris denkleminin elaman matrisleri de

$$A_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j d\eta = \frac{1}{140} \begin{bmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' d\eta = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 18 & 21 & -36 & -3 \\ 21 & 102 & -87 & -36 \\ -36 & -87 & 102 & 21 \\ -3 & -36 & 21 & 18 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = \phi_i \phi_j|_0^1 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\eta = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -10 & -9 & 18 & 1 \\ -71 & -150 & 183 & 38 \\ -38 & -183 & 150 & 71 \\ -1 & -18 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

şeklinde ve altındisler  $i, j = m - 1, m, m + 1, m + 2$ . Buradaki  $\lambda$  katsayısının iki nokta lineerleştirme tekniği uygulanmış formu,

$$\lambda \cong p(p+1) \left[ \frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right]^p = \frac{p(p+1)}{2^p} (\delta_{m-1}^n + 5\delta_m^n + 5\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^p$$

olarak yazılır. Tüm elemanların katkısını beraber düşünerek (4.57) ile verilen matris denkleminin aşağıdaki formu elde edilir:

$$[A + \beta(B - C)]\dot{\delta} + \frac{(1 + \lambda)}{h} D\delta = 0. \quad (4.58)$$

Burada  $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$  düğüm noktasındaki parametrelerdir.  $A, B, C$  ve  $\lambda D$  septa-diagonal matrislerdir ve bu matrislerin  $m$ . satırları,

$$A = \frac{1}{140} (1, 120, 1191, 2416, 1191, 120, 1), \quad B = \frac{1}{10} (-3, -72, -45, 240, -45, -72, -3),$$

$$C = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad D = \frac{1}{20} (-1, -56, -245, 0, 245, 56, 1),$$

$$\lambda D = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -\lambda_1, -18\lambda_1 - 38\lambda_2, 9\lambda_1 - 183\lambda_2 - 71\lambda_3, 10\lambda_1 + 150\lambda_2 - 150\lambda_3 - 10\lambda_4, \\ 71\lambda_2 + 183\lambda_3 - 9\lambda_4, 38\lambda_3 + 18\lambda_4, \lambda_4 \end{pmatrix}$$

şeklinde. Burada,

$$\lambda_1 = \frac{p(p+1)}{2^p} (\delta_{m-2} + 5\delta_{m-1} + 5\delta_m + \delta_{m+1})^p,$$

$$\lambda_2 = \frac{p(p+1)}{2^p} (\delta_{m-1} + 5\delta_m + 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^p,$$

$$\lambda_3 = \frac{p(p+1)}{2^p} (\delta_m + 5\delta_{m+1} + 5\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^p,$$

$$\lambda_4 = \frac{p(p+1)}{2^p} (\delta_{m+1} + 5\delta_{m+2} + 5\delta_{m+3} + \delta_{m+4})^p.$$

(4.58) ile verilen denkleme,  $\dot{\delta} = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t}$  ileri sonlu fark ve  $\delta = \frac{1}{2}(\delta^n + \delta^{n+1})$  Crank-Nicolson yaklaşımları uygulanırsa, aşağıdaki matris form elde edilir:

$$[A + \beta(B - C) + \frac{(1 + \lambda)\Delta t}{2h} D]\delta^{n+1} = [A + \beta(B - C) - \frac{(1 + \lambda)\Delta t}{2h} D]\delta^n. \quad (4.59)$$

Bu aşamadan sonra (4.47) ile verilen sınır şartları matris denkleminde (cebirsal denklem sistemine) dahil edilerek,  $(N + 3) \times (N + 3)$  boyutlu matris sistemi (4.59),  $(N + 1) \times (N + 1)$  boyutlu matris sistemine dönüşür. Bu işlem aşaması sınır değerlerinin işleme basit bir şekilde dahil edilmesi olarak bilinir ve başlangıç iterasyonun hesaplanması kısmında açıklanmıştır.  $A, B, C$  ve  $D$  matrislerinin  $m$ . satırları 7 elemanlıdır, bu yüzden (4.59) ile verilen cebirsal denklem sistemi 7 sütun elemanlı diagonal matrislerden oluşur (septa-diagonal matris olarak adlandırılır). Septa-diagonal matris sistemi de Thomas algoritması ile aşağıda alt bölüm

4.3.1'de açıklandığı gibi kolaylıkla çözülür. Bu çözüm prosedüründe lineer olmamanın üstesinden gelebilmek için her bir zaman adımında

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

formülü ile üç veya dört defa iç iterasyon uygulanarak çözüm iyileştirilir. Tüm bu işlemlerden sonra (4.59) ile verilen matris denklem sisteminin basit bir sonucu olan iki zaman adımı  $n$  ve  $n + 1$  arasındaki tekrarlama bağıntısı,

$$\begin{aligned} \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} = \\ \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (4.60)$$

olarak yazılır. Burada,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{140} - \frac{3\beta}{10} - \frac{(1+\lambda)\Delta t}{40h}, & \gamma_2 &= \frac{120}{140} - \frac{72\beta}{10} - \frac{56(1+\lambda)\Delta t}{40h}, \\ \gamma_3 &= \frac{1191}{140} - \frac{45\beta}{10} - \frac{245(1+\lambda)\Delta t}{40h}, & \gamma_4 &= \frac{2416}{140} + \frac{240\beta}{10}, \\ \gamma_5 &= \frac{1191}{140} - \frac{45\beta}{10} + \frac{245(1+\lambda)\Delta t}{40h}, & \gamma_6 &= \frac{120}{140} - \frac{72\beta}{10} + \frac{56(1+\lambda)\Delta t}{40h}, \\ \gamma_7 &= \frac{1}{140} - \frac{3\beta}{10} + \frac{(1+\lambda)\Delta t}{40h}. \end{aligned}$$

### Başlangıç iterasyonu

Çözüm aşamasında, (4.59) ile verilen cebirsel denklem sistemin de iterasyonu başlatabilmek için  $d^0$  başlangıç değeri (4.61) ile verilen başlangıç şartları kullanılarak bulunur. Yaklaşık çözümün başlangıç formu,

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0(t)$$

şeklinindedir. Başlangıç şartı ve sınır noktalarındaki türevler ise

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) = U(x_m, 0) = f(x); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) = 0, \quad (U_N)_x(b, 0) = 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

olarak verilir. Başlangıç şartı ve sınır noktalarındaki türevler  $\delta_m$  parametrelerine göre

aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}
 -3\delta_{-1} + 3\delta_1 &= U'(x_0, 0), \\
 \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 &= U(x_0, 0), \\
 \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 &= U(x_1, 0), \\
 &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 \delta_{N-2} + 4\delta_{N-1} + \delta_N &= U(x_{N-1}, 0), \\
 \delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_N, 0), \\
 -3\delta_{-1} + 3\delta_1 &= U'(x_0, 0).
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Bu denklemlerin matris olarak yazımı,

$$\begin{bmatrix}
 -3 & 0 & 3 & & & \\
 1 & 4 & 1 & & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & 1 & 4 & 1 \\
 & & & -3 & 0 & 3
 \end{bmatrix}_{(N+3) \times (N+3)}
 \begin{bmatrix}
 \delta_{-1}^0 \\
 \delta_0^0 \\
 \vdots \\
 \delta_N^0 \\
 \delta_{N+1}^0
 \end{bmatrix}_{(N+3) \times 1}
 =
 \begin{bmatrix}
 U'(x_0, 0) \\
 U(x_0, 0) \\
 \vdots \\
 U(x_N, 0) \\
 U'(x_N, 0)
 \end{bmatrix}_{(N+3) \times 1}$$

şeklinde. Burada da görüldüğü gibi soldaki matrisin boyutu  $(N+3) \times (N+3)$  dir. Bu denklem sisteminde verilen sınır noktalarındaki türev şartından  $\delta_{-1} = \delta_1$  ve  $\delta_{N-1} = \delta_{N+1}$  olarak çekilir ve  $(\delta_{-1}, \delta_{N+1})$  parametreleri matris sisteminden silinir. Böylece matris sistemi  $(N+1) \times (N+1)$  boyutlu matris sistemine dönüşür:

$$\begin{bmatrix}
 4 & 2 & 0 & & & \\
 1 & 4 & 1 & & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & & 1 & 4 & 1 \\
 & & & 0 & 2 & 4
 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}
 \begin{bmatrix}
 \delta_0^0 \\
 \delta_1^0 \\
 \vdots \\
 \delta_{N-1}^0 \\
 \delta_N^0
 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}
 =
 \begin{bmatrix}
 U(x_0, 0) \\
 U(x_1, 0) \\
 \vdots \\
 U(x_{N-1}, 0) \\
 U(x_N, 0)
 \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

Elde edilen bu matris denklemini 3 sütun elemanlı tri-diagonal matris sistemidir. Bu matris sisteminden bilinmeyen parametreler de Fortran programı yardımıyla Thomas algoritması (tri-diagonal algoritma) kullanılarak bulunur.

Başlangıç değerinin bulunmasıyla beraber (4.59) ile verilen matris sisteminde  $n = 0$  için sağ taraf belirlenmiştir. Matrisin sol tarafı ise Thomas algoritması ile bulunur. Böylece istenilen

zaman adımında bir önceki parametreden bulunan değerler kullanılarak (iterasyon yapılarak) GRLW denkleminin sayısal çözümü bulunmuş olur.

#### 4.3.1 Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü

Septa-diagonal sistem aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$a_i \delta_{i-3} + b_i \delta_{i-2} + c_i \delta_{i-1} + d_i \delta_i + e_i \delta_{i+1} + f_i \delta_{i+2} + g_i \delta_{i+3} = h_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Burada  $a_0 = b_0 = c_0 = a_1 = b_1 = a_2 = g_{N-2} = g_{N-1} = f_{N-1} = g_N = f_N = e_N = 0$  alınmıştır.

İlk aşamada, parametreler aşağıdaki gibi seçilir:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= b_0, & \beta_0 &= c_0, & \mu_0 &= d_0, & \zeta_0 &= \frac{e_0}{\mu_0}, & \lambda_0 &= \frac{f_0}{\mu_0}, & \eta_0 &= \frac{g_0}{\mu_0}, & \gamma_0 &= \frac{h_0}{\mu_0}, \\ \alpha_1 &= b_1, & \beta_1 &= c_1, & \mu_1 &= d_1 - \beta_1 \zeta_0, & \zeta_1 &= \frac{e_1 - \beta_1 \lambda_0}{\mu_1}, & \lambda_1 &= \frac{f_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1}, \\ \eta_1 &= \frac{g_1}{\mu_1}, & \gamma_1 &= \frac{h_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= b_2, & \beta_2 &= c_2 - \alpha_2 \zeta_0, & \mu_2 &= d_2 - \lambda_0 \alpha_2 - \beta_2 \zeta_1, & \zeta_2 &= \frac{e_2 - \eta_0 \alpha_2 - \beta_2 \lambda_1}{\mu_2}, \\ \lambda_2 &= \frac{f_2 - \beta_2 \eta_1}{\mu_2}, & \eta_2 &= \frac{g_2}{\mu_2}, & \gamma_2 &= \frac{h_2 - \alpha_2 \gamma_0 - \beta_2 \gamma_1}{\mu_2}. \end{aligned}$$

Daha sonra, aşağıdaki parametreler bulunur:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= b_i - a_i \zeta_{i-3}, & \beta_i &= c_i - a_i \lambda_{i-3} - \alpha_i \zeta_{i-2}, & \mu_i &= d_i - a_i \eta_{i-3} - \lambda_{i-2} \alpha_i - \beta_i \zeta_{i-1}, \\ \zeta_i &= \frac{e_i - \eta_{i-2} \alpha_i - \beta_i \lambda_{i-1}}{\mu_i}, & \lambda_i &= \frac{f_i - \beta_i \eta_{i-1}}{\mu_i}, & \eta_i &= \frac{g_i}{\mu_i}, \\ \gamma_i &= \frac{h_i - \beta_i \gamma_{i-1} - \alpha_i \gamma_{i-2} - a_i \gamma_{i-3}}{\mu_i}, & i &= 3, 4, \dots, N. \end{aligned}$$

Bu iki adımdan sonra çözüm aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\delta_{N-2} = \gamma_{N-2} - \lambda_{N-2} \delta_N - \eta_{N-2} \delta_{N-1}, \quad \delta_{N-1} = \gamma_{N-1} - \eta_{N-1} \delta_N, \quad \delta_N = \gamma_N,$$

$$\delta_i = \gamma_i - \zeta_i \delta_{i+1} - \lambda_i \delta_{i+2} - \eta_i \delta_{i+3}, \quad i = 0, 1, \dots, N-4, N-3.$$

#### 4.3.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal algoritmanın lineer kararlılık analizi için Fourier yöntemi kullanıldı. Ayrıca, GRLW denkleminin  $U^P U_x$  lineer olmayan terimindeki  $U^P$  teriminin bölgesel olarak sabit olduğu kabul edildi.  $k$  mod numarası ve  $h$  eleman büyüklüğü olmak üzere,

$$\delta_m^n = g^n e^{imkh} \quad (i = \sqrt{-1})$$



ile verilen Fourier mod (4.60) ile verilen denklem de yerine yazılırsa, bu işlem aşağıdaki eşitliği üretir:

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 g^{n+1} e^{i(m-3)kh} + \gamma_2 g^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_3 g^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 g^{n+1} e^{i(m)kh} \\
& + \gamma_5 g^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_6 g^{n+1} e^{i(m+2)kh} + \gamma_7 g^{n+1} e^{i(m+3)kh} = \\
& \gamma_7 g^n e^{i(m-3)kh} + \gamma_6 g^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_5 g^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 g^n e^{i(m)kh} \\
& + \gamma_3 g^n e^{i(m+1)kh} + \gamma_2 g^n e^{i(m+2)kh} + \gamma_1 g^n e^{i(m+3)kh}.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Şimdi,  $e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$  Euler formülü (4.63) ile verilen denklem de kullanılır ve elde edilen denklem basitleştirilirse,

$$g = \frac{a - ib}{a + ib}$$

büyüme faktörü elde edilir. Burada,

$$a = \gamma_4 + (\gamma_5 + \gamma_3) \cos[hk] + (\gamma_6 + \gamma_2) \cos[2hk] + (\gamma_7 + \gamma_1) \cos[3hk],$$

$$b = (\gamma_5 - \gamma_3) \sin[hk] + (\gamma_6 - \gamma_2) \sin[2hk] + (\gamma_7 - \gamma_1) \sin[3hk].$$

$|g|$  nin modülü 1 olup lineerleştirilmiş algoritma şartsız kararlıdır.

### 4.3.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Bu bölümde, iki nokta lineerleştirme tekniği ile beraber Galerkin yöntemi tek solitary dalga, iki solitary dalganın etkileşimi ve ardışık dalganın gelişimini içeren üç örneğe uygulanmıştır. Bu üç örnek başlangıç şartının farklı değerleri kullanılarak oluşturulmuştur.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları, sunulan sayısal yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu kanıtlamak için (4.65) ile verilen tam solitary dalga çözüm ve

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|$$

hata norm eşitlikleri kullanılarak hesaplanmıştır. Üstelik, sayısal yaklaşımın kütle, momentum ve enerji ile ilgili özellikleri koruduğunu belirtmek için,

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu(U_x)^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b [U^4 - \mu(U_x)^2] dx \tag{4.64}$$

korunum sabitlerindeki değişim gözlemlenmiştir. Gardner ve arkadaşları [37], Roshan [56] tarafından sunulan GRLW dekleminin tam solitary dalga çözümü aşağıdaki forma sahiptir:

$$U(x, t) = \sqrt{\frac{c(p+2)}{2p}} \sec h^2 \left[ \frac{p}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}} (x - (c+1)t - x_0) \right]. \tag{4.65}$$

Burada  $\sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p}}$  dalganın genliği,  $c + 1$  pozitif  $x$  yönünde ilerleyen dalganın hızı ve  $x_0$  keyfi sabittir.

#### 4.3.3.1 Tek solitary dalganın hareketi

Bu problem için başlangıç şartı

$$U(x, 0) = \sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p}} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{p}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}} (x - x_0) \right],$$

olarak alındı. [33, 37, 39, 40, 43, 56, 59] çalışmaları ile uyumlu olması için  $\mu = 1$ ,  $x_0 = 40$ ,  $x \in [0, 100]$  parametreleri ve  $p$ ,  $c$ , konum adımı  $h$ , zaman adımı  $\Delta t$  parametrelerinin farklı değerleri alınmıştır. Sayısal hesaplamalar  $t = 0$  dan  $t = 10$  veya  $t = 20$  zamanına kadar yapılmıştır.

İlk olarak,  $p = 2$ ,  $c = 1$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $p = 2$ ,  $c = 0.3$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  büyüklükleri alındı. Bu değerler  $gen. = 1$  ve  $gen. = 0.54772$  genliklerine sahip solitary dalgalar üretir. Hesaplanan korunum sabitlerinin ve hata normlarının sayısal değerleri Tablo 4.20 ve Tablo 4.21’de verildi. Tablo 4.20’ye göre  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranları, sırasıyla %0.04, %0.05 ve %0.05 değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır. Tablo 4.21 ye göre ise korunum sabitleri zaman ilerledikçe hemen hemen sabit olarak kalmaktadır. Hata normları ise hesaplama boyunca yeterince küçüktür.  $gen. = 0.54772$  genliğine sahip solitary dalga için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının sayısal değeri de  $1.23 \times 10^{-4}$  ve  $0.45 \times 10^{-4}$  değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır.

İkinci durumda,  $p = 3$ ,  $c = 1.2$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $p = 3$ ,  $c = 0.3$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  parametre değerleri alındı. Bu parametrelere göre solitary dalga  $gen. = 1$  ve  $gen. = 0.6$  genliklerine sahip olur. Korunum sabitlerinin ve hata normlarının büyüklükleri Tablo 4.22 ve Tablo 4.23’de listelenmiştir. Tablo 4.22’de görüldüğü gibi  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  korunum sabitlerindeki değişim oranları, sırasıyla %0.5, %0.7 ve %0.7 den daha az bulunmuştur. Tablo 4.23 gösterir ki: Korunum sabitleri zaman ilerledikçe hemen hemen değişmeden durmaktadır. Hata normları ise hesaplama boyunca istenildiği gibi küçüktür.  $gen. = 0.6$  genliğine sahip solitary dalga için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının sayısal değerleri de  $1.92 \times 10^{-4}$  ve  $0.89 \times 10^{-4}$  değerlerinden daha küçüktür.

Üçüncü olarak, eğer  $p = 4$ ,  $c = 4/3$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $p = 4$ ,  $c = 0.3$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  parametreleri seçildiğinde solitary dalga  $gen. = 1$  ve  $gen. = 0.6$  yüksekliklerine sahip

olur. Korunum sabitlerinin ve hata normlarının hesaplanan değerleri Tablo 4.24 ve Tablo 4.25’de verilmiştir. Tablo 4.24;  $I_1, I_2, I_3$  korunum sabitlerindeki değişim oranlarının, sırasıyla %0.2, %0.3 ve %0.3 den daha kk olduğunu ifade etmektedir. Diğer yandan, bu değişim oranları Tablo 4.25’de oldukça kktr.  $p = 2, 3$  parametre değerlerinde de olduğu gibi hata normlarının sayısal değeri makul oranda kktr.  $gen. = 0.6$  genliğine sahip solitary dalga için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının sayısal değerleri de  $3.09 \times 10^{-4}$  ve  $1.45 \times 10^{-4}$  değerlerinden daha kktr.

Tablo 4.20 Tek solitary dalganın  $p = 2$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

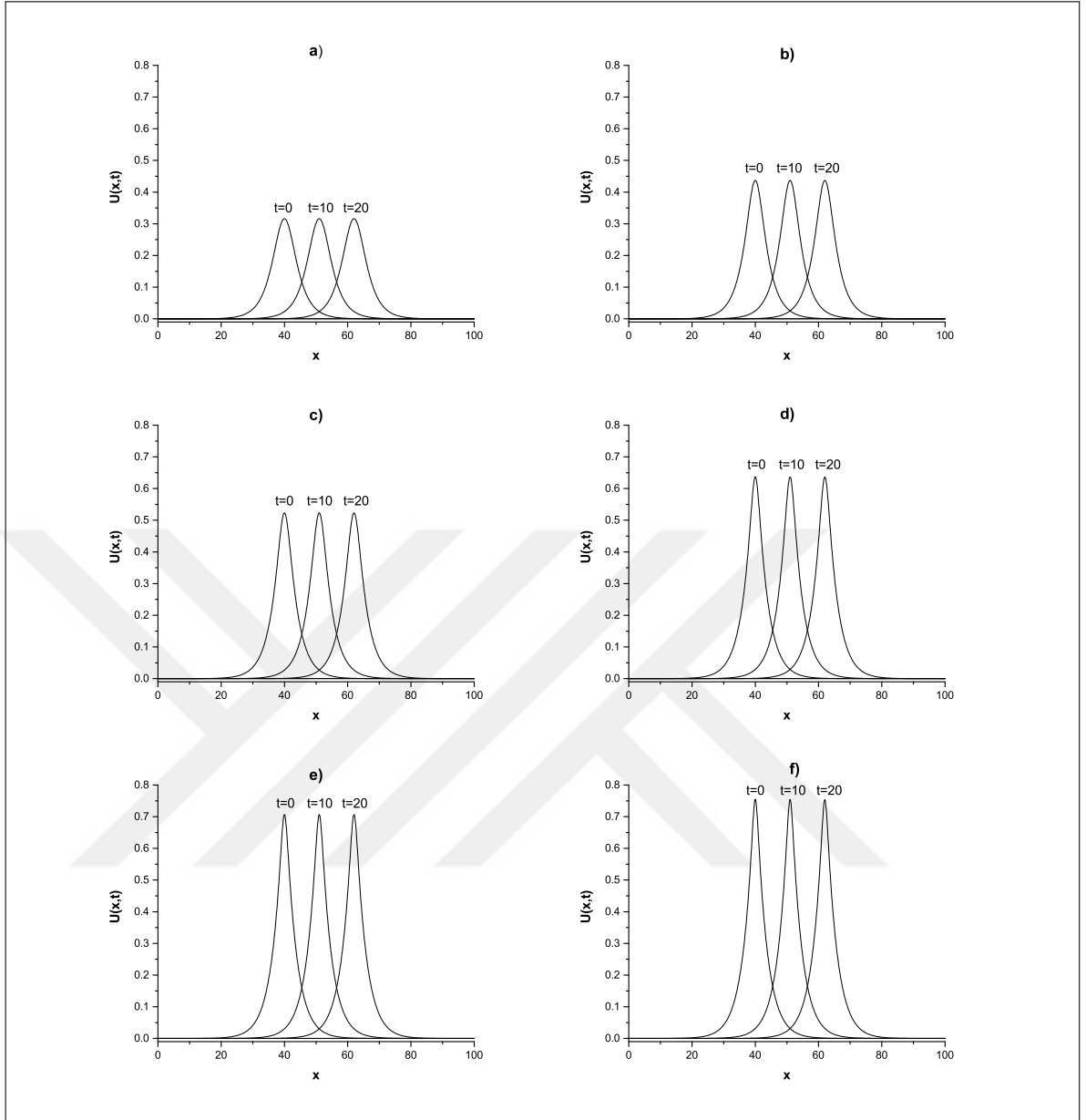
Zaman	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	4.4428661	3.2998133	1.4142140	0.00000000	0.00000000
2	4.4429408	3.2999387	1.4143308	1.95082039	1.19160336
4	4.4430058	3.3000340	1.4144250	2.36484347	1.22370847
6	4.4430683	3.3001243	1.4145151	2.45181423	1.20000405
8	4.4431302	3.3002134	1.4146042	2.45030808	1.15204959
10	4.4431919	3.3003022	1.4146930	2.41750291	1.08099621

Tablo 4.21 Tek solitary dalganın  $p = 2$ ,  $gen. = 0.54772$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0	3.5820205	1.3450941	0.1537283	0.00000000	0.00000000
4	3.5820206	1.3450942	0.1537284	0.87664666	0.42835220
8	3.5820207	1.3450943	0.1537284	1.09331524	0.42259060
12	3.5820207	1.3450943	0.1537284	1.16711699	0.42542846
16	3.5820207	1.3450944	0.1537284	1.20368923	0.43881496
20	3.5820206	1.3450944	0.1537284	1.22736382	0.44722941

Tablo 4.22 Tek solitary dalganın  $p = 3$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	3.7971850	2.8812503	0.9729681	0.00000000	0.00000000
2	3.7980891	2.8826274	0.9747778	6.37523435	4.16206480
4	3.7989816	2.8839827	0.9760069	10.53160077	6.58017074
6	3.7998750	2.8853393	0.9771207	13.02367954	8.10106559
8	3.8007710	2.8867002	0.9782095	13.93740889	8.73017950
10	3.8016702	2.8880662	0.9792942	13.29108053	8.47810737



Şekil 4.13 Tek solitary dalganın a)  $p = 2$ , b)  $p = 3$ , c)  $p = 4$ , d)  $p = 6$ , e)  $p = 8$ , f)  $p = 10$  ve  $c = 0.1$ ,  $x_0 = 40$ ,  $x \in [0, 100]$  için  $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi

Tablo 4.23 Tek solitary dalganın  $p = 3$ ,  $gen. = 0.6$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0	3.6776069	1.5657603	0.2268463	0.00000000	0.00000000
2	3.6776071	1.5657606	0.2268544	1.18720589	0.73102952
4	3.6776072	1.5657607	0.2268573	1.60659681	0.88913800
6	3.6776072	1.5657607	0.2268575	1.76861454	0.81537826
8	3.6776072	1.5657607	0.2268575	1.85663605	0.75460192
10	3.6776072	1.5657608	0.2268574	1.91332225	0.77992648

Tablo 4.24 Tek solitary dalganın  $p = 4$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	3.4687090	2.6716914	0.7292045	0.00000000	0.00000000
2	3.4690660	2.6722659	0.7305244	2.71272493	1.97322350
4	3.4694090	2.6728105	0.7309610	3.80159123	2.65902173
6	3.4697519	2.6733547	0.7313161	3.84205549	2.71392029
8	3.4700954	2.6738997	0.7316538	2.88903866	2.11361885
10	3.4704395	2.6744459	0.7319875	1.51139451	0.85758574

Tablo 4.25 Tek solitary dalganın  $p = 4$ ,  $gen. = 0.6$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0	3.7592865	1.7300236	0.2894191	0.00000000	0.00000000
2	3.7592871	1.7300246	0.2894498	1.91721709	1.20079691
4	3.7592873	1.7300248	0.2894559	2.45184081	1.44560973
6	3.7592874	1.7300249	0.2894566	2.70531310	1.21535724
8	3.7592874	1.7300250	0.2894569	2.90077790	1.31685490
10	3.7592875	1.7300251	0.2894570	3.08940237	1.44471990

Son olarak,  $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$ ,  $c = 0.03$ ,  $c = 0.1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  parametre değerleri alındı. Bu parametre değerlerine göre hata normlarının sayısal verileri Tablo 4.26'da gösterilmiştir. Bu tablodan açıkça görülmektedir ki: Hata değerleri beklenildiği gibi küçük ve hesaplama süresince  $5.2 \times 10^{-3}$  den daha küçük kalmaktadır. Ek olarak, tek solitary dalganın farklı zamanlarda ve farklı  $p$  değerlerindeki hareketleri Şekil 4.13'de görüntülenmiştir. Bu şekle göre artan  $p$  değerine göre dalganın genliğide de artmaktadır.  $t = 0$  dan  $t = 20$  zamanına kadar dalga hareketi incelendiğinde dalganın genlik, hız ve şeklinde herhangi bir değişme olmadan veya çok az bir değişimle sağa doğru ilerlediği görülmektedir. Yani bu dalgalar solitary dalgadır.

Tablo 4.27'de sunulan algoritmayla daha önceki yöntemlerle elde edilen hata normlarının ve korunum sabitlerinin sayısal değerlerinin karşılaştırılması yapılmıştır. Bu tablodaki verilere göre  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  korunum sabitleri daha önce hesaplanan değerler ile oldukça uyumludur. Hata norm değerleri ise daha önce hesaplanana göre en iyi sonuçlardan birisidir. Bu iki sonuca göre sayısal algoritmanın etkin ve isabetli bir yöntem olduğu söylenebilir.

Tablo 4.26 Tek solitary dalganın  $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$ ,  $c = 0.03, 0.1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için hata norm değerleri

		p=2		p=3		p=4		p=6		p=8		p=10	
$c \rightarrow$		0.03	0.1	0.03	0.1	0.03	0.1	0.03	0.1	0.03	0.1	0.03	0.1
$gen. \rightarrow$		0.17	0.31	0.29	0.43	0.38	0.52	0.52	0.63	0.60	0.70	0.66	0.75
<i>Zaman</i>													
$L_2 \times 10^4$	5	4.36	0.16	5.84	0.37	6.89	0.65	8.26	1.44	9.12	2.76	9.71	5.09
	10	5.15	0.27	6.91	0.52	8.15	0.88	9.78	2.24	10.80	5.61	11.53	13.26
	15	5.28	0.36	7.08	0.63	8.35	1.08	10.02	3.25	11.08	9.92	11.91	27.67
	20	5.54	0.44	7.43	0.74	8.77	1.29	10.53	4.51	11.67	15.92	12.66	51.36
$L_\infty \times 10^4$	5	2.21	0.09	2.96	0.21	3.49	0.36	4.18	0.82	4.61	1.68	4.90	3.20
	10	2.11	0.13	2.83	0.25	3.33	0.43	4.00	1.18	4.41	3.09	4.68	7.34
	15	2.01	0.16	2.69	0.29	3.18	0.51	3.81	1.66	4.20	5.12	4.46	14.39
	20	4.16	0.19	5.57	0.34	6.58	0.61	7.88	2.22	8.69	7.88	9.23	25.82

Tablo 4.27 Tek solitary dalganın  $p = 2, 3, 4$  ve  $x \in [0, 100]$  için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

	Methods	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
$p = 2$	CBSC-CN [27]	16.3900	9.2400	4.4420	3.2990	1.4130
$c = 1$	CBSC+PA-CN [27]	20.3000	11.2000	4.4400	3.2960	1.4110
$h = 0.2$	CBSC [40]	9.3019	5.4371	4.4428	3.2998	1.4142
$\Delta t = 0.025$	MFC [43]	3.9140	2.0190	4.4428	3.2997	1.4141
$t = 10$	QBSPG [56]	3.0053	1.6874	4.4428	3.2998	1.4141
	QBSC [39]	2.4155	1.0797	4.4431	3.3003	1.4146
	EBSC [59]	2.3909	1.0647	4.4428	3.2998	1.4142
	CBSG	2.4175	1.0809	4.4431	3.3003	1.4146
$p = 3$	QBSPG [56] t=1	0.0101	0.0080	3.6775	1.5657	0.2268
$c = 0.3$	t=5	0.0409	0.0238	3.6775	1.5657	0.2268
$h = 0.1$	t=10	0.0719	0.0377	3.6775	1.5657	0.2268
$\Delta t = 0.01$	CBSG t=1	0.0706	0.0514	3.6776	1.5657	0.2268
	t=5	0.1702	0.0876	3.6776	1.5657	0.2268
	t=10	0.1913	0.0779	3.6776	1.5657	0.2268
$p = 4$	QBSPG [56] t=1	0.0158	0.0138	3.7592	1.7299	0.2894
$c = 0.3$	t=5	0.0542	0.0382	3.7592	1.7299	0.2894
$h = 0.1$	t=10	0.1225	0.0662	3.7592	1.7299	0.2894
$\Delta t = 0.01$	CBSG t=1	0.1222	0.0983	3.7592	1.7300	0.2894
	t=5	0.2591	0.1357	3.7592	1.7300	0.2894
	t=10	0.3089	0.1444	3.7592	1.7300	0.2894

### 4.3.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi

İkinci problem olarak

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt[p]{\frac{c_i(p+2)}{2p}} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{p}{2} \sqrt{\frac{c_i}{\mu(c_i+1)}} (x - x_i) \right] \quad (4.66)$$

başlangıç şartı için çözümler incelendi. Bu başlangıç şartı ile  $gen. = 2$  ve  $gen. = 1$  genliklerine sahip aynı yönde hareket eden iki pozitif solitary dalga oluşur. Burada  $c_i$  ve  $x_i$ ,  $i = 1, 2$  keyfi sabitlerdir.

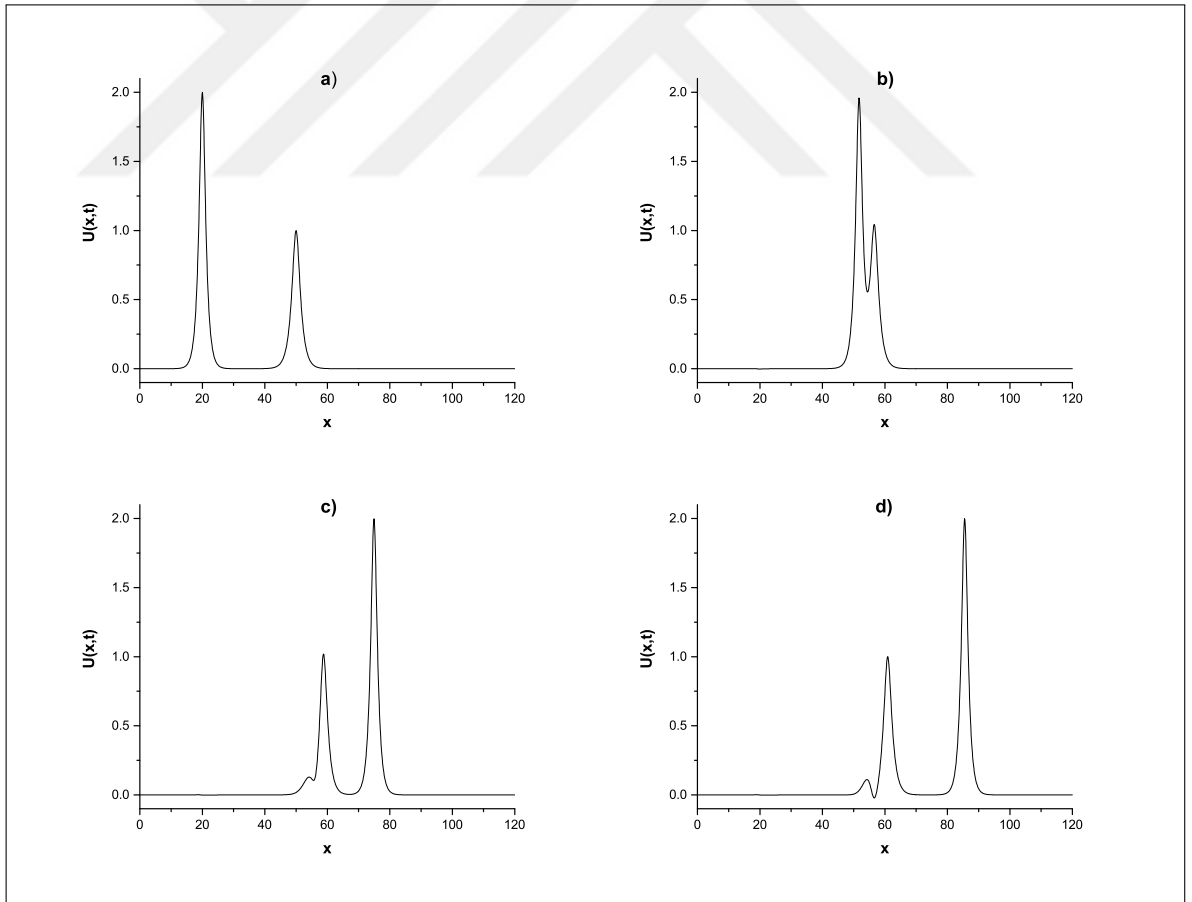
İlk olarak  $p = 2$ ,  $c_1 = 4$ ,  $c_2 = 1$ ,  $x_1 = 25$ ,  $x_2 = 55$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$ ,  $\mu = 1$ ,  $x \in [0, 250]$ ; ikinci olarak  $p = 3$ ,  $c_1 = 48/5$ ,  $c_2 = 6/5$ ,  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 50$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\mu = 1$ ,  $x \in [0, 120]$  ve üçüncü olarak  $p = 4$ ,  $c_1 = 64/3$ ,  $c_2 = 4/3$ ,  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 80$ ,  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\mu = 1$ ,  $x \in [0, 200]$  olarak seçilmiştir. Sayısal hesaplamalar Tablo 4.28 ve Tablo 4.29'da verilmiştir. Tablolardaki sonuçlara göre korunum sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişimleri yeterince küçük ve sonuçlar [56] ile oldukça uyumludur. İki solitary dalganın farklı zaman adımlarındaki hareketi Şekil 4.14 ve Şekil 4.15'de grafik çizilerek gösterilmiştir. Bu grafikler gösterir ki başlangıçta büyük genliğe sahip dalga küçük genliğe sahip dalganın solunda konumlandırılmıştır. Solitary dalga teorisinde de bahsedildiği gibi büyük genliğe sahip dalganın hızı daha büyüktür. Bu yüzden zaman ilerledikçe büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgayı yakaladığı görülmektedir. Belirli bir zaman sonra ise büyük genlikli dalga küçük genlikli dalganın üzerine biner. Yani dalgalar aynı yönde ilerlerken çarpışma gerçekleşir. Daha sonra bu iki dalga birbirinden ayrılmaya başlar. Ayrılmadan sonra büyük genlikli dalga önde küçük genlikli dalga arkada olarak mevcut hız, şekil ve genliklerini koruyarak yollarına devam ederler. Sonuç olarak bu dalgalara solitonlardır diyebiliriz.

Tablo 4.28 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 2$ ,  $gen. = 2, 1$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 250]$  için korunum sabitleri

Zaman	$I_1$		$I_2$		$I_3$	
	CBSG	QBSPG [56]	CBSG	QBSPG [56]	CBSG	QBSPG [56]
0	11.4676	11.4677	14.6290	14.6286	22.8804	22.8788
4	11.4674	11.4677	14.6287	14.6292	22.8783	22.8811
8	11.4685	11.4677	14.6360	14.6229	22.9020	22.8798
12	11.4663	11.4677	14.6257	14.6299	22.8717	22.8803
16	11.4664	11.4677	14.6260	14.6295	22.8686	22.8805
20	11.4662	11.4677	14.6253	14.6299	22.8650	22.8806

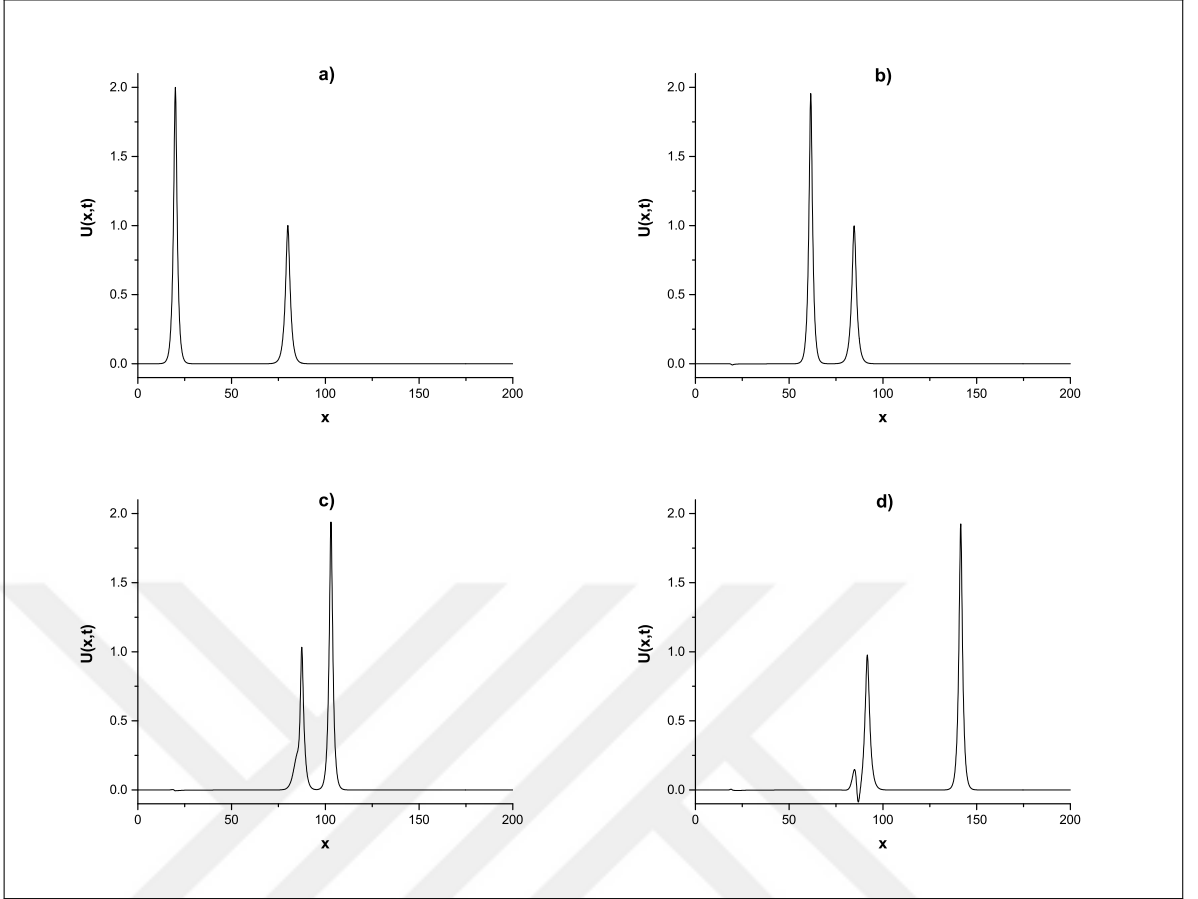
Tablo 4.29 İki solitary dalganın etkileşiminin  $p = 3, 4$  ve  $gen. = 2, 1$  için korunum sabitleri

Zaman	0	1	2	3	4	5	6
$p=3$							
$I_1$	9.6907	9.6907	9.6906	9.6917	9.6898	9.6898	9.6901
$I_2$	12.9443	12.9443	12.9440	12.9489	12.9418	12.9420	12.9426
$I_3$	17.0187	17.0311	17.0324	18.0050	16.9849	16.9222	16.9557
$p=4$							
$I_1$	8.8342	8.7559	8.7089	8.6774	8.6518	8.6322	8.6134
$I_2$	12.1707	11.9304	11.7871	11.6932	11.6179	11.5560	11.4992
$I_3$	14.0296	13.3472	12.9204	13.2047	12.1972	12.0924	11.9640



Şekil 4.14 İki solitary dalganın  $p = 3$ ; a)  $t = 0$ , b)  $t = 3$ , c)  $t = 5$ , d)  $t = 6$ 'daki hareketi





Şekil 4.15 İki solitary dalganın  $p = 4$ ; a)  $t = 0$ , b)  $t = 2$ , c)  $t = 4$ , d)  $t = 6$ 'daki hareketi

### 4.3.3.3 Ardışık dalgaların gelişimi

Son olarak,

$$U(x, 0) = \frac{1}{2}U_0 \left[ 1 - \tanh\left(\frac{x - x_c}{d}\right) \right] \quad (4.67)$$

başlangıç şartı ile birlikte ardışık dalgaların gelişimi incelendi. Bu başlangıç şartı  $t = 0$  anında denge seviyesinden yukarıda bulunan suyun yükseltisini belirtir.  $d$  durgun su ve derin su arasındaki eğimi temsil eder. (4.67) ile verilen denklem,  $x = x_c$  noktasına yerleştirilmiştir. [1, 34, 35] çalışmaları ile uyumlu olması için  $U_0 = 0.1, \mu = 1/6, x_c = 0, d = 5, h = 0.1, \Delta t = 0.1, x \in [-36, 300]$  alındı. Bu parametre değerlerine göre  $p = 2, 3, 4$  için Galerkin yöntemi ile elde edilen korunum sabitleri ve quintik kollokasyon yöntemi [83] ile  $U_0 = 0.1, \mu = 3/2, d = 5, h = 0.2, \Delta t = 0.1, x \in [0, 250]$  ve  $p = 2$  parametreleri için bulunan korunum sabitleri Tablo 4.30'da gösterilmiştir. Bu tabloya göre  $t = 0$  dan  $t = 200$  zamanına kadar korunum sabitlerindeki değişim  $p$  değerinin artmasıyla azalmakla beraber, değişim oranı %1.02 veya daha küçük kalmaktadır. Ayrıca, bu değişim miktarı [83] de elde edilen değişim oranından çok

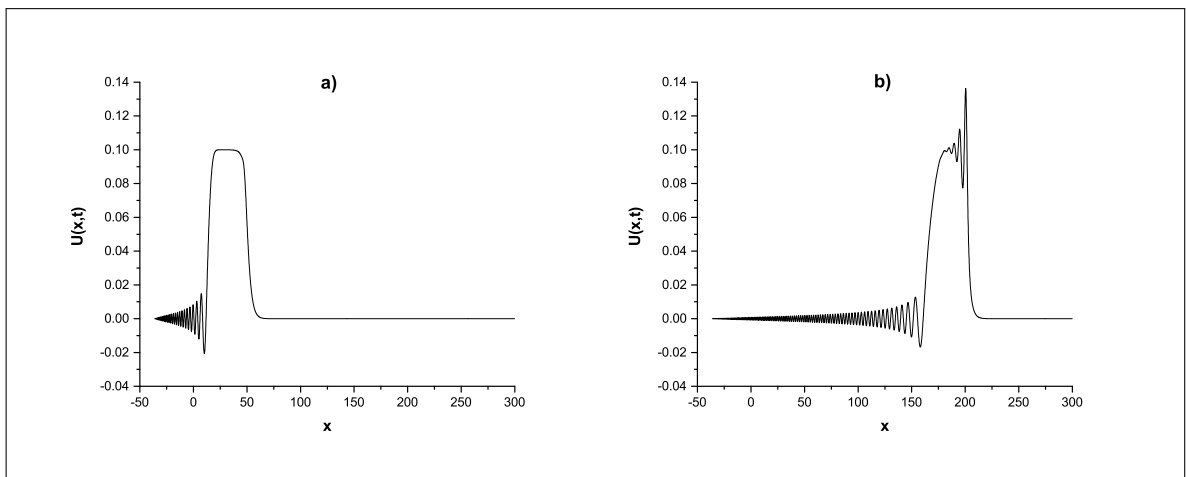
daha küçüktür. Ardışık dalgaların gelişiminin hareketi ise Şekil 4.16, Şekil 4.17 ve Şekil 4.18’de gözlemlenmiştir. Bu üç şekilden anlaşıldığı gibi  $t = 50$  anında  $x = -36$  konumundan başlayarak  $x = 10$  noktası civarına kadar artan yükseklikli ardışık dalgalar oluşmaktadır.  $t = 200$  anında ise  $x = -36$  noktasından  $x = 150$  noktasına kadar artan genlikli ardışık dalgalar oluşmaktadır. Daha sonra solitary dalganın ani bir sıçrama hareketi ile genliği büyür ve daha sonra dalga yok olmaya başlar.

Tablo 4.30 Ardışık dalgaların gelişimi için korunum sabitleri

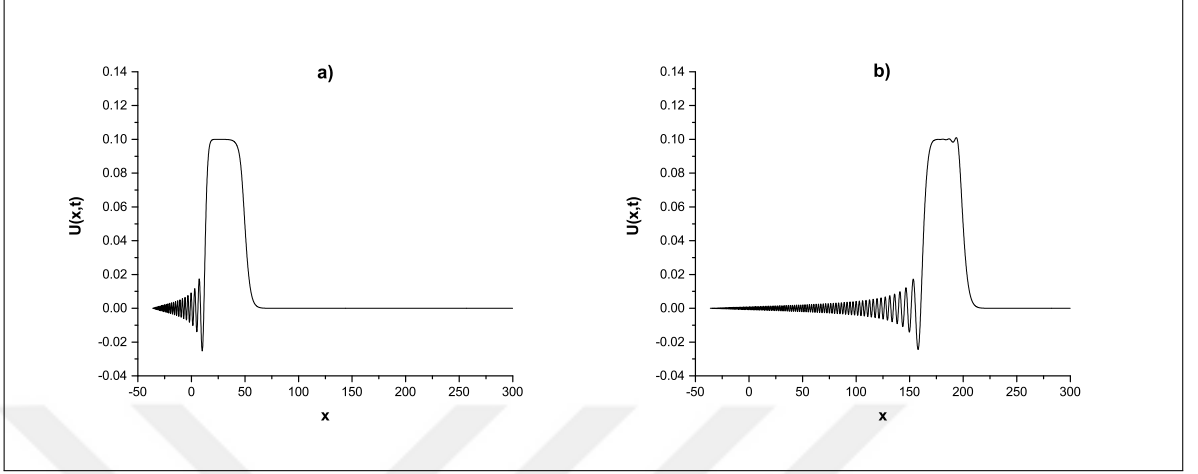
$U_0 = 0.1, x_0 = 0, d = 5, \mu = 1/6, h = 0.1, \Delta t = 0.1, x \in [-36, 300]$									
Time	$I_1$			$I_2$			$I_3$		
↓	p=2	p=3	p=4	p=2	p=3	p=4	p=2	p=3	p=4
0	3.5949	3.5949	3.5949	0.3344	0.3344	0.3344	0.0031	0.0031	0.0031
50	3.6051	3.6050	3.6049	0.3348	0.3350	0.3350	0.0019	0.0016	0.0015
100	3.6051	3.6050	3.6050	0.3348	0.3350	0.3350	0.0018	0.0016	0.0015
150	3.6050	3.6050	3.6049	0.3350	0.3349	0.3350	0.0017	0.0016	0.0015
200	3.6050	3.6050	3.6049	0.3354	0.3349	0.3350	0.0012	0.0016	0.0015

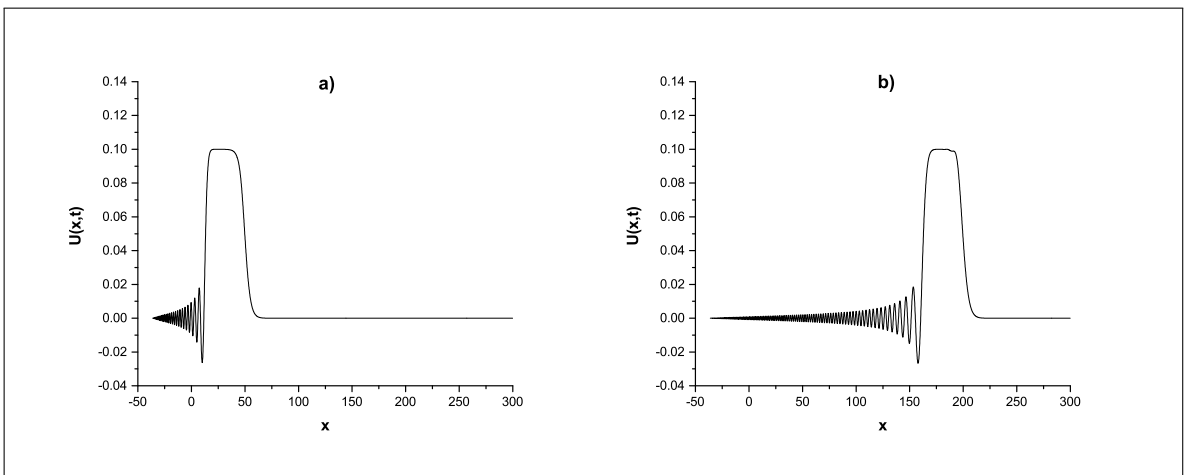
QBSC [83] - $U_0 = 0.1, d = 5, \mu = 3/2, h = 0.2, \Delta t = 0.1, x \in [0, 250]$			
Time	$I_1$	$I_2$	$I_3$
↓	p=2	p=2	p=2
0	4.0000	0.3759	0.0025
50	4.8507	0.4620	0.0034
100	5.7016	0.5480	0.0042
150	6.5531	0.6341	0.0051
200	7.4055	0.7204	0.0060



Şekil 4.16  $p = 2$ ; a)  $t = 50$ , b)  $t = 200$  değerleri için ardışık dalgaların gelişimi



Şekil 4.17  $p = 3$ ; a)  $t = 50$ , b)  $t = 200$  değerleri için ardışık dalgaların gelişimi



Şekil 4.18  $p = 4$ ; a)  $t = 50$ , b)  $t = 200$  değerleri için ardışık dalgaların gelişimi

## 5. BÖLÜM

### SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon ve Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak, GEW ve GRLW denklemlerinin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Sayısal çözüm yöntemleri, başlangıç şartının farklı seçimleri ile oluşturulan tek solitary dalga, iki ve üç solitary dalganın etkileşimi, Maxwellian başlangıç şartı ile dalga oluşumu ve ardışık dalgaların gelişimini kapsayan örneklere uygulanmıştır. Sayısal yöntemlerin etkinliğini kanıtlamak için,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları;  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  ile ifade edilen kütle, momentum ve enerji ile ilgili korunum sabitleri hesaplanmıştır. Elde edilen hata normlarının sayısal değerleri oldukça küçük ve daha önce elde edilen sayısal sonuçlardan daha iyi olduğu görülmüştür. Yine, korunum sabitleri hesaplama süresince hemen hemen sabit ve referans alınan çalışmalarla uyumlu bulunmuştur. Sayısal yöntemler ile elde edilen GEW ve GRLW denklemlerinin çözümleri grafik çizilerek gösterilmiştir. Bu şekillere göre, elde edilen çözümlerin solitary dalgalar ve solitonlar olduğu görülmüştür. Sonuç olarak, sayısal algoritmaların GEW ve GRLW denklemlerinin solitary dalga çözümlerini elde etmede daha başarılı ve daha etkilidir. Sayısal algoritmalar, benzer yapıdaki lineer olmayan problemlerin sayısal çözümlerini elde etmede güvenilir bir şekilde kullanılabilirliği düşünülmektedir.

## KAYNAKLAR

1. Peregrine, D. H., "Calculations of the development of an undular bore", *Journal of Fluid Mechanics*, 25 (2), 321-330, 1966.
2. Peregrine, D. H., "Long waves on a beach", *Journal of Fluid Mechanics*, 27 (4), 815-827, 1967.
3. Benjamin, T. B., Bona, J. L., Mahony, J. J., "Model equations for long waves in non-linear dispersive systems", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 272 (1220), 47-78, 1972.
4. Morrison, P. J., Meiss, J. D., Carey, J. R., "Scattering of RLW solitary waves", *Physica D*, 11, 324-336, 1984.
5. Raslan, K. R., "Collocation method using cubic B-spline for the generalised equal width equation", *Int. J. Simulation and Process Modelling*, 2, 37-44, 2006.
6. Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., "Solitary waves of the equal width wave equation", *Journal of Computational Physics*, 101 (1), 218-223, 1991.
7. Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ayoup, F. A., Amein, N. K., "Simulations of the EW undular bore", *Commun. Numer. Meth. En.*, 13 (7), 583-592, 1997.
8. Zaki, S. I., "A least-squares finite element scheme for the EW equation", *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 189 (2), 587-594, 2000.
9. Doğan, A., "Application of Galerkin's method to equal width wave equation", *Applied Mathematics and Computation*, 160 (1), 65-76, 2005.
10. Esen, A., "A numerical solution of the equal width wave equation by a lumped Galerkin method", *Applied Mathematics and Computation*, 168 (1), 270-282, 2005.
11. Saka, B., "A finite element method for equal width equation", *Applied Mathematics and Computation*, 175 (1), 730-747, 2006.
12. Dağ, İ., Saka, B., "A cubic B-spline collocation method for the EW equation", *Mathematical and Computational Applications*, 9 (3), 381-392, 2004.
13. Raslan, K. R., "Collocation method using quartic B-spline for the equal width (EW) equation", *Applied Mathematics and Computation*, 168 (2), 795-805, 2005.

14. Fazal-i-Haq, F., Shah, I. A., Ahmad, S., "Septic B-spline collocation method for numerical solution of the equal width wave (EW) equation", *Life Science Journal*, 10 (1), 253-260, 2013.
15. Esen, A., "A lumped Galerkin method for the numerical solution of the modified equal-width wave equation using quadratic B-splines", *International Journal of Computer Mathematics*, 83 (5-6), 449-459, 2006.
16. Saka, B., "Algorithms for numerical solution of the modified equal width wave equation using collocation method", *Mathematical and Computer Modelling*, 45 (9-10), 1096-1117, 2007.
17. İslam, S., Haq, F., Tirmizi, İ. A., "Collocation method using quartic B-spline for numerical solution of the modified equal width wave equation", *J. Appl. Math. & Informatics*, 28 (3-4), 611-624, 2010.
18. Geyikli, T., Karakoç, S. B. G., "Septic B-spline collocation method for the numerical solution of the modified equal width wave equation", *Applied Mathematics*, 2011 (2), 739-749, 2011.
19. Karakoç, S. B. G., Geyikli, T., "Numerical solution of the modified equal width wave equation", *International Journal of Differential Equations*, 2012, 1-15, 2012.
20. Geyikli, T., Karakoç, S. B. G., "Petrov-Galerkin method with cubic B-splines for solving the MEW equation", *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 19 (2), 215-227, 2012.
21. Hamdi, S., Enright, W. H., Schiesser, W. E., Gottlieb, J. J., Alaal, A., "Exact solutions of the generalized equal width wave equation", in: *Proceedings of the International Conference on Computational Science and Its Applications, LNCS*, 2668, 725-734, 2003.
22. Evans, D. J., Raslan, K. R., "Solitary waves for the generalized equal width (GEW) equation", *International Journal of Computer Mathematics*, 82 (4), 445-455, 2005.
23. Roshan, T., "A Petrov-Galerkin method for solving the generalized equal width (GEW) equation", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 1641-1652, 2011.
24. Panahipour, H., "Numerical simulation of GEW equation using RBF collocation method", *Communications in Numerical Analysis*, 2012, 1-28, 2012.

25. Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., Akbari, M., Rahimian, M., “Exact solutions for generalized equal width equation”, *Math. Sci. Lett.* 2, 2, 99-106, 2013.
26. Doğan, A., “Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin’s method”, *Applied Mathematical Modelling*, 26, 771-783, 2002.
27. Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Dağ, İ., “A B-spline finite element method for the regularized long wave equation”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11 (1), 59-68, 1995.
28. Raslan, K. R., “Collocation method using quadratic B-spline for the RLW equation”, *International Journal of Computer Mathematics*, 78 (3), 399-412, 2001.
29. Dağ, İ., Saka, B., Irk, D., “Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 159 (2), 373-389, 2004.
30. Soliman, A. A., Hussien, M. H., “Collocation solution for RLW equation with septic spline”, *Applied Mathematics and Computation*, 161 (2), 623-636, 2005.
31. Saka, B., Dağ, İ., Irk, D., “Quintic B-spline collocation method for numerical solution of the RLW equation”, *The ANZIAM Journal*, 49 (3), 389-410, 2008.
32. Saka, B., Sahin, A., Dağ, İ., “B-spline collocation algorithms for numerical solution of the RLW equation”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27 (3), 581-607, 2011.
33. Dağ, İ., Saka, B., Irk, D., “Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 190, 532-547, 2006.
34. Esen, A., Kutluay, S., “Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 174, 833-845, 2006.
35. Mei, L., Chen, Y., “Numerical solutions of RLW equation using Galerkin method with extrapolation techniques”, *Computer Physics Communications*, 183, 1609-1616, 2012.
36. Lin, B., “Parametric spline solution of the regularized long wave equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 243, 358-367, 2014.

37. Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ayoub, F. A., Ameen, N. K., “Approximations of solitary waves of the MRLW equation by B-spline finite element”, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 22, 183–193, 1997.
38. Raslan, K. R., EL-Danaf, T. S., “Solitary waves solutions of the MRLW equation using quintic B-splines”, *Journal of King Saud University - Science*, 22 (3), 161-166, 2010.
39. Karakoç, S. B. G., Yağmurlu, N. M., Uçar, Y., “Numerical approximation to a solution of the modified regularized long wave equation using quintic B-splines”, *Boundary Value Problems*, 2013 (27), 1-17, 2013.
40. Khalifa, A. K., Raslan, K. R., Alzubaidi, H. M., “A collocation method with cubic B-splines for solving the MRLW equation”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212 (2), 406-418, 2008.
41. Haq, F., Islam, S., Tirmizi, I. A., “A numerical technique for solution of the MRLW equation using quartic B-splines”, *Applied Mathematical Modelling*, 34 (12), 4151-4160, 2010.
42. Karakoç, S. B. G., Ak, T., Zeybek, H., “An efficient approach to numerical study of the MRLW equation with B-spline collocation method”, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 1-15, 2014.
43. Ali, A., “Mesh Free Collocation Method for Numerical Solution of Initial-boundary Value Problems using Radial Basis Functions”, Ph. D. thesis, Ghulam Ishaq Khan Institute of Engineering Sciences and Technology, Pakistan, 2009.
44. Dağ, İ., Irk, D., Sari, M., “The extended cubic B-spline algorithm for a modified regularized long wave equation”, *Chinese Physics B*, 22 (4), 2013.
45. Karakoç, S. B. G., Uçar, Y., Yağmurlu, N. M., “Numerical solutions of the MRLW equation by cubic B-spline Galerkin finite element method”, *Kuwait J. Sci.*, 42 (2), 141-159, 2015.
46. Bona, J. L., McKinney, W. R., Restrepo, J. M., “Stable and unstable solitary-wave solutions of the generalized regularized long-wave equation”, *Journal of Nonlinear Science*, 10, 603-638, 2000.



47. Kaya, D., El-Sayed, S. M., "An application of the decomposition method for the generalized KdV and RLW equations", *Chaos, Solitons and Fractals*, 17, 869-877, 2003.
48. Hamdi, S., Enright, W. H., Schiesser, W. E., Gottlieb, J. J., "Exact solutions and invariants of motion for general types of regularized long wave equations", *Mathematics and Computers in Simulation*, 65, 535-545, 2004.
49. Ramos, J. I., "Solitary wave interactions of the GRLW equation", *Chaos, Solitons & Fractals*, 33, 479-491, 2007.
50. Kaya, D., "A numerical simulation of solitary-wave solutions of the generalized regularized long-wave equation", *Applied Mathematics and Computation*, 149, 833-841, 2004.
51. EL-Danaf, T. S., Raslan, K. R., Ali, K. K., "New numerical treatment for the generalized regularized long wave equation based on finite difference scheme", *International Journal of Soft Computing and Engineering*, 4 (4), 16-24, 2014.
52. Guo, P. F., Zhang, L. W., Liew, K. M., "Numerical analysis of generalized regularized long wave equation using the element-free kp-Ritz method", *Applied Mathematics and Computation*, 240, 91-101, 2014.
53. Zhang, L., "A finite difference scheme for generalized regularized long-wave equation", *Applied Mathematics and Computation*, 168, 962-972, 2005.
54. Soliman, A. A., "Numerical simulation of the generalized regularized long wave equation by He's variational iteration method", *Mathematics and Computers in Simulation*, 70, 119-124, 2005.
55. Mokhtari, R., Mohammadi, M., "Numerical solution of GRLW equation using Sinc-collocation method", *Computer Physics Communications*, 181, 1266-1274, 2010.
56. Roshan, T., "A Petrov-Galerkin method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation", *Computers and Mathematics with Applications*, 63, 943-956, 2012.
57. Huang, D. M., Zhang, L. W., "Element-free approximation of generalized regularized long wave equation", *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 1-10, 2014.
58. Hammad, D. A., El-Azab, M. S., "A  $2N$  order compact finite difference method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation", *Applied Mathematics and Computation*, 253, 248-261, 2015.

59. Mohammadi, R., “Exponential B-spline collocation method for numerical solution of the generalized regularized long wave equation”, *Chinese Physics B*, 24, 1-14, 2015.
60. Mittal, R. C., Tripathi, A., “Numerical solutions of generalized Burgers–Fisher and generalized Burgers–Huxley equations using collocation of cubic B-splines”, *International Journal of Computer Mathematics*, 93, 1053-1077, 2015.
61. Zaki, S. I., “A quintic B-spline finite elements scheme for the KdVB equation”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188 (1), 121-134, 2000.
62. Ismail, M. S., “Numerical solution of complex modified Korteweg-de Vries equation by collocation method”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 749-759, 2009.
63. Irk, D., Dağ, İ., “Quintic B-spline collocation method for the generalized nonlinear Schrödinger equation”, *Journal of the Franklin Institute*, 348, 378-392, 2011.
64. Mittal, R. C., Jain, R. K., “Numerical solution of General Rosenau-RLW Equation using Quintic B-splines Collocation Method”, *Communications in Numerical Analysis*, 2012, 1-16, 2012.
65. Karakoç, S. B. G., Zeybek, H., Ak, T., “Numerical solutions of the Kawahara equation by the septic B-spline collocation method”, *Statistics Optimization and Information Computing*, 2 (3), 211-221, 2014.
66. Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., “Solitary waves of the regularized long wave equation”, *J. Comput. Phys.*, 91, 441-459, 1990.
67. Saka, B., Dağ, İ., “Quartic B-spline Galerkin approach to the numerical solution of the KdVB equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 215 (2), 746-758, 2009.
68. Kutluay, S., Uçar, Y., “A Quadratic B-spline Galerkin Approach for Solving a Coupled KdV Equation”, *Mathematical Modelling and Analysis*, 18 (1), 103-121, 2013.
69. Esen, A., Uçar, Y., Yağmurlu, N., Tasbozan, O., “A Galerkin Finite Element Method to Solve Fractional Diffusion and Fractional Diffusion-Wave Equations”, *Mathematical Modelling and Analysis*, 18 (2), 260-273, 2013.

70. Kutluay, S., Uçar, Y., “Numerical solution of a coupled modified Korteweg–de Vries equation by the Galerkin method using quadratic B-splines”, *International Journal of Computer Mathematics*, 90 (11), 2353-2371, 2013.
71. Uçar, Y., Karağaç, B., Esen, A., “A new approach on numerical solutions of the Improved Boussinesq type equation using quadratic B-spline Galerkin finite element method”, *Applied Mathematics and Computation*, 270, 148-155, 2015.
72. Dağ, İ., “Studies of B-spline finite elements”, *Prifysgol Bangor University Department of Mathematics*, Ph. D. Thesis, s.1-172, Bangor, Gwynedd, 1994.
73. Saka, B., “RLW ve K-S denklemlerinin B-spline kolokeyşin metodları ile çözümleri”, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-107, Eskişehir, 2002.
74. Irk, D., “Bazı kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri”, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-148, Eskişehir, 2007.
75. Uçar, Y., “B-spline sonlu eleman yöntemleri ile coupled diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri”, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-240, Malatya, 2011.
76. Karakoç, S. B. G., “Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri”, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-219, Malatya, 2011.
77. Yağmurlu, N. M., “2-boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin B-spline sonlu eleman yöntemleri ile nümerik çözümleri”, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-245, Malatya, 2011.
78. Prenter, P. M., “Splines and variational methods”, J. Wiley, New York, 1975.
79. Rubin, S. G., Graves, R. A., “A cubic spline approximation for problems in fluid mechanics”, NASA TR R-436, Washington, DC, 1975.
80. Caldwell, J., Smith, P., “Solution of Burgers’ equation with a large Reynolds number”, *Appl. Math. Modelling.*, 6, 381-386, 1982.
81. Russel, J.S., “Report on waves”, *Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science (John Murray, London)*, 311-390, 1844.

82. Zaki, S. I., "Solitary waves of the Korteweg-de Vries Burgers' equation", *Comput. Phys. Commun.*, 126, 207-218, 2000.
83. Raslan, K. R., "Numerical study of the Modified Regularized Long Wave (MRLW) equation", *Chaos, Solitons & Fractals*, 42 (3), 1845-1853, 2009.



## ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Manisa’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Manisa’da tamamladı. 2004-2008 yılları arasında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Bölümü’nde lisans eğitimi aldı. 2011 yılında Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans eğitimi tamamladı ve aynı yıl Doktora eğitimine başladı. 2012 yılından itibaren Abdullah Gül Üniversitesi Bilgisayar Bilimleri Fakültesi Uygulamalı Matematik Bölümü’nde öğretim elemanı olarak çalışmaktadır.

## BİLİMSEL FAALİYETLER

### TEZLER

- Zeybek, H., “Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümü İçin Taylor Matris Yöntemi”, *Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Yüksek Lisans Tezi, 1-68, Nevşehir, 2011.

### SCI,SSCI,AHCI İNDEKSLERİNE GİREN DERGİLERDE YAYINLANAN MAKALELER

- Karakoç, S.B.G., Zeybek, H., “Solitary-wave solutions of the GRLW equation using septic B-spline collocation method”, *Applied Mathematics and Computation*, 2016 (Tezden Üretilen).
- Karakoç, S.B.G., Zeybek, H., “A septic B-spline collocation method for solving the generalized equal width wave equation”, *Kuwait Journal of Science*, 43 (3), 2016 (Tezden Üretilen).
- Zeybek, H., Karakoç, S.B.G., “A numerical investigation of the GRLW equation using lumped Galerkin approach with cubic B-spline”, *SpringerPlus*, 5 (199), 1-17, 2016 (Tezden Üretilen).
- Karakoç, S.B.G., Ak, T., Zeybek, H., “An Efficient Approach To Numerical Study Of The Mrlw Equation With B-Spline Collocation Method”, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 1-15, 2014.

### DİĞER DERGİLERDE YAYINLANAN MAKALELER

- Karakoç, S.B.G., Zeybek, H., “A cubic B-spline Galerkin approach for the numerical simulation of the GEW equation”, *Statistics, Optimization and Information Computing*, 4 (1), 30-41, 2016 (Tezden Üretilen).
- Karakoç, S.B.G., Zeybek, H., Ak, T., “Numerical solutions of the Kawahara equation by the septic B-spline collocation method”, *Statistics, Optimization and Information Computing*, 2 (3), 211-221, 2014.

#### İNCELEME ALTINDA OLAN MAKALELER

- Zeybek, H., Karakoç, S.B.G., “Application of the B-spline finite element method to the GEW equation”, *Electronic Transactions on Numerical Analysis* (Tezden Üretilen, SCIE).
- Zeybek, H., Karakoç, S.B.G., “An efficient algorithm to compute the solitary-wave solutions of the GRLW equation”, *Mediterranean Journal of Mathematics* (Tezden Üretilen, SCIE).

#### HAKEMLİ KONGRE / SEMPOZYUMLARIN BİLDİRİ KİTAPLARINDA YER ALAN YAYINLAR

- Ak, T., Zeybek, H., Karakoç, S.B.G., “Numerical Scheme for Rosenau-KdV equation using finite element method”, *ICMME 2016 International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, Elazığ, Türkiye, 12-14 Mayıs 2016.
- Ak, T., Zeybek, H., Karakoç, S.B.G., “Simulation of Shallow Water Waves with MKdV Equation Using Finite Element Method”, *ICANAS 2016 International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences*, Antalya, Türkiye, 21-23 Nisan 2016.
- Zeybek, H., Ak, T., Karakoç, S.B.G., “B-spline Finite Element Approach for the Numerical Solution of the GRLW Equation”, *ICANAS 2016 International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences*, Antalya, Türkiye, 21-23 Nisan 2016 (Tezden Üretilen).
- Karakoç, S.B.G., Zeybek, H., “Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli Dalga (Gew) Denklemi nin Septik B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemi İle Çözümü”, *14. Matematik Sempozyumu*, 208-211, Niğde, Türkiye, 14-16 Mayıs 2015 (Tezden Üretilen).

- Karakoç, S.B.G., Zeybek, H., “Solitary-Wave Solutions Of The Gew Equation Using Quintic B-Spline Collocation Method”, *ICMCMST 2015 The International Conference Mathematical and Computational Modelling in Science and Technology*, 145-146, İzmir, Türkiye, 2-7 Ağustos 2015 (Tezden Üretilen).
- Karakoç, S.B.G., Ak, T., Zeybek, H., “Application Of The Septic B-Spline Collocation Method To The Mrlw Equation”, *Karatekin Mathematics Days 2014*, 1-1, Çankırı, Türkiye, 11-13 Haziran 2014.
- Dolapci, İ.T., Zeybek, H., “Değişken Katsayılı Isı Ve Dalga Tipindeki Lineer Denklemlerin Çözümü İçin Diferansiyel Dönüşüm Metodu”, *23. Ulusal Matematik Sempozyumu*, 167-167, Kayseri, Türkiye, 4-7 Ağustos 2010.

#### DESTEKLENEN PROJELER

- “Septik B-Spline Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli (GEW) ve Genelleştirilmiş Düzenli Uzun (GRLW) Dalga Denklemlerinin Sayısal Çözümleri”, BAP Arastırma Projesi, NEÜ BAP, 1- 15F12 , 2015, Araştırmacı, Devam Ediyor (Tezden Üretilen).

#### KATILDIĞI BİLİMSEL KONGRE / SEMPOZYUM ve BİLİMSEL TOPLANTILAR

- Uygulamalı Matematik Çalıştayı, Ankara, Şubat 2016.

#### BİLİMSEL HAKEMLİKLER

- Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science (SCIE), Dergide Hakemlik, Nisan 2016.
- New Trends in Mathematical Sciences, Dergide Hakemlik, Aralık 2015.
- General Mathematics Notes (GMN), Dergide Hakemlik, Kasım 2015.

