

**T.C.**  
**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU-KdV VE**  
**GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU-RLW**  
**DENKLEMLERİNİN KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE**  
**NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan**  
**Mahmut GÜZELOKUR**

**Tez Danışmanı**  
**Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ**

**Matematik Anabilim Dalı**  
**Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2020**  
**NEVŞEHİR**



**T.C.**  
**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU-KdV VE**  
**GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU-RLW**  
**DENKLEMLERİNİN KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE**  
**NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan**  
**Mahmut GÜZELOKUR**

**Tez Danışmanı**  
**Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ**

**Matematik Anabilim Dalı**  
**Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2020**  
**NEVŞEHİR**

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim esnasında ve tez konusunun seçimi ile tezin çalışmaları süresince tüm bilgilerimi benimle paylaşan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen, tezimde büyük emeği olan Sayın Hocam Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ' a, bu tez çalışmasına başlamama vesile olan ve hiçbir zaman emeklerini ödeyemeyeceğim, maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen değerli babam Aydın GÜZELOKUR'a, annem Leyla GÜZELOKUR'a, eniştem Abdulhalık OĞUZ'a, desteklerinden dolayı tüm kardeşlerime, arkadaşım Canan KAVAK'a, çok sevdiğim eşim Betül GÜZELOKUR'a, teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanlığı'na çok teşekkür ederim.

**GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU-KDV VE GENELLEŞTİRİLMİŞ ROSENAU-  
RLW DENKLEMLERİNİN KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE NÜMERİK  
ÇÖZÜMLERİ  
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)**

**Mahmut GÜZELOKUR**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜŐÜ**

**Ağustos 2020**

**ÖZET**

Bu tezde genelleştirilmiş Rosenau-KdV ve genelleştirilmiş Rosenau-RLW denklemlerinin sayısal çözümleri yedinci (septic) dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak Kollokasyon yöntemi ile elde edilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde Sonlu Elemanlar yöntemi, Kollokasyon yöntemi ve B-spline fonksiyonlar hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tezin ikinci bölümünde genelleştirilmiş Rosenau-KdV denklemi tanıtıldı ve yedinci dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak Kollokasyon yöntemi ile nümerik çözümleri elde edilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde genelleştirilmiş Rosenau-RLW denklemi verilerek yedinci dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak Kollokasyon yöntemi ile nümerik çözümleri elde edilmiştir.

Tezin son bölümünde ise elde ettiğimiz nümerik değerlere ilişkin sonuç ve öneriler sunulmuştur.

**Anahtar kelimeler:** *Genelleştirilmiş Rosenau-KdV denklemi, Genelleştirilmiş Rosenau-RLW denklemi, sonlu elemanlar yöntemi, kollokasyon, Septik B-spline fonksiyonlar.*

**Tez Danışman:** Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

**Sayfa sayısı:** 56

**NUMERICAL SOLUTIONS OF GENERALIZED ROSENAU-RLW AND  
GENERALIZED ROSENAU-KDV EQUATIONS WITH COLLOCATION  
METHOD**

**(M. Sc. Thesis)**

**Mahmut GÜZELOKUR**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**August 2020**

**ABSTRACT**

In this thesis, numerical solutions of generalized Rosenau-KdV and generalized Rosenau-RLW equations have been obtained by using seventh (septic) B-spline collocation method.

This thesis consist of four parts. In the first part of the thesis, detailed information about finite element method, Collocation method and B-spline functions is proposed.

In the second part of the thesis, the generalized Rosenau-KdV equation has been introduced and numerical solutions have been obtained by collocation method using seventh order (septic) B- spline functions.

In the third part of the thesis, the generalized Rosenau-RLW equation has been given and numerical solutions have been obtained by collocation method using seventh order (septic) B- spline functions.

In the last part of the thesis, the obtained numerical results and suggestions are presented.

**Keywords:** Generalized Rosenau-KdV equation, Generalized Rosenau-RLW equation, finite element method, collocation, Septic B-spline functions.

**Thesis Supervisor:** Assoc. Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

**Page Number:**56

## İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI .....	I
TEZ BİLDİRİM SAYFASI.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
İÇİNDEKİLER .....	VI
TABLolar LİSTESİ .....	VIII
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ .....	XII
<b>1. BÖLÜM.....</b>	<b>1</b>
<b>GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi .....	1
1.2. Kollokasyon Yöntemi.....	2
1.3. B-Spline Fonksiyonlar .....	4
1.3.1. Septik B-Spline fonksiyonlar.....	4
<b>2. BÖLÜM.....</b>	<b>8</b>
2.1. Septik B-spline Kollokasyon Yöntemi.....	9
2.2. Kararlılık Analizi.....	13

<b>2.3.</b>	<b>Nümerik Hesaplamalar .....</b>	<b>13</b>
<b>2.4.</b>	<b>Tek Dalganın Soliton Çözümleri .....</b>	<b>14</b>
2.4.1.	1. Durum: .....	14
2.4.2.	2. Durum .....	19
2.4.3.	3. Durum .....	25
<b>3.BÖLÜM .....</b>	<b>30</b>	
<b>3.1. Giriş.....</b>	<b>30</b>	
<b>3.2. Septik B-spline Kollokasyon Yöntemi.....</b>	<b>31</b>	
<b>3.3. Kararlılık Analizi.....</b>	<b>34</b>	
<b>3.4. Nümerik Hesaplamalar .....</b>	<b>35</b>	
3.4.1.	1.Durum .....	35
3.4.2.	2.Durum .....	41
3.4.3.	3.Durum .....	44
3.4.4.	4.Durum .....	47
<b>4. BÖLÜM .....</b>	<b>51</b>	
<b>SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....</b>	<b>51</b>	
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>52</b>	
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>56</b>	



## TABLolar LİSTESİ

Tablo 1.1.	$\Phi_m(x), \Phi'_m(x), \Phi''_m(x), \Phi'''_m(x), \Phi_m^{(iv)}(x), \Phi_m^{(v)}(x)$ ve $\Phi_m^{(vi)}(x)$ in düğüm noktalarındaki değerleri.....	5
Tablo 2.1.	Tek soliter dalğanın $p = 2, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1$ değerleri için elde edilen değişmezleri ve hata normları.....	16
Tablo 2.2.	$p = 2, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1$ değerleri için hata normlarının ve $t = 40$ zamanında farklı $h$ ve $\Delta t$ değerlerinin karşılaştırılması .....	17
Tablo 2.3.	Tek soliter dalğanın $p = 3, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1$ parametreleri için elde edilen değişmezleri ve hata normları.....	21
Tablo 2.4.	Hata normlarının $p = 3, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1$ ve $t = 40$ zamanında farklı $h$ ve $\Delta t$ değerleri ile karşılaştırılması .....	22
Tablo 2.5.	$I_E$ nin $p = 3, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1$ ve farklı $h$ ve $\Delta t$ değerleri ile karşılaştırılması.....	23
Tablo 2.6.	Tek soliter dalğanın $p = 5, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1$ değerleri için elde edilen değişmezleri hata normları.....	27
Tablo 2.7.	$p = 5, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1$ ile hata normlarının ve $t = 40$ zamanında farklı $h$ ve $\Delta t$ değerlerinin karşılaştırılması.....	27
Tablo 2.8.	$I_E$ nin $p = 5, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1$ ile karşılaştırılması ve farklı $h$ ve $\Delta t$ değerleri.....	28
Tablo 3.1.	$p = 2$ için $-30 < x < 120$ aralığında tek soliter dalga için elde edilen değişmezler ve hata normları değerleri.....	37
Tablo 3.2.	$p = 2$ için hata normlarının karşılaştırılması.....	39
Tablo 3.3.	$p = 4$ için $-60 \leq x \leq 120$ aralığında için tek soliter dalga için değişmezler ve hata normlarının değerleri.....	42
Tablo 3.4.	$p = 4$ için hata normlarının karşılaştırılması.....	42
Tablo 3.5.	$p = 8$ için $-60 \leq x \leq 120$ aralığında için tek soliter dalga için değişmezler ve hata normlarının değerleri.....	45

Tablo 3.6. $p = 8$ için hata normlarının karşılaştırılması.....	45
Tablo 3.7. $p = 16$ için $-60 \leq x \leq 120$ aralığında için tek soliter dalga için değişmezler ve hata normlarının değerleri.....	48
Tablo 3.8. $p = 16$ için hata normlarının karşılaştırılması.....	49



## ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 1.1. Septik B-spline şekil fonksiyonları.....7
- Şekil 2.1. Tek soliter dalganın  $[-60,90]$  aralığında  $p = 2, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1,$   
 $h = \Delta t = 0.125$  parametreleri için belirtilen zamanlardaki  
hareketi.....18
- Şekil 2.2.  $p = 2, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1, h = \Delta t = 0.125$  parametreleri için  $t = 40$   
zamanındaki mutlak hata..... 18
- Şekil 2.3. Tek soliter dalganın  $[-60,90]$  aralığında  $p = 3, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1,$   
 $h = \Delta t = 0.125$  parametreleri için belirtilen zamanlardaki  
hareketi.....24
- Şekil 2.4.  $p = 3, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1, h = \Delta t = 0.125$  parametreleri için  $t = 40$   
zamanındaki mutlak hata.....24
- Şekil 2.5. Tek soliter dalganın  $[-60,90]$  aralığında  $p = 5, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1,$   
 $h = \Delta t = 0.125$  parametreleri için belirtilen zamanlardaki  
hareketi.....29
- Şekil 2.6.  $p = 5, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1, h = \Delta t = 0.125$  parametreleri için  $t = 40$   
zamanındaki mutlak hata..... 29
- Şekil 3.1. Belirtilen zamanlarda  $[-60,120]$  aralığında  $p = 2, h = 0.25, t = 0.1$  için  
tek soliter dalganın hareketi.....38
- Şekil 3.2.  $p = 2, h = 0.25, \Delta t = 0.1$  parametreleri için  $t = 40$  zamanında elde edilen  
hata.....40
- Şekil 3.3. Belirtilen zamanlarda  $-60 \leq x \leq 120$  aralığı boyunca  $p = 4, h = 0.25,$   
 $\Delta t = 0.1$  için tek soliter dalganın  
hareketi.....43
- Şekil 3.4.  $p = 4, h = 0.25, \Delta t = 0.1$  parametreleri için  $t = 40$  zamanında elde edilen h  
hata .....43

Şekil 3.5.	Belirtilen zamanlarda $-60 \leq x \leq 120$ aralığı boyunca $p = 8$ , $h = 0.25$ , $\Delta t = 0.1$ için tek soliter dalganın hareketi.....	46
Şekil 3.6.	$p = 8$ , $h = 0.25$ , $\Delta t = 0.1$ parametreleri için $t = 40$ zamanında elde edilen hata.....	46
Şekil 3.7.	Belirtilen zamanlarda $-60 \leq x \leq 120$ aralığı boyunca $p = 16$ , $h = 0.25$ , $\Delta t = 0.1$ için tek soliter dalganın hareketi.....	50
Şekil 3.8.	$p = 16$ , $h = 0.25$ , $\Delta t = 0.1$ parametreleri için $t = 40$ zamanında elde edilen hata.....	50

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

<b>GRLW</b>	Genelleştirilmiş düzenli uzun dalga
<b>GEW</b>	Genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga
<b>RLW</b>	Düzenli uzun dalga
<b>GKdV</b>	Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries
<b>KdV</b>	Korteweg-de Vries
<b>KdVB</b>	Korteweg-de Vries Burgers
<b>GNLS</b>	Genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger
<b>CMKdV</b>	Kompleks modifiye edilmiş Korteweg-de Vries
<b>BST</b>	Boussinesq sistemi tipi
<b>K-S</b>	Kuramoto-Sivashinsky
<b>W</b>	Ağırlık fonksiyonu
<b><math>U_N</math></b>	Yaklaşık çözüm
<b><math>I_E</math></b>	Enerji
<b><math>I_M</math></b>	Momentum
<b><math>I_3</math></b>	Enerji
<b><math>L_2</math> ve <math>L_\infty</math></b>	Hata normları
<b><math>\gg</math></b>	Çok daha büyük
<b><math>\ll</math></b>	Çok daha küçük

# 1. BÖLÜM

## GİRİŞ

### 1.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar kavramı ilk olarak Clough tarafından, 1960 yılında yayımlanan düzlem esnekliğindeki uygulamaları adlı makalesinde dile getirilmiştir [1]. Sonlu elemanlar yöntemi mühendislik ve özellikle havacılık mühendisliği alanlarındaki değişik problemlerin çözümü için bir ihtiyaç olarak ortaya çıkmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi karmaşık fiziksel özelliklere sahip problemleri daha basite indirmek suretiyle, çözüm bulan bir yöntemdir. Günümüzde bilgisayarlardaki teknolojinin akıl almaz bir şekilde ilerlemesi sonlu elemanlar yönteminin çok hızlı bir şekilde gelişmesine olanak vermiştir. Uygulamalı matematikçiler, fizikçiler, mühendisler ve diğer bilim adamları bu yöntem ile ilgili çok sayıda çalışmalar yapmışlar ve yapmaya da devam etmektedirler [2].

Sonlu elemanlar yönteminin; yapı mühendisliği, havacılık mühendisliği, uzay bilimleri, nükleer enerji mühendisliği, akışkanlar mekaniği, dinamik ve ısı iletim problemleri ve diğer mühendislik alanlarındaki problemlere başarılı bir şekilde uygulanabileceği görülmüştür. Sonlu elemanlar yönteminin diğer yöntemlere göre bazı avantajları aşağıda ifade edilmiştir [3];

- Düzensiz şekildeki yapıları ve diğer yöntemlerle modellenemeyen değişik karmaşık bölgeleri daha kolay bir şekilde modelleyebilmesi.
- Eleman denklemleri ayrı ayrı oluşturulduğundan değişik malzemelerden oluşan yapıları modelleyebilmesi.
- Çok değişik sınır şartlarıyla beraber kullanılabilmesi. Sınır koşullarının değişmesi halinde sonlu eleman modelinin değişmemesi.
- İhtiyaç duyulduğunda elemanların büyüklüklerinin değiştirilebilmesi.
- Sonlu eleman modelinin istenildiği zaman rahat bir şekilde değiştirilebilmesi.
- Bilgisayar programlama diline yatkın olması.

Sonlu elemanlar yönteminin bu avantajlarının yanında çözüm bölgesinin alt bölgelere ayrılması işleminin belirli bir tecrübeyi gerektirmesi, süreklilik şartlarının alt bölgelere uygulanmasında bir takım zorluklarla karşılaşılması ve bilgisayar programında veri girişi sırasında hatalar yapılması gibi dezavantajları da vardır [4].

Sonlu eleman yönteminin herhangi bir probleme uygulanmasında izlenecek temel adımlar aşağıda verilmiştir [5]:

- Problemin çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması (diskritizasyonu).
- Çözüm bölgesindeki tüm tipik elemanlar için eleman denklemlerinin türetilmesi.
- Verilen problemin denklemlerini elde etmek amacıyla eleman denklemlerinin birleştirilmesi.
- Problemin sınır şartlarının tatbik edilmesi.
- Birleştirilmiş denklemlerin çözümünün yapılması.
- Çözüm sonunda elde edilen sonuçların değerlendirilmesinin yapılması.

Sonlu elemanlar yönteminin integral formülasyonları genellikle varyasyonel ve ağırlıklı kalan yöntemleri olmak üzere iki farklı yoldan bulunabilir.

## 1.2. Kollokasyon Yöntemi

Bir diferansiyel denklemin tam çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki farkın, sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp toplamlarının en küçük yapılması işlemi ağırlıklı kalan yaklaşımı olarak adlandırılır ve bu yaklaşıma dayanan metotlara ise ağırlıklı kalan metodları denir. Her denklemin ağırlıklı integral formu oluşturulabileceğinden dolayı her denkleme tatbik edilebilir. Ağırlıklı kalan yöntemlerini ifade etmek için  $\Omega$  bölgesinde

$$A(u) = f , \quad (1.2.1)$$

operatör denklemini ele alalım. Burada  $A$  lineer ya da lineer olmayan operatör ve  $f$  bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olarak tanımlanırsa, buradaki  $u$  çözümüne, bir yaklaşım olarak

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 , \quad (1.2.2)$$

kullanılır ve (1.2.1) denkleminde (1.2.2) ile verilen  $u_N$  yaklaşık çözümü yerine yazıldığında  $f_N = A(u_N)$  fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon büyük olasılıkla  $f$  ye eşit değildir.  $A(u_N)$  ile  $f$  fonksiyonu arasındaki farka

$$R = A(u) - f = A \left( \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \right) - f \neq 0 \quad (1.2.3)$$

yaklaşımın kalanı denir. Burada  $R$  kalan fonksiyonu  $c_j$  parametrelerine bağlı olduğu kadar konuma da bağlıdır ve ağırlıklı kalan yöntemlerinde  $c_j$  parametreleri

$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) R(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (1.2.4)$$

ağırlıklı kalan integralindeki  $R$  kalanı sıfır olacak biçimde seçilir. Buradaki  $\Omega$  iki boyutlu bir bölge ve  $\psi_i$  ler ise ağırlıklı kalan fonksiyonları olup (1.2.4) integralinin hesaplanmasıyla elde edilen denklemlerin çözülebilmesi için seçilen  $\psi_i$  ağırlıklı kalan fonksiyonlar kümesinin lineer bağımsız olması gerekir. Ağırlıklı kalanlar yönteminde ağırlık fonksiyonunun seçimine bağlı olarak yöntemler farklı isimle adlandırılır. Bu yöntemler Galerkin, Petrov-Galerkin, Kollokasyon ve Subdomain şeklinde sıralanabilir. Bu tez çalışmasında kullanacağımız ağırlıklı kalan yöntemlerinden biri olan Kollokasyon yönteminde  $\Omega$  bölgesinden seçilen  $N$  adet  $X^i \equiv (x^i, y^i)$  kollokasyon noktasında kalanın sıfır olması istenir ki yani kalan

$$R(x^i, y^i, c_j) = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (1.2.5)$$

şeklinde olmalıdır.  $X^i$  kollokasyon noktalarının denklem sistemi iyi şartlı olacak biçimde seçilmesi çok önemlidir. Burada  $\psi_i = \delta(X - X^i)$  alınır ve (1.2.4) denkleminde yerine yazılacak olursa

$$\int_{\Omega} \delta(X - X^i) R(X, c_j) dx dy = 0 \quad (1.2.6)$$

veya

$$R(X^i, c_j) = 0, \quad (1.2.7)$$

elde edilir. Buradaki  $\delta(x)$ , Dirac delta fonksiyonu olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - \xi) dx dy = f(\xi) \quad [4]. \quad (1.2.8)$$

B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi, daha önceleri farklı türden doğrusal olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır. Mesela Kawahara denklemi septik B-spline kollokasyon [6], Burgers, KdV-Burgers (KdVB), kompleks modifiye edilmiş KdV (CMKdV), geliştirilmiş doğrusal olmayan Schrödinger (GNLS) ve geliştirilmiş Rosenau-RLW denklemleri ise kuintik B-spline kollokasyon yöntemiyle sayısal olarak çözülmüştür [7-10]. Yine Geliştirilmiş Burgers-Fisher ve geliştirilmiş Burgers-Huxley denklemleri ise



kübik B-spline kollokasyon algoritması yardımıyla çözülmüştür [11]. D. Irk, kübik ve kuintik B-spline kollokasyon yöntemiyle GNLS denkleminin, CMKdV denkleminin ve Boussinesq sistemi tipi (BST) denklem sisteminin çözümlerini bulmuştur [12]. Saka, Düzenli Uzun Dalga (RLW) ve Kuramoto-Sivashinsky (K-S) denklemlerinin, sayısal çözümlerini kuadratik, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonlar kullanarak kollokasyon yöntemi ile elde edilmiştir [13].

### 1.3.B-Spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyonların hesaplanmasıyla lineer ya da lineer olmayan sistemler elde edilir ki, bu sistemler arzulanan parametrelerin hesaplanmasına izin vermeyecek şekilde bazen uygun şartlı olmayabilir. Ayrıca spline yaklaşımları elde etme sürecinde sayısal kararsızlıklarla karşılaşmak mümkündür. Belirli derece ve düzgünlükteki tüm spline fonksiyonlar, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu şeklinde temsil edilebileceğinden, bu tür zorluklar “B-spline” (basis spline) olarak isimlendirilen farklı bir spline fonksiyon sınıfı ile giderilebilir [14]. Bu tür fonksiyonlara B-spline fonksiyon denmesinin sebebi, aynı dereceye sahip bütün spline fonksiyonlar kümesi için bir taban oluşturmasındandır. B- spline fonksiyonlar sayısal hesaplamalar için oldukça kullanışlıdır.

#### 1.3.1. Septik B-Spline fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olsun.  $h = x_{m+1} - x_m$  olmak üzere  $x_m$  düğüm noktalarında  $\emptyset_m(x)$  septik B- spline fonksiyonlar  $m = -3(1)N + 3$  noktaları için;

$$\emptyset_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.1.1)$$

şeklinde tanımlanır [9].  $\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \dots, \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x), \phi_{N+3}(x)\}$  kümesi  $a \leq x \leq b$  aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Septik B- spline  $\phi_m(x)$  fonksiyonu ve türevleri  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1.1 de görüldüğü üzere her bir  $\phi_m(x)$  septik B- spline fonksiyonu  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığında ard arda gelen sekiz elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu eleman  $\phi_{m-3}, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}$  ve  $\phi_{m+4}$  gibi sekiz septik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [4].  $\phi_m(x)$  ve altıncı mertebeye kadar olan  $\phi'_m(x)$ ,  $\phi''_m(x)$ ,  $\phi'''_m(x)$ ,  $\phi_m^{(iv)}(x)$ ,  $\phi_m^{(v)}(x)$  ve  $\phi_m^{(vi)}(x)$  türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1 de gösterilmiştir.

**Tablo 1.1.**  $\phi_m(x)$ ,  $\phi'_m(x)$ ,  $\phi''_m(x)$ ,  $\phi'''_m(x)$ ,  $\phi_m^{(iv)}(x)$ ,  $\phi_m^{(v)}(x)$  ve  $\phi_m^{(vi)}(x)$  in düğüm noktalarındaki değerleri

$x$	$x_{m-4}$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$	$x_{m+4}$
$\phi_m$	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$h\phi'_m$	0	-7	-392	-1715	0	1715	392	7	0
$h^2\phi''_m$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	0
$h^3\phi'''_m$	0	-210	-1680	3990	0	-3990	1680	210	0
$h^4\phi_m^{(iv)}$	0	840	0	-7560	13440	-7560	0	840	0
$h^5\phi_m^{(v)}$	0	-2520	10080	-12600	0	12600	-10080	2520	0
$h^6\phi_m^{(vi)}$	0	5040	-30240	75600	-100800	75600	-30240	5040	0

Bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elaman ;

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.3.1.2)$$

lokal koordinat dönüşümü yardımıyla  $[0, 1]$  aralığına dönüşür. Böylelikle septik B-spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında  $\xi$  türünden,

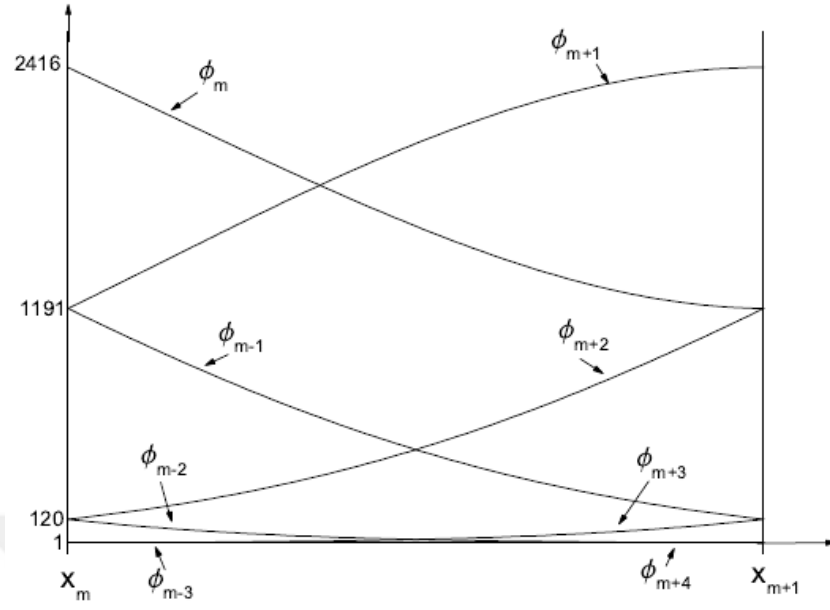
$$\begin{aligned}
\emptyset_{m-3} &= 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7, \\
\emptyset_{m-2} &= 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 7\xi^7, \\
\emptyset_{m-1} &= 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 21\xi^7, \\
\emptyset_m &= 2416 - 1680\xi^2 + 560\xi^4 - 140\xi^6 + 35\xi^7, \\
\emptyset_{m+1} &= 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 35\xi^7, \\
\emptyset_{m+2} &= 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 84\xi^5 - 42\xi^6 + 21\xi^7, \\
\emptyset_{m+3} &= 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 35\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7, \\
\emptyset_{m+4} &= \xi^7
\end{aligned} \tag{1.3.1.3}$$

şeklinde elde edilir.

(1.3.1.3) septik B- spline fonksiyonlar kullanılarak  $x_m$  düğüm noktasında  $U_N$  yaklaşık çözümü ve  $x$  e göre altıncı mertebeye kadar olan türevleri  $\delta_m$  eleman parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\
U_m' &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m'' &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m''' &= \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(iv)} &= \frac{840}{h^4}(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(v)} &= \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(vi)} &= \frac{5040}{h^6}(\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3})
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur [4].



Şekil 1.1. Septik B-spline şekil fonksiyonları

## 2. BÖLÜM

Bu bölümde Seydi Battal Gazi Karakoç'un [54] makalesi ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Burada,

$$U_t + \alpha U_x + \beta U_{xxx} + \varepsilon U_{xxxx} + (U^p)_x = 0, \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan genelleştirilmiş Rosenau-KdV (GR-KdV) denklemi

$$\begin{aligned} U(a,t) &= 0, & U(b,t) &= 0, \\ U_x(a,t) &= 0, & U_x(b,t) &= 0, \\ U_{xx}(a,t) &= 0, & U_{xx}(b,t) &= 0, & t > 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

homojen sınır koşulları ve

$$U(x,0) = f(x) \quad a \leq x \leq b, \quad (2.3)$$

başlangıç koşulu ile ele alındı.

Burada  $p \geq 2$  bir tamsayı,  $U_{xxx}$  viskozite terimi  $x$  ve  $t$  indisleri sırasıyla konum ve zamana bağlı türevleri göstermektedir.

(2.1) denkleminde  $p = 2$  alınırsa

$$U_t + \alpha U_x + \beta U_{xxx} + \varepsilon U_{xxxx} + UU_x = 0, \quad (2.4)$$

Rosenau-KdV denklemi elde edilir. Şu ana kadar, Rosenau-KdV denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için birçok yöntem sunulmuştur. Zuo, Rosenau-KdV denklemini çözmek için oluşturduğu sinüs-kosinüs ve tanh yöntemlerini kullanmıştır [15]. Bir başlangıç-sınır değer problemi olarak Rosenau-KdV denkleminin nümerik çözümleri sonlu fark şeması kullanılarak J. Hu ve arkadaşları tarafından önerilmiştir [16]. Bu denklemin topolojik soliter çözümü veya şok dalgası çözümleri G. Ebadi tarafından analiz edilmiştir [17]. Denklemin soliton dalga çözümleri ansatz yöntemi ile Razborova ve arkadaşları tarafından elde edilmiştir [18]. B. Wongsaijai ve K. Pochinapan, Rosenau-KdV denklemini birleştirerek doğrusal olmayan dalganın çözümünü elde etmek için nümerik çözümler önermişlerdir [19]. Karakoç ve arkadaşları, denklemi sırasıyla B-spline baz fonksiyonlarını kullanarak subdomain ve kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi ile elde etmişlerdir [20,21]. Şimdiye kadar, genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin oluşturduğu başlangıç-sınır değer probleminin nümerik çözümleri geniş bir şekilde çalışılmamıştır. N. Atouani ve K. Omrani, Rosenau-KdV denklemi için iki farklı sonlu fark şemasını incelemişlerdir [22]. A. Esfahani [32], genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin solitary dalga çözümlerini

sech-ansatze yöntemiyle elde etmiş ve ayrıca genelleştirilmiş Rosenau-KdV denklemini için iki tane değişmez (invariant) vermiştir. Genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin başlangıç sınır değer probleminin sayısal çözümü için ortalama bir doğrusal sonlu fark şeması M. Zheng ve J. Zhou tarafından verilmiştir [23]. Y. Luo ve arkadaşları genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin başlangıç sınır değer problemi için bir Crank-Nicolson sonlu fark şeması önermiştir [24].

$$U_t + aUU_x + bU_{xxx} = 0, \quad (2.5)$$

şeklindeki KdV denkleminin bazı fiziksel olayları açıklama noktasında eksiklikleri vardır [26,27]. Bunlardan birincisi, KdV denkleminin dalgaların sadece tek yönlü yayılımını tanımlar. Bu nedenle, dalga-dalga ve dalga-duvar etkileşimlerini tanımlayamaz. İkincisi zayıf bir uyumsuzluk varsayımı altında elde edildiğinden, yüksek genlikli dalgaların şekli ve davranışı KdV denkleminin tarafından iyi bir şekilde ifade edilmez [27]. Bu yetersizlikleri ortadan kaldırmak için Rosenau tarafından,

$$U_t + U_x + U_{xxxx} + (U^2)_x = 0, \quad (2.6)$$

Rosenau denkleminin önerilmiştir [28,29]. M. A. Park, Rosenau denkleminin çözümlerinin varlığı ve tekliliğini fonksiyonları ile incelemiştir [30].

Bu bölümde, septik B-spline kollokasyon fonksiyonları ile genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir.

## 2.1. Septik B-spline Kollokasyon Yöntemi

Nümerik hesaplamalar için, problemin çözüm bölgesi  $a \leq x \leq b$  aralığı boyunca sınırlandırılmıştır.  $[a, b]$  aralığı,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  ve  $h = \frac{b-a}{N} = x_{m+1} - x_m$  şeklinde  $N$  eşit aralığa bölünmüştür.  $\varnothing_m(x) (m = -3(1)N + 3)$ , septik B-spline fonksiyonların kümesi problemin çözüm bölgesi olan  $[a, b]$  aralığı üzerinde bir baz oluşturur. Nümerik çözüm olan  $U_N(x, t)$  septik B-spline fonksiyonlar kullanılarak

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \varnothing_m(x) \delta_m(t). \quad (2.1.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$x_m$  düğüm noktalarında septik B-spline fonksiyonlar olan  $\emptyset_m(x)$ , (1.3.1.1) denklem sistemindeki gibi verilmiştir [31].

$[x_m, x_{m+1}]$  sonlu aralığı,  $[0,1]$  aralığına  $h\xi = x - x_m$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$  ile tanımlanan yerel bir koordinat dönüşümü ile dönüştürülür. Dolayısıyla (1.3.1.1) denklem sistemi ile verilen septik B-spline fonksiyonlar  $[0,1]$  aralığı üzerinde  $\xi$  cinsinden

$$\begin{aligned}
\emptyset_{m-3} &= 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7, \\
\emptyset_{m-2} &= 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 7\xi^7, \\
\emptyset_{m-1} &= 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 21\xi^7, \\
\emptyset_m &= 2416 - 1680\xi + 560\xi^4 - 140\xi^6 + 35\xi^7, \\
\emptyset_{m+1} &= 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 35\xi^7, \\
\emptyset_{m+2} &= 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 84\xi^5 - 42\xi^6 + 21\xi^7, \\
\emptyset_{m+3} &= 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 35\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7, \\
\emptyset_{m+4} &= \xi^7.
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

şeklinde bulunur.

(2.1.1) ve (1.3.1.1) denklemleri kullanılarak,  $U_m, U'_m, U''_m, U'''_m, U_m^{iv}$  fonksiyonlarının düğüm noktalarında eleman parametleri cinsinden değerleri

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\
U'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U'''_m &= \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{iv} &= \frac{840}{h^4}(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3})
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

şeklinde verilir [19].

$U$  nun  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerindeki değişimi

$$U = \sum_{m=-3}^{N+3} \emptyset_m \delta_m. \tag{2.1.4}$$

şeklindedir.

(2.1.3) eşitlikleri (2.1) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\
& + \frac{7\alpha}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
& + \frac{210\beta}{h^3} (-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
& + \frac{840\varepsilon}{h^4} (\dot{\delta}_{m-3} - 9\dot{\delta}_{m-1} + 16\dot{\delta}_m - 9\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+3}) \\
& + p \frac{7}{h} Z_m (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada

$$Z_m = (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^{p-1} \text{ dir.}$$

Eğer  $\delta_i$  ve (2.1.5) denklimindeki türevler yerine sırasıyla

$$\delta_i = \frac{\delta_i^{n+1} + \delta_i^n}{2}, \tag{2.1.6}$$

Crank Nicolson ve

$$\dot{\delta}_i = \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t} \tag{2.1.7}$$

ileri sonlu fark yaklaşımı yazılırsa bilinmeyen parameter olan  $\delta_i^{n+1}$  ve  $\delta_i^n$

( $i = m-3, m-2, \dots, m+2, m+3$ ) arasında,

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\
& = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n,
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

denklem sistemi elde edilir.

Burada

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= [1 - E(\alpha + pZ_m) - M + K], \\
\gamma_2 &= [120 - 56E(\alpha + pZ_m) - 8M], \\
\gamma_3 &= [1191 - 245E(\alpha + pZ_m) + 19M - 9K], \\
\gamma_4 &= [2416 + 16K], \\
\gamma_5 &= [1191 + 245E(\alpha + pZ_m) - 19M - 9K], \\
\gamma_6 &= [120 + 56E(\alpha + pZ_m) + 8M], \\
\gamma_7 &= [1 + E(\alpha + pZ_m) + M + K], \\
m &= 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{7}{2h} \Delta t, \quad M = \frac{105\beta}{h^3} \Delta t, \quad K = \frac{840\varepsilon}{h^4} \Delta t
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

dır.

Sistem (2.1.8),  $N+7$  ( $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$ )<sup>T</sup> tane bilinmeyen ve  $N+1$  tane doğrusal denklemden oluşmaktadır. Bu sistemin bir çözümünü elde etmek için altı tane



ek şarta ihtiyacımız vardır. Bu şartlar (2.2) sınır koşullarından elde edilir ve bu şartlar kullanılarak  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$  bilinmeyenleri (2.1.8) denklem sisteminden yok edilerek  $N+1$  bilinmeyen ve  $N+1$  tane denklemden oluşan

$$A\mathbf{d}^{n+1} = B\mathbf{d}^n \quad (2.1.10)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada  $\mathbf{d}^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  dir.

$A$  ve  $B$  matrisleri  $(N+1) \times (N+1)$  matrislerdir. Lineer olmayan terimin üstesinden gelebilmek için iki veya üç defa iç iterasyon yapılır. Çözümeye başlamadan önce,  $d^0$  başlangıç parametreleri başlangıç şartı aşağıdaki türevlerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) &= U(x_m, 0); & m = 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) &= 0, & (U_N)_x(b, 0) &= 0, \\ (U_N)_{xx}(a, 0) &= 0, & (U_N)_{xx}(b, 0) &= 0, \\ (U_N)_{xxx}(a, 0) &= 0, & (U_N)_{xxx}(b, 0) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilmiştir.

Böylece  $d^0$  başlangıç vektörü

$$Wd^0 = b,$$

sistemi çözülerek elde edilir.

Burada

$$W = \begin{bmatrix} 1536 & 2712 & 768 & 24 & & & & & & \\ \frac{82731}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{10063.5}{81} & 1 & & & & & \\ \frac{9600}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96474}{81} & 120 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \\ & & & & & & & 1 & 120 & \frac{96474}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{9600}{81} \\ & & & & & & & & 1 & \frac{10063.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{82731}{81} \\ & & & & & & & & & 24 & 768 & 2712 & 1536 \end{bmatrix}$$

ve  $d^0 = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-2}, \delta_{N-1}, \delta_N)^T$ ,  $b = [U(x_0, 0), U(x_1, 0), \dots, U(x_N, 0)]^T$  dir.

## 2.2. Kararlılık Analizi

(2.1.8) sisteminin kararlılığını incelemek için Von-Neumann yöntemi kullanılmıştır. Bunun için  $U^p U_x$  terimindeki  $U^p$  değeri sabit olarak alınır.

$$\delta_m^n = \xi^n e^{i\sigma m h}, \quad i = \sqrt{-1}$$

ile verilen Fourier eşitliği (2.1.8) denklemde kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \xi^{n+1} (\eta_1 e^{i(m-3)\theta} + \eta_2 e^{i(m-2)\theta} + \eta_3 e^{i(m-1)\theta} + \eta_4 e^{im\theta} + \eta_5 e^{i(m+1)\theta} + \eta_6 e^{i(m+2)\theta} + \eta_7 e^{i(m+3)\theta}) \\ & = \xi^n (\eta_7 e^{i(m-3)\theta} + \eta_6 e^{i(m-2)\theta} + \eta_5 e^{i(m-1)\theta} + \eta_4 e^{im\theta} + \eta_3 e^{i(m+1)\theta} + \eta_2 e^{i(m+2)\theta} + \eta_1 e^{i(m+3)\theta}) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

bulunur.

Burada  $\sigma$  mod numarası,  $h$  ise eleman büyüklüğü ve  $\theta = \sigma h$  olup

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 1 - \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, & \eta_2 &= 120 - 56\alpha_1 - 8\alpha_2, \\ \eta_3 &= 1191 - 245\alpha_1 + 19\alpha_2 - 9\alpha_3, & \eta_4 &= 2416 + 16\alpha_3, \\ \eta_5 &= 1191 + 245\alpha_1 - 19\alpha_2 - 9\alpha_3, & \eta_6 &= 120 + 56\alpha_1 + 8\alpha_2, \\ \eta_7 &= 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, & m &= 0, 1, \dots, N, \quad \alpha_1 = \frac{7\Delta t}{2h}(\alpha + Z_m), \quad \alpha_2 = \frac{210\beta\Delta t}{2h^3}, \quad \alpha_3 = \frac{840\varepsilon}{h^4} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

dır.

(2.2.1) denklemi sadeleştirilirse

$$\xi = \frac{A - iB}{A + iB}$$

bulunur. Bu ifadedeki  $A$  ve  $B$  sırasıyla

$$A = (2382 - 18\alpha_3) \cos(\theta) + 240 \cos(2\theta) + (2 + 2\alpha_3) \cos(3\theta) + (2416 + 16\alpha_3),$$

$$B = (490\alpha_1 - 2\alpha_2) \sin(\theta) + (112\alpha_1 + 16\alpha_2) \sin(2\theta) + (490\alpha_1 - 38\alpha_2) \sin(3\theta)$$

olup

$$\alpha_1 = E(\alpha + pZ_m), \quad \alpha_2 = M, \quad \alpha_3 = K, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \text{ şeklindedir.}$$

$|\xi|$  modülü 1 olup dolayısıyla lineerleştirilmiş algoritmamız şartsız kararlıdır.

## 2.3. Nümerik Hesaplamalar

Genelleştirilmiş Rosenau-KdV denklemi için iki adet değişmez vardır. Bunlar

$$I_M = \int_a^b U(x,t) dx,$$

$$I_E = \int_a^b [U^2(x,t) + \varepsilon U_{xx}^2(x,t)] dx$$

şeklinde olup sırasıyla sığ su dalgalarının momentum ve enerjisine karşılık gelir [32]. Artan zaman adımlarında çözümün konumunu ve genliğini ne kadar iyi olarak tahmin ettiğimizi görmek için aşağıdaki hata normlarını kullanılmıştır;

$$L_2 = \|U^{exact} - U_N\|_2 \approx \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{exact} - (U_N)_j|^2}$$

ve

$$L_\infty = \|U^{exact} - U_N\|_\infty \approx \max_j |U_j^{exact} - (U_N)_j|.$$

## 2.4. Tek Dalganın Soliton Çözümleri

Bu bölümde, yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu göstermek için farklı sayısal örnekler verilmiştir. Tek soliter dalganın hareketinin sayısal hesaplamaları için üç farklı parametre ailesi kullanılmıştır.

### 2.4.1. 1. Durum:

İlk durumda,  $[-60,90]$  aralığında  $p = 2$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  parametreleri alınarak hesaplamalar yapıldı. Bu parametreler için denklemin tam çözümü

$$U(x,t) = \left(-\frac{35}{24} + \frac{35}{312} \sqrt{313}\right) \operatorname{sech}^4 \left[ \frac{1}{24} \sqrt{-26 + 2\sqrt{313}} \left( x - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{26} \sqrt{313} \right) t \right) \right],$$

şeklinde olup sınır koşulları  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $U \rightarrow 0$  ve başlangıç koşulu ise

$$U(x,0) = \left(-\frac{35}{24} + \frac{35}{312} \sqrt{313}\right) \operatorname{sech}^4 \left[ \frac{1}{24} \sqrt{-26 + 2\sqrt{313}} x \right] \text{ dir [7].}$$

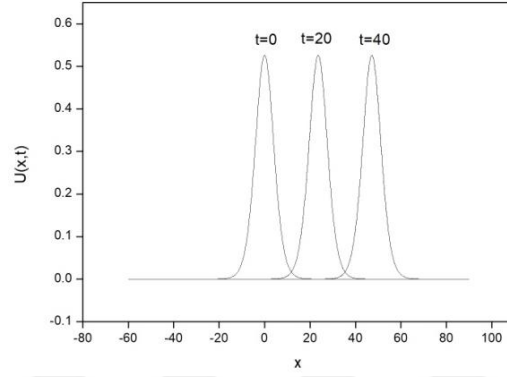
$L_2, L_\infty$  hata normlarının ve  $I_M, I_E$  değişmezlerinin değerlerini bulmak için hesaplamalar  $t=40$  zamanına kadar yapıldı. Soliter dalğanın genliği ve hızı sırasıyla 0.526057,  $v=1.180454$  olarak elde edilmiştir. Değişmezlerin ve hata normlarının hesaplanan değerleri Tablo (2.1) de sunulmuştur.  $I_M$  ve  $I_E$  deki nispi değişikliklerin yüzdesi sırasıyla  $h=\Delta t=0.1$  için  $9.4 \times 10^{-7}\%$  ve  $1.5 \times 10^{-9}\%$  ;  $h=\Delta t=0.125$  için  $1.1 \times 10^{-6}\%$  ve 0;  $h=\Delta t=0.025$  için  $5.5 \times 10^{-7}\%$  ve  $1 \times 10^{-7}\%$  dir. Hesaplamalar süresince değişmezlerin neredeyse sabit kaldıkları açıkça görülmektedir. Tablo (2.1) den,  $I_M$  değişmezinin değerinin başlangıç değerine göre  $1 \times 10^{-9}$  den daha az değiştiği ve  $I_E$  değişmezinin değeri ise  $h$  ve  $\Delta t$  nin farklı değerleri gözönüne alındığında değişimin olmadığı görülmektedir. Ayrıca,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata norm değerlerinin bilgisayar çalışması boyunca yeterince küçük olarak elde edildi. Dolayısıyla yöntemimizin yeterince uygun olduğunu söyleyebiliriz. Tablo (2.2) de, mevcut yöntemle elde edilen hata normlarının değerleri ile J. Hu [16] ve T. Ak ve arkadaşlarının kullandıkları yöntemle elde edilen değerleri karşılaştırıldı. Bu tabloda, metodumuzla elde edilen hata normlarının diğerlerinden daha iyi ya da iyi bir uyum içinde olduğu görüldü. Tek soliton dalğanın  $t=40$  zamanına kadar olan hareketi Şekil (2.1) de verilmiştir. Şekil (2.1) de gözlemlendiği gibi, tek soliton dalga, sabit bir hızla sağa doğru hareket etmekte ve artan zaman adımlarında beklendiği gibi genlik ve şeklini korumaktadır. Soliton dalğanın genliği,  $t=0$  da 0.526057 iken  $x=-0.125$ te olup,  $t=40$  da genlik 0.526146 iken  $x=47.250$  dir.  $t=0$  ve  $t=40$  zamanlarında genlikler arasındaki mutlak fark  $8.9 \times 10^{-5}$  olup genlikler arasında küçük bir değişiklik olmuştur. Tam ve nümerik çözümler arasındaki hata değerleri Tablo (2.2) de gösterilmektedir. Şekil (2.2) de ise  $t=40$  zamanında elde edilen mutlak hatanın grafiği gösterilmiştir.

**Tablo 2.1. Tek soliter dalganın  $p = 2$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  değerleri için elde edilen değişmezleri ve hata normları**

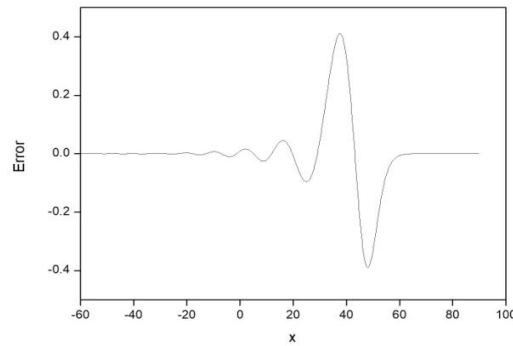
$h = \Delta t = 0.1$	$I_M$	$I_E$	$L_2 \times 10^{-4}$	$L_\infty \times 10^{-4}$
$t$				
0	5.4981750556	1.9897841614	0	0
10	5.4981750556	1.9897841614	3.56724	1.41640
20	5.4981750556	1.9897841614	6.46705	2.44374
30	5.4981750572	1.9897841614	9.02514	3.26169
40	5.4981750037	1.9897841614	11.62488	4.11491
$h = \Delta t = 0.125$	$I_M$	$I_E$	$L_2 \times 10^{-4}$	$L_\infty \times 10^{-4}$
$t$				
0	5.4981740747	1.9897835319	0	0
10	5.4981740747	1.9897835319	5.60011	2.20715
20	5.4981740746	1.9897835319	10.26734	3.86253
30	5.4981740787	1.9897835319	14.22670	5.19178
40	5.4981740130	1.9897835319	17.73066	6.33780
$h = \Delta t = 0.025$	$I_M$	$I_E$	$L_2 \times 10^{-4}$	$L_\infty \times 10^{-4}$
$t$				
0	5.4981698357	1.9897809062	0	0
10	5.4981698363	1.9897809076	0.35170	0.14206
20	5.4981698379	1.9897809079	0.91672	0.32589
30	5.4981698426	1.9897809085	1.04343	0.46813
40	5.4981698357	1.9897809062	1.18321	0.48477

**Tablo 2.2**  $p = 2, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1$  değerleri için hata normlarının ve  $t = 40$  zamanında farklı  $h$  ve  $\Delta t$  değerlerinin karşılaştırılması

$h = \Delta t = 0.1$	$L_2 \times 10^{-3}$			$L_\infty \times 10^{-3}$		
$t$	Mevcut yöntem	[16]	[20]	Mevcut yöntem	[16]	[20]
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
10	0.356723	1.641934	0.356724	0.141640	0.631419	0.141639
20	0.646705	3.045414	0.646705	0.244374	1.131442	0.244374
30	0.902514	4.241827	0.902514	0.326169	1.533771	0.326169
40	1.162488	5.297873	1.162489	0.411491	1.878952	0.411492
$h = \Delta t = 0.125$	$L_2 \times 10^{-4}$			$L_\infty \times 10^{-4}$		
$t$	Mevcut yöntem	[16]	[20]	Mevcut yöntem	[16]	[20]
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
10	5.60011	4.113510	0.854386	2.20715	1.582641	0.343706
20	10.26734	7.631169	1.779040	3.86253	2.835874	0.627075
30	14.22670	10.62971	2.810186	5.19178	3.843906	0.975412
40	17.73066	13.27645	3.783328	6.33780	4.709118	1.293116
$h = \Delta t = 0.025$	$L_2 \times 10^{-4}$			$L_\infty \times 10^{-5}$		
$t$	Mevcut yöntem	[16]	[20]	Mevcut yöntem	[16]	[20]
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
10	0.357059	1.028173	0.351702	1.421479	3.965867	1.420544
20	0.925408	1.905450	0.916735	3.264848	7.097948	3.258903
30	1.057023	2.650990	1.043479	4.742297	9.610332	4.681364
40	1.183710	3.306738	1.183139	4.846861	11.76011	4.847163



**Şekil 2.1. Tek soliter dalganın  $[-60, 90]$  aralığında  $p = 2, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1, h = \Delta t = 0.125$  parametreleri için belirtilen zamanlardaki hareketi**



**Şekil 2.2.  $p = 2, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1, h = \Delta t = 0.125$  parametreleri için  $t = 40$  zamanındaki mutlak hata**

## 2.4.2. 2. Durum

İkinci durumda ise  $[-60,90]$  aralığında  $p = 3$ ,  $q = 1$  parametreleri seçildi. Bu parametreler ile denklemin tam çözümü

$$U(x,t) = \frac{1}{4} \sqrt{-15+3\sqrt{41}} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{-5+\sqrt{41}}{2}} \left[ x - \frac{1}{10} (5+\sqrt{41})t \right].$$

şeklinde olup

$U \rightarrow 0$  sınır koşulları  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $U \rightarrow 0$  ve başlangıç koşulu ise

$$U(x,0) = \frac{1}{4} \sqrt{-15+3\sqrt{41}} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{-5+\sqrt{41}}{2}} x$$

dır [18,32].

Bu parametreler için soliter dalganın genliği ve hızı sırasıyla 0.512568,  $v=1.140312$  olarak bulunmuştur. Hesaplamalar  $t=40$  zamanına kadar yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo (2.3) de listelenmiştir.  $I_M$  ve  $I_E$  değişmezlerinin nispi hata yüzdesi,  $t=0$  da değişmezlerin değerine göre hesaplanmıştır.  $I_M$  ve  $I_E$  deki nispi değişikliklerin yüzdesi  $h = \Delta t = 0.25$  olduğunda  $9.6 \times 10^{-8}\%$  ve  $3.5 \times 10^{-8}\%$  olarak;  $h = \Delta t = 0.125$  olduğunda  $2.8 \times 10^{-8}\%$  ve  $8.8 \times 10^{-9}\%$  olarak ;  $h = \Delta t = 0.0625$ , olduğunda  $6.0 \times 10^{-9}\%$  ve  $2.2 \times 10^{-9}\%$  olarak bulundu. Bu tablodan Tablo (2.3) te  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değerleri ile  $I_M$  ve  $I_E$  değişmezlerinin değerleri verilmiştir. Değişmezlerin zaman arttıkça neredeyse sabit kaldığı görülmektedir. Yine tablodan,  $I_M$  ve  $I_E$  değişmezlerinin,  $h$  ve  $\Delta t$  nin farklı değerleri için başlangıç değerine göre  $1 \times 10^{-8}$  den daha az değiştiği açıkça görülmektedir. Ayrıca,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının bilgisayar çalışması boyunca yeterince küçük kaldığı görülür. Mevcut yöntemle elde edilen hata normlarının değerleri M. Zheng ve arkadaşları [23] ve Y. Luo ve arkadaşları [24], tarafından elde edilen değerlerle Tablo (2.4) de karşılaştırılmıştır. Bu tablo, metodumuzla elde edilen hata norm değerlerinin diğerlerinden daha iyi olduğunu açıkça



göstermektedir. Tablo (2.5) de  $I_E$  nin değerleri referans [24] ile tarafından elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Bu tablodan, değişmezlerin değerlerinin birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir.  $t = 0, 20$  ve  $t = 40$  zamanlarında  $h = \Delta t = 0.125$  değerleri için tek soliter dalganın hareketleri Şekil (2.3) te gösterilmektedir. Bu şekilden, soliter dalganın neredeyse değişmeyen bir hızla sağa hareket ettiği ve artan zamanla genliğini ve şeklini koruduğu anlaşılmaktadır. Soliter dalganın genliği,  $t = 0$  da 0.512568 iken ve  $x = -0.125$  olup  $t = 40$  da 0.512741 iken ve  $x = 45.625$  tir. Genliklerin  $t = 0$  ve  $t = 40$  zamanlarındaki mutlak fark  $1.7 \times 10^{-4}$  dir. Yani genlikler arasında küçük bir değişiklik meydana gelmiştir.  $t = 40$  sırasındaki hata dağılımı, Şekil (2.4) te grafiksel olarak gösterilmiştir. Görüldüğü gibi, maksimum hatalar soliter dalganın merkezi konumu etrafında meydana gelmiştir.

**Tablo 2.3. Tek soliter dalganın  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  parametreleri için elde edilen değişmezleri ve hata normları**

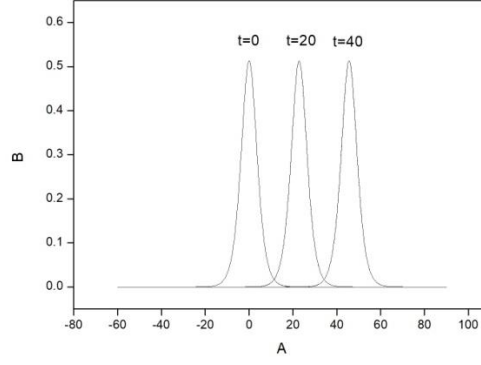
$h = \Delta t = 0.1$	$I_M$	$I_E$	$L_2 \times 10^{-3}$	$L_\infty \times 10^{-3}$
$t$				
0	4.8989798241	1.6825480773	0	0
10	4.8989798239	1.6825480773	2.880540	1.166531
20	4.8989798231	1.6825480773	5.325785	2.035358
30	4.8989798678	1.6825480773	7.552481	2.800947
40	4.8989785482	1.6825480773	9.670753	3.516945
$h = \Delta t = 0.125$				
$t$				
0	4.8989798241	1.6825480772	0	0
10	4.8989798239	1.6825480772	0.721967	0.292411
20	4.8989798235	1.6825480772	1.335453	0.510960
30	4.8989798344	1.6825480772	1.894530	0.702865
40	4.8989794651	1.6825480772	2.426625	0.883243
$h = \Delta t = 0.025$				
$t$				
0	4.8989798241	1.6825480772	0	0
10	4.8989798238	1.6825480771	0.180543	0.073127
20	4.8989798236	1.6825480772	0.333994	0.127801
30	4.8989798359	1.6825480773	0.473859	0.175815
40	4.8989796887	1.6825480774	0.606988	0.221008

**Tablo 2.4. Hata normlarının  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  ve  $t = 40$  zamanında farklı  $h$  ve  $\Delta t$  değerleri ile karşılaştırılması**

	$L_\infty \times 10^{-3}$		
	Mevcut yöntem	[23] (Ortalama lineer sonlu fark yöntemi)	[24] (Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi)
$h = \Delta t = 0.25$	3.51694	13.4986	7.53941
$h = \Delta t = 0.125$	0.88324	3.42489	1.89987
$h = \Delta t = 0.0625$	0.22100	0.85957	0.47587

**Tablo 2.5.**  $I_E$  nin  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  ve farklı  $h$  ve  $\Delta t$  değerleri ile karşılaştırılması

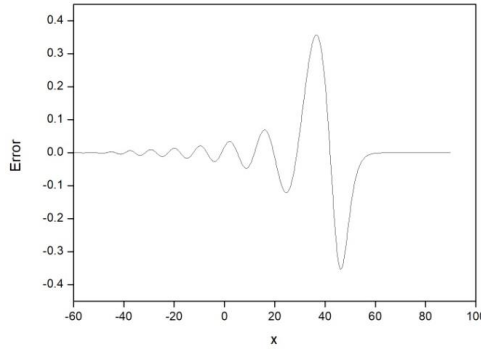
$h = \Delta t = 0.25$	$I_E$	$I_E$
$t$	Mevcut yöntem	[24] (Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi)
0	1.6825480773	1.68252899330
10	1.6825480773	1.68252899329
20	1.6825480773	1.68252899328
30	1.6825480773	1.68252899327
40	1.6825480773	1.68252899325
$h = \Delta t = 0.125$		
$t$	Mevcut yöntem	[11] (Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi)
0	1.6825480772	1.68254308255
10	1.6825480773	1.68254308255
20	1.6825480772	1.68254308255
30	1.6825480772	1.68254308255
40	1.6825480772	1.68254308254
$h = \Delta t = 0.0625$		
$t$	Mevcut yöntem	[24] (Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi)
0	1.6825480772	1.68254661109
10	1.6825480771	1.68254661108
20	1.6825480772	1.68254661095
30	1.6825480773	1.68254661102
40	1.6825480774	1.68254661095



**Şekil 2.3. Tek soliter dalganın  $[-60,90]$  aralığında**

**$p = 3, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1, h = \Delta t = 0.125$  parametreleri için belirtilen zamanlardaki**

**hareketi**



**Şekil 2.4.  $p = 3, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1, h = \Delta t = 0.125$  parametreleri için  $t = 40$**

**zamanındaki mutlak hata**

### 2.4.3. 3. Durum

Üçüncü durumda ise  $[-60,90]$  aralığında  $p = 5, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1$  parametreleri seçildi.

Bu parametler ile denklemin tam çözümü

$$U(x,t) = \sqrt[4]{\frac{4}{15}(-5 + \sqrt{34})} \operatorname{sech} \frac{1}{3} \sqrt{-5 + \sqrt{34}} \left[ x - \frac{1}{10} (5 + \sqrt{34}) t \right]$$

şeklinde olup

sınır koşulları  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $U \rightarrow 0$  ve başlangıç koşulu ise

$$U(x,0) = \sqrt[4]{\frac{4}{15}(-5 + \sqrt{34})} \operatorname{sech} \frac{1}{3} \sqrt{-5 + \sqrt{34}} x$$

dır [18,32].

Bu parametreler için, tek dalga 0.686098 genliğine sahiptir. Değişmezleri ve hata normlarını çeşitli zamanlarda hesaplamak için algoritma  $t=40$  zamanına kadar çalıştırıldı. Tek dalganın hızı  $v=1.083095$  olarak hesaplandı. Elde edilen sonuçlar Tablo (2.6) da rapor edilmiştir. Korunan  $I_M$  ve  $I_E$  miktarlarının nispi hatasının yüzdesi,  $t=0$  da korunmuş miktarlara göre hesaplandı.  $I_M$  ve  $I_E$  nin nispi değişikliklerinin yüzdesi  $h = \Delta t = 0.25$  için  $1.4 \times 10^{-4}\%$  ve  $1.2 \times 10^{-8}\%$  dir;  $h = \Delta t = 0.125$  için  $8.6 \times 10^{-5}\%$  ve  $5.0 \times 10^{-10}\%$  dir;  $h = \Delta t = 0.0625$  için  $7.0 \times 10^{-5}\%$  ve  $2.8 \times 10^{-9}\%$  olarak bulunur. Tablo (2.6) da değişmezlerin zaman ilerledikçe neredeyse sabit kaldığı görülmektedir. Tablodan açıkça görülebileceği gibi, değişmezlerin  $I_M$  ve  $I_E$  başlangıçtaki değerlerinden  $h$  ve  $\Delta t$  nin farklı değerleri için  $1.0 \times 10^{-9}$  dan daha az bir değişim gösterdiği görülmektedir. Ayrıca,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının bilgisayar çalışması boyunca yeterince küçük olarak elde edildi. Böylece, yöntemimizin yeterince uygun olduğunu söyleyebiliriz. Tablo (2.7) de, mevcut yöntemle elde edilen hata normlarının değerleri ile M. Zheng ve arkadaşları [23] ve Y. Luo ve arkadaşlarının [24] kullandıkları yöntemle elde edilen değerleri karşılaştırıldı. Bu tabloda, metodumuzla elde edilen hata normlarının diğerlerinden daha iyi ya da iyi bir uyum içinde olduğu görüldü.  $I_E$  nin sayısal olarak hesaplanan sonuçları Tablo (2.8) de referans [24] ile karşılaştırıldı. Bu tablodan, değişmezlerin değerlerinin birbirine çok yakın olduğu görülmektedir.  $t = 0, 20$  ve  $t = 40$  zamanlarında  $h = \Delta t = 0.125$  değerleri için tek soliter

dalganın hareketleri Şekil (2.5) de gösterilmektedir. Bu şekilden, soliter dalganın neredeyse değişmeyen bir hızla sağa hareket ettiği ve artan zamanla genliğini ve şeklini koruduğu anlaşılmaktadır. Soliter dalganın genliği,  $t=0$  da 0.686098 iken ve  $x=0$  olup,  $t=40$  da 0.685675 iken  $x=43.250$  dir. Genliklerin  $t=0$  ve  $t=40$  zamanlarındaki mutlak fark  $4.2 \times 10^{-4}$  tür. Yani genlikler arasında küçük bir değişiklik meydana gelmiştir.  $t=40$  taki hata dağılımı, Şekil (2.6) da gösterilmiştir. Görüldüğü gibi maksimum hatalar soliter dalgaların merkezi konumu ile ilgili olduğu ve  $-1.5 \times 10^{-3}$  ile  $1.5 \times 10^{-3}$  arasında olduğu gösterilmiştir.



**Tablo 2.6. Tek soliter dalganın  $p = 5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  değerleri için elde edilen değişmezleri ve hata normları**

$h = \Delta t = 0.25$	$I_M$	$I_E$	$L_2 \times 10^{-3}$	$L_\infty \times 10^{-3}$
$t$				
0	7.0936435935	3.1107124064	0	0
10	7.0936434216	3.1107124063	4.153031	1.693890
20	7.0936429528	3.1107124062	8.102177	3.110721
30	7.0936419009	3.1107124061	12.123006	4.503564
40	7.0936330521	3.1107124060	16.299008	5.925606
$h = \Delta t = 0.125$				
$t$				
0	7.0936435925	3.1107124063	0	0
10	7.0936434493	3.1107124063	1.042200	0.425642
20	7.0936431881	3.1107124063	2.035122	0.781637
30	7.0936426572	3.1107124063	3.047657	1.132638
40	7.0936374525	3.1107124064	4.100587	1.493427
$h = \Delta t = 0.0625$				
$t$				
0	7.0936435920	3.1107124063	0	0
10	7.0936434618	3.1107124063	0.260777	0.106504
20	7.0936432752	3.1107124063	0.509351	0.195642
30	7.0936429006	3.1107124062	0.762935	0.283659
40	7.0936386078	3.1107124063	0.102671	0.373985

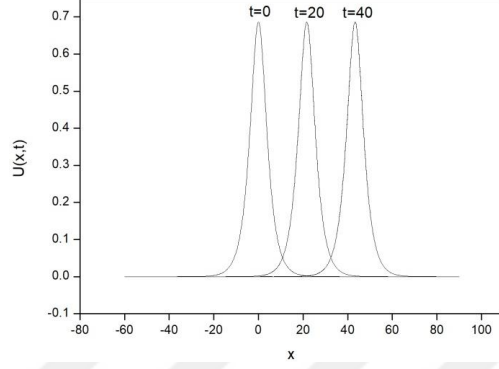
**Tablo 2.7.  $p = 5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  ile hata normlarının ve  $t = 40$  zamanında farklı  $h$  ve  $\Delta t$  değerlerinin karşılaştırılması**

	$L_\infty \times 10^{-3}$		
	Mevcut yöntem	[23]	[24]
$h = \Delta t = 0.25$	5.92560	17.9985	12.0204
$h = \Delta t = 0.125$	1.49342	4.56804	3.03743
$h = \Delta t = 0.0625$	0.37398	1.14689	0.76141



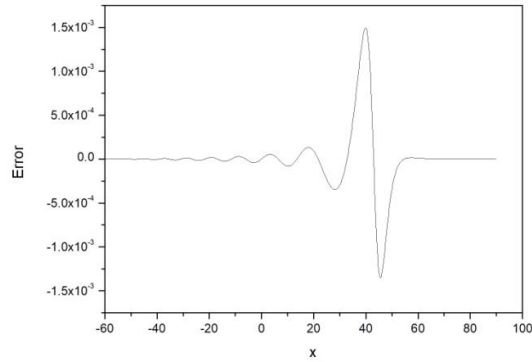
**Tablo 2.8.**  $I_E$  nin  $p = 5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  ile karşılaştırılması ve farklı  $h$  ve  $\Delta t$  değerleri

$h = \Delta t = 0.25$	$I_E$	$I_E$
$t$	Mevcut yöntem	[24] (Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi)
0	3.1107124064	3.11067490241
10	3.1107124063	3.11067490241
20	3.1107124062	3.11067490240
30	3.1107124061	3.11067490240
40	3.1107124060	3.11067490240
$h = \Delta t = 0.125$		
$t$	Mevcut yöntem	[24] (Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi)
0	3.1107124063	3.11070293879
10	3.1107124063	3.11070293879
20	3.1107124063	3.11070293879
30	3.1107124063	3.11070293879
40	3.1107124064	3.11070293879
$h = \Delta t = 0.0625$		
$t$	Mevcut yöntem	[24] (Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi)
0	3.1107124063	3.110702996431
10	3.1107124063	3.110702996430
20	3.1107124063	3.110702996426
30	3.1107124062	3.110702996417
40	3.1107124063	3.110702996435



**Şekil 2.5. Tek soliter dalganın  $[-60, 90]$  aralığında**

**$p = 5, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1, h = \Delta t = 0.125$  parametreleri için belirtilen zamanlardaki hareketi**



**Şekil 2.6.  $p = 5, \alpha = 1, \beta = 1, \varepsilon = 1, h = \Delta t = 0.125$  parametreleri için  $t = 40$  zamanındaki mutlak hata**

## 3.BÖLÜM

### 3.1. Giriş

Bu bölümde Seydi Battal Gazi Karakoç'un [55] makalesi detaylı olarak incelenmiştir.

Bu kısımda

$$U_t - U_{xxt} + U_{xxxx} + U_x + (U^p)_x = 0, \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan genelleştirilmiş Rosenau-RLW (GR- RLW) denklemi

$$\begin{aligned} U(a,t) &= 0, & U(b,t) &= 0, \\ U_x(a,t) &= 0, & U_x(b,t) &= 0, \\ U_{xx}(a,t) &= 0, & U_{xx}(b,t) &= 0, & t > 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

homojen sınır koşulları ve

$$U(x,0) = U_0(x) \quad a \leq x \leq b, \quad (3.3)$$

başlangıç koşulu ile ele alındı.

Burada  $p \geq 2$  bir tamsayı,  $U_{xxt}$  viskozite terimi,  $x$  ve  $t$  indisleri sırasıyla konum ve zamana bağlı türevleri göstermektedir.

(3.1) denkleminde  $p = 2$  alınırsa

$$U_t - U_{xxt} + U_{xxxx} + U_x + 2UU_x = 0, \quad (3.4)$$

Rosenau-RLW (R-RLW) denklemi elde edilir. Şu ana kadar, Rosenau-RLW denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için birçok yöntem sunulmuştur. Pan ve Zhang, R-RLW denklemini sonlu farklar yöntemi ile incelemiş ve denklemin orijinal konservatif özelliklerini koruyan bir algoritma geliştirmişlerdir [37]. Pan ve arkadaşları Crank-Nicolson tipi sonlu fark yöntemi kullanarak R-RLW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişler ve Brouwer sabit nokta teoremi ile sayısal çözümlerinin varlığını göstermişlerdir [38]. Atouani ve Omrani [39] yarı ayrık Galerkin yöntemi ile R-RLW denkleminin varlığını ve yakınsaklığını göstermişlerdir. Yagmurlu ve arkadaşları tarafından kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak R-RLW denkleminin bir Galerkin sonlu elemanlar yöntemi uygulanmıştır [40]. Rosenau-KdV ve Rosenau-RLW denklemini birleştirerek doğrusal olmayan dalganın çözümünü elde etmek için bir algoritma Wongsaijai ve Poochinapan tarafından önerilmiştir [41]. GR-RLW denkleminin sayısal çözümleri ise son yıllarda daha çok incelenmiştir. Zuo ve arkadaşları yeni bir kararlı fark şeması ve ayrıca Brouwer sabit nokta teoremi ile fark

çözümlerinin varlığını göstermişlerdir [42]. GR-RLW denklemi için Pan ve Zhang tarafından enerjiyi koruyan doğrusallaştırılmış bir sonlu fark şeması önerilmiştir [43]. Mittal ve Jain doğrusal olmayan GR-RLW denklemini çözmek için bir kollokasyon yöntemi geliştirmişlerdir [44]. GR-RLW denklemini çözmek için kompakt bir sonlu fark prosedürü Wongsajjai ve arkadaşları tarafından önerilmiştir [45]. Wang ve arkadaşları [46,47], GR-RLW denklemi için daha uygun bir sonlu fark şeması sunmuşlar ve R-RLW denklemi için de doğrusal olmayan dördüncü dereceden kompakt sonlu fark algoritması tasarlamışlardır. Arı ve Dereli [48], GR-RLW denkleminin nümerik çözümlerini meshless yöntemi kullanarak elde etmişlerdir. Cai ve arkadaşları [49] genelleştirilmiş Rosenau tipi denklemlerinin Lagrangianlarını türetmiş ve karşılık gelen multisempatik formülasyonları önermişlerdir.

Yoğun ayrık sistemlerin dinamikleri çalışmasında, dalga-dalga ve dalga-duvar etkileşimi durumu iyi bilinen KdV denklemi kullanılarak tanımlanamaz. Ayrıca, yüksek genlikli dalgaların eğimi ve davranışı yine KdV denklemi tarafından iyi bir şekilde tahmin edilemeyebilir, çünkü zayıf anharmoniklik varsayımı altında modellenmiştir [37]. KdV denkleminin bu eksikliklerini gidermek için Rosenau tarafından (2.6) denklemi önerilmiştir.

### 3.2. Septik B-spline Kollokasyon Yöntemi

Nümerik hesaplamalar için, problemin çözüm bölgesi  $a \leq x \leq b$  aralığı boyunca sınırlandırılmıştır.  $[a, b]$  aralığı,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  ve  $h = \frac{b-a}{N}$  şeklinde  $N$  eşit aralığa bölünmüştür.  $\{\varnothing_{-3}(x), \varnothing_{-2}(x), \dots, \varnothing_{-N+3}(x)\}$ , septik B-spline fonksiyonların kümesi problemin çözüm bölgesi olan  $[a, b]$  aralığı üzerinde bir baz oluşturur. Nümerik çözüm olan  $U_N(x, t)$ , septik B-spline fonksiyonlar kullanılarak

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \varnothing_m(x) \delta_m(t), \quad (3.5)$$

şeklinde ifade edilir.

$x_m$  düğüm noktalarında septik B-spline fonksiyonlar olan  $\varnothing_m(x)$  (2.1.2) denkleminde verilmiştir.

$[x_m, x_{m+1}]$  sonlu aralığı,  $[0, 1]$  aralığına  $h\xi = x - x_m$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$  ile tanımlanan yerel bir koordinat dönüşümü ile dönüştürülür. Dolayısıyla (2.1.2) ile verilen septik B-spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığı üzerinde  $\xi$  cinsinden (2.1.3) denklemindeki gibi elde edilir.

(2.1.2) ile verilen septik B-spline baz fonksiyonu ve denklem (3.5) kullanılarak,

$U_m, U'_m, U''_m, U'''_m$  ve  $U_m^{iv}$  fonksiyonlarının düğüm noktalarında eleman parametreleri cinsinden değerleri (2.1.4) şeklindedir.

$U$  nun  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerindeki değişimi;

$$U = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m \delta_m. \quad (3.6)$$

şeklindedir.

(2.1.4) eşitlikleri (3.1) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\ & + \frac{7\alpha}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & + \frac{210\beta}{h^3} (-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & + \frac{840\varepsilon}{h^4} (\dot{\delta}_{m-3} - 9\dot{\delta}_{m-1} + 16\dot{\delta}_m - 9\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+3}) \\ & + p \frac{7}{h} Z_m (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada

$$Z_m = (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^{p-1} \text{ dir.}$$

Eğer  $\delta_i$  ve denklem (3.7) deki türevleri yerine sırasıyla (2.1.6) Crank-Nicolson yaklaşımı ve (2.1.7) ile verilen ileri sonlu fark yaklaşımı yazılırsa bilinmeyen parameter olan  $\delta_i^{n+1}$  ve  $\delta_i^n$  ( $i = m-3, m-2, \dots, m+2, m+3$ ) arasında, (2.1.8) denklem sistemi elde edilir.

Burada

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= [1 - E(\alpha + pZ_m) - M + K], \\
\gamma_2 &= [120 - 56E(\alpha + pZ_m) - 8M], \\
\gamma_3 &= [1191 - 245E(\alpha + pZ_m) + 19M - 9K], \\
\gamma_4 &= [2416 + 16K], \\
\gamma_5 &= [1191 + 245E(\alpha + pZ_m) - 19M - 9K], \\
\gamma_6 &= [120 + 56E(\alpha + pZ_m) + 8M], \\
\gamma_7 &= [1 + E(\alpha + pZ_m) + M + K], \\
m &= 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{7}{2h} \Delta t, \quad M = \frac{42}{h^2} \Delta t, \quad K = \frac{840}{h^4}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklindedir.

Sistem (2.1.8),  $N+7$   $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$  tane bilinmeyen ve  $N+1$  tane doğrusal denklemden oluşmaktadır. Bu sistemin bir çözümünü elde etmek için altı ek şarta ihtiyacımız vardır. Bu şartlar (3.2) sınır koşullarından elde edilir ve bu şartlar kullanılarak  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$  bilinmeyenleri (2.1.8) denklem sisteminden yok edilerek  $N+1$  bilinmeyen ve  $N+1$  tane denklemden oluşan

$$Yd^{n+1} = Zd^n \tag{3.9}$$

denklemleri elde edilir. Bu eşitlikte  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  dir.

$Y$  ve  $Z$  matrisleri  $(N+1) \times (N+1)$  matrislerdir. Lineer olmayan terimin üstesinden gelebilmek için iki veya üç defa iç iterasyon yapılır. Çözümüne başlamadan önce,  $d^0$  başlangıç parametreleri başlangıç şartı ve aşağıdaki türevlerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
U_N(x, 0) &= U(x_m, 0); & m &= 0, 1, 2, \dots, N \\
(U_N)_x(a, 0) &= 0, & (U_N)_x(b, 0) &= 0, \\
(U_N)_{xx}(a, 0) &= 0, & (U_N)_{xx}(b, 0) &= 0, \\
(U_N)_{xxx}(a, 0) &= 0, & (U_N)_{xxx}(b, 0) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilmiştir.

Böylece  $d^0$  başlangıç vektörü denklemleri

$$Vd^0 = w,$$

sistemi çözülerek elde edilir.

Burada



$$A = (2382 - 30\alpha_2 - 18\alpha_3) \cos(\theta) + (240 - 48\alpha_2) \cos(2\theta) + (2 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3) \cos(3\theta) + (2416 + 80\alpha_2 + 16\alpha_3), \quad (3.11)$$

$$B = (490E(1 + Z_m)) \sin(\theta) + (112E(1 + Z_m)) \sin(2\theta) + (2E(1 + Z_m)) \sin(3\theta)$$

şeklindedir.

Fourier kararlılık analizine göre, verilen programın kararlı olması için,  $|\xi| < 1$  koşulunun yerine getirilmesi gerekir. Sembolik bir programlama yazılımı kullanarak veya basit hesaplamalar kullanarak,  $a^2 + b^2 = a^2 + (-b)^2$  olduğundan,  $|\xi|$  modülünün 1 olduğu açıkça görülebilir. Sonuç olarak, doğrusallaştırılmış algoritmanın koşulsuz olarak kararlı olduğu görülür.

### 3.4. Nümerik Hesaplamalar

Genelleştirilmiş Rosenau-RLW (GR-RLW) denklemi için iki adet değişmez vardır.

Bunlar

$$I_M = \frac{1}{2} \int_a^b U(x, t) dx, \quad (3.12)$$

$$I_E = \frac{1}{2} \int_a^b [U^2(x, t) + U_x^2(x, t) + U_{xx}^2(x, t)] dx$$

şeklinde olup sırasıyla sığ su dalgalarının momentum ve enerjisine karşılık gelir [44].

Artan zaman adımlarında çözümün konumunu ve genliğini ne kadar iyi olarak tahmin ettiğimizi görmek için aşağıdaki hata normlarını kullanılır;

$$L_2 = \|U^{exact} - U_N\|_2 \approx \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{exact} - (U_N)_j|^2}$$

ve

$$L_\infty = \|U^{exact} - U_N\|_\infty \approx \max_j |U_j^{exact} - (U_N)_j|.$$

hata normları tarafından kontrol edilir [53].

#### 3.4.1. 1.Durum

İlk sayısal hesaplama için  $[-30, 120]$  aralığında  $p = 2$  parametresi çeşitli  $h$  ve  $t$  değerleriyle seçildi. Bu durumda problemin başlangıç koşulu



$$U(x,0) = \frac{15}{38} \operatorname{sech}^4\left[\frac{\sqrt{13}}{26}x\right], \quad (3.13)$$

şeklinde olup problemin tam çözümü ise

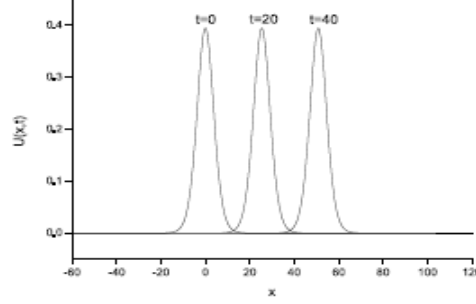
$$U(x,t) = \frac{15}{38} \operatorname{sech}^4\left[\frac{\sqrt{13}}{26}\left(x - \frac{169}{133}t\right)\right], \quad (3.14)$$

şeklindedir [6].

$-30 \leq x \leq 120$  aralığında tek soliter dalga için değişmezlerin ve hata normlarının değerleri Tablo (3.1) de gösterilmiştir. Ayrıca, farklı  $h$  ve  $t$  değerleri için hata normlarının bir karşılaştırılması Tablo (3.2) de verilmiştir. Tablo (3.2) den yöntemimizle elde edilen hata normlarının değerlerinin diğer sonuçlarla uyum içinde hatta daha iyi olduğu görülmektedir. Tek soliton dalganın  $t = 40$  zamanına kadar olan davranışları Şekil (3.1) de gösterilmektedir.

**Tablo 3.1:**  $p = 2$  için  $-30 \leq x \leq 120$  aralığında tek soliter dalga için elde edilen değişmezler ve hata normlarının değerleri

$h = \Delta t = 0.4$	$I_M$	$I_E$	$L_2 \times 10^{-3}$	$L_\infty \times 10^{-3}$
0	1.8976582	0.5331775	0	0
20	1.8976042	0.5331775	11.75577	4.56558
40	1.8975504	0.5331775	19.85843	7.29166
60	1.8974979	0.5331775	26.90336	9.64250
$h = \Delta t = 0.2$				
$t$				
0	1.8976587	0.5331775	0	0
20	1.8976586	0.5331775	2.95668	1.15327
40	1.8976520	0.5331775	4.98638	1.83689
60	1.8976586	0.5331775	6.78589	2.43822
$h = \Delta t = 0.1$				
$t=0$	1.8976588	0.5331777	0	0
$t=20$	1.8976524	0.5331773	0.73165	0.28627
$t=40$	1.8976556	0.5331769	1.28582	0.47045
$t=60$	1.8976587	0.5331765	1.80098	0.64362
$h = \Delta t = 0.05$				
$t=0$	1.8976569	0.5331776	0	0
$t=20$	1.8976624	0.5331775	0.20059	0.07495
$t=40$	1.8976655	0.5331775	0.39859	0.14198
$t=60$	1.8976695	0.5331774	0.42845	0.16500
$h = \Delta t = 0.25$				
$t=0$	1.8976564	0.5331771	0	0
$t=20$	1.8976610	0.5331770	0.09000	0.03165
$t=40$	1.8976652	0.5331770	0.10490	0.04479
$t=60$	1.8976693	0.5331770	0.34458	0.13007

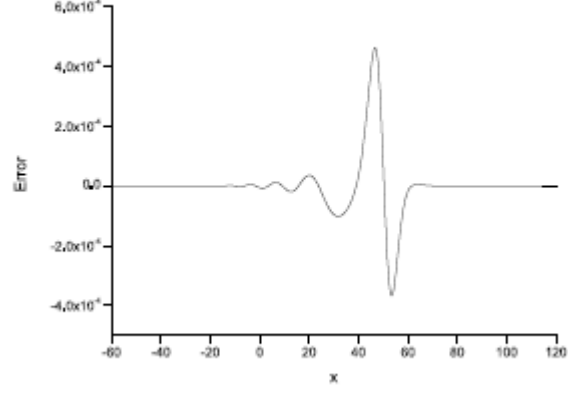


**Şekil 3.1: Belirtilen zamanlarda  $[-30,120]$  aralığında  $p = 2$ ,  $h = 0.25$ ,  $t = 0.1$  için tek soliter dalganın hareketi**

Şekil (3.1) den tek soliton dalganın beklenildiği gibi sabit bir hızla sağa doğru ilerlediği ve artan zaman adımlarında genliğini ve şeklini koruduğu görülmektedir. Tek soliton dalganın genliği  $x = 0$  konumunda ve  $t = 0$  zaman adımında  $0.394736$  iken  $x = 76.2$  konumunda ve  $t = 60$  zaman adımında  $0.394623$  şeklinde hesaplanmıştır.  $t = 0$  ve  $t = 40$  zamanlarında genliklerdeki fark  $1.13 \times 10^{-4}$  olup genlikler arasındaki fark oldukça küçük olarak bulunmuştur.  $t = 40$  zamanında elde edilen hata değerleri, Şekil (2) de gösterilmektedir.

**Tablo 3.2:  $p = 2$  için hata normlarının karşılaştırılması**

	$L_2 \times 10^{-2}$			$L_\infty \times 10^{-3}$		
$t = 40,$ $-60 \leq x \leq 120$	Mevcut yöntem	[37] (Lineerleştirilmiş sonlu fark yöntemi)	[41] (Compact sonlu fark yöntemi)	Mevcut yöntem	[37] (Lineerleştirilmiş sonlu fark yöntemi)	[41] (Compact sonlu fark yöntemi)
$h = 0.5$ $\Delta t = 0.01$	0.12548 1	3.25288	0.23029	0.46077	1.19460	0.86284
$h = 0.25$ $\Delta t = 0.01$	0.12538 9	0.78777	0.23608	0.46077	2.88972	0.88670
$t = 60,$ $-30 \leq x \leq 120$	Mevcut yöntem	[42] (Sonlu fark yöntemi)	[46] (Yüksek mertebeden compact sonlu fark yöntemi)	Mevcut yöntem	[42] (Sonlu fark yöntemi)	[46] (Yüksek mertebeden compact sonlu fark yöntemi)
$h = \Delta t = 0.4$	2.69033	5.47632	-	9.64250	19.58718	3.5235
$h = \Delta t = 0.2$	0.67858	1.38525	-	2.43822	4.98376	0.80413
$h = \Delta t = 0.1$	0.18009	0.34743	-	0.64362	1.25218	0.19123
$h = \Delta t = 0.05$	0.04284	0.086914	-	0.16500	0.31345	0.04659



**Şekil 3.2.**  $p = 2$ ,  $h = 0.25$ ,  $\Delta t = 0.1$  parametreleri için  $t = 40$  zamanında elde edilen hata

### 3.4.2. 2.Durum

İkinci sayısal hesaplama için,  $[-60,120]$  aralığında  $p = 4$  parametresi  $h = 0.25, 0.5$  ve  $t = 0.1$  değerleriyle seçildi. Bu durumda problemin tam çözümü

$$U(x,t) = \left(\frac{455}{1482}\right)^{\frac{1}{3}} \operatorname{sech}^{\frac{4}{3}}\left[\frac{3}{2\sqrt{29}}\left(x - \frac{841}{741}t\right)\right], \quad (3.15)$$

olup başlangıç koşulu olarak

$$U(x,0) = \left(\frac{455}{1482}\right)^{\frac{1}{3}} \operatorname{sech}^{\frac{4}{3}}\left[\frac{3}{2\sqrt{29}}x\right], \quad (3.16)$$

alınır [6].

$-60 \leq x \leq 120$  aralığında tek soliter dalga için değişmezlerin ve hata normlarının değerleri Tablo (3.3) de gösterilmiştir. Ayrıca, farklı  $h$  ve  $t$  değerleri için hata normlarının bir karşılaştırması Tablo (3.4) de verilmiştir. Tablo (3.4) de metodumuzla elde edilen hata normlarının değerleri diğer sonuçlarla uyum içinde hatta daha iyi olduğu görülmektedir. Tek soliton dalganın  $t = 40$  zamanına kadar olan davranışları Şekil (3.3) te gösterilmektedir.

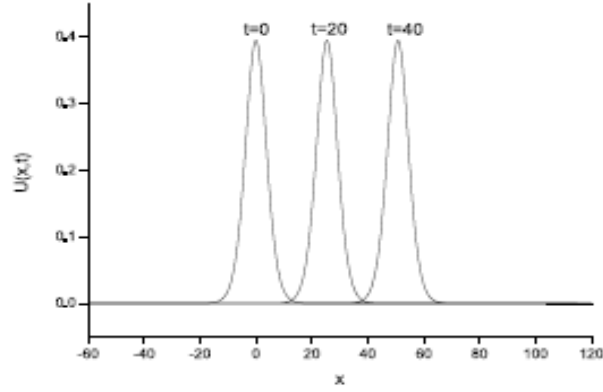
**Tablo 3.3:**  $p = 4$  için  $-60 \leq x \leq 120$  aralığında tek soliter dalga için değişmezler ve hata normlarının değerleri

$h = 0.5, \Delta t = 0.1$	$I_M$	$I_E$	$L_2 \times 10^{-3}$	$L_\infty \times 10^{-3}$
$t$				
0	3.1329030	1.4338473	0	0
10	3.1328960	1.4338400	0.84067	1.41640
20	3.1328890	1.4338327	1.60312	2.44374
30	3.1328819	1.4338254	2.34349	3.26169
40	3.1328749	1.4338181	3.08384	4.11491
$h = 0.25, \Delta t = 0.1$	$I_M$	$I_E$	$L_2 \times 10^{-3}$	$L_\infty \times 10^{-3}$
$t$				
0	3.1329030	1.4338473	0	0
10	3.1328960	1.4338400	0.83723	0.35706
20	3.1328890	1.4338327	1.59768	0.63291
30	3.1328819	1.4338254	2.33605	0.89233
40	3.1328749	1.4338181	3.07437	1.14864

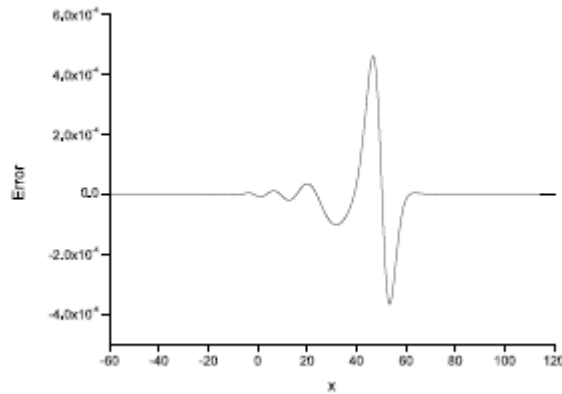
**Tablo 3.4:**  $p = 4$  için hata normlarının karşılaştırılması

$t = 40,$ $-60 \leq x \leq 120,$ $\Delta t = 0.1$	$L_2 \times 10^{-2}$			$L_\infty \times 10^{-3}$		
	Mevcut yöntem	[37] (Lineerleştirilmiş sonlu fark yöntemi)	[41] (Compact sonlu fark yöntemi)	Mevcut yöntem	[37] (Lineerleştirilmiş sonlu fark yöntemi)	[41] (Compact sonlu fark yöntemi)
$h = 0.5$	0.30838	7.45173	0.44788	1.15137	27.87120	1.71122
$h = 0.25$	0.30743	1.73066	0.47254	1.14864	6.47969	1.81252

Şekil (3.3) den tek soliton dalganın beklenildiği gibi sabit bir hızla sağa doğru ilerlediği ve artan zaman adımlarında genliğini ve şeklini koruduğu görülmektedir. Tek soliton dalganın genliği  $x=0$  konumunda ve  $t=0$  zaman adımında  $0.674613$  iken  $x=45.4$  konumunda ve  $t=40$  zaman adımında  $0.73988$  şeklinde hesaplanmıştır.  $t=0$  ve  $t=40$  zamanlarında genliklerdeki fark  $6.25 \times 10^{-4}$  olup genlikler arasındaki fark oldukça küçük olarak bulunmuştur.  $t=40$  zamanında elde edilen hata değerleri, Şekil (3.4) de gösterilmektedir.



**Şekil 3.3: Belirtilen zamanlarda  $-60 \leq x \leq 120$  aralığı boyunca  $p = 4$ ,  $h = 0.25$ ,  $\Delta t = 0.1$  için tek soliter dalganın hareketi.**



**Şekil 3.4:  $p = 4$ ,  $h = 0.25$ ,  $\Delta t = 0.1$  parametreleri için  $t = 40$  zamanında elde edilen hata**



### 3.4.3. 3.Durum

Üçüncü sayısal hesaplama için,  $-60 \leq x \leq 120$  aralığında  $p = 8$  parametresi  $h = 0.25$ ,  $0.5$ , ve  $t = 0.1$  değerleri ile seçildi. Bu durumda problemin tam çözümü ve başlangıç koşulu sırasıyla

$$U(x,t) = \left(\frac{2475}{13802}\right)^{\frac{1}{7}} \operatorname{sech}^{\frac{4}{7}}\left[\frac{7}{2\sqrt{85}}\left(x - \frac{7225}{6901}\right)t\right], \quad (3.17)$$

ve

$$U(x,0) = \left(\frac{2475}{13802}\right)^{\frac{1}{7}} \operatorname{sech}^{\frac{4}{7}}\left[\frac{7}{2\sqrt{85}}x\right] \quad (3.18)$$

olarak alınır [9].

$-60 \leq x \leq 120$  aralığında tek soliter dalga için değişmezlerin ve hata normlarının değerleri Tablo (3.5) de gösterilmektedir. Ayrıca, farklı  $h$  ve  $t$  değerleri için hata normlarının bir karşılaştırması Tablo (3.6) de verilmiştir. Tablo (3.5) de metodumuzla elde edilen hata normlarının değerleri diğer sonuçlarla uyum içinde hatta daha iyi olduğu görülmektedir. Tek soliton dalganın  $t=40$  zamanına kadar olan davranışları Şekil (3.5) de gösterilmektedir.

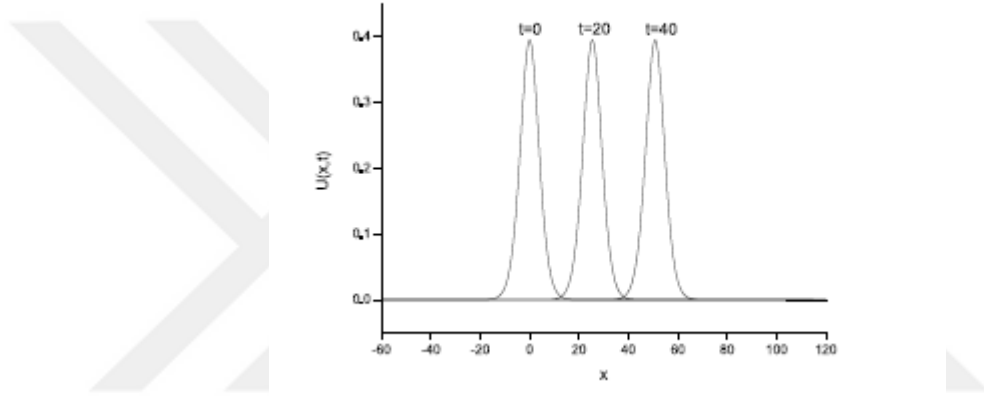
**Tablo 3.5:**  $p = 8$  için  $-60 \leq x \leq 120$  aralığında tek soliter dalga için değişmezler ve hata normlarının değerleri

$h = 0.5, \Delta t = 0.1$	$I_M$	$I_E$	$L_2 \times 10^{-3}$	$L_\infty \times 10^{-3}$
$t$				
0	4.8710424	2.3675820	0	0
10	4.8710440	2.3675673	0.72292	0.30896
20	4.8710430	2.3675526	1.50307	0.59229
30	4.8710407	2.3675380	2.39050	0.90427
40	4.8710374	2.3675234	3.40928	1.25518
$h = 0.25, \Delta t = 0.1$	$I_M$	$I_E$	$L_2 \times 10^{-3}$	$L_\infty \times 10^{-3}$
$t$				
0	4.8710422	2.3675820	0	0
10	4.8710454	2.3675673	0.71837	0.30641
20	4.8710471	2.3675526	1.49461	0.58856
30	4.8710482	2.3675380	2.37752	0.89891
40	4.8710487	2.3675234	3.39111	1.12480

**Tablo 3.6:**  $p = 8$  için hata normlarının karşılaştırılması

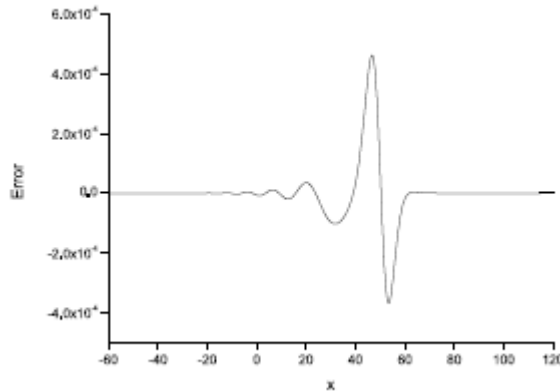
$t = 40,$ $-60 \leq x \leq 120,$ $\Delta t = 0.1$		$L_2 \times 10^{-2}$		$L_\infty \times 10^{-3}$		
	Mevcut yöntem	[37] (Lineerleştirilmiş sonlu fark yöntemi)	[41] (Compact sonlu fark yöntemi)	Mevcut yöntem	[37] (Lineerleştirilmiş sonlu fark yöntemi)	[41] (Compact sonlu fark yöntemi)
$h = 0.5$	0.340928	8.03730	0.431841	1.25518	29.5337	1.61891
$h = 0.25$	0.339111	1.80583	0.46713	1.24801	6.66740	1.75739

Şekil (5) den tek soliton dalganın beklenildiği gibi sabit bir hızla sağa doğru ilerlediği ve artan zaman adımlarında genliğini ve şeklini koruduğu görülmektedir. Tek soliton dalganın genliği  $x=0$  konumunda ve  $t=0.1$  zaman adımında  $0.782305$  iken  $x=41.75$  konumunda ve  $t=40$  zaman adımında  $0.781552$  şeklinde hesaplanmıştır.  $t=0$  ve  $t=40$  zamanlarında genliklerdeki fark  $7.53 \times 10^{-4}$  olup genlikler arasındaki fark oldukça küçük olarak bulunmuştur.  $t=40$  zamanında elde edilen hata değerleri, Şekil (6) da gösterilmektedir.



**Şekil 3.5: Belirtilen zamanlarda  $-60 \leq x \leq 120$  aralığı boyunca**

**$p = 8$ ,  $h = 0.25$ ,  $\Delta t = 0.1$  için tek soliter dalganın hareketi**



**Şekil 3.6:  $p = 8$ ,  $h = 0.25$ ,  $\Delta t = 0.1$  parametreleri için  $t = 40$  zamanında elde edilen**

**hata**

#### 3.4.4. 4.Durum

Son sayısal hesaplamada,  $-60 \leq x \leq 120$  aralığında  $p = 16$  parametresi  $h = 0.5$ ,  $0.25$   $\Delta t = 0.1$  değerleriyle seçildi. Bu durumda problemin tam çözümü

$$U(x,t) = \left(\frac{15827}{169386}\right)^{\frac{1}{15}} \operatorname{sech}^{\frac{4}{15}}\left[\frac{15}{2\sqrt{93}}\left(x - \frac{85849}{84693}\right)t\right], \quad (3.19)$$

şeklinde olup başlangıç koşulu olarak

$$U(x,0) = \left(\frac{15827}{169386}\right)^{\frac{1}{15}} \operatorname{sech}^{\frac{4}{15}}\left[\frac{15}{2\sqrt{93}}x\right] \quad (3.20)$$

alınır [45].

$-60 \leq x \leq 120$  aralığında tek soliter dalga için değişmezlerin ve hata normlarının değerleri Tablo (3.7) de gösterilmektedir. Ayrıca, farklı  $h$  ve  $t$  değerleri için hata normlarının bir karşılaştırması Tablo (3.8) de verilmiştir. Tablo (3.7) de metodumuzla elde edilen hata normlarının değerleri diğer sonuçlarla uyum içinde hatta daha iyi olduğu görülmektedir. Tek soliton dalganın  $t = 40$  zamanına kadar olan davranışları Şekil (3.7) de gösterilmektedir.

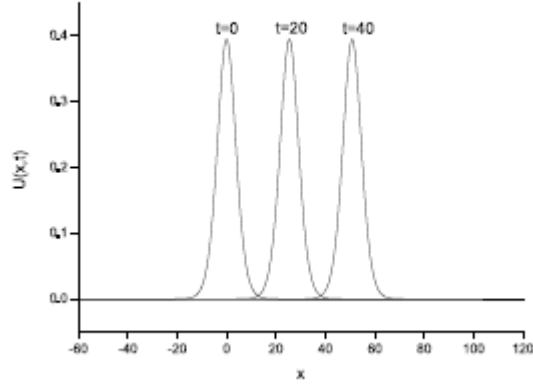
**Tablo 3.7:**  $p = 16$  için  $-60 \leq x \leq 120$  aralığında tek soliter dalga için değişmezler ve hata normlarının değerleri

$h = 0.5, \Delta t = 0.1$	$I_M$	$I_E$	$L_2 \times 10^{-3}$	$L_\infty \times 10^{-3}$
$t$				
0	8.5743072	4.1877184	0	0
10	8.5784605	4.1877007	1.10975	0.56601
20	8.5817596	4.1876854	2.16628	0.71926
30	8.5845639	4.1876709	3.10083	0.74798
40	8.5868723	4.1876570	4.06967	1.01156
$h = 0.25, \Delta t = 0.1$	$I_M$	$I_E$	$L_2 \times 10^{-3}$	$L_\infty \times 10^{-3}$
$t$				
0	8.5742501	4.1881116	0	0
10	8.5789396	4.1880903	1.37957	0.63322
20	8.5832196	4.1880718	2.76709	0.81657
30	8.5872190	4.1880543	3.95618	0.86438
40	8.5908517	4.1880374	5.09401	1.00763

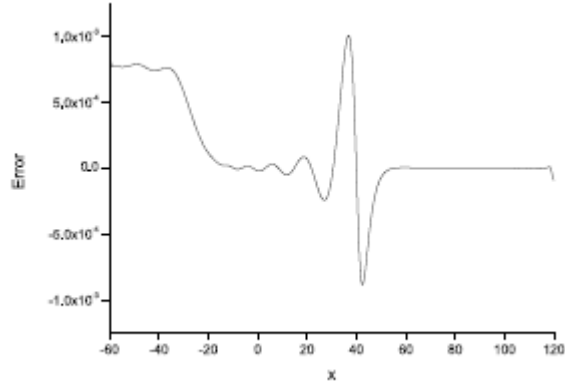
Şekil (3.7) den tek soliton dalganın beklenildiği gibi sabit bir hızla sağa doğru ilerlediği ve artan zaman adımlarında genliğini ve şeklini koruduğu görölmektedir. Tek soliton dalganın genliği  $x=0$  konumunda ve  $t=0$  zaman adımımda 0.686098 iken  $x=43.250$  konumunda ve  $t=40$  zaman adımımda 0.685675 şeklinde hesaplanmıştır.  $t=0$  ve  $t=40$  zamanlarında genliklerdeki fark  $4.2 \times 10^{-4}$  olup genlikler arasındaki fark oldukça küçük olarak bulunmuştur.  $t=40$  zamanında elde edilen hata değerleri, Şekil (3.8) de gösterilmektedir.

**Tablo 3.8:**  $p = 16$  için hata normlarının karşılaştırılması

$t = 40,$ $-60 \leq x \leq 120,$ $\Delta t = 0.1$	$L_2 \times 10^{-2}$			$L_\infty \times 10^{-3}$		
	Mevcut yöntem	[37] (Lineerleştirilmiş sonlu fark yöntemi)	[41] (Compact sonlu fark yöntemi)	Mevcut yöntem	[37] (Lineerleştirilmiş sonlu fark yöntemi)	[41] (Compact sonlu fark yöntemi)
$h = 0.5$	0.406967	6.13044	0.357253	1.01156	22.5471	1.18759
$h = 0.25$	0.509401	1.37857	0.38438	1.00763	5.05919	1.30630



**Şekil 3.7:** Belirtilen zamanlarda  $-60 \leq x \leq 120$  aralığı boyunca  $p = 16$ ,  $h = 0.25$ ,  $\Delta t = 0.1$  için tek soliter dalganın hareketi



**Şekil 3.8:**  $p = 16$ ,  $h = 0.25$ ,  $\Delta t = 0.1$  parametreleri için  $t = 40$  zamanında elde edilen hata

## 4. BÖLÜM

### SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, doğrusal olmayan genelleştirilmiş Rosenau-KdV ve genelleştirilmiş Rosenau-RLW denklemlerinin sayısal çözümleri için septik B-spline kollokasyon sonlu elemanlar metodu başarıyla uygulanmıştır. Yöntemin kararlılık analizi yapılarak şartsız kararlı olduğu gösterilmiştir. Sayısal algoritmanın yeterliliğini ve performansını kanıtlamak için tek soliter dalganın  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata normları ile  $I_M$  ve  $I_E$  ile belirtilen değişmezleri hesaplanmıştır. Elde edilen değerler, tablolar ve grafikler şeklinde verilmiştir. Tablolar incelendiğinde elde edilen hata norm değerlerinin oldukça küçük ve literatürde bulunan diğer sonuçlarla oldukça uyumlu bazı durumlarda da daha iyi olduğu ve değişmezlerin değerlerinin programın çalışması boyunca korunduğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla yöntemimizin ele aldığımız GR-KdV ve GR-RLW gibi denklemler ve fiziksel olarak önemli olan doğrusal olmayan geniş bir kısmi denklemler sınıfına da başarılı bir şekilde uygulanabileceğini söyleyebiliriz.



## KAYNAKLAR

- [1] Clough, R.W., “The finite element in plane stress analysis”, *Proc.2nd A.S.C.E.Conf.on Elektronik Computation*, Pittsburg, Pa., 345-378, 1960.
- [2] Davies, A. J., “The Finite Element Method: A First Approach” , *Oxford University Press*, Oxford, 1986.
- [3] Logan, D. L., “A First Course in the Finite Element Method (Fourth Edition) ” , Thomson, 2007.
- [4] Karakoç, S.B.G., “Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modifiye edilmiş Eşit Genişlikli Dalga Denkleminin Sayısal Çözümleri” , *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 11-29 , Malatya, 2011.
- [5] Reddy, J.N., “An introduction to nonlinear Finite Element Analysis” , *Oxford University Press Inc.*, New York, 2004.
- [6] Karakoc, S. B. G., Zeybek, H., Ak, T., “Numerical solutions of the Kawahara equation by the septik B-spline collocation method”, *Statistics Optimization and Information Computing*, 2 (3), 211-221, 2014.
- [7] Zaki, S. I., “A kuintik B-spline finite elements scheme for the KdVB equation”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188 (1), 121-134, 2000.
- [8] Ismail, M. S., “Numerical solution of complex modified Korteweg-de Vries equation by collocation method”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 749-759, 2009.
- [9] Irk, D., Dağ, İ., “Kuintik B-spline collocation method for the generalized nonlinear Schrödinger equation”, *Journal of the Franklin Institute*, 348, 378-392, 2011.
- [10] Mittal, R. C., Jain, R. K., “Numerical solution of General Rosenau-RLW Equation using Kuintik B-splines Collocation Method”, *Communications in Numerical Analysis*, 2012,1-16, 2012.
- [11] Mittal, R. C., Tripathi, A., “Numerical solutions of generalized Burgers–Fisher and generalized Burgers–Huxley equations using collocation of cubic B-splines”, *International Journal of Computer Mathematics*, 93, 1053-1077, 2015.
- [12] Mittal, R. C., Tripathi, A., “Numerical solutions of generalized Burgers–Fisher and generalized Burgers–Huxley equations using collocation of cubic B-splines”, *International Journal of Computer Mathematics*, 93, 1053-1077, 2015.

- [13] Irk, D., “Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri”, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-148, Eskişehir, 2007.
- [14] Keskin, P., “RLW Denkleminin Trigonometrik B-Spline Çözümleri ” , *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi , s. 11 , Eskişehir, 2016.
- [15] Zuo, J.M., *Applied Mathematics and Computation*, 215, 835, 2009.
- [16] Hu, J., Xu, Y., Hu, B., “Conservative Linear Difference Scheme for Rosenau-KdV Equation” , *Advances in Mathematical Physics*, 2013, Article ID 423718, 2013.
- [17] Ebadi, G., Mojaver, A., Triki, H., Yildirim, A., Biswas, A., *Romanian Journal of Physics*, 58(1-2), 3, 2013.
- [18] Razborova, P., Triki, H., Biswas, A., *Ocean Engineering*, 63, 1, 2013.
- [19] Wongsaijai, B., Poochinapan, K., *Applied Mathematics and Computation*, 245, 289, 2014.
- [20] Ak, T., Karakoc, S.B.G., Triki, H., “Numerical Simulation For Treatment Of Dispersive Shallow Water Waves With Rosenau-Kdv Equation”, *Eur. Phys. J. Plus.*, 131, 356, 2016
- [21] Ak, T., Dhawan., S., Karakoc, S.B.G., Bhowmik, S.K., Raslan, K.R., *Mathematical Modelling and Analysis*, 22(3), 373, 2017.
- [22] Atouani, N., Omrani, K., *Applied Mathematics and Computation*, 250, 832, 2015.
- [23] Zheng, M., Zhou, J., “An Average Linear Difference Scheme for The Generalized Rosenau- KdV Equation”, *Journal of Applied Mathematics*, 2014, Article ID 202793, 2014.
- [24] Luo, Y., Xu, Y., Feng, M., “Conservative Difference Scheme for Generalized Rosenau-KdV Equation”, *Advances in Mathematical Physics*, 2014, Article ID 986098, 2014.
- [25] Korteweg, D.J., de Vries, G., *Philosophical Magazine*, 39, 422, 1895.
- [26] Ak, T., Karakoc, S.B.G., Biswas, A., *Iranian journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 41(4), 1109, 2017.
- [27] Pan, X., Zhang, L., *Applied Mathematics and Computation*, 218, 8917, 2012.
- [28] Rosenau, P., *Phys. Scripta*, 34, 827, 1986.
- [29] Rosenau, P, *Progr. Theory. Phys.*, 79, 1028, 1988.
- [30] Park, M.A., *Math. Appl. Comput.*, 9, 145, 1990.

- [31] Prenter, P.M., *Splines and Variational Methods*. John Wiley & Sons, New York, 245 1975.
- [32]Esfahani, A., *Commun. Theor. Phys.*, 55, 396, 2011.
- [33] Zeybek, H., Karakoc, S.B.G., *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 46, 71, 2017.
- [34] Bochev, P.B., Gunzburger, M.D., *Least-squares finite element methods*, Springer, New York, 189, 2009.
- [35] Suli, E., Mayers, D.F., *An introduction to numerical analysis*, Cambridge University Press, New York, 293, 2003.
- [36] Thomee, V., *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, Springer Berlin Heidelberg New York, 81, 2006.
- [37] Pan, X. and Zhang, L. "Numerical simulation for general Rosenau-RLW Equation: An Average Linearized Conservative Scheme", *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, Article ID 517818, 15 pages (2012).
- [38] Pan, X. Zheng, K. and Zhang, L. "Finite difference discretization of the Rosenau-RLW equation", *Appl. Anal.*, 92, pp. 2578-2589 (2013).
- [39] Atouani, N. Omrani, K. "Galerkin finite element method for the Rosenau-RLW equation", *Computers and Mathematics with Applications*, 66, pp. 289-303 (2013).
- [40] Yagmurlu, N. M. Karaagac, B., and Kutluay, S. "Numerical Solutions of Rosenau-RLW Equation Using Galerkin Cubic B-Spline Finite Element Method", *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, 7, pp. 1-10 (2017).
- [41] Wongsaijai, B. and Poochinapan, K. "A three-level average implicit finite difference scheme to solve equation obtained by coupling the Rosenau-KdV equation and the Rosenau-RLW equation", *Applied Mathematics and Computation*, 245, pp. 289-304 (2014).
- [42] Zuo, J. M. Zhang, Y.M. Zhang, T. D., and Chang, F. "A new conservative difference scheme for the general Rosenau-RLW equation", *Bound. Value Probl.*, 2010, pp. 1-13 (2010).
- [43] Pan, X. and Zhang, L. "Numerical simulation for general Rosenau-RLW Equation: An Average Linearized Conservative Scheme", *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, Article ID 517818, 15 pages (2012).

- [44] Mittal, R. C. and Jain, R. K. "Numerical solution of general Rosenau-RLW, equations using quintic B-splines collocation method", *Commun. Numer. Anal.*, Article ID cna-00129, pp. 1-16 (2012).
- [45] Wongsajjai, Ben., Poochinapan, K., and Disyadej, T. "A compact finite difference method for solving the general Rosenau-RLW equation", *IAENG international journal of applied mathematics*, 44, pp. 1-8 (2014).
- [46] Wang, H., Wang, J., and Li, S. "A new conservative nonlinear high order compact finite difference scheme for the general Rosenau- RLW equation", *Bound. Value Probl.*, 2015, pp. 1-16 (2015).
- [47] Wang, H., Li, S., and Wang, J. "A conservative weighted finite difference scheme for the general Rosenau- RLW equation", *Comp. Appl. Math.* 36, pp. 63-78 (2017).
- [48] Arı , M. and Dereli, Y. "Numerical solutions of the general Rosenau-RLW equation using meshless kernel based method of lines", *Journal of Physics: Conference series*, 766(2016) 012030 (2016).
- [49] Cai, W., Sun, Y., and Wang, Y. "Variational discretizations for the generalized Rosenau type equations", *Appl. Math.Comput.*, 271, pp. 860-873 (2015)
- [50] Rosenau, P. "A quasi-continuous description of a nonlinear transmission line", *Phys. Scripta.*, 34, pp. 827-829 (1986).
- [51] Rosenau, P. "Dynamics of dense discrete systems", *Progr. Theory. Phys.*, 79, pp. 1028-1042 (1988).
- [52] Park, M. A. "On the Rosenau equation", *Math. Appl. Comput.*, 9, pp. 145-152 (1990).
- [53] Ak, T., Karakoc, S. B. G., and Biswas, A. "Application of Petrov-Galerkin finite element method to shallow water waves model: Modified Korteweg-de Vries equation", *Scientia Iranica B.*, 24 pp. 1148-1159 (2017).
- [54] Karakoc, S. B. G " A Detailed Numerical Study On Generalized Rosenau-KdV Equation With Finite Element Method", *Year 18, No. 4(45)*, pp. 837-852, (2018).
- [55] Karakoc, S B G., "A new numerical application of the generalized Rosenau-RLW equation" *Scientia Iranica. Transaction B, Mechanical Engineering; Tehran Vol. 27*, 772-783, (2018).

## ÖZGEÇMİŞ

Mahmut GÜZELOKUR 1992 yılında Batman'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Batman'da tamamladı. 2011'de kazandığı Mustafa Kemal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2015 yılında mezun oldu. Mezun olduğu yıl, özel eğitim kurumlarında matematik öğretmeni olarak göreve başladı. İki yıl aradan sonra Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. Halen Batman'da özel bir kurumda çalışmaktadır.

Adres: Tepecik Mahallesi Kozluk - BATMAN

Telefon: 0537 474 41 42

e-posta : mahmutguzelokur@gmail.com