T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TIPTA BAZI HASTALIKLARIN TANISINDA BULANIK KÜMELER VE UYGULAMALARI

Tezi Hazırlayan
İbrahim ŞANLIBABA

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Necdet BATIR

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Ocak 2019
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TIPTA BAZI HASTALIKLARIN TANISINDA BULANIK KÜMELER VE UYGULAMALARI

Tezi Hazırlayan
İbrahim ŞANLIBABA

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Necdet BATIR

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Ocak 2019
NEVŞEHİR

Prof. Dr. Necdet BATIR danışmanlığında **İbrahim ŞANLIBABA** tarafından hazırlanan "**Tıpta Bazı Hastalıkların Tanısında Bulanık Kümeler ve Uygulamaları**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

08/01/2019

JÜRİ

Başkan	:	Prof. Dr. Necdet BATIR
Üye	:	Prof. Dr. Fatma KARİPCİN
Üye	:	Prof. Dr. Mehmet BARAN
Üye	:	Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Zarife ZARARSIZ

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 10/01/2019 tarih ve 03-06 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

14/01/2019

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İbrahim ŞANLIBABA

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, aynı zamanda kişilik olarak da bana çok şey katan Sayın Hocam Prof. Dr. Necdet BATIR'a, sayın Prof. Dr. İhsan SOLAK'a, sayın Prof. Dr. Fatma KARİPCİN'e, sayın Dr. Üzeyir Çimen'e ve bilgisayar öğretmeni Haydar Ünsal'a teşekkür ederim.

Maddi ve manevi olarak her zaman desteklerini hissettiren değerli AİLEME,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Rektörlüğü'ne, Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanlığı'na, Matematik Bölüm Başkanlığı'na ve Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi BAP Birimi'ne teşekkür ederim.

TIPTA BAZI HASTALIKLARIN TANISINDA BULANIK KÜMELER VE UYGULAMALARI

(Doktora Tezi)

İbrahim ŞANLIBABA

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2019

ÖZET

Bu tezde ilk önce, matematik bilgi sisteminde kayıtlı olan bulanık kümeler ve bulanık kümelerde işlemler hakkında tanım ve teoremler verildi. Sonra bulanık çevrelerde kullanılan belirsizlik teorisi, kredibility teorisi ve uzayları incelendi. Daha sonra tıpta teşhis koymada bulanık küme işlemleri, bulanıklaştırma, durulaştırma, benzerlik, kredibility dağılım gibi konuların tanım ve uygulamalarına yer verildi. Özel olarak solunum ses verileri bulanık işlemlerle analiz etme, belirsiz olan ses verilerini anlamlandırmak için bulanıklaştırma ve durulaştırma yöntemleri kullanılarak seslerin entropileri, benzerlikleri, kredibility dağılımları ve beklenen değerleri bulunmuştur. Ayrıca solunum sesleri ile ilgili bir model oluşturulup hekimin teşhis koymasında nümerik sayılar çıkartılarak destek olunmuştur. Bulanık çok amaçlı karar yöntemleri kullanılarak ses verileri incelenmiş ve yorumlanmıştır.

Anahtar kelimeler:* *Bulanık küme, üyelik fonksiyonu, bulanıklaştırma, durulaştırma, ölçü, inanç derecesi, belirsiz uzay, kredibility, bulanık entropi, benzerlik ölçüsü, beklenen değer.
Tez Danışman: Prof. Dr. Necdet BATIR
Sayfa Adeti: 68

FUZZY SET THEORY AND APPLICATIONS IN MEDICAL DIAGNOSIS OF SOME DISEASES

(M. Sc. Thesis)
İbrahim ŞANLIBABA

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2019

ABSTRACT

In this thesis, firstly, definitions and theorems were given about fuzzy sets and fuzzy sets in the mathematical information system. Then, the uncertainty theory, creditbility theory and spaces used in fuzzy phenomena were examined. Then, the definition and applications of fuzzy set operations, fuzzification, defuzzification, similarity, credibility distribution were included in the diagnosis in medicine. Specifically, the entropy, similarities and credibility distributions of the respiratory sounds were determined by using the fuzzification and the defuzzification methods to analyze the sound data of the respiratory sound with fuzzy processes. In addition, a model for respiratory sounds was created and the physician's diagnosis was made by removing the numerical numbers. Using the fuzzy multipurpose decision methods, the sound data was analyzed and interpreted.

Keywords: ***Fuzzy set, membership function, fuzzification, defuzzification, measure, belief degree, uncertainty space, credibility, fuzzy entropy, similarity measure, expected value.***
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Necdet BATIR
Page Number: 68

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI i

TEZ BİLDİRİM SAYFASI ii

TEŞEKKÜR iii

ÖZET vi

ABSTRACT v

İÇİNDEKİLER vi

TABLOLAR LİSTESİ viii

ŞEKİLLER LİSTESİ ix

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ xii

1. BÖLÜM

GİRİŞ 1

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler 3

2.2. Bulanık Sayılar ve Bulanık Sayıların Dizileri 8

2.2.1. Bulanık Sayıların Sınırlı ve Yakınsak Dizilerinin Kümesi 12

3. BÖLÜM

BELİRSİZLİK TEORİSİ VE KREDİBİLİTY TEORİSİ

3.1. Belirsizlik Teorisi 13

3.1.1. Belirsiz Ölçü 15

3.2. Belirsizlik Ölçüsünün Çarpımı 18

3.3. Kredibility Teorisi 19

3.3.1. Kredibility Teorisi Tanım ve Teoremler 20

3.3.2. Bulanık Değişken 24

3.3.3. Kredibility/Bulanık Dağılım Fonksiyonu ... 25

3.3.4. Beklenen Değer ... 28

4. BÖLÜM

4.1. Durulaştırma ve Durulaştırma Yöntemleri (Defuzzification) ... 29

4.2. Bulanık Entropi ve Özellikleri ... 31

4.3. Bulanık Entropinin Benzerlik ölçüsü ve Uygulaması ... 34

4.4. Bulanık Kümelerde Akıl Yürütme ... 39

5. BÖLÜM

5.1. Tıpta Bulanık Kümeler ve Uygulamaları ... 41

5.2. Solunum Sesleri ... 43

5.3. Karar Verme Süreci ... 44

6. BÖLÜM

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER ... 62

KAYNAKLAR ... 63

ÖZGEÇMİŞ ... 67

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 5.1. Ses dalgalarının bulanıklaştırılmış hali ……………………………47

Tablo 5.2. Bulanık entropi değerleri ………………………………………48

Tablo 5.3. Bazı hastaların bulanıklaştırdıktan sonraki entropi değerleri …….50

Tablo 5.4. Bulanık Entropi benzerlik ölçüler ve kredibility beklenen değerleri……………………………………………...…….61

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Üçgen ve yamuk bulanık üyelik fonksiyonları…………………………..5

Şekil 2.2. Gaussian fonksiyon…………………………………………………....5

Şekil 2.3. $\alpha - kesim$ dizisi……………………………………………..…..8

Şekil 2.4. Bulanık dizilerde işlemler……………………………………….. …9

Şekil 3.1 Belirsizlik ve olasılık grafiği………………………………………13

Şekil 3.2. Ölçü fonksiyonu grafiği…………………………………………...15

Şekil 3.3. Belirsizlik ölçüsünün çarpımı………………………………………..18

Şekil 3.4. Bulanık değişkeni, kredibility uzayı, olasılık uzayı ve birbiriyle olan ilişkisini gösteren bir şema…………………………………………...25

Şekil 3.5. Kesin değer kredibility dağılım fonksiyonu ……………………………26

Şekil 3.6. Üçgen bulanık değişkeni kredibility dağılım fonksiyonu………………26

Şekil 3.7. Yamuk bulanık değişkeni kredibility dağılım fonksiyonu …………..…27

Şekil 3.8. Üçgen bulanık üyelik fonksiyonu ile kredibility dağılımını birlikte gösteren grafik…………………………………………………..28

Şekil 4.1. En Büyük Üyelik derecesine göre durulaştırma grafiği……………………………….…………………………......30

Şekil 4.2. Sentroid yöntemi ile durulaştırma grafiği………….………………......30

Şekil 4.3. Ağırlıklı Ortalama Yöntemi ile durulaştırma grafiği ……………….….31

Şekil 4.4. Ortalama En Büyük Üyelik Yöntemi ile durulaştırma grafiği ……..….31

Şekil 4.5. Entropinin geometrik gösterimi……………………………...……32

Şekil 4.6. Bulanık akıl yürütme piramidi..………………………………..……40

Şekil 5.1. Bulanık karar verme modeli…………………………………………45

Şekil 5.2. Hastanın solunum ses dalga grafiği……………………………………46

Şekil 5.3. Solunum sesinin bulanıklaştırılmış grafiği……………………………..47

Şekil 5.4. Bulanık benzerlik ölçüleri grafiği……….……………………………..49

Şekil 5.5. 15.nolu hastanın solunum ses grafiği ……………………………………..52
Şekil 5.6. 16.nolu hastanın solunum ses grafiği ……………………………………..52
Şekil 5.7. 17.nolu hastanın solunum ses grafiği ……………………………………..53
Şekil 5.8. 18.nolu hastanın solunum ses grafiği ……………………………………..53
Şekil 5.9. 19.nolu hastanın solunum ses grafiği ……………………………………..54
Şekil 5.10. 20.nolu hastanın solunum ses grafiği ……………………………………..54
Şekil 5.11. 21.nolu hastanın solunum ses grafiği ……………………………………..55
Şekil 5.12. 21.nolu hastanın solunum ses grafiği ……………………………………..55
Şekil 5.13. 15.hastanın kredibility dağılımı grafiği……………………………………56
Şekil 5.14. 16.hastanın kredibility dağılımı grafiği……………………………………57
Şekil 5.15. 17.hastanın kredibility dağılımı grafiği……………………………………57
Şekil 5.16. 18.hastanın kredibility dağılımı grafiği……………………………………58
Şekil 5.17. 19.hastanın kredibility dağılımı grafiği……………………………………58
Şekil 5.18. 20.hastanın kredibility dağılımı grafiği……………………………………59
Şekil 5.19. 21.hastanın kredibility dağılımı grafiği……………………………………60
Şekil 5.20. 22.hastanın kredibility dağılımı grafiği……………………………………60

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\boldsymbol{A^{\alpha}}$	A nın α kesimi
$\boldsymbol{\mu(x)}$	Üyelik fonksiyonu
$\boldsymbol{\mu_{\bar{A}}(x)}$	Üyelik fonksiyonun tümleyeni
$\boldsymbol{F}(\mathbb{R})$	Bulanık sayıların kümesi
$(\boldsymbol{u_n})$	Bulanık sayıların dizisi
$\boldsymbol{c(F)}$	Yakınsak bulanık dizilerin kümesi
$\boldsymbol{c_0(F)}$	Sıfıra yakınsak bulanık dizilerin kümesi
$\boldsymbol{l_\infty(F)}$	Sınırlı bulanık dizilerin kümesi
$\boldsymbol{H(A)}$	Bulanık sayıların entropisi
$\boldsymbol{\mathcal{M}(\Lambda)}$	Her bir Λ olayının inanç derecesi
$\boldsymbol{p(x)}$	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
$\boldsymbol{P_k(x)}$	Olasılık yoğunluk fonksiyon dizisi
$\boldsymbol{S(A,B)}$	A ile B arasındaki benzerlik ölçüsü
$\boldsymbol{\sigma -}$	Sigma Cebiri
$\boldsymbol{Cr\{A\}}$	A nın kredibilitysi
$\boldsymbol{Cr\{A^c\}}$	A nın değilinin kredibilitysi

$(\boldsymbol{A_i})$	Olaylar dizisi
$\boldsymbol{A_i \uparrow A}$	A_i dizileri A ya artarak gider
$\boldsymbol{A_i \downarrow A}$	A_i dizileri A ya azalarak gider

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bulanık küme teorisi, L.A. Zadeh [1] tarafından 1965 yılında ortaya atılmıştır. Zadeh'in önerisi büyük ilgi görmüş ve başarılı uygulamalar sayesinde tüm dünyaya yayılmıştır. Bulanık Küme Teorisi, belirlilik adına yapılan varsayımlarla fazlaca basitleştirilen ve sanal bir ortamda yaşatılan modellerin geliştirilmesi, böylece gerçek dünyanın karmaşık sistemlerinin çözümlenmesi için ortaya atılmıştır. Bulanık mantık ikili mantık sistemine karşı geliştirilen ve günlük hayatta kullanılan değişkenlere üyelik dereceleri atayarak bu değişkenlerin hangi oranlarda gerçekleştiğini belirleyen çoklu mantık sistemidir [2]. Bulanıklığın bilimsel adı: çok değerliliktir. Bulanıklığın tersi ikili mantık veya iki değerliliktir. Bulanık mantık kesin akıl yürütme yerine yaklaşık akıl yürütmeye odaklanmaktadır. Bulanıklık, gereken belirsizlik derecesini temsil edeceğimizde kullandığımız bir terimdir. Bulanıklığın en yaygın ölçütlerinden birisi entropidir. Entropi, bir sistem yada mesajdaki belirsizliği ölçer. Buda bulanıklığa denktir [3],[4].

Bulanık sistem verilerin yetersiz ve az olduğu sistemlerin araştırılmasında bulanık olan girdi ve çıktı bilgilerden bulanık mantık kurallarının kullanılması ile anlamlı ve yararlı çözüm çıkarımlarının yapılması yoluna gidilebilir. Bulanık mantığın güçlü yönlerinden birisi kelimelerle bilgi işlem sağlayabilmesidir.

Bulanık kümelerde Uzman sistem karşımıza çıkmaktadır [2]. Uzman sistem genel olarak, bir uzmandan alınan bilgilere dayanarak oluşturulan, karmaşık problemleri çözmek için olayları ve deneyimleri kullanan etkileşimli bilgisayar destekli karar aracıdır. Diğer bir deyişle uzman sistem, özel bir alanda karmaşık bir karar verme problemini çözen insan uzmanın düşünce sürecini taklit eden bir bilgisayar programıdır. Bu uzman sistem sorulara cevap verir, konuyu netleştirmek için sorular sorar, yorumlar yapar ve genellikle karar verme sürecine yardım ederek çalışır. Uzman sistemler uzman önerileri verir ve bilgisayarlı tanıdan, hassas tıbbı cerrahiye kadar çok sayıda etkinlik için öncülük yapar.

Tıbbı tanıdaki karmaşıklık ve belirsizlik, tanısal sürecin öğrenimi, öğretimi ve uygulamasını zorlaştırmaktadır. Bulanık mantık yöntemleri belirsizliğin belli tiplerini modellemedeki başarısından ötürü yaygın bir şekilde çeşitli tıbbı alanlarda da uygulama imkanı kazanmıştır. Karmaşık, doğrusal olmayan, bulanık ve hatta çatışan ilişkilerin bulunduğu durumlardaki yaklaştırma yeteneği bulanık mantığa, diğer kurala dayalı sistemlere göre avantaj kazandırmaktadır.

Bulanık bağıntılar kullanılarak belirti ve hastalıklar arasındaki ortak noktalar açıklanabilmektedir. Bu yaklaşım kullanılarak bilgisayar destekli tanı sistemlerinin bulanık tipleri geliştirilebilmiştir. Bugün tıpta çeşitli maksatlarla kullanılan çok sayıda bulanık uzman sistem ve karar destek sistemi bulunmaktadır. Bunlar karar verme, tanı süreçleri, görüntü yorumlama ve görüntü işleme gibi alanlarda ağırlık kazanmaktadır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, tezde üzerinde duracağımız konunun anlaşılmasına yardımcı olacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

Belirsizliğin çeşitli tipleri gerçek hayatta artıp gitmektedir. Bunlar genel olarak ikiye ayrılırlar; rastlantısallıktan (rastgelelik) kaynaklanan belirsizlikler ve net, kesin olmayan (bulanıklık) tan kaynaklanan belirsizliklerdir. Liu [5] rastgeleliği objektif belirsizliğin bir tipi, bulanıklığı da sübjektif belirsizliğin bir tipi olarak belirledi. Zadeh 1973 te ifade ettiği sistemin karmaşıklığı arttıkça kesin ve anlamlı açıklamalar yapmak bir eşik değere ulaşılana kadar azaldı, bunun ötesinde hassasiyet ve anlamlılık (yada uygunluk) neredeyse karşılıklı olarak kendine özgü niteliklere dönüştü. Zadeh 1965 te bulanıklığı daha iyi bir yolla ele almak için üyelik değerleriyle bulanık küme teorisini başlattı [6].

Tanım 2.1. (Karakteristik fonksiyon) Bir bulanık küme, $\mu(x)$ üyelik fonksiyonuyla ifade edilen elemanlardan oluşan; eğer bu elemanlar kümeye tam olarak ait ise "1" üyelik derecesine sahip, eğer hiç sahip değillerse; "0" üyelik derecesine sahip olan ya da kısmı aitlik söz konusu ise 0 ile 1 arasında üyelik değerleri alabilen elemanlardır. X elemanları "x" ile gösterilen bir evrensel küme olarak tanımlansın. X nin klasik bir alt kümesi olan A için üyelik, $\chi_A(x)$ karakteristik fonksiyonu ile gösterilir ve değeri $\{0,1\}$ olarak değişmektedir.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \ \ ise \\ 0, diğer\ durumlarda \end{cases}$$

Eğer küme değerinin $[0,1]$ aralığında olmasına izin verilirse, A kümesi bulanık küme olarak isimlendirilir. $\chi_A(x)$, x in A kümesi içindeki üyelik derecesidir [1].

Tanım 2.2. (Bulanık küme) X evrensel küme olsun. O zaman X in bir A bulanık kümesi

$$\mu_A : X \to [0,1]$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada $x \in X$ için $\mu_A(x)$ dönüşümü X in A bulanık kümesine göre üyelik derecesidir.

$$A=\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_A(x_2)}{x_2}+\frac{\mu_A(x_3)}{x_3}+\cdots+\frac{\mu_A(x_n)}{x_n}=\sum\frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \tag{2.1}$$

şeklinde de gösterilebilir [2]. Burada $\mu=\mu_A(x_n)$ ve $i=1,2,\ldots,n$ olup "+" sadece ifade gösterimi olarak kullanılmıştır.

Bildiğimiz üzere klasik kümeler özel anlamda bulanık kümelerdir. Klasik kümelerde kullanılan birçok cebirsel işlem bulanık kümelerde de geçerlidir, ayrıca De Morgan kanunları her zaman için bulanık kümelerde geçerli değildir. Dolayısıyla bulanık küme işlemlerinin, klasik küme işlemlerinden biraz daha farklı olduğu açıktır.

Tanım 2.3. (Bulanık kümelerde işlemler) A ve B bulanık kümelerine ait üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ olsun. İki bulanık kümenin birleşim, kesişim, tümleme ve kapsama işlemleri X in alt kümelerinde aşağıda gösterilmiştir [3].

$$\mu_{A\cup B}(x)=\text{mak}\{\mu_A(x),\mu_B(x)\} \qquad \forall x\in X \quad \text{(Birleşim)} \tag{2.2}$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\} \qquad \forall x\in X \quad \text{(Kesişim)} \tag{2.3}$$

$$\mu_{\bar{A}}(x)=1-\mu_A(x) \qquad \forall x\in X \quad \text{(Tümleme)} \tag{2.4}$$

$$\mu_A(x)\le\mu_B(x),\ \ (A\subseteq B)\text{ ise} \qquad \forall x\in X \quad \text{(Kapsama)} \tag{2.5}$$

Tanım 2.4. (Bulanık kümenin α kesimi) Bulanık sayılarda α kesimleri, bulanık sayılarda gerekli cebirsel işlemleri tanımlamak için gereklidir. Bulanık sayılarda $\alpha=1$ olması durumunda sayı gerçek sayıya, $\alpha=0$ olmasında ise tam bulanık, yani aralık sayıya dönüşür. $0<\alpha<1$ olması durumunda aynı bulanık sayının α seviyesinde kesilmesi ile ortaya kesik bulanık küme çıkacaktır [4].

α kesme kümesi X in kesin bir alt kümesidir ve matematiksel olarak,

$A_\alpha=\{x\in X{:}\,\mu_A(x)\ge\alpha\}$ biçiminde gösterilir. Genel olarak pratik uygulamalarda üçgen ve yamuk bulanık sayılar kullanılmaktadır. A bulanık kümesi ile gösterilen bir üçgen bulanık sayının matematiksel ifadesi,

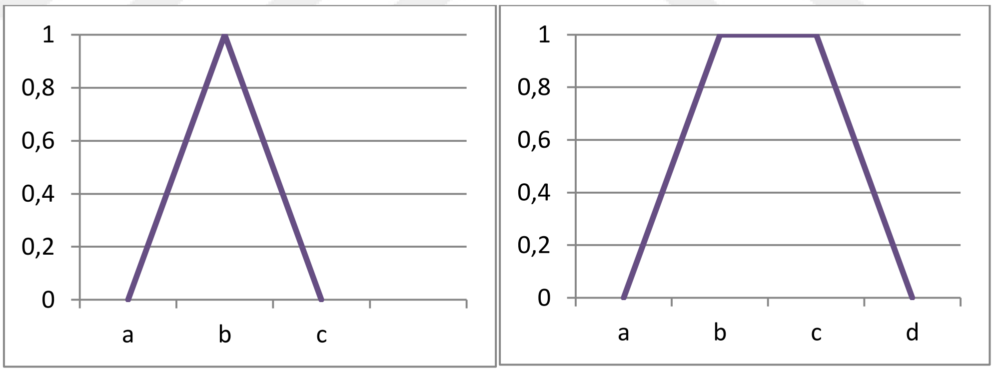
$$\mu_A(x) = \mu_A(x: a, b, c) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \ \ ise \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \le x \le c \ \ ise \\ 0, & x > c \ \ veya \ x < a \ \ ise \end{cases} \tag{2.6}$$

şeklinde verilir. Burada, bir üyelik derecesi gösterimi, $\mu_A(x: a, b, c)$ olarak karşımıza çıkar.

Benzer olarak bir yamuk bulanık sayının matematiksel ifadesi

$$\mu_A(x) = \mu_A(x: a, b, c, d) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \ \ ise \\ 1\,, & b \le x \le c \ \ ise \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d \ \ ise \\ 0, & x > d \ \ veya \ x < a \ \ ise \end{cases} \tag{2.7}$$

şeklindedir. Dikkat edilirse $b = c$ olduğu zaman yamuk bulanık sayı üçgen bulanık sayı haline dönüşür. Üçgen ve yamuk bulanık sayıların grafik gösterimleri aşağıdaki şekilde verilmiştir [4].

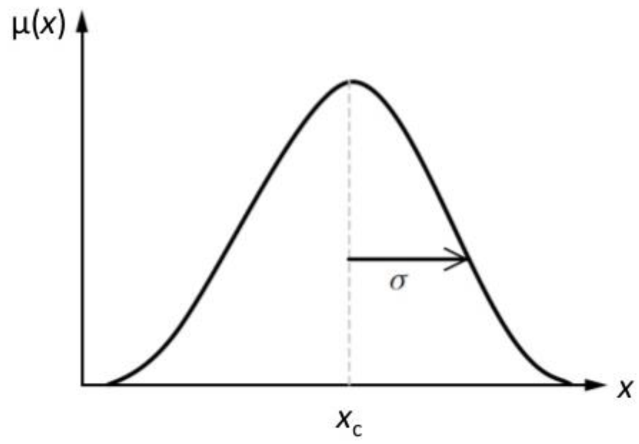


Şekil 2.1. Üçgen ve yamuk bulanık üyelik fonksiyonları

Üçgen ve yamuk bulanık üyelik fonksiyonları yerine lineer olmayan başka üyelik fonksiyonları da kullanılabilir. Gaussian üyelik fonksiyonu en çok kullanılanlardan biridir.

$$\text{gaussian}(\mathrm{x}, \mathrm{c}, \sigma) = \exp\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{x}-\mathrm{c}}{\sigma}\right)^2 \tag{2.8}$$

c sayısı merkez noktasını gösterirken σ da genişliği ifade etmektedir.



Şekil 2.2. Gaussian fonksiyon

Logaritması ikinci dereceden konkav olan fonksiyonlara Gaussian fonksiyon denir. Bu fonksiyon önceleri normal dağılım fonksiyonu olarak anılmıştır. Normal dağılım için, olasılık ve trigonometri alanlarına çok katkısı olan Moivre tarafından Laplace doğmadan önce ilk adımları atmış olsa da Gauss normal dağılım üzerine çok çalışma yapmış ve bu konunun tanınmasına olanak sağlamıştır. Dönemsel olarak çalışmaların üretenin değil de daha geniş kitleye yayan kişinin ismiyle anılması eğilim göstermesi sebebiyle bu fonksiyon Gaussian fonksiyonu olarak bilinmektedir [5].

Teorem 2.1. $A, \mathbb{R}$ üzerinde bir bulanık küme olsun. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için A konvekstir ancak ve ancak $A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \min\{A(x_1), A(x_2)\}$.

İspat 2.1. Kabul edelim ki A konveks olsun. $\alpha = A(x_1) \leq A(x_2)$ olmak üzere

$x_1, x_2 \in A_\alpha$ olarak alınırsa $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in A_\alpha$ dir. Herhangi bir $\lambda \in [0,1]$ için

$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \alpha = A_1(x) = \min\{A(x_1), A(x_2)\}$ olur.

Tersine, $A(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \min\{A(x_1), A(x_2)\}$ olsun. Herhangi bir $\alpha \in [0,1]$ için

$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{A(x_1), A(x_2)\} \geq \min(\alpha, \alpha) = \alpha$ olduğunda

$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$ olduğu elde edilir. Buradan A_α nın konveksliği elde edilir [6].

Bu teoremden bir bulanık A kümesinin A_α nın konveksliğine denk olduğu sonucu çıkarılabilir yani A kümesi konvekstir $\Leftrightarrow A_\alpha$ konvekstir. Bulanık kümeler $\alpha - kesim$ yardımıyla klasik kümelere dönüştürülürken, bulanık kümedeki bir özelliğin $\alpha - kesim$ kümesinde de ortaya çıkması halinde bir özellik *cutworty* (değerli kesim) özellik olarak isimlendirilir. Yukarıdaki teoremden konvekslik bulanık kümeler için *cutworty* özelliktir.

Tanım 2.5. (Bulanık sayılarda işlemler) İki bulanık sayı üzerinde tanımlı toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri aşağıda ayrıntılı olarak verilmiştir. Bu işlemler için, sırasıyla, genişletme prensibi (extension principle) yöntemi kullanılmıştır.

$$C = A + B = \mu_c(z) = \mathrm{mak}_{z=x+y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \quad (2.9)$$

$$C = A - B = \mu_c(z) = \mathrm{mak}_{z=x-y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \quad (2.10)$$

$$C = A \times B = \mu_c(z) = \mathrm{mak}_{z=x\times y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \quad (2.11)$$

$$C = A \div B = \mu_c(z) = \mathrm{mak}_{z=x\div y} \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \quad (2.12)$$

A ve B bulanık alt kümelerinin α seviye kesimleri $A_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ ve $B_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$ olduğu varsayılarak α kesimine göre toplama, çıkarma işlemleri;

$$(A + B)_\alpha = [a_\alpha^- + b_\alpha^-, a_\alpha^+ + b_\alpha^+] \quad (2.13)$$

$$(A - B)_\alpha = [a_\alpha^- - b_\alpha^-, a_\alpha^+ - b_\alpha^+] \quad (2.14)$$

A ve B bulanık alt kümelerinin α seviye kesimleri $A_\alpha = [a, b]$ ve $B_\alpha = [c, d]$ olduğu varsayılarak α kesimine göre çarpma ve bölme işlemleri;

$$(A \times B)_\alpha = [\min\{ac, ad, bc, bd\}, \mathrm{mak}\{ac, ad, bc, bd\}] \quad (2.15)$$

$$(A/B)_\alpha = \left[\min\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}, \mathrm{mak}\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}\right], \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilir [4].

2.2. Bulanık Sayılar ve Bulanık Sayıların Dizileri

Tanım 2.6. (Bulanık sayı) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olsun. $u: \mathbb{R} \to [0,1]$ tanımlı fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bulanık sayı denir.

(1) u normaldir yani $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ için $u(x_0) = 1$ dir.
(2) u bulanık konvekstir yani $\forall t \in [0,1]$ ve $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $u(tx + (1-t)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ olur.
(3) u fonksiyonu üstten yarı süreklidir yani $\forall \varepsilon > 0$ için öyleki $|x - x_0| < \delta$ iken $u(x) - u(x_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\exists \delta > 0$ vardır.
(4) u support (dayanağı) nın kapanışı kompakttır, $\overline{u^0} = \overline{\{x \in \mathbb{R}: u(x) > \alpha\}}$ [4],[45],[46].

Tanım 2.7. $u = (u_k)$ bulanık sayıların bir dizisi ve $u, v \in E$ verilsin. G de tüm negatif olmayan bulanık sayıların kümesi olsun. $\lambda(E)$bulanık sayıların dizi uzaylarının bir alt kümesi, $\|\cdot\|: \lambda(E) \to G,$ fonksiyonu eğer aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bulanık norm veya bulanık modül olarak adlandırılır:

(N1) $\|u\| = \theta \Leftrightarrow u = \theta$

(N2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$

(N3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

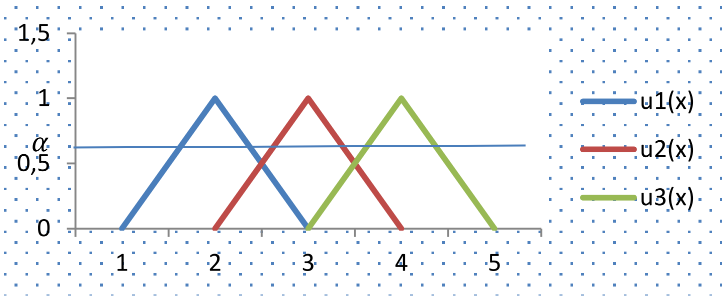
Eğer, $\|\cdot\|: \lambda(E) \to G$ fonksiyonu (N1), (N2), (N3) şartlarını sağlarsa $\lambda(E)$ bulanık sayıların dizi uzaylarının bulanık normu olarak isimlendirilir [7, 28].

Tanım 2.8. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $F(\mathbb{R})$ de bulanık sayıların kümesi olsun.

$f: \mathbb{N} \to F(\mathbb{R}) \quad k \to f(k) = u_k,$

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $u_k \in F(\mathbb{R})$ ile tanımlı f fonksiyonuna bulanık sayıların dizisi denir. Bulanık sayıların dizileri $u = (u_k)$ ile gösterilirse açıkça görülür ki

$(u_\alpha) = ({u_\alpha}^k) = ({u_\alpha}^1, {u_\alpha}^2, \dots, {u_\alpha}^k, \dots)$ biçiminde verilen diziye u nun $\alpha - kesim$ dizisi denir.



Şekil 2.3. $\alpha - kesim$ dizisi

Tanım 2.9. Bulanık sayıların çeşitli dizi kümeleri aşağıda verilmiştir:

i. $c(F) = \{(u_k) : \lim_k u_k = u_0,\ u_0 \in F(\mathbb{R})\ ve\ (u_k), F(\mathbb{R})$ de bir dizi$\}$ ile yakınsak bulanık sayı dizileri

ii. $c_0(F) = \{(u_k) \in F(\mathbb{R}) : \lim_k u_k = \theta\}$ ile 0 a yakınsak bulanık sayı dizileri

iii. $\omega(F) = \{(u_k) \in F(\mathbb{R}) : \exists k_0 \in \mathbb{N}\ için\ k \geq k_0\ iken\ u_k = \varphi\}$ ile bulanık sayı dizilerinin sonlu kümesi gösterilir.

iv. $w(F) = \{(u_k) \in F(\mathbb{R}) : k \in \mathbb{N}\} = \{f : \mathbb{N} \to F(\mathbb{R}), f(k) = u_k\}$ ile bulanık sayıların dizilerinin kümesi gösterilir.

$w(F)$ nin cebirsel yapısı aşağıdaki gibidir.

1. Toplama:

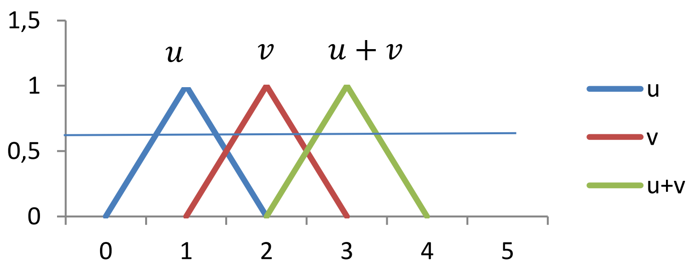
$+: w(F) \times w(F) \to w(F), u = (u_1, u_2, \dots)$ ve $(v_1, v_2, \dots) \in w(F)$ için

$(u, v) \to u + v = u_k + v_k$

$$(u_k) + (v_k) = (u_1, u_2, \dots, u_k, \dots) + (v_1, v_2, \dots, v_k, \dots)$$
$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_k + v_k, \dots)$$

2. Skalerle çarpma:

$\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $\lambda(u_k) = (\lambda u_k) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_k, \dots)$



Şekil 2.4. Bulanık dizilerde işlemler

Skalerle çarpma işleminde $(u^k) \in w(F)$ olmak üzere $u_\alpha{}^k = [u_\alpha^{k^-}, u_\alpha^{k^+}]$ olarak $\alpha - kesimler$ dizisi alınırsa;

$$\lambda u_k = \lambda u_\alpha{}^k = \lambda\left[u_\alpha^{k^-}, u_\alpha^{k^+}\right] = \begin{cases} \left[\lambda u_\alpha^{k^-}, \lambda u_\alpha^{k^+}\right], \ \lambda \geq 0 \\ \left[\lambda u_\alpha^{k^+}, \lambda u_\alpha^{k^-}\right], \ \lambda < 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

Kapalı aralıkların kümesi toplama işlemine göre bir ters elemana sahip olmadığından klasik anlamda bulanık sayılar kümesinin toplamaya göre tersi yoktur. Dolayısıyla $w(F)$ elemanları içinde aynı durum söz konusudur. Bu nedenle Zadeh anlamında toplama ve skalerle çarpma işlemleri kullanılarak $w(F)$ bir vektör uzayına dönüştürülemez.

Teorem 2.2. $c_0(F) \subset c(F) \subset w(F)$ kapsamasının olduğu açıktır.

Teorem 2.3. Bütün bulanık sayıların kümesini $F(\mathbb{R})$ ile ve $F(\mathbb{R}) = \{u | u: \mathbb{R} \to [0,1]\}$ normal, üstten yarı sürekli, konveks ve $\overline{u^0}$ kompakt olduğunu hatırlarsak,

$$u, v \in F(\mathbb{R}) \text{ için } d(u,v) = sup_{\alpha\in[0,1]}\left\{\left|u^{-(\alpha)} - v^{-(\alpha)}\right|, \left|u^{+(\alpha)} - v^{+(\alpha)}\right|\right\} \tag{2.18}$$

ile tanımlı d fonksiyonu metrik şartlarını sağlar ve $(F(\mathbb{R}), d)$ bir metrik uzaydır.

İspat 2.3. $u, v \in F(\mathbb{R})$ olsun. O halde

i. $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

$d(u,v) = sup_{\alpha\in[0,1]}\left\{\left|u^{-(\alpha)} - v^{-(\alpha)}\right|, \left|u^{+(\alpha)} - v^{+(\alpha)}\right|\right\} = 0 \ \Leftrightarrow$

$\left|u^{-(\alpha)} - v^{-(\alpha)}\right| = 0 \ \wedge \ \left|u^{+(\alpha)} - v^{+(\alpha)}\right| = 0 \Leftrightarrow$

$u^{-(\alpha)} = v^{-(\alpha)} \wedge \ u^{+(\alpha)} = v^{+(\alpha)} \ \Leftrightarrow \ u = v$

ii. $d(u,v) = sup_{\alpha\in[0,1]}\left\{\left|u^{-(\alpha)} - v^{-(\alpha)}\right|, \left|u^{+(\alpha)} - v^{+(\alpha)}\right|\right\}$

$= sup_{\alpha\in[0,1]}\left\{\left|v^{-(\alpha)} - u^{-(\alpha)}\right|, \left|v^{+(\alpha)} - u^{+(\alpha)}\right|\right\} = d(v,u)$

iii. $d(u,v) = sup_{\alpha\in[0,1]}\left\{\text{mak}\left\{\left|u^{-(\alpha)} - v^{-(\alpha)}\right|, \left|u^{+(\alpha)} - v^{+(\alpha)}\right|\right\}\right\}$

$= sup_{\alpha\in[0,1]}\left\{\text{mak}\left\{\left|u^{-(\alpha)} - w^{-(\alpha)} + w^{-(\alpha)} - v^{-(\alpha)}\right|, \left|u^{+(\alpha)} - w^{+(\alpha)} + w^{+(\alpha)} - v^{+(\alpha)}\right|\right\}\right\}$

$\leq sup_{\alpha\in[0,1]}\left\{\text{mak}\left\{\left|u^{-(\alpha)} - w^{-(\alpha)}\right| + \left|w^{-(\alpha)} - v^{-(\alpha)}\right|, \left|u^{+(\alpha)} - w^{+(\alpha)}\right| + \left|w^{+(\alpha)} - v^{+(\alpha)}\right|\right\}\right\}$

$\leq sup_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \text{mak}\left\{ \left| u^{-(\alpha)} - w^{-(\alpha)} \right|, \left| u^{+(\alpha)} - w^{+(\alpha)} \right| \right\} \right\} +$

$sup_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \text{mak}\left\{ \left| w^{-(\alpha)} - v^{-(\alpha)} \right|, \left| w^{+(\alpha)} - v^{+(\alpha)} \right| \right\} \right\}$

$= d(u, w) + d(w, v)$

metrik aksiyomlarını sağladığından $(F(\mathbb{R}), d)$ bir metrik uzaydır [7].

Tanım 2.10. $u = (u_k)$ bulanık sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$, $\forall k \geq k_0$ ve $\exists k \in \mathbb{N}$ için $d(u_k, u_0) = sup_{\alpha \in [0,1]} \bar{d}({u_k}^{\alpha}, {u_0}^{\alpha}) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa (u_k) ya $(u_0) \in F(\mathbb{R})$ ye yakınsaktır denir.

$\bar{d}({u_k}^{\alpha}, {u_0}^{\alpha}) = \text{mak}\left\{ \left| {u_k}^{-(\alpha)} - {u_0}^{-(\alpha)} \right|, \left| {u_k}^{+(\alpha)} - {u_0}^{+(\alpha)} \right| \right\}$ dir. Kısaca $\lim u_k = u_0$ ile gösterilir. Kapalı aralığında ise $d([a, b], [c, d]) = \text{mak}\{|a - c|, |b - d|\}$ dir.

Lemma 2.1. $E = \{[a, b] | a \leq b \; ve \; a, b \in \mathbb{R}\}$ bütün kapalı aralıkların kümesi olsun. $\tilde{d}: E \times E \to \mathbb{R}$ olduğundan $(E, \tilde{d})$ bir metrik uzaydır.

İspat 2.1.

$$([a, b], [c, d]) \to \tilde{d}([a, b], [c, d]) = \text{mak}\{|a - c|, |b - d|\} \tag{2.19}$$

ile tanımlı $\tilde{d}$ metrik aksiyomlarını sağlar.

i. $\tilde{d}([a, b], [c, d]) = 0 \;\Leftrightarrow\; \text{mak}\{|a - c|, |b - d|\} = 0 \;\Leftrightarrow\; |a - c| = 0$ ve $|b - d| = 0 \;\Leftrightarrow\; a = c, b = d$ yani $[a, b] = [c, d]$.

ii. $\tilde{d}([a, b], [c, d]) = \tilde{d}([c, d], [a, b])$ olduğu açıktır.

iii. $\tilde{d}([a, b], [c, d]) = \text{mak}\{|a - c|, |b - d|\}$

$= \text{mak}\{|a - c + e - e|, |b - d + f - f|\}$

$\leq \text{mak}\left\{\{|a - e| + |e - c|\}, \{|b - f| + |f - d|\}\right\}$

$= \tilde{d}([a, b], [e, f]) + \tilde{d}([e, f], [c, d])$ olduğundan

$(E, \tilde{d})$ bir metrik uzaydır.

Kabul edelim ki $u_k = ([a_k, b_k])$ bir Cauchy dizisi olsun. Yani $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall i, k \geq n_0$ için $d([a_k, b_k], [a_i, b_i]) < \varepsilon$ dir.

mak$\{|a_k - a_i|, |b_k - b_i|\} < \varepsilon$ olduğundan $|a_k - a_i| < \varepsilon$ ve $|b_k - b_i| < \varepsilon$ dir. (a_k) ve (b_k) dizileri $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan $\lim_k a_k = a_0$ ve $\lim_k b_k = b_0 . a_k \leq b_k$ olduğundan $a_0 \leq b_0$ olur. Şu halde $\lim_k u_k = \lim_k [a_k, b_k] = [a_0, b_0]$. Yani (u_k) Cauchy dizisi yakınsaktır ve yakınsadığı $[a_0, b_0] \in E$ olduğundan $(E, \tilde{d})$ tam metrik uzaydır.

Teorem 2.4. $F(\mathbb{R})$ tam metrik uzaydır.

İspat 2.4. Lemma 2.1 kullanılarak $F(\mathbb{R})$ nin de tam olduğu ispatlanabilir. $u \in F(\mathbb{R}) \Leftrightarrow u^{\alpha} = [u^{-\alpha}, u^{+\alpha}]$ olarak alınabilir. Çünkü $(u_k) \in F(\mathbb{R})$ ise $({u_k}^{\alpha})$ kesimleri $\forall \alpha \in [0,1]$ için E nin bir dizisini verir. E nin tamlığından $F(\mathbb{R})$ nin tam olduğu açıkça görülür.

2.2.1.Bulanık sayıların sınırlı ve yakınsak dizilerinin kümesi

Tanım 2.11. (Bulanık sınırlı dizi) $D(u_k, v_k) = sup_k d(u_k, v_k)$ ile tanımlı fonksiyonu göz önüne alalım. $l_{\infty}(F) = \{u = u_k : D(u_k, \theta_k) < \infty\}$ kümesine bulanık sayıların sınırlı dizilerinin kümesi denir. l_{∞}, F nin toplama işlemine göre bulanık sayıların dizisi üzerinde tanımlı toplama işlemine göre $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \dots)$ olup burada $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\theta_k = [0,0] = O$ formundadır. Kapalı aralıkların toplamaya işlemine göre ters elemanı olmadığından $l_{\infty}(F)$ bir grup olamaz. Fakat $(l_{\infty}(F), D)$ bir tam metrik uzay olur.

Tanım 2.12. (Bulanık yakınsak dizi) (u_k) bulanık sayıların bir dizisi olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $D(u_k, u_0) = sup_k d(u_k, u_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $u_0 \in F(\mathbb{R})$ varsa (u_k) ya bulanık sayıların yakınsak dizisi denir. Bu küme $c(F) = \{(u_k) : \lim_k u_k = u_0\}$ ile gösterilir.

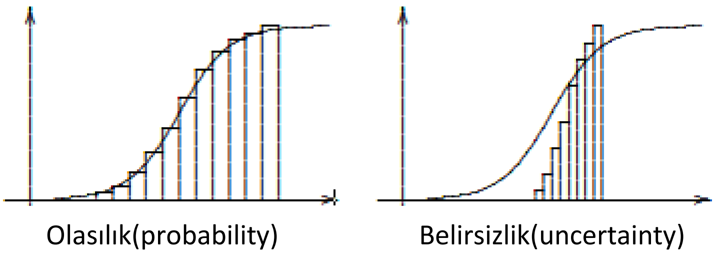
3.BÖLÜM

BELİRSİZLİK TEORİSİ VE KREDİBİLİTY TEORİSİ

3.1. Belirsizlik Teorisi

Reel kararlar genellikle belirsizlik durumunda yapılır. Mantıklı bir şekilde belirsizlikle başa çıkmak için iki yol vardır. Biri olasılık teorisi Kolmogorov [8,30] ve diğeri belirsizlik teorisidir Liu [9]. Olasılık teorisi sıklık ölçüsüne göre modellenen matematiğin bir dalıdır, belirsizlik teorisi ise inanç derecesine göre modellenen matematiğin bir dalıdır. Herhangi bir olayda belirsizlik varsa duruma göre karar almak gerekir halbuki belirli olan bir durumda her şey açıktır. Belirsizliğin nasıl modelleneceği sadece matematik araştırma konularında değil fen ve mühendislikte de önemlidir. Olasılık teorisinin alternatifi Zadeh tarafından bulanık küme ve bulanık mantık ile genişletilmiş ve derecelendirme yapılarak takdim edilmiştir. Belirsizlik genellikle karar verme sürecini etkilemektedir [8].

Belief degree (inanç derecesi) hepimize tanıdıktır, inancın ortaya çıkma sebebi bir olaydır. Örneğin "Güneş yarın doğacak", "Ahmet genç bir adamdır" veya "Önümüzdeki hafta hava güneşli olacak" tüm bunlar inanç olgusuna örneklerdir. Bir inanç derecesi inandığımız bir olayın olma kuvvetini temsil eder. Eğer olayın olacağına tamamen inanmışsak inanç derecesi 1, gerçekleşmesini tamamen imkansız düşünürsek inanç derecesi 0 dır. Genellikle inanç derecesini 0 ile 1 arasında bir sayı atarız çünkü olayın tamamen gerçekleşmesi ne 0 ın altındadır nede 1 in üstündedir. İnanç derecesinin yükseldikçe olayın olacağına daha kuvvetli inanılmaktadır. Dolayısıyla belirsizliğin miktarını tanımlamak amacıyla inanç derecesi fonksiyonlarına ihtiyaç vardır. Genellikle olayların gidişatı sıklıktan saptığı için olasılık teorisini kullanmak mantıksız (karşıt) sonuçlara yol açabilir. Bu nedenle belirsizlik teorisi kullanmak doğru olur.



Şekil 3.1. Belirsizlik ve olasılık grafiği

Eğer fonksiyonun dağılım grafiği soldaki eğri gibi verilirse olasılık teorisi kullanılmalıdır, sağdaki gibi verilirse veya ona yakınsa belirsizlik teorisi kullanılmalıdır.

Matematiksel bakış açısıyla belirsizlik teorisi aslında alternatif bir ölçü teorisidir. Bu nedenle belirsizlik teorisi ölçülebilir uzay ile başlamalıdır. Bunları öğrenmek amacıyla σ −cebiri, ölçülebilir küme, ölçülebilir uzay, Borel cebiri, Borel kümesi, belirsiz uzay kavramlarını açıklamaya başlayalım.

Tanım 3.1. Γ boştan farklı bir küme olsun ve Γ nın alt kümelerin koleksiyonu $\mathcal{L}$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\mathcal{L}$ bir σ −cebirdir, denir.

i. $\Gamma \in \mathcal{L}$
ii. $\Lambda \in \Gamma,\ \Lambda^c \in \mathcal{L}$ ve
iii. $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \in \mathcal{L}$ için $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots \in \mathcal{L}$.

Örnek 3.1. $\{\emptyset, \Gamma\}$ koleksiyonu Γ üzerinde en küçük $\sigma -$ cebirdir, Γ nın kuvvet kümeside (tüm alt kümeleri) en büyük σ −cebirdir.

Örnek 3.2. $\Gamma \neq \emptyset$ bir küme ve $\Lambda \subset \Gamma$ olsun. O zaman $\{\emptyset, \Lambda, \Lambda^c, \Gamma\}$ bir σ −cebirdir.

Tanım 3.2. (Ölçülebilir Uzay) Γ boş olmayan bir küme, $\mathcal{L}$ ise Γ üzerinde bir σ −cebir olsun. $(\Gamma, \mathcal{L})$ ikilisine ölçülebilir uzay, $\mathcal{L}$ deki her bir kümeye $\mathcal{L}$- ölçülebilir yada kısaca ölçülebilir küme denir.

Örnek 3.3. $\Gamma = \{a, b, c\}$ verilsin. $\mathcal{L} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Gamma\}$ ise Γ üzerine bir σ −cebir olsun. Böylece $(\Gamma, \mathcal{L})$ bir ölçülebilir uzaydır. Bundan başka $\{a\}$ ve $\{b, c\}$ bu uzayda ölçülebilir kümelerdir fakat $\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ kümeleri ölçülebilir kümeler değildir.

Tanım 3.3. (Borel cebiri) $\mathcal{B}$ en küçük $\sigma-$cebir reel sayılar kümesinin tüm açık aralıkları içerirse $\mathcal{B}$ ye $Borel$ cebir denir. $\mathcal{B}$ deki herhangi bir elemana da $Borel$ kümesi denir [9].

Örnek 3.4. Kapalı aralıkların, açık kümelerin, kapalı kümelerin, rasyonel sayıların ve irrasyonel sayılardan oluşturulan kümelerin $Borel\,kümesi$ olduğunu söyleriz. Sayılabilir kesişen ve birleşen kümelerden oluşur.

$$E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{B} \subset \mathcal{R}^n$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \ \in \mathcal{B}$$

Örnek 3.5. $\mathcal{R}$ de $Borel$ olmayan bir küme mevcut olsun. $[a]$ tüm pozitif rasyonel sayıların kümesini temsil etsin. Dikkat edelim ki eğer $a_1 - a_2$ rasyonel sayı değilse $[a_1]$ ve $[a_2]$ parçalı kümelerdir. Böylece $\mathcal{R}$ bu parçalanmış kümenin sonsuz sayılı kümesi olarak bölünmüştür. A kesinlikle parçalanmış sonsuz sayılı kümeden bir eleman içerir ve A $borel\ kümesi$ olmaz.

Tanım 3.4. ξ, $(\Gamma, \mathcal{L})$ ölçülebilir uzayında bir fonksiyon olsun. Eğer reel sayıların herhangi bir $Borel$ kümesi $B \in \mathcal{L}$ için $\xi^{-1}(B) = \{\gamma \in \Gamma : \xi(\gamma) \in B\} \in \mathcal{L}$ ise ξ ye ölçülebilir denir [9].

Sürekli fonksiyon, monoton fonksiyon ölçülebilir fonksiyonların örneğidir. ξ_1, $\xi_2, \dots$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olarak verilsin, aşağıdaki fonksiyonlarda ölçülebilirdir;

$sup_{\ 1 \le i < \infty}\ \xi_i(\gamma)$, $inf_{\ 1 \le i < \infty}\ \xi_i(\gamma)$, $\lim sup_{\ 1 \le i < \infty}\ \xi_i(\gamma)$, $\lim\ inf_{\ 1 \le i < \infty}\ \xi_i(\gamma)$

Özellikle de eğer $\lim_{\ i \to \infty} \xi_i(\gamma)$ her bir γ için mevcutsa lim ayrıca bir ölçülebilir fonksiyondur.

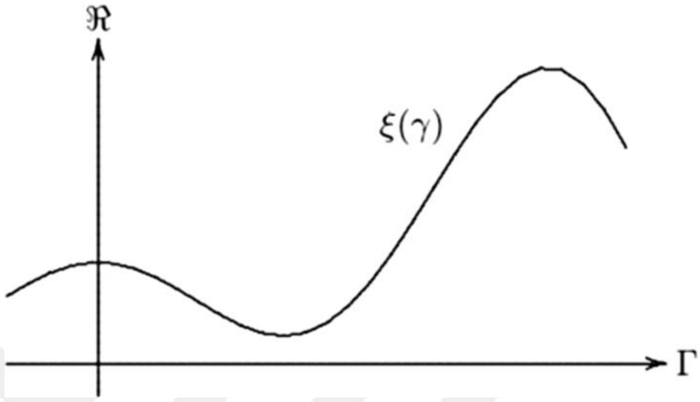
3.1.1.Belirsiz ölçü

$(\Gamma, \mathcal{L})$ ölçülebilir uzay olmak üzere $\mathcal{L}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli yani;

$\mathcal{M}: \mathcal{L} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ olmak üzere

1) $\mathcal{M}\{\emptyset\} = 0$
2) $\forall\, L \in \mathcal{L}$ için $\mathcal{M}\{L\} \geq 0$
3) $\mathcal{M}\{\cup_{i=1}^{\infty} L_n\} \leq \cup_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}\{L_n\}$

özelliklerini sağlıyorsa $\mathcal{M}$ ye ölçü fonksiyonu denir.



Şekil 3.2. Ölçü fonksiyonu grafiği

Tanım 3.1.1. (Belirsiz Ölçü) $\mathcal{M}, \mathcal{L}$ üzerinde bir $\sigma -$cebir olsun. $\mathcal{M}(\Lambda)$ da her bir Λ olayının inanç derecesini göstersin. Eğer $\mathcal{M}$ normallik, self duallik ve sayılabilir alt toplamsallık özelliklerini sağlıyorsa $\mathcal{M}$ fonksiyonuna belirsiz ölçü denir [9].

$\mathcal{M}$ belirsiz ölçüsünün aşağıda takip eden aksiyomları taşıması gerekir.

Aksiyom 1. (Normallik) $\mathcal{M}\{\Gamma\} = 1$ evrensel Γ kümesi için

Aksiyom 2. (Duallik) Her $\wedge$ olayı için $\mathcal{M}\{\Lambda\} + \mathcal{M}\{\Lambda^c\} = 1$ dir.

Aksiyom 3. (Sayılabilir Alt Toplamsallık) Her sayılabilir olaylar dizisi $\{\Lambda_i\}$ için;

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right\} \leq \sum_{i}^{\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\}$$

Belirsizlik ölçüsü, belirsiz olayların olma sıklığı değil kişilerin inanç derecesi (belief degree) olarak yorumlanır ve olaylarla ilgili kişilerin bilgilerine bağlıdır. Bilginin durumu değiştikçe belirsizlik ölçüsü de değişecektir. Belirsizlik teorisinde duallik aksiyomu aslında gerçekleri koruma yasasının bir uygulamasıdır. İnsan düşüncesine her zaman duallik nüfus eder, örneğin eğer bazıları bir önermenin inanç derecesinin doğruluğunun 0.6 olduğunu söylerse, bizim düşüncemizde önermenin yanlışlığının inanç derecesi 0.4 olduğunu düşünürüz. Ayrıca alt toplamsallık aksiyomunun kabul edilmemesi durumunda patoloji oluşur. Olasılık (probability) ölçme üç aksiyomla karşılanmasına rağmen belirsizlik teorisinin özel bir hali değildir çünkü çarpım olasılık (probability) ölçümü *4.aksiyomu* sağlamaz. Bu durumlar aşağıda geniş bir şekilde verilecektir.

Örnek 3.1.1. $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ ise bu durumda $\mathcal{L}$ üzerinde bir $\sigma -$cebir ve sekiz tane olay elde edilir.

$\mathcal{M}\{\Gamma\} = 1$ $\mathcal{M}\{\emptyset\} = 0$ $\mathcal{M}\{\gamma_1\} = 0{,}6$ $\mathcal{M}\{\gamma_2\} = 0{,}3$ $\mathcal{M}\{\gamma_3\} = 0{,}2$ $\mathcal{M}\{\gamma_1, \gamma_2\} = 0{,}8$ $\mathcal{M}\{\gamma_1, \gamma_3\} = 0{,}7$ $\mathcal{M}\{\gamma_2, \gamma_3\} = 0{,}4$

$\mathcal{M}$, tüm aksiyomları (Normallik, monotonluk, self duallik ve sayılabilir alt toplamsallık) sağladığından belirsiz bir ölçüdür.

Teorem 3.1.1. (Monotonluk Teoremi) $\mathcal{M}$ belirsiz ölçüsü monoton artan bir fonksiyondur. Yani $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ için $\mathcal{M}\{\Lambda_1\} \leq \mathcal{M}\{\Lambda_2\}$ dir.

İspat 3.1.1. Normallik aksiyomu $\mathcal{M}\{\Gamma\} = 1$ olduğunu söyler. Ayrıca duallik aksiyomundan da $\mathcal{M}\{{\Lambda_1}^c\} = 1 - \mathcal{M}\{\Lambda_1\}$ yazılabilir. $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ olduğundan $\Gamma = {\Lambda_1}^c \cup \Lambda_2$ olur. Alt toplamsallık aksiyomundan da $1 = \mathcal{M}\{\Gamma\} \leq \mathcal{M}\{{\Lambda_1}^c \cup \Lambda_2\} = 1 - \mathcal{M}\{\Lambda_1\} + \mathcal{M}\{\Lambda_2\}$ elde ederiz. Böylece $\mathcal{M}\{\Lambda_1\} \leq \mathcal{M}\{\Lambda_2\}$ sonucu bulunur.

Teorem 3.1.2. $\emptyset$ boş kümenin her zaman belirsiz ölçüsü 0 dır. Yani $\mathcal{M}\{\emptyset\} = 0$ dır.

İspat 3.1.2. $\emptyset = \Gamma^c$ ve $\mathcal{M}\{\Gamma\} = 1$ dir. Duallik aksiyomundan $\mathcal{M}\{\emptyset\} = 1 - \mathcal{M}\{\Gamma\} = 1 - 1 = 0$.

Teorem 3.1.3. (Asimtotik Teoremi) Her bir $\Lambda_1, \Lambda_1, \ldots$ olayları için

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\} > 0, \quad \Lambda_i \uparrow \Gamma \quad \text{ise}$$

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\} < 1, \quad \Lambda_i \downarrow \emptyset \quad ise$$

İspat 3.1.3. Kabul edelim ki $\Lambda_i \uparrow \Gamma$ olsun. $\Gamma = \bigcup_i \Lambda_i$ sayılabilir alt toplamsallıktan $1 = \mathcal{M}\{\Gamma\} \leq \sum_i^\infty \mathcal{M}\{\Lambda_i\}$. $\mathcal{M}\{\Lambda_i\}$, i ye göre arttığı için $\lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\} > 0$. Eğer $\Lambda_i \downarrow \emptyset$ ise ${\Lambda_i}^c \uparrow \Gamma$ dir. İlk eşitlik ve duallik aksiyomundan $\lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{\Lambda_i\} = 1 - \lim_{i\to\infty} \mathcal{M}\{{\Lambda_i}^c\} < 1$. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.1.2. (Belirsiz Uzay) Boş olmayan bir Γ kümesi verilsin, $\mathcal{L}$ ise Γ üzerinde bir $\sigma -$cebiri ve $\mathcal{M}$ belirsiz bir ölçü olsun. $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ üçlüsüne bir belirsiz uzay denir [10].

Örnek 3.1.2. $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ iki elemanlı bir küme olsun. $\mathcal{L}$ ise Γ nın bir kuvvet kümesi ve $\mathcal{M}$ bir belirsiz ölçü $\mathcal{M}\{\gamma_1\} = 0{,}6$ $\mathcal{M}\{\gamma_2\} = 0{,}4$ ile verilen $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ bir belirsiz uzaydır.

3.2. Belirsizlik Ölçüsünün Çarpımı

Belirsizlik ölçüsünün çarpımı Liu [15] tarafından 2009 yılında tanımlanmıştır. Böylece belirsizlik teorisinin 4.aksiyomu üretilmiş oldu. Her $k = 1,2,\ldots$ için $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ bir belirsiz uzayı verilsin.

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots$$

Yani, her $k = 1,2,\ldots$ için $\gamma_k \in \Gamma_k$ için $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ nin tüm formlarının kümesi Γ kümesinde bir ölçü dikdörtgenidir

$$\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_1 \times \ldots$$

Öyle ki her $k = 1,2,\ldots$ için $\gamma_k \in \mathcal{L}_k$ en küçük $\sigma -$ cebiri Γ nin tüm ölçülebilir dikdörtgenlerini içerir ve çarpım $\sigma -$cebiri diye adlandırılır,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \ldots$$

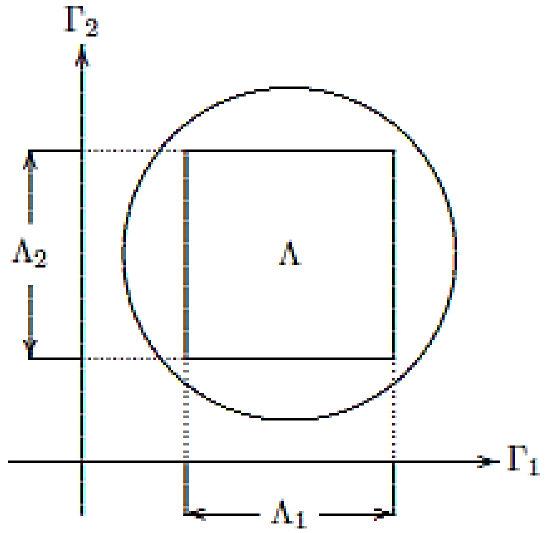
ile gösterilir. Sonra $\mathcal{M}$ çarpım belirsiz ölçüsü $\mathcal{L}$ üzerinde çarpım $\sigma -$cebiri takip eden çarpım aksiyomu içerisinde tanımlanacaktır.

Aksiyom 4. (Çarpım Aksiyomu) Her $k = 1,2,\ldots$ için $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ bir belirsiz ölçü olsun. $\mathcal{M}$ çarpım belirsiz ölçüsü, öyle ki her $k = 1,2,\ldots$ için $\mathcal{L}_k$ den rastgele seçilen Λ_k için aşağıdaki eşitlik sağlanır [19].

$$\mathcal{M}\left\{\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\right\} \leq \bigwedge_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}$$

Yukarıdaki tanımlı eşitsizliği bir çarpım belirsiz ölçüsünü dikdörtgenler için tanımlayalım.

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_1 \times \ldots \subset \Lambda} \min_{1 \le k \le \infty} \mathcal{M}_k \{\Lambda_k\}, & eğer \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_1 \times \ldots \subset \Lambda} \min_{1 \le k \le \infty} \mathcal{M}_k \{\Lambda_k\} > 0.5 \\ 1 - \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_1 \times \ldots \subset \Lambda^c} \min_{1 \le k \le \infty} \mathcal{M}_k \{\Lambda_k\}, & eğer \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_1 \times \ldots \subset \Lambda^c} \min_{1 \le k \le \infty} \mathcal{M}_k \{\Lambda_k\} > 0.5 \\ 0.5, & diğer\ durumlarda \end{cases} \tag{3.1}$$



Şekil 3.3. Belirsizlik ölçüsünün çarpımı

3.3.Kredibility Teorisi

Bulanık küme teorisi Zadeh tarafından 1965 te üyelik fonksiyonu aracılığıyla sunuldu. Zadeh bir bulanık olayı ölçmek amacıyla 1978 de olasılık ölçme kavramını önerdi. Olasılık teorisi çok geniş şekilde kullanılmasına rağmen self duallik özelliği yoktu. Aslında self duallik ölçüsü kesinlikle teori ve uygulama için gerekliydi. Self duallik ölçümünü tanımlamak amacıyla Liu 2002 yılında kredibility ölçü kavramını sundu. Kredibility ölçü, bulanık olayların meydana gelme olasılığını ölçen bir kavramdır. Bulanıklığı Liu dört aksiyomatik özellikle kurarak kredibility teoriyi ortaya çıkardı. Buna ek olarak Liu ve Li kredibility ölçü için bir yeterlilik ve gereklilik durumları tanımlarını verdi.

Kredibility teori bulanık çevrelerin çalışma yaklaşımı için matematiğin bir branşı olarak 2004 yılında Liu tarafından oluşturuldu. Kredibility belirli bir veriye bağlanan güven düzeyini ölçtüğü için kredibility teori bulanık çevrelerde kullanılmaya başlandı.

3.3.1.Kredibilitiy teorisi tanım ve teoremler

Tanım 3.3.1. (Kredibility Ölçü) Θ boş olmayan bir küme $\mathcal{P}$ de Θ nın kuvvet kümesi, Θ üzerindeki en büyük $\sigma -$cebir olsun. $\mathcal{P}$ nin her bir elemanına bir olay denir. Kredibility'nin aksiyomatik yapısını tesis etmek için her bir A olayına $Cr\{A\}$ sayısı atayalım öyle ki bu sayı A nın olup olmayacağını belirlesin.

$$A \to Cr\{A\} = 1$$

$$Cr\{A\} = 0$$

$$Cr: \mathcal{P} \to F(\mathbb{R})$$

$$A \to Cr\{A\} = bulanık\ 1.$$

Sezgisel olarak $Cr\{A\}$ sayısının belli özelliklere sahip olmasını belirlemek için aşağıdaki dört özelliği kabul edelim.

Aksiyom 1. (Normallik) $Cr\{\Theta\} = 1$

Aksiyom 2. (Monotonluk) $A \subset B \ \Rightarrow Cr\{A\} \ \subset Cr\{B\}$

Aksiyom 3. (Self -Duallik) Herhangi bir A olayı için $Cr\{A\} + Cr\{A^c\} = 1$

Aksiyom 4. (Maksimality) Herhangi bir (A_i) olayları için

$$Cr(\cup_i A_i) = sup_i\{Cr\{A_i\}: i \in \mathbb{N}\} \tag{3.2}$$

Burada $sup_i\{Cr\{A_i\}\} < 0.5$ dir.

Yukarıdaki özellikleri sağlayan Cr fonksiyonuna kredibility ölçü denir.

Tanım 3.3.2. Θ boş olmayan bir küme, $\mathcal{P}$ de Θ nın kuvvet kümesi ve Cr bir kredibility ölçü olsun. $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ üçlüsüne bir kredibility uzay denir.

Örnek 3.3.1. $\Theta = \{A_1, A_2\}$ olsun. Bu takdirde $\emptyset, \{A_1\}, \{A_2\}$ ve $\{A_1, A_2\}$ olayları vardır. $\mathcal{P} = \{\emptyset, \{A_1\}, \{A_2\}, \{A_1, A_2\}\}$ dir. Şimdi Cr fonksiyonu;

$$Cr: \mathcal{P} \to [0,1]$$

$Cr\{\emptyset\} = 0$, $Cr\{A_1\} = 0.7$, $Cr\{A_2\} = 0.3$ ve $Cr\{\Theta\} = 1$ olsun. O halde;

Aksiyom 1. $Cr\{\Theta\} = 1$ olduğundan açıktır.

Aksiyom 2. $\forall A, B \in \mathcal{P}$ için $\emptyset \subset A_1$ için $0 \subset 0.7$ dir. $A_1 \subset \Theta$ olduğunda $Cr\{A_1\} = 0.7 \leq 1 = Cr\{\Theta\}$ ve $A_2 \subset \Theta$ olduğunda $Cr\{A_2\} = 0.3 \leq 1 = Cr\{\Theta\}$.

$A \subset B \Rightarrow Cr\{A\} \subset Cr\{B\}$ olduğu görülür.

Aksiyom 3. $\emptyset^c = \Theta$ olduğundan $Cr\{A_1\} + Cr\{A_2\} = 0.7 + 0.3 = 1$. Dolayısıyla $Cr\{\emptyset\} + Cr\{\emptyset^c\} = 1$

$= 0 + Cr\{A_1, A_2\}$

$= \emptyset^c = \{A_1, A_2\}$ ve $\{A_1, A_2\}^c = \emptyset$ olduğundan durum yine açıktır.

Aksiyom 4. $\emptyset \cup A_2 = A_2$ olduğundan $Cr\{\emptyset, A_2\} = sup\{Cr\{\emptyset\}, Cr\{A_2\}\} = sup\{0,0.3\} = 0.3 = Cr\{A_2\}$ herhangi (A_i) olayları için

$Cr(\cup_i A_i) = sup_i\{Cr\{A_i\}: i \in \mathbb{N}\}$

$Cr(\cup_i A_i) = sup_i\{0,0.3\} = 0.3 \leq 0.5$

$sup_i\{Cr\{A_i\}\} < 0.5$ olacak şekilde (A_i) olayları için $Cr(\cup_i A_i) = sup_i\{Cr\{A_i\}: i \in \mathbb{N}\}$ dir.

Kredibilitysi 0.5 ten küçük olacak şekilde seçilen $\emptyset, A_2$ için $\{\emptyset, A_2\}$ kümesi göz önüne alınırsa $Cr(\cup_i A_i) < 0.5$ olduğu görülür, yani Cr bir kredibility ölçüdür.

Tanım 3.3.3. $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ bir bulanık vektörü $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ kredibility uzayında verilsin. Üyelik fonksiyonu bir kredibility ölçü ile

$$\mu(x) = (2Cr\{\xi = x\}) \wedge 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.3.4. ξ olasılık dağılım fonksiyonu ile birlikte bir bulanık değişken olarak verilsin. $\mu \to [0,1]$. $\mu(x) = 1$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ mevcutsa ξ bulanık değişkeninin normal olduğu söylenir. $\{\xi \geq x\}$ nin olasılık ölçüsü $Pos(\xi \geq x) = sup_{u \geq x}\, \mu(x)$ ile $\{\xi \geq x\}$ nin gereklilik ölçüsü $Nec(\xi \geq x) = 1 - Pos(\xi < x) =$

$sup_{u<x}\,\mu(x)$ ile tanımlanır. $Cr(A)=\frac{1}{2}\{Pos(A)+Nec(A)\}$ Olasılık ve gereklilik ölçüsüne göre 2002 yılında Liu tarafından Cr ölçü olarak tanımlanmıştır.

Örnek 3.3.2. $\mu, \mathbb{R}$ üzerinde negatif olmayan bir fonksiyon olarak verilsin. Öyle ki $\sup \mu(x)=1$ olmak üzere küme fonksiyonu;

$$Cr\{A\}=\frac{1}{2}\left(sup_{x\in A}\,\mu(x)+1-sup_{x\in A^c}\,\mu(x)\right)$$

$\mathbb{R}$ üzerinde bir kredibility ölçüdür.

Teorem 3.3.1. Θ boş olmayan bir küme $\mathcal{P}$ de Θ nın kuvvet kümesi olsun. Eğer Cr bir kredibility ölçü ise herhangi bir $A\in\mathcal{P}$ için $Cr\{\emptyset\}=0$ ve $0\le Cr\{A\}\le 1$ dir.

İspat 3.3.1. $Cr:\mathcal{P}\to[0{,}1]$ ise *aksiyom1-aksiyom3* ten $Cr\{\emptyset\}=1-Cr\{\,\Theta\}=0$ dir.

$\emptyset\subset A\subset\Theta$ olduğundan $Cr\{\emptyset\}\subset Cr\{A\}\subset Cr\{\,\Theta\}$, $0\le Cr\{A\}\le 1$ dir.

Teorem 3.3.2. $\emptyset\neq\Theta$ ve $\mathcal{P}$ de Θ nın kuvvet kümesi olsun. $A,B\in\mathcal{P}$ ve Cr de kredibility ölçü olmak üzere

1) Eğer $Cr\{A\cup B\}<0.5$ ise $Cr\{A\cup B\}=\text{mak}\{Cr\{A\},Cr\{B\}\}$ dir. (3.3)
2) Eğer $Cr\{A\cap B\}\ge 0.5$ ise $Cr\{A\cap B\}=\min\{Cr\{A\},Cr\{B\}\}$ dir. (3.4)

İspat 3.3.2. Eğer $Cr\{A\cup B\}<0.5$ ise bu takdirde *aksiyom 2* den $\text{mak}\{Cr\{A\},Cr\{B\}\}<0.5$ görülür.

$A\subset A\cup B \quad Cr\{A\}\le Cr\{A\cup B\}$

$B\subset A\cup B \quad Cr\{B\}\le Cr\{A\cup B\}$

Böylece *aksiyom 4* ten $Cr\{A\cup B\}=\text{mak}\{Cr\{A\},Cr\{B\}\}$ elde edilir. Eğer $Cr\{A\cup B\}=0.5$ ise $Cr\{A\cup B\}=\text{mak}\{Cr\{A\},Cr\{B\}\}$ eşitliği geçerli değildir. Dolayısıyla $\text{mak}\{Cr\{A\},Cr\{B\}\}<0.5$ olur. *Aksiyom 4* ten $Cr\{A\cup B\}=\text{mak}\{Cr\{A\},Cr\{B\}\}<0.5$ dir.

Teorem 3.3.3. (Kredibility Alt Toplamsallık) Bir kredibility ölçü Cr alt toplamsaldır yani $\forall A,B\in\mathcal{P}$ için $Cr\{A\cup B\}\le Cr\{A\}+Cr\{B\}$ dir.

İspat 3.3.3. Aşağıda $Cr\{A\}$ ve $Cr\{B\}$ nin üç durumu gösterilecektir.

1) $Cr\{A\} < 0.5$ ve $Cr\{B\} < 0.5$ olsun. *Aksiyom 4* ten dolayı

$$Cr\{A \cup B\} = \text{mak}\{Cr\{A\}, Cr\{B\}\} = Cr\{A\} \vee Cr\{B\}$$

$$\leq Cr\{A\} + Cr\{B\} \text{ dir.}$$

2) $Cr\{A\} \geq 0.5$ olsun. Bu durumda aksiyom 2 ve aksiyom 3 ten $Cr\{A^c\} \leq 0.5$ ve $Cr\{A \cup B\} \geq Cr\{A\} \geq 0.5$ olduğundan

$$Cr\{A^c\} = Cr\{A^c \cap B\} \vee Cr\{A^c \cap B^c\}$$

$$\leq Cr\{A^c \cap B\} + Cr\{A^c \cap B^c\}$$

$$\leq Cr\{B\} + Cr\{A^c \cap B^c\}$$ dir. Bu eşitsizliği kullanarak

$$Cr\{A\} + Cr\{B\} = 1 - Cr\{A^c\} + Cr\{B\}$$

$$\geq 1 - Cr\{B\} - Cr\{A^c \cap B^c\} + Cr\{B\}$$

$$= 1 - Cr\{A^c \cap B^c\}$$

$$= Cr\{A \cup B\}$$

3) $Cr\{B\} \geq 0.5$ ise yukarıdakine benzer olarak $Cr\{A \cup B\} \leq Cr\{A\} + Cr\{B\}$ bulunur. Şu halde Cr alt toplamsaldır. Cr nin toplamsal olması $Cr\{A\}$ veya $Cr\{B\}$ nin sıfır olması ile mümkündür [11].

Teorem 3.3.4. $\{B_i\}$ azalan bir dizi olsun. $Cr\{B_i\} \to 0$, $i \to \infty$. Herhangi bir A olayı için;

$$\lim_i Cr\{A \cup B_i\} = \lim_i Cr\{A \setminus B_i\} = Cr\{A\} \text{ dir.}$$

İspat 3.3.4. Alt toplamsallık teoremi ve monotonluk özelliğinden görülür ki her bir $i \in \mathbb{N}$ için $Cr\{A\} \leq Cr\{A \cup B_i\} \leq Cr\{A\} + Cr\{B_i\}$ dir. Böylece $Cr\{B_i\} \to 0$,

$i \to \infty$ olmasından $Cr\{A \cup B_i\} \to Cr\{A\}$ olduğu görülür.

$Cr\{A \setminus B_i\} \subset A \subset (Cr\{A \setminus B_i\} \cup B_i)$ olduğundan

$Cr\{A \setminus B_i\} \leq Cr\{A\} \leq (Cr\{A \setminus B_i\} + Cr\{B_i\})$ yazılabilir.

$Cr\{B_i\} \to 0$ olduğu göz önüne alınırsa $Cr\{A \setminus B_i\} \to Cr\{A\}$ olur.

Kredibility fonksiyon ne alttan yarı süreklidir nede üstten yarı süreklidir. Bununla beraber aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3.3.5. Herhangi $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ olayları için aşağıdaki şartlardan biri mevcutsa

(a) $Cr\{A\} \leq 0.5$ ve $A_i \uparrow A$
(b) $\lim_{i\to\infty} Cr\{A_i\} < 0.5$ ve $A_i \uparrow A$
(c) $Cr\{A\} \geq 0.5$ ve $A_i \downarrow A$
(d) $\lim_{i\to\infty} Cr\{A_i\} > 0.5$ ve $A_i \downarrow A$

bu takdirde $\lim_{i\to\infty} Cr\{A_i\} = Cr\,\{\lim_{i\to\infty} A_i\}$ dir.

İspat 3.3.5.

(a) $Cr\{A\} \leq 0.5$ olduğunda her $i \in \mathbb{N}$ için $Cr\{A_i\} \leq 0.5$ olur. *Aksiyom 4* ten görülür ki $Cr\{A\} = Cr\{\cup_i A_i\} = sup_i Cr\{A_i\} = \lim_{i\to\infty} Cr\{A_i\}$.

(b) $\lim_{i\to\infty} Cr\{A_i\} < 0.5$ olduğunda $sup_i Cr\{A_i\} < 0.5$ dolayısıyla *Aksiyom 4* ten $Cr\{A\} = Cr\{\cup_i A_i\} = sup_i Cr\{A_i\} = \lim_{i\to\infty} Cr\{A_i\}$.

(c) $Cr\{A\} \geq 0.5$ ve $A_i \downarrow A$ olduğunda Cr nin self dualitisinden $Cr\{A^c\} \leq 0.5$ ve

$A^c{}_i \uparrow A^c$ dir. Böylece$Cr\{A_i\} = 1 - Cr\{A^c{}_i\} \to 1 - Cr\{A^c\} = Cr\{A\}$.

(d) $\lim_{i\to\infty} Cr\{A_i\} > 0.5$ ve $A_i \downarrow A$ olduğunda self duality özelliğinden $\lim_{i\to\infty} Cr\{A^c{}_i\} = \lim_{i\to\infty}(1 - Cr\{A^c{}_i\}) < 0.5$ ve $A^c{}_i \uparrow A^c$ dir. Böylece $Cr\{A_i\} = 1 - Cr\{A^c{}_i\} \to 1 - Cr\{A^c\} = Cr\{A\}$ olur ki buda ispatı tamamlar [11].

3.3.2. Bulanık değişken

Bulanık değişken bulanık yapıdaki değer dilsel yaklaşımla yakından ilgilidir. Bulanık değişken yapay zeka, desen tanıma, tıbbı teşhis ve diğer alanlarda insanca bir sistem modellemek için kullanılır.

Tanım 3.3.5. (Bulanık Değişken) Bir bulanık değişken $(\Theta, \mathcal{P}, Cr\,)$ kredibility uzayında $\mathbb{R}$ ye tanımlı ölçülebilir bir fonksiyondur.

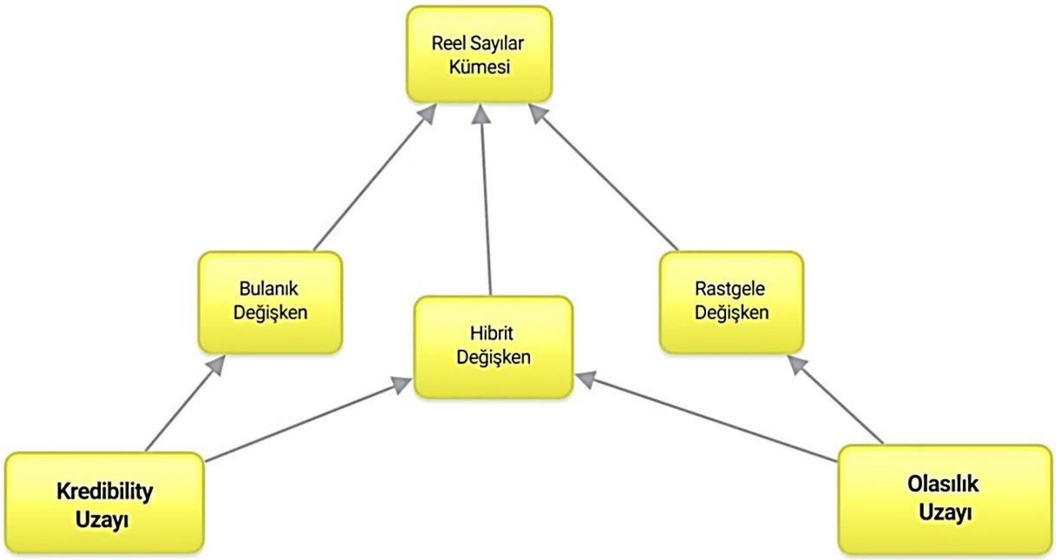
Yani $f: (\Theta, \mathcal{P}, Cr\,) \to \mathbb{R}$ $(\Theta^| = evrensel\ küme)$ ise f ye bulanık değişken denir [11].

Mesela $\left(\Theta^|, \mathcal{P}, Cr\,\right)$ kredibility uzayında $\Theta^| = \{\Theta_1, \Theta_2\}$ olsun. Eğer $Cr\{\Theta_1\} = Cr\{\Theta_2\} = 1/2$ olarak alınırsa

$$f(\Theta) = \begin{cases} 0, & \Theta = \Theta_1 \\ 1, & \Theta = \Theta_2 \end{cases}$$

bir bulanık değişkendir.

Ayrıca aşağıda bulanık değişkeni, kredibility uzayı, olasılık uzayı ve birbiriyle olan ilişkisini gösteren bir şema verilmiştir.



Şekil 3.4. Bulanık değişkeni, kredibility uzayı, olasılık uzayı ve birbiriyle olan ilişkisi

Örnek 3.3.3. $(\Theta, \mathcal{P}, Cr\,)$ üçlüsü [0,1] aralığında bir $Cr - uzay$ olsun. $\forall\, \Theta \in [0,1]$ için $Cr\{\Theta\} = {}^{\Theta}/_{2}$ olsun. $f(\Theta) = \Theta$ bir bulanık değişkendir.

3.3.3. Kredibility/Bulanık dağılım fonksiyonu

Kredibility dağılım bulanık değişkenin spesifik değerinin tahminindeki zorluğu veya zorluk derecesini gösterir.

Tanım 3.3.6. (Kredibility/Bulanık dağılım fonksiyonu) ξ bir bulanık değişkenin kredibility dağılımı fonksiyonu

$$\Phi: \mathbb{R}^n \to [0,1]$$

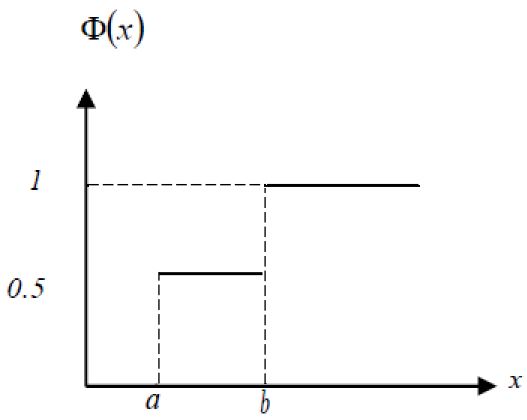
$$\Phi(x) = Cr\{\theta \in \Theta / \xi(\theta) \le x\}$$

ile tanımlanır. Öyleki $\Phi(x)$ kredibility dağılımında ξ bulanık değişken x den küçük yada eşit değer alır. Φ kredibility dağılımı ne sağdan nede soldan süreklidir.

Örnek 3.3.3. ξ bir eş olasılıklı bulanık değişkeni verilsin. ξ bulanık değişkeninin kredibility dağılımı;

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & x < a \ \ ise \\ \frac{1}{2} & a \le x < b \ ise \\ 1 & x \ge b \ \ ise \end{cases} \tag{3.5}$$

a ve b kesin miktarlardır ve $a < b$. Kredibility dağılım fonksiyonu takip eden grafikte verilmiştir.

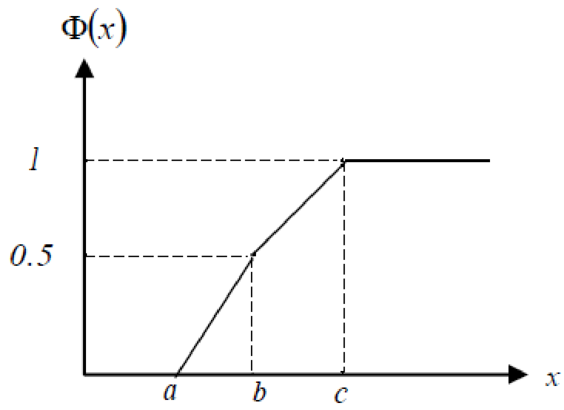


Şekil 3.5. Kesin değer kredibility dağılım fonksiyonu

Örnek 3.3.4. ξ bir üçgen bulanık değişkeni verilsin. ξ bulanık değişkeninin kredibility dağılımı;

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & x < a \ \ ise \\ \frac{x-a}{2(b-a)} & a \le x < b \ \ ise \\ \frac{x+c-2b}{2(c-b)} & b \le x < c \ \ ise \\ 1 & x \ge c \ \ ise \end{cases} \tag{3.6}$$

takip eden grafikte kredibility dağılımı verilmiştir.

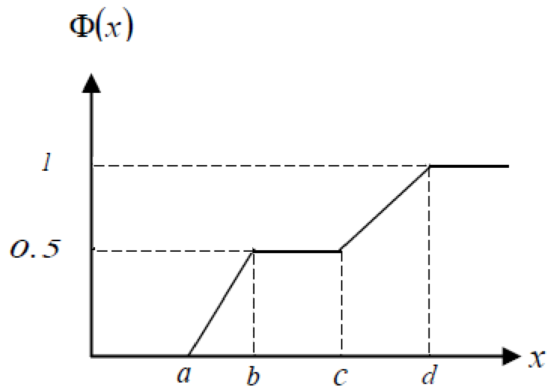


Şekil 3.6. Üçgen bulanık değişkeni kredibility dağılım fonksiyonu

Örnek 3.3.5. ξ bir yamuk bulanık değişkeni verilsin. ξ bulanık değişkeninin kredibility dağılımı;

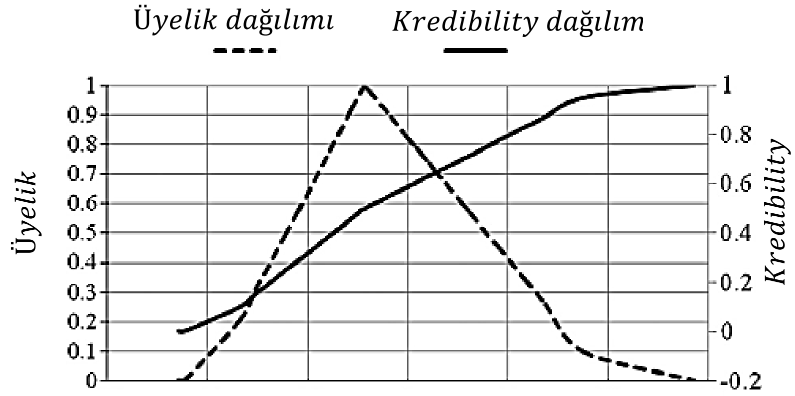
$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & x < a \ ise \\ \frac{x-a}{2(b-a)} & a \leq x < b \ ise \\ \frac{1}{2} & b \leq x < c \ ise \\ \frac{x+d-2c}{2(d-c)} & c \leq x < d \ ise \\ 1 & x \geq d \ ise \end{cases} \tag{3.7}$$

Bir yamuk bulanık değişkenin kredibility dağılım grafik şekil 3.7. de gösterilmiştir.



Şekil 3.7. Yamuk bulanık değişkeni kredibility dağılım fonksiyonu

Örnek 3.3.6. Üçgen bulanık üyelik fonksiyonu ile kredibility dağılımını birlikte gösteren grafik ise şekil 3.8. de sunulmuştur.



Şekil 3.8. Üçgen bulanık üyelik fonksiyonu ile kredibility dağılımı

3.3.4. Beklenen değer

ξ bulanık değişkeni verilsin. ξ bulanık değişkeninin beklenen değeri;

$$E(\xi) = \int_0^\infty Cr\{\xi \geq r\}dr - \int_{-\infty}^0 Cr\{\xi \leq r\}dr \quad \text{dir.} \tag{3.8}$$

Bu iki integralden en az biri sonludur. $E(\xi^k)$, k bir pozitif tam sayı olmak üzere bulanık değişkenin k ninci andaki beklenen değeri olarak isimlendirilir [11].

$$E(\xi^k) = k\int_0^\infty r^{k-1} Cr\{\xi \geq r\}dr \tag{3.9}$$

Örnek 3.3.7. Beklenen değer;

Eğer ξ bir eş olasılıklı bulanık değişken ise $E(\xi) = \frac{a+b}{2}$, (3.10)

Eğer ξ bir üçgen bulanık değişken ise $E(\xi) = \frac{a+2b+c}{4}$, (3.11)

Eğer ξ bir yamuk bulanık değişken ise $E(\xi) = \frac{a+b+c+d}{4}$ dir. (3.12)

Beklenen değer bazı bulanık değişkenler için mevcut olmayabilir. ξ bulanık değişkeni $\mu(x) = \frac{1}{1+|x|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ üyelik fonksiyonuna sahip olarak verilse ξ nin beklenen değeri mevcut değildir çünkü $\int_0^\infty Cr\{\xi \geq r\}dr$ ve $\int_{-\infty}^0 Cr\{\xi \leq r\}dr$ integralleri sonsuzdur.

4.BÖLÜM

4.1. Durulaştırma ve Durulaştırma Yöntemleri (Defuzzification)

Bu bölüme kadar anlatılan kısımlarda daha çok bulanık sayılar ve bulanık sayılar ile matematiksel işlemler ve belirsizlik üzerinde durulmuştur. Hassas konularda çalışan karar vericilerin yaklaşık değerler ile işlem yapması istenmeyen bir durumdur. Dolayısıyla, bulanık sayılar ile yapılan işlemler sonucunda elde edilen yeni bulanık kümeden bir çıkarım yapılması gereklidir. Başka bir ifadeyle bulanık sayılar ile yapılan işlemlerden sonra elde edilen bulanık çıktı kümesinin kesin bir değere dönüştürülmesi gerekmektedir. Bulanıklaştırma (Fuzzification) işleminin tersi olarak adlandırılabilecek bu işlemin adı durulaştırmadır (Defuzzification). Durulaştırma işlemleri bulanık işlemler sonucu elde edilen bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları aracılığıyla gerçekleştirilebilir [12].

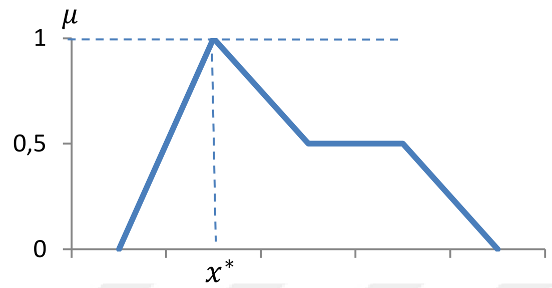
Durulaştırma yöntemlerinde genel olarak gözlemlenen üç özellik vardır. Bunlar;

a. Durulaştırma işlemi sonucunda kesin bir değer elde edilir.
b. Elde edilen durulaştırılmış değerin orijinal bulanık kümenin dayanakları arasında olduğu kabul edilen bir gerçektir.
c. İki üçgen bulanık sayının işleme alınıp durulaştırılmasından elde edilen değer, daima bireysel olarak durulaştırılıp işleme alınmasından elde edilen değerlerin arasında yer alır.

Tanım 4.1. Literatürde otuzdan fazla durulaştırma yöntemi bulunmakla beraber, bulanık denetleme teorisinde en fazla kullanılan yöntemler, en büyük üyelik ilkesi, sentroid yöntemi, ağırlıklı ortalama yöntemi, ortalama en büyük üyelik, toplamların merkezi, en büyük alanın merkezi ve en büyük ilk veya son üyelik derecesi yöntemleridir [13]. Bunlardan bazılarını aşağıda gösterelim.

i. **En Büyük Üyelik İlkesi (Max-Membership Principle):** Bu yöntem bulanık çıkarım kümesindeki en yüksek üyelik derecesine sahip öge değerini verir. Bu durulaştırma yönteminin kullanılabilmesi için tepeleri olan bir bulanık çıkarım kümesine ihtiyaç vardır. Tek bir tepe üyelik fonksiyon değeri bulunan bulanık çıkarım kümeleri için en hızlı durulaştırma yöntemlerinden biridir.

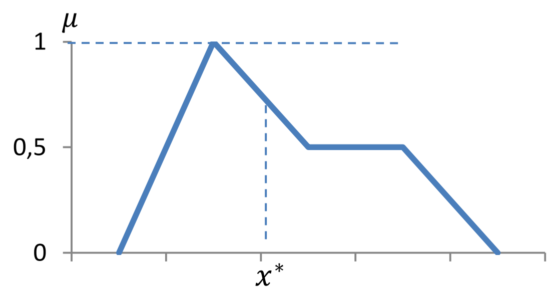
$$\mu(x^*) \geq \text{mak}\{\mu(x), x \in X\} \tag{4.1}$$



Şekil 4.1. En Büyük Üyelik derecesine göre durulaştırma

ii. Sentroid Yöntemi (Centroid Method-Center of Gravity Method): Başka bir ismi de ağırlık merkezi yöntemi olan sentroid yöntemi, Sugeno tarafından 1985 yılında geliştirilmiştir. En yaygın olarak kullanılan durulaştırma yöntemidir.

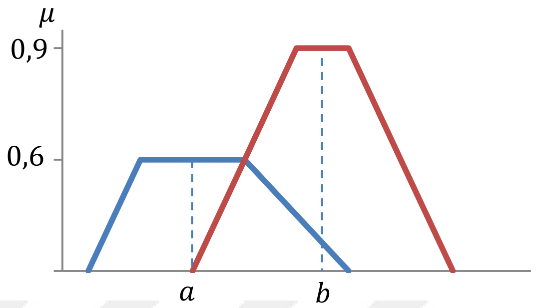
$$x^* = \frac{\int \mu(x).xdx}{\int \mu(x).dx} \tag{4.2}$$



Şekil 4.2. Sentroid yöntemi ile durulaştırma grafiği

iii. Ağırlıklı Ortalama Yöntemi (Weighted Average Method): Bu yöntem sonucunda durulaşmış kesin değer, bulanık çıkarım kümesini oluşturan her bir çıktı bulanık kümesinin sahip olduğu en büyük üyelik fonksiyonu değeri ile ilgili öge değerinin çarpılıp toplam üyelik fonksiyonu değerine oranlanması ile elde edilir. Bu yöntemin kullanılabilmesi için simetrik üyelik fonksiyonun bulunması gerekir.

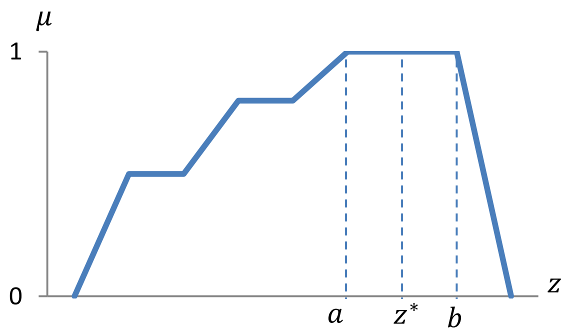
$$x^* = \frac{\sum_i \mu_i . x_i}{\sum_i \mu_i} \tag{4.3}$$



Şekil 4.3. Ağırlıklı Ortalama Yöntemi ile durulaştırma grafiği

iv. **Ortalama En Büyük Üyelik Yöntemi (Center of Maxima Method):** Bulanık çıkarım kümesinin tek bir tepe noktası olduğu varsayılmış ve ona göre durulaştırma işlemi yapılmıştı. Ancak bazı durumlarda durulaştırma işlemi yapılacak olan bulanık çıkarım kümesinde tek bir tepe noktası yerine birden fazla tepe noktasının yer aldığı düz bir kısım bulunabilir [14].

$$\boldsymbol{z^*} = \frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}} \tag{4.4}$$



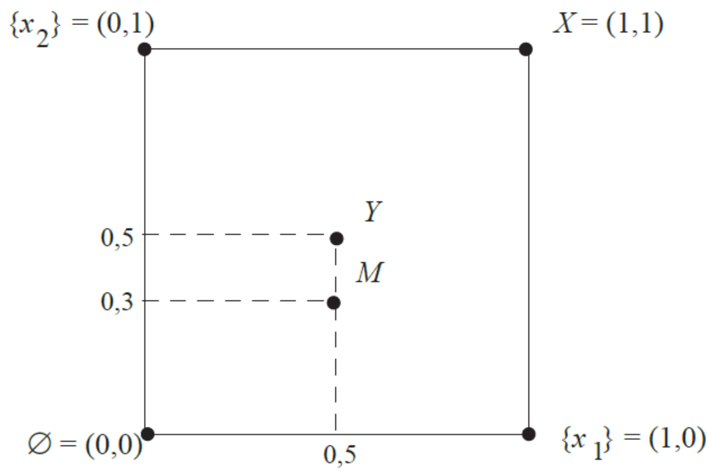
Şekil 4.4. Ortalama En Büyük Üyelik Yöntemi ile durulaştırma grafiği

4.2.Bulanık Entropi ve Özellikleri

Bulanık entropi belirsizliğin derecesini göstermek için kullanılan bir terimdir. Bir kümenin entropisini bulmak bulanık küme teorisindeki önemli uygulamalardan biridir. Bulanık bir kümenin bulanıklığını ölçmek için birçok metot literatürde mevcuttur. İlk önerilen metotlarla klasik küme teorisine baktığımızda bulanıklığın seviyesi kümelerin ve tümleyenlerinin nicel (cardinality) özellikleri göz önünde bulundurularak elde edilmeye çalışılmıştır. Aslında bulanık küme teorisi, klasik küme teorisini genelleştirilmiş halidir. Daha sonra Zadeh in 1965 yılında yazdığı makale ile günümüze kadar gelen ve hala sıklıkla birçok alanda kullanılmaya devam eden bulanık küme teorisi veri analizine başka bir bakış aşısı getirmiştir [15]. Zadeh enformasyon teorisinde bir devrime yol açan Shanon entropisinde üyelik fonksiyonları kullanarak veri analizinde klasik anlamada kaybedilen bilgilerin tekrardan kazanılmasında büyük rol oynamıştır [16].

Bulanık küme teorisinin en büyük avantajlarından biri reel değerli sitemlerde mevcut olan belirsizliğin ifade edilmesidir. Günümüzde teknoloji ve insan iç içe girdikçe veri analizinde insanların nitel ve nicel gözlemleri veri ortamına aktarılıp anlamalı bir bütün haline getirilmeye çalışılmaktadır. Burada en büyük problemlerden biri görecelik olduğu için bilgini sağlıklı bir şekilde toplanması için belli kıstaslar gerekmektedir. Bu yüzden Zadeh üyelik fonksiyonlarını tanıtmıştır [17, 21]. Bulanık kümeler belirsiz ifadelerin sayısallaştırılmasında önemli bir yol oynamıştır.

Bulanık kümelerin klasik küme işlemlerinden biraz daha farklı olduğu açıktır. Şimdi sadece iki elemanlı $\{x_1, x_2\}$ kümesine ikili sistemde karesel gösterimle bakalım. Mesela (1,1) noktası evrensel kümeyi temsil etmekte ve (0,0) noktası boş kümeyi temsil etmektedir. Bu gösterim ilk Bart Kosko tarafında kullanılmıştır [18].



Şekil 4.5. Entropinin geometrik gösterimi

Burada Y noktası bulanıklığın en fazla olduğu ve dolayısıyla entropinin en yüksek çıkacağı noktadır. Bulanıklığın derecesi bazen fizikte kullanılan entropi kavramı ile karışmaması için farklı isimlerle adlandırılmıştır, mesela bulanıklık indeksi, belirsizlik seviyesi olarak karşımıza çıkabilir. Önceleri entropi genel olarak bulanıklığı verilen noktanın en yakın köşeye olan uzaklığın d_1, en uzak köşeye olan uzaklığın d_2 oranın tanımlanmıştır. Yani şekilde verilen M noktası için entropi,

$$E(M) = \frac{d_1}{d_2}$$

şeklindedir [19]. Buradan görüldüğü üzere entropinin en fazla olduğu yer Y noktasıdır. Tabi burada mesafeleri tanımlamak için uygun bir metrik tanımlamak gerekmektedir.

Buraya kadar uzaklığa göre bulanık entropinin bir metrik yardımıyla (distance) nasıl tanımlandığını gösterdik. Entropi farklı fonksiyonların yardımıyla ölçülebilir, fakat bir entropi fonksiyonun kullanılması için fonksiyonun belli başlı şartları sağlaması gerekmektedir.

Tanım 4.2.1. A bir bulanık küme olmak üzere $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu bu küme için tanımlansın. $H: A \to \mathbb{R}^+$ şeklinde tanımlanan H fonksiyonu için,

(1) $H(A) = 0$ ise kesin (crisp) kümedir,

(2) $H(A)$ eğer $x \in \mathbb{R}$ için $\mu_A(x) = 1/2$ ise bu noktada tek bir maksimuma sahiptir,

(3) A ve B bulanık kümeler olmak üzere $\mu_B(x) < \mu_A(x)$ eşitsizliği $\mu_A(x) \leq 1/2$ için ve $\mu_A(x) < \mu_B(x)$, $\mu_A(x) \geq 1/2$ olmak üzere $H(A) \geq H(B)$,

(4) A^C, A bulanık kümesinin tümleyeni olmak üzere, $H(A^C) = H(A)$,

ise $H(A)$ için A bulanık kümesinin entropisidir denir [20].

Bazı bilinen entropi fonksiyonları sırasıyla şu şekildedir.

$$H_1(x) = 4x(1-x) \tag{4.5}$$

$$H_2(x) = -x \ln x - (1-x)\ln(1-x) \tag{4.6}$$

$$H_3(x) = \min\{2x, 2-2x\} \tag{4.7}$$

$$H_4(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1/2] \\ 2(1-x), & x \in [1/2,1] \end{cases} \tag{4.8}$$

Verilen fonksiyonlar sırasıyla H_1 lojistik fonksiyon, H_2 Shannon fonksiyonu ve H_3 çadır fonksiyonu olarak bilinmektedir. Şimdi A bulanık kümesinin tümleyeni A^C yardımıyla tanımlanan bazı entropi fonksiyonlarını verelim. Bunlar sırasıyla Kohen entropi, Kasko entropi, Tanitmoto entropi ve Yager'in entropisi olarak aşağıdaki şekildedir.

$$E(A^C) = \frac{\mathcal{M}(A \cap A^{C_m})}{\mathcal{M}(A \cup A^{C_m})} \tag{4.9}$$

$$E(A^C) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\min(\mu_A(x), \mu_B(x))}{\text{mak}(\mu_A(x), \mu_B(x))} \tag{4.10}$$

$$E(A^C) = \mathcal{M}(A \cap A^{C_m}) \tag{4.11}$$

$$E(A^C) = 1 - \frac{\mathcal{M}(A \cap A^{C_m}) - \mathcal{M}(A \cup A^{C_m})}{n} \tag{4.12}$$

Burada $\mathcal{M}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)$ şeklindedir.

4.3.Bulanık Entropinin Benzerlik Ölçüsü

Bulanık kümeler teorisinde bulanıklığın derecesi (ölçüsü) önemlidir ve bulanık kümelerin bulanıklığını derecesini ölçmek için çeşitli metotlar vardır. Önceleri bulanıklığın ölçüsü bulanık olmayan küme arasındaki uzaklık olarak düşünülse de sonraları entropi kavramı kullanılmaya başlamıştır. Aslında bulanık küme teorisi, klasik küme teorisini genelleştirilmiş halidir.

Tanım 4.3.1. E bir bulanık olmayan küme, $F(E)$ de E nin bulanık kümelerinin kümesi olsun. Bir $A \in F(E)$ kümesi için $H: F(E) \to \mathbb{R}$

1. $H(A) = \emptyset \leftrightarrow$ A bulanık olmayan kesin kümedir.
2. $x \in E$ için $A(x) = 1/2$ ise $H(A)$ maksimum değer alır.
3. $A, B \in F(E)$ olmak üzere $A(x) \leq 1/2$ için $B(x) \leq A(x)$, $A(x) \geq 1/2$ için $A(x) \leq B(x)$ ise $H(A) \geq H(B)$ şartlarını sağlayan H fonksiyonu $H(A)$ yada A nın entropisi denir [22].

Bundan başka bir H entropi fonksiyonu $A \in F(E)$ için $H(A) = H(\bar{A})$ eşitliğini sağlamalıdır. Şimdi kabul edelim ki $A(x)$, $A \in F(E)$ nin üyelik fonksiyonu $h: [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu

1. $h, [0,1/2]$ de monoton artan, $[1/2,1]$ de monoton azalan
2. $x = 0 \to h(x) = 0$, $x = 1/2 \to h(x) = 1$ şartlarını sağlasın.

Bu takdirde $H\big(A(x)\big) = h(A(x))$ eşitliği her x için sağlanıyorsa h da bir entropi fonksiyonudur.

$h_1(x) = 4x(1-x)$ logistik entropi, $h_2(x) = -xlnx - (1-x)\ln(1-x)$ Shannon entropisi olarak adlandırılır [22].

E evrensel kümesi üzerindeki bir A bulanık kümesinin entropisi $p(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere $e(A) = \int h\big(A(x)\big)p(x)dx$ integrali ile hesaplanır. $E = \mathbb{R}$ olarak alınırsa ve $\mathbb{R}$ de bir A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{h_A(x-a)}{b-a}, x \in [a,b] \\ -\dfrac{h_A(x-c)}{c-b} + h_A, x \in [b,c] \\ 0, \qquad - \end{cases} \tag{4.13}$$

Bu çeşit bir bulanık kümeyi $A = (a, b: h_A, c)$ ile gösterelim [22].

$e(A) = \int h_1\big(A(x)\big)p(x)dx$ eşitliğinde $k \in [0,1]$ olmak üzere $p(x) = k$ ve

$h_1(x) = 4x(1-x)$ olarak alınırsa

$$h_1(A(x)) = \begin{cases} 4\left[\dfrac{h_A(x-a)}{b-a}\right]\left[1-\dfrac{h_A(x-a)}{b-a}\right], x \in [a,b] \\ 4\left[\dfrac{-h_A(x-b)}{c-b}+h_A\right]\left[1-\dfrac{h_A(x-a)}{b-a}+h_A\right], x \in [b,c] \\ 0, \qquad - \end{cases}$$

$$e(A) = \int 4\left[\tfrac{h_A(x-a)}{b-a}\right]\left[1-\tfrac{h_A(x-a)}{b-a}\right]k.dx + \int 4\left[\tfrac{-h_A(x-b)}{c-b}+h_A\right]\left[1-\tfrac{h_A(x-a)}{b-a}+h_A\right]$$

$$= k\left(2h_A - \tfrac{4}{3}h_A^2\right).l(A) \tag{4.14}$$

Burada $l(A)$ notasyonu $l(A) = \text{mak}\{x-y: x,y \in \overline{\{x \in \mathbb{R}: A(x) > 0\}}\}$ dir. Eğer $h_A = 1$ alınırsa, o zaman A bulanık kümesi bulanık sayıya dönüşür. Dolayısıyla $A = (a,b:1,c)$ formundaki bir bulanık sayının entropisi $e(A) = \frac{2}{3}\,l(A)k$ olur. $A = (a,b:1,c)$ formundaki bulanık A sayısı için

$l(A) = c-a$ olacağından $e(A) = \frac{2}{3}(c-a)k$ olur.

Teorem 4.3.1. $A, B \in F(E)$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. $e(A+B) = e(A) + e(B)$ ve

$e(kA) = ke(A)$ dir.

Tanım 4.3.2. h bir entropi fonksiyonu (A^k) da bulanık kümelerin bir dizisi olsun. Bu takdirde $P_k(x), \mathbb{R}$ de olasılık yoğunluk fonksiyonun bir dizisi ise

$e(A^k) = \int h\,(A^k(\mathrm{x}))P_k\mathrm{dx}$ dizisine $(k \in \mathbb{N})$ (A^k) dizisinin entropi dizisi adı verilir. $e(A) = k\left(2h_A - \frac{4}{3}h_A^2\right).l(A)$ olduğunu dikkate alırsak $P_k(x) = \alpha_k$ olmak üzere $e(A^k) = \alpha_k\left(2h_Ak - \frac{4}{3}h_A^2k\right).l(A^k)$ olur. Bu ifadeyi aşağıdaki;

$h(x) = 4x(1-x)$ entropi fonksiyonunu kullanarak elde ettik. Eğer (A^k) bulanık sayıların bir dizisi ise entropi dizisi $e(A^k) = \frac{2}{3}\alpha_k l(A^k)$ olur.

Teorem 4.3.2. $(A^k) = (a_k, b_k, c_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \leq b_k \leq c_k$ ve $(B^k) = (d_k, e_k, f_k)$ olarak alalım.

1. $e(A^k + B^k) = e(A^k) + e(B^k)$
2. $e(A^k B^k) = e(A^k)e(B^k)$
3. $e(A^k/B^k) = e(A^k)/e(B^k)$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 4.3.3. Üçgensel bulanık kümeleri göz önüne aldığımızda

$E = \{u = (a, b, c): a \leq b \leq c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$ kümesini alalım.

$S: E \times E \to \mathbb{R}$ ve $u, v \to S(u, v) = 1 - \frac{1}{3}\sum_i^3 |a_i - b_i|$ fonksiyonunu tanımlayalım.

1. Eğer $S(u, v) = 1$ ise u ile v tamamen benzerdir.
2. $S(u, v) \leq 0$ ise u ile v birbirine hiç benzemez.
3. $0 < S(u, v) < 1$ ise u ile v birbirine S-benzerdir denir.

Tanım 4.3.4. $w = \{(u_k) = (u_k^1, u_k^2, u_k^3): \forall k \in \mathbb{N}\ için\ u_k^1 \leq u_k^2 \leq u_k^3\}$ kümesi bulanık sayıların dizilerinin kümesi olarak bilinir. Şimdi:

$S: (E') \times (E') \to \mathbb{R}$ ve $u, v \to S(u, v) = \lim_k 1 - \frac{1}{3}\sum_i^3 |u_k^i - v_k^i| = \boldsymbol{\lambda}$ ile tanımlı S fonksiyonu (u_k) ve (v_k) dizilerinin benzerliği denir.

1. Eğer $S(u, v) = 1$ (u_k) ve (v_k) tamamen benzerdir.
2. $S(u, v) \leq 0$ ise (u_k) ve (v_k) birbirine hiç benzemez.
3. $0 < S(u, v) < 1$ (u_k) ve (v_k) birbirine S-benzerdir denir [23, 24].

Teorem 4.3.3. Kabul edelim ki (u_k) dizisi bir (v_k) dizisine $\lambda_1 - benzer$ ve (v_k) dizisi de bir (t_k) dizisine $\lambda_2 - benzer$ olsun. Bu takdirde $(u_k + t_k)$ dizisinin (v_k) dizisine ya λ_1 eşittir veya büyüktür.

$$\begin{tikzcd} u_k \arrow[r, "\lambda_1 - benzer"] & v_k \\ t_k \arrow[ur, "\lambda_2 - benzer"'] & \end{tikzcd}$$

İspat 4.3.3. (u_k) dizisi (v_k) dizisine $\lambda_1 - benzer$ ise $\lim_k 1 - \frac{1}{3}\sum_i^3 \left|u_k^i - v_k^i\right| = \lambda_1$ ve eğer (t_k) dizisi (v_k) dizisine $\lambda_2 - benzer$ ise $\lim_k 1 - \frac{1}{3}\sum_i^3 \left|u_k^i - v_k^i\right| = \lambda_2$ olur.

$$\lim_k 1 - \frac{1}{3}\sum_i^3 \left|(u_k^i + t_k^i) - v_k^i\right| = \lim_k 1 - \frac{1}{3}\sum_i^3 \left|(u_k^i - v_k^i) + t_k^i\right| \geq$$

$$\lim_k 1 - \frac{1}{3}\sum_i^3 \left|(u_k^i - v_k^i)\right| + \left|t_k^i\right| = \lim_k 1 - \frac{1}{3}\sum_i^3 \left|(u_k^i - v_k^i)\right| + \left|t_k^i\right| =$$

$$\lim_k 1 - \frac{1}{3}\sum_i^3 \left|(u_k^i - v_k^i)\right| - \frac{1}{3}\lim_k \sum_i^3 \left|t_k^i\right| =$$

$\lambda_1 - \frac{1}{3}\lim_k \sum_i^3 \left|t_k^i\right| \rightarrow \lambda_1$ eşit veya küçüktür.

Teorem 4.3.4. (u_k) dizisi (v_k) dizisine $\lambda_1 - benzer$ ve (t_k) dizisi (v_k) dizisine $\lambda_2 - benzer$ olsun. O zaman (u_k) nın (t_k) ya benzerliği $(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)$ ya eşittir veya büyüktür.

$$\begin{tikzcd} u_k \arrow[r, "\lambda_1 - benzer"] \arrow[d, "?"'] & v_k \\ t_k \arrow[ur, "\lambda_2 - benzer"'] & \end{tikzcd}$$

İspat 4.3.4. Hipotez şartları altında;

$$\lim_k 1-\frac{1}{3}\sum_i^3\left|(u_k^i-v_k^i)\right| \geq \lim_k 1-\frac{1}{3}\sum_i^3\left|(u_k^i-v_k^i)\right|-\left|(t_k^i-v_k^i)\right| =$$

$$\lim_k 1-\frac{1}{3}\sum_i^3\left|(u_k^i-v_k^i)\right|-\frac{1}{3}\sum_i^3\left|(t_k^i-v_k^i)\right| =$$

$\lambda_1+(\lambda_2-1)=\lambda_1+\lambda_2-1$ bulunur.

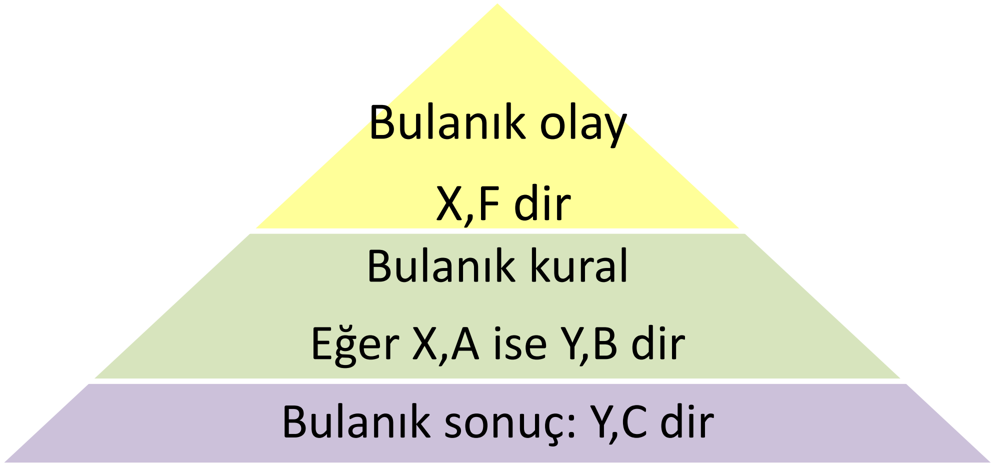
Tanım 4.3.4. A ve B reel sayılarda tanımlı iki bulanık küme olsun, A ve B kümelerinin maksimum yüksekliği $h_A,\ h_B$ olmak üzere A ve B kümeleri arasındaki benzerlik ölçüsü,

$$S:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}, S(A,B)=\frac{\min(h_A,\ h_B)}{\mathrm{mak}(h_A,\ h_B)}\left[1-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}|A_k-B_K|\right] \text{ dir [23].} \tag{4.15}$$

Bulanık kümelerde çoğu zaman benzerlik ile entropi ayrı ayrı hesaplanır ve değerlendirmeye birlikte katılır. Bir bulanık küme dizisinin entropilerini ve benzerliklerini bulmaya dizinin bulanık entropilerinin benzerlik ölçüsü denir. Bulanık entropi ve benzerlik uygulamaları daha sonraki bölümlerde gösterilip, yapılan hesaplamalar analiz ve sentez kısmında kullanılacaktır.

4.4. Bulanık kümelerde akıl yürütme

Bir bulanık kümede verilerle çalışılırken özellikle doğruya en yaklaşık sonucu bulmada akıl yürütme yapılırken bazı bulanık önermeler kullanılır. Bulanık önermeler fazladır çünkü herhangi bir olayda ana bileşenin niteliği, miktarı, olasılığı veya bunların kombinasyonu çeşitlidir. Bulanık önermeler yardımıyla akıl yürütmede kullanılan bir kural aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.6. Bulanık Akıl Yürütme Piramidi

Yukarıda verilen bu şemada A ve B, X kümesinde tanımlı, B ve C de Y kümesinde tanımlı bulanık kümelerdir. Farz edelim ki bulanık kuralın alternatif formu olan;

$$(X,Y) \cong \ R \ diye \ düşünülürse$$

Burada R, F ile R nin bileşkesinde kullanılan bulanık implikasyonu temsil eder ve F ile R nin bileşkesinden C elde edilir. Yani;

$$C = FoR$$

daha da spesifik olarak; her $y \in Y$ için

$$C(y) = \text{mak}_{x \in X}\{\min\{F(x), R(x,y)\}\}$$

bu şema yöntemiyle elde edilen çıkarımlara, bütüncül sonuç çıkarım kuralı diyebiliriz. Bütüncül sonuç çıkarım kuralının kullanmak için her uygulama içeriğinde ve ifadesinde uygun bulanık implikasyonlara ihtiyaç vardır. Uygulamanın içeriğine göre kendimiz bir bulanık bağıntı (fuzzy relation) bulmalıyız çünkü olaylara göre ilişkiler değişir. Problemlerin çözümünde bu yöntemler etkili ve hala çalışılmaktadır.

Bulanık mantığın klasik doğrusal programlama modellerine uygulanması ile ortaya çıkan bulanık doğrusal programlama bilgi eksikliği ve belirsizliklerin olduğu durumlarda en iyi kararın verilmesinin sağlayan karar verme yöntemidir. Burada amaç, belirsizliklerin ve bilgi eksikliklerinin olduğu durumlarda daha hızlı ve esnek çözümler üreterek en doğru kararın verilmesini sağlamaktır. Bir karar verme probleminde somut veriler olduğunda daha kolay olacağı ama soyut verilerin arttığı durumlarda ise karar vermenin zorlaşacağı bilinmektedir. Bulanık doğrusal programlama modelleri veya bulanık çok amaçlı karar verme teknikleri bir amacın en iyi sonuçlandırılmasında kullanıldığı gibi belirsiz birden fazla amacın en iyi sonuçlandırılmasında da sıklıkla kullanılır.

5.BÖLÜM

5.1.Tıptaki Bulanık Kümeler ve Uygulamaları

Tıbbı uzman sistemler, tıbbi alanlar içerisinde yapısal sorunları çözmek ve yanıtlar sağlamak amacıyla geliştirilmiştir. Tıbbı uzman sistemler bir veya daha çok tıbbi uzmanın tavsiyeleri doğrultusunda geliştirilir. Böylece en uygun sorular dikkate alınarak doğru sonuçların üretilmesi sağlanır. Tıbbi uzman sistemlerin amacı hekimin yerini almaktan çok hastaya ait verilere dayanarak, hekime tavsiye ve önerilerde bulunmaktır. Bulanık mantık Aristo mantığının siyah-beyaz ikilemine karşılık Zadeh'in geliştirdiği grinin çeşitli derecelerinin varlığının bilimsel olarak ifade edilmesidir. Bulanık mantıktaki nitelendirmeler uzman sistemlerden farklı olarak insanların günlük hayattaki yaptığı nitelemeler gibi kesin değildir. Kural tabanının oluşturulmasında kesin olmayan hükümlerin kullanılmasına imkan sağlar. Bu yapılar yapay zekanın genişleyen önemli bir koludur. Yapay zeka terimi ilk defa John McCarthy tarafından. "zeki makineler özellikle de, zeki bilgisayar programları yapma bilimi ve mühendisliği" olarak tanımlanmıştır. Makinelerin muhakeme yeteneği, geçmiş bilgilerden faydalanma, planlama öğrenme, iletişim kurma, algılama ve nesneleri oynatabilme, yer değiştirebilme yeteneğine sahip olmasını amaçlayan bir bilim dalıdır. Yapay zeka ile belirli insan davranışlarını (nesneleri alma ve bunları belirli bir yere yerleştirme gibi) yapan ve belirli bir uzmanlık alanı ile ilgili (veri hesaplaması, tıbbı teşhis gibi) beşeri düşünme sürecinin benzetimini yapan sistemler oluşturulabilir. Tabi ki bunun devamı da bilgisayarlı teşhise doğru gitmektedir.

Tıpta kullanılan çoğu kavram bulanıktır. Tıbbi kavramların ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerin kesin olmayan doğası nedeniyle bulanık mantık yöntemi tıbbi uygulamalar için uygundur. Kesin olmayan tıbbi durumlar bulanık kümelerle tanımlanabilir. Bulanık mantık yaklaşık sonuç çıkarma yeteneğine sahip çözüm üretme metodları önermektedir. Tıptaki pratiğin karmaşıklığı nedeniyle geleneksel nicel analiz yaklaşımları uygun olmamaktadır. Tıptaki bilgi yetersizliği ve belirsizliği ile çoğu zaman bu bilginin çelişkili oluşu genel gerçeklerdir. Belirsizliğin kaynakları aşağıdaki gibi sınıflanabilir;

1. Hasta hakkındaki bilgi.
2. Hastanın tıbbi öyküsü, çoğu zaman hastanın kendisi veya ailesi tarafından sağlanır. Bu bilgiler genellikle sübjektif ve belirsizdir.

3. Sağlık muayenesi. Hekim çoğu zaman nesnel veri elde eder fakat bazen normal ve patolojik durumlar arasındaki sınır keskin değildir.
4. Laboratuvar ve diğer teşhisle ilgili test sonuçları. Bunlarda bazı hatalara ve inceleme öncesi hastanın yanlış davranışlarına maruz kalabilir.
5. Hastada sahte, abartı olabilir, hasta bazı semptomları bahsetmeyi ihmal edebilir. Bu gibi belirsizliklerden dolayı bulanık mantık tıp alanında önemli rol oynamaktadır ve pek çok tıbbı uygulamada araştırılmıştır. Bulanık mantığın tıptaki uygulamalarından bazıları aşağıdaki gibidir;
   - Meme kanseri, akciğer kanseri veya prostat kanserini tespit etmek
   - Kalbin çalışmasının düzenli olup olmadığını ve EKG verilerini yorumlamak
   - Santral sinir sistemi tümörlerinin teşhisine yardımcı olmak
   - İyi huylu lezyonları kötü huylu olanlardan ayırt etmek
   - İlaç kullanımının nicel tahminlerini göstermek
   - Felç alt türlerini ve eşlik eden iskemik felci karakterize etmek.
   - Radyasyon terapisindeki karar vermeyi geliştirmek
   - Anestezi sırasındaki hipertansiyonu kontrol etmek
   - Fleksör-tendom onarım tekniklerini tespit etmek
   - Uygun lityum dozajını tespit etmek
   - Manyetik rezonans görüntülerindeki beyin dokularının hacim ve oylumunu hesaplamak ve fonksiyonel manyetik rezonans görüntülerini analiz etmek [25].

5.2.Solunum Sesleri

Günümüzde ileri tanı ve tedavi sağlayan birçok cihaz bilgisayar kontrolünde kullanılmaktadır. Özellikle manyetik rezonans ve görüntüleme ve bilgisayarlı tomografinin sağlık sektörüne getirdiği yenilikler inkar edilemez. Bu gibi birçok cihazın başarılı kullanımından sonra artık temelde kullanılan basit tıbbi cihazlara da çeşitli modifikasyonlar geliştirilerek hekime yardımcı olacak şekilde tanıda yol gösterici olmasına yönelik çalışmalar başlamıştır. Örneğin kullanımda olan EKG'ler (elektrodiyogram) artık tanı koyabilmektedir. Kesin bir doğruluğu olmamasına rağmen hekime yol gösterici olarak önemli bir ekipmandır. Belki gelecekte gelişen teknolojiyle birlikte hata payı düşecek ve daha başarılı tanılar koyabilecektir. Gelişen teknoloji ile birlikte digital tıbbi cihazlar muayenenin her aşamasında kullanılmaya başlanmıştır. Bunun en son ürünü olarak da elektronik steteskoplar hekime yardımcı olması beklentisiyle üretilmiştir.

Steteskop özellikle solunum yollarının muayenesinde, karın muayenesinde ve kardiyovasküler sistem muayenesinde etkili şekilde kullanılan tıbbi muayenenin olmazsa olmazı bir ekipmandır. Elektronik steteskop solunum seslerinde özelliklede akciğer seslerini tanımlamada ve tanı koymada çok kullanışlı bir cihazdır.

Oskültasyon solunum ve konuşma esnasında akciğer seslerini dinleme tekniğidir. Akciğer seslerinin oluşumu hava basıncında hızlı değişmelere ve katı dokuların titreşimine bağlıdır. Bu iki nedenle oluşan sesler kaynak yerlerinden göğüs duvarına ulaşır ve göğüs duvarının titreşim katılması ile duyulurlar.

Akciğer sesleri 3 gruba ayrılır;

- Solunum sesleri
- Konuşma sesleri
- Ek sesler (ral, ronküs, krepitan)

1. Ral, aralıklı veya kısa süreli kesik kesik duyulan patlayıcı olmayan nitelikte ek seslerdir.
2. Ronküs, hava yolu darlıklarından oluşurlar, darlık hava yollarının karşılıklı duvarları birbirine temas edecek derecededir ancak hava akımının oluşturduğu basınçla birbirinden ayrılırlar. Bu açılma esnasında hava akımı ile katı dokuların titreşim yapmasından tek müzikal bir ses duyulur.
3. Krepitan, sürtünmenin sebep olduğu çıtırtı sesi veren, çıtırdayıcı sestir.

Solunum sesleri ile alakalı genel bilgiler verildikten sonra bu tez çalışmasında karar verme sürecine geçilecektir.

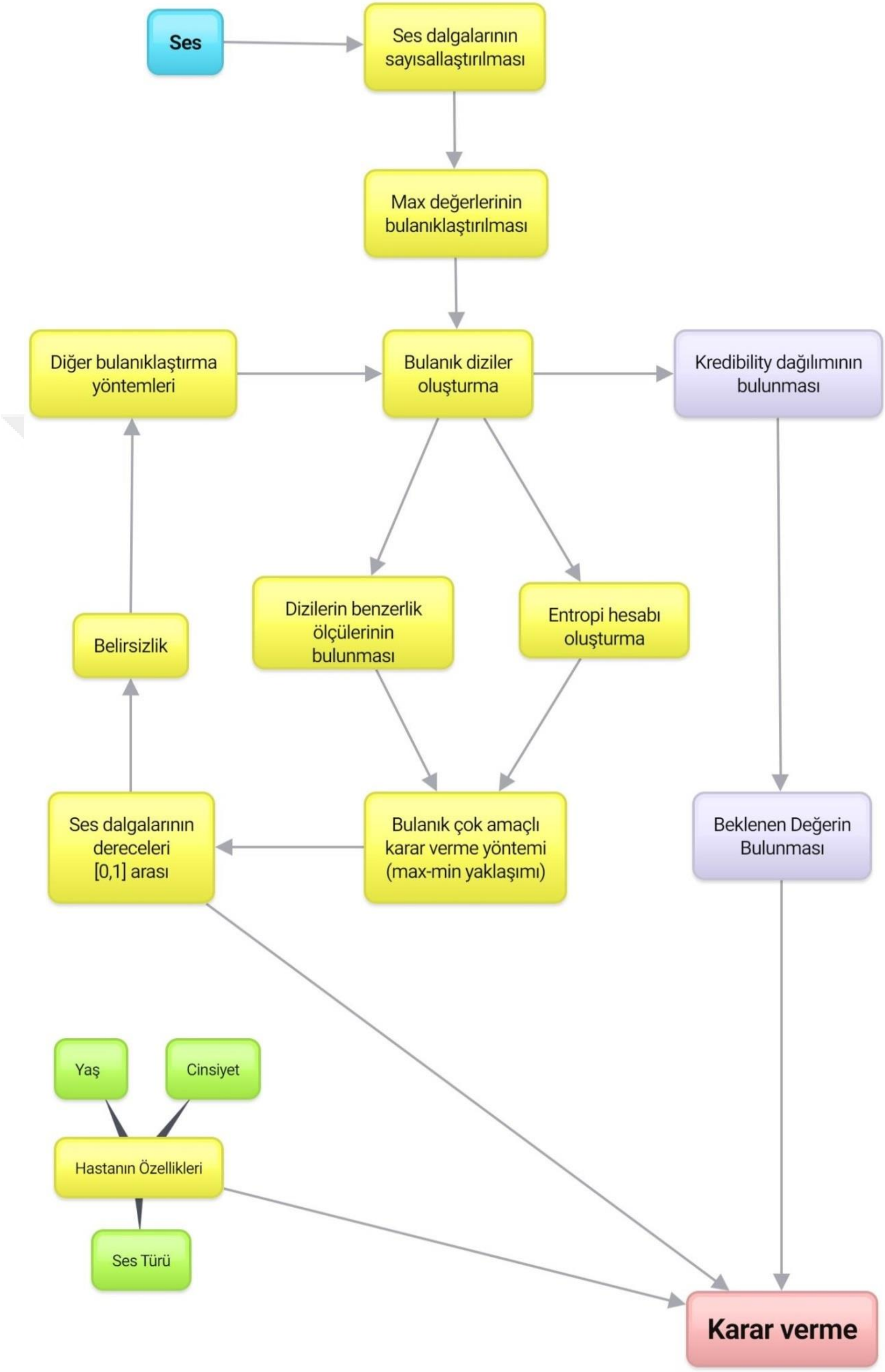
5.3.Karar verme süreci

Sağlık bakanlığının verilerine günümüzde özellikle erkeklerde en sık görülen ve tüm kanser ölümlerinin %26,8 nin akciğerden kaynaklandığı istatistiklere girmiştir. Dolayısıyla bu hastalığın tedavisinde hekime yol gösterecek çalışmalar yapmak amacıyla solunum hastaları ile ilgilenen bir hekim yardımıyla 100 hastaya ait farklı bölgelerden solunum sesleri elektronik steteskop aracılığıyla dinlenip bilgisayar ortamında kaydı oluşturuldu. Ayrıca hastaların solunum seslerinin türü (ral, ronküs, krepitan) belirlendi. Yaş ve cinsiyetleri de işlendi.

Bu çalışmasında 100 hastaya ait solunum seslerini anlamlandırma ve bu seslere hekimin teşhisinde kolaylık sağlayacak karar verme süreci geliştirilmeye çalışılacaktır. Öncelikle belirsiz olan solunum seslerinin bilgisayar ortamına sayısal verilere çevireceğiz. Ortamda istenmeyen ses diye adlandırılan seslerden kurtulmak için süzgeç işlemleri var ama biz çalışmamızda maksimum sesleri dikkate alacağımızdan küçük istenmeyen seslerin önemi olmayacaktır. Hastanın aldığımız maksimum seslerini [0,1] aralığına bulanıklaştırıp, bulanık diziler oluşturacağız. Oluşturacağımız bulanık dizilerin bulanık benzerlik ölçülerini ve entropilerini bulacağız. Bulanık çok amaçlı karar verme yöntemlerinden $\text{mak} - \text{min}$ yaklaşımını kullanacağız. Zimmerman (1978) de $\text{mak} - \text{min}$ yaklaşımının temel noktası her bir amaç fonksiyonuna ait üyelik fonksiyonu değerlerinin minimumlarını maksimize etmektir. Yani bu yaklaşımın temel mantığı her bir amacın minimum memnuniyet seviyelerinin eş zamanlı olarak maksimize edilmesidir.

Sonuçta karşımıza 0 ile 1 arasında bir değer çıkacaktır. Elde ettiğimiz nümerik sayı eğer çok anlamlı değilse veya belirsizliği çağrıştırıyorsa o zaman diğer bulanıklaştırma yöntemlerine müracaat edip tekrar yukarıda saydığımız işlemler devam ettirilecektir. Elde ettiğimiz sayısal değer ile hastanın özellikleri göz önünde tutularak hekimin hastalığın tanısında işi kolaylaşacaktır.

Şimdi oluşturduğumuz sese göre bulanık karar verme modelini aşağıda sizlere vereceğiz.



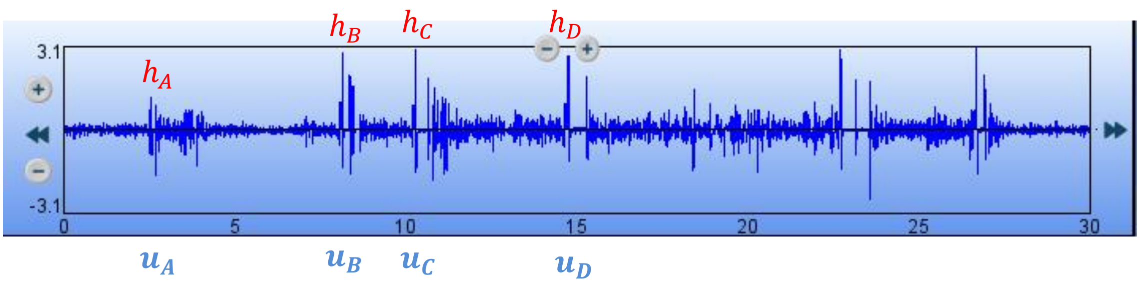
Şekil 5.1. Bulanık karar verme modeli

Bir hastanın solunumuna ait çıkardığı sesler elektronik steteskop sayesinde elde edilir. Ortamdan kaynaklanan veya istenmeyen sesleri ihmal ettik, süzgeçe tabi tutmadık çünkü ses verilerinin maksimumlarıyla işlem yaptığımızdan dolayı istenmeyen küçük ses dalgalarının önemi yoktur veya ihmal edilebilir. Biz bu ses dalgaları bilgisayar programları sayesinde sayısal verilere dönüştürdük. Dönüştürdüğümüz ses verilerini ilk önce bulanıklaştırarak bulanık diziler oluşturduk. Oluşturduğumuz bulanık dizilerin entropilerini ve dizilerin birbiriyle olan benzerliklerini bulduk. Sonra bulanık çok amaçlı karar verme yöntemlerini araştırdığımızda çalışmamıza en uygun ve en geçerli karar verme yöntemi olan $\text{mak} - \text{min}$ yaklaşımını kullandık. Bu yöntemi kullanmamızın sebebi ise

$$p: entropi \quad q: risk \quad r: benzerlik \quad t: tutarlılık$$

$p \uparrow \rightarrow q \uparrow$, $r \uparrow \rightarrow t \uparrow$ entropi artarken risk artar, benzerlik artarken tutarlılık artar. Yani entropisi ve benzerliği kıyaslarken benzerlik büyükse entropiler dikkate alınır, entropiler büyükse benzerlik dereceleri dikkate alınır ve tutarlılık hesabı yapılır.

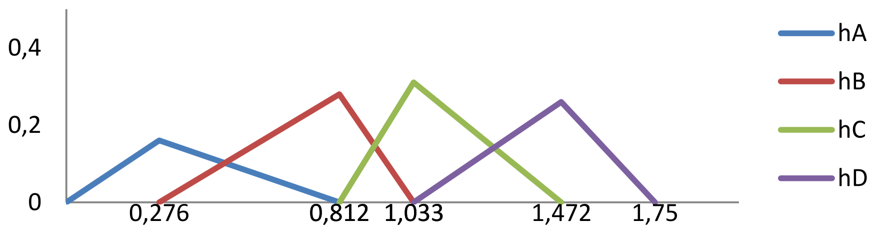
Aşağıda 14.hastanın ses grafiği verilmiştir. Bu hastanın verileri bulanıklaştırılarak alttaki tablo hazırlanmıştır. Bu verilere dayanarak işlemler gerçekleştirilecektir.



Şekil 5.2. (14.hasta, 49 yaş, erkek, ral ses)

Tablo 5.1. Ses dalgalarının bulanıklaştırılmış hali

h_A	u_A	h_B	u_B	h_C	u_C	h_D	u_D
0,16	0,276	0,28	0,812	0,31	1,033	0,26	1,472



Şekil 5.3. Hastanın solunum ses dalga grafiği

1.adım entropiler hesaplanır

$$e(u_1) = k.\left(2h_A - \frac{4}{3}h_A^2\right).l(A) = 1.(2.0,16 - \frac{4}{3}.(0,16)^2.(0,812 - 0,276) = 0,155$$

$$e(u_2) = k.\left(2h_B - \frac{4}{3}h_B^2\right).l(B) = 1.(2.0,28 - \frac{4}{3}.(0,28)^2.(1,033 - 0,276) = 0,348$$

$$e(u_3) = k.\left(2h_C - \frac{4}{3}h_C^2\right).l(C) = 1.(2.0,31 - \frac{4}{3}.(0,31)^2.(1,472 - 0,812) = 0,324$$

2.adım benzerlikler hesaplanır

Burada h_A bulanık üyelik fonksiyonun yüksekliğini ve u_1, u_2, u_3, u_4 bulanık sayının x eksenindeki koordinatları olsun. Solunum grafiğindeki aralık ve şiddet değerleri referans alınarak uygun üçgen bulanık sayılar seçilip daha sonra seçtiğimiz entropi fonksiyonunda değerler hesaplanmıştır. Bir sonraki adımda bu hesaplamayı yapmaya hızlandırma sağlayacak üreteç bir fonksiyon inşa edilmiştir. Bu çalışmada bulanık sayılar ile ifade edilen solunum sesleri bir sonlu zaman serisi gibi düşünülmüştür. Daha sonra karşılaştırma yapmak için entropi değerleri hesaplanmıştır. Sonuçta entropideki artış ve azalmalar yardımıyla solunum ile ilgili rahatsızlıklarda solunum ses h_A ve h_B dalgasındaki değişimlerin ne kadar etkisi olup olmadığı tartışılmıştır.

Tablo 5.2. Bulanık entropi değerleri

u_1	$[(0),(0{,}276),(0{,}812)]$
u_2	$[(0{,}276),(0{,}812),(1{,}033)]$
u_3	$[(0{,}812),(1{,}033),(1{,}472)]$
u_4	$[(1{,}033),(1{,}472),(1{,}911)]$

$$S(u_1,u_2)=\frac{\min(h_A,h_B)}{\text{mak}(h_A,h_B)}\left[1-\frac{1}{3}\sum_{1}^{3}(A_i-B_i)\right]$$

$$=\frac{0{,}16}{0{,}28}\left[1-\frac{1}{3}.[0{,}276-0)+(0{,}812-0{,}276)+(1{,}033-0{,}812)\right]$$

$$=0{,}374$$

$$S(u_2,u_3)=\frac{\min(h_B,h_C)}{\text{mak}(h_B,h_C)}\left[1-\frac{1}{3}\sum_{1}^{3}(B_i-C_i)\right]$$

$$=\frac{0{,}28}{0{,}29}\left[1-\frac{1}{3}.[0{,}276-0{,}812)+(1{,}033-0{,}812)+(1{,}472-1{,}033)\right]$$

$$=0{,}582$$

$$S(u_3,u_4)=\frac{\min(h_C,h_D)}{\text{mak}(h_C,h_D)}\left[1-\frac{1}{3}\sum_{1}^{3}(C_i-D_i)\right]$$

$$=\frac{0{,}26}{0{,}29}\left[1-\frac{1}{3}.[0{,}276-0{,}812)+(1{,}033-0{,}812)+(1{,}472-1{,}033)\right]$$

$$=0{,}171$$

3.adımda bulanık entropi ve benzerliklerin $\mathbf{mak-min}$ birleşimi bulunur

$\min(p_1, r_1) = [(0{,}155), (0{,}374)] = 0{,}155$

$\min(p_2, r_2) = [(0{,}348), (0{,}582)] = 0{,}348$

$\min(p_3, r_3) = [(0{,}324), (0{,}171)] = 0{,}171$

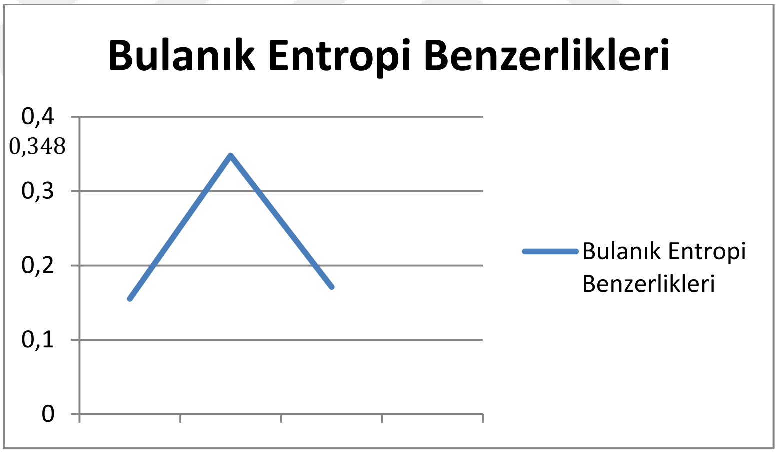
$\text{mak}[(0{,}155), (0{,}348), (0{,}171)] = 0{,}348$

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{R} = \text{mak}\{\min\{\mu\, \mathcal{P}(x, y), \mu\, \mathcal{R}(x, y)\}\}$$

$$= \text{mak}\{\min\{[(0{,}155), (0{,}374)], [(0{,}348), (0{,}582)], [(0{,}324), (0{,}171)]\}\}$$

$$= \text{mak}\{[(0{,}155)], [(0{,}348)], [(0{,}171)]\}$$

$$= 0{,}348$$



Şekil 5.4. Bulanık benzerlik ölçüleri grafiği

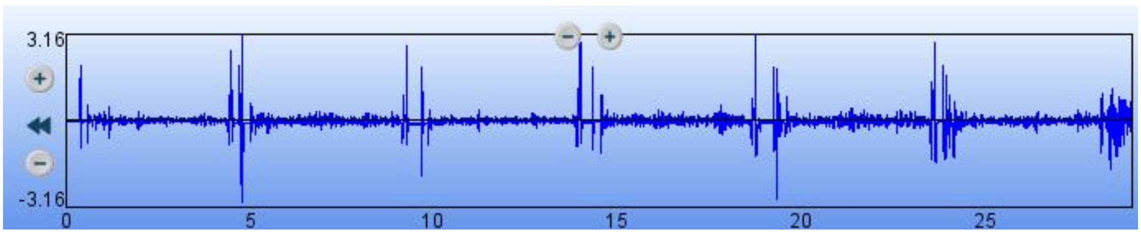
Şimdi 100 hastaya ait solunum ses verilerinden bir örneklem grup seçelim ve bu hastaların ses verilerine ait $h_A, u_A, h_B, u_B, h_c, u_c, h_D, u_D$ değerlerini bilgisayar programlarını kullanarak bulduğumuz sayısal verileri yazalım. Daha sonra bu ham ses verilerini üçgen bulanık işlemlere dönüştürelim, oluşan dizileri de aşağıdaki tabloda yazalım.

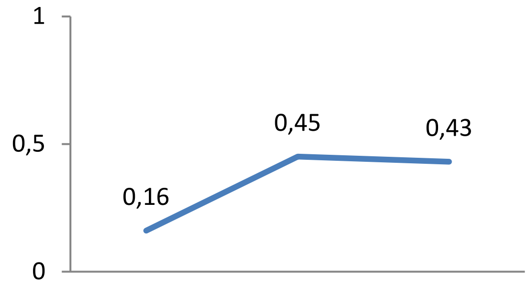
Tablo 5.3. Bazı hastaların bulanıklaştırdıktan sonraki değerleri

	h_A	u_A	h_B	u_B	h_C	u_C	h_D	u_D
14.hasta	0,16	0,276	0,28	0,812	0,31	1,033	0,26	1,472
	h_A	u_A	h_B	u_B	h_C	u_C	h_D	u_D
15.hasta	0,19	0,05	0,31	0,49	0,27	0,96	0,29	1,45
	h_A	u_A	h_B	u_B	h_C	u_C	h_D	u_D
16.hasta	0,22	0,05	0,29	0,36	0,30	0,84	0,35	1,26
	h_A	u_A	h_B	u_B	h_C	u_C	h_D	u_D
17.hasta	0,12	0,06	0,36	0,51	0,17	1,11	0,16	1,82
	h_A	u_A	h_B	u_B	h_C	u_C	h_D	u_D
18.hasta	0,38	0,07	0,43	0,66	0,29	1,32	0,31	1,95
	h_A	u_A	h_B	u_B	h_C	u_C	h_D	u_D
19.hasta	0,21	0,02	0,30	0,70	0,32	1,25	0,31	1,68
	h_A	u_A	h_B	u_B	h_C	u_C	h_D	u_D
20.hasta	0,29	0,24	0,28	0,85	0,32	1,17	0,32	1,52
	h_A	u_A	h_B	u_B	h_C	u_C	h_D	u_D
21.hasta	0,31	0,43	0,29	0,89	0,28	1,14	0,20	1,77
	h_A	u_A	h_B	u_B	h_C	u_C	h_D	u_D
22.hasta	0,30	0,45	0,25	1,10	0,19	1,64	0,24	1,98

Yukarıdaki tabloya göre 1.adım (entropi hesabı), 2.adım (benzerlikler hesabı) ve 3.adım (bulanık entropi ve benzerliklerinin $mak - min$ birleşimi) hesaplamalarını yapınca aşağıdaki grafikler elde edilir.

15.hasta (61 yaş, erkek, ronküs)

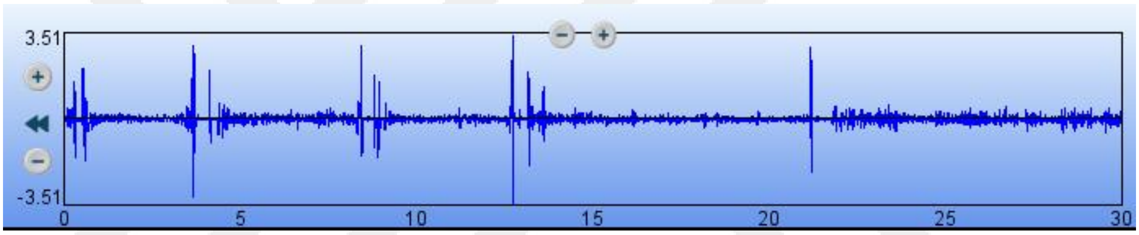


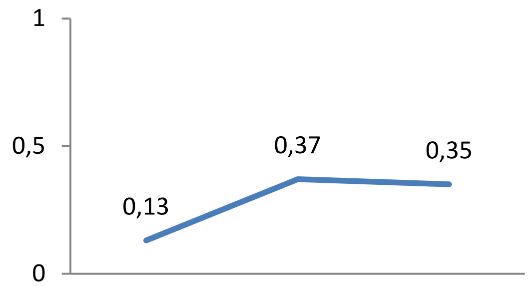


Şekil 5.5. 15.nolu hastanın solunum ses grafiği

$$(\mathcal{P} \circ \mathcal{R})_{15} = \text{mak}\{\min\{\mu\, \mathcal{P}(x,y), \mu\, \mathcal{R}(x,y)\}\} = 0{,}45$$

<u>16.hasta</u> (30 yaş, erkek, ral)

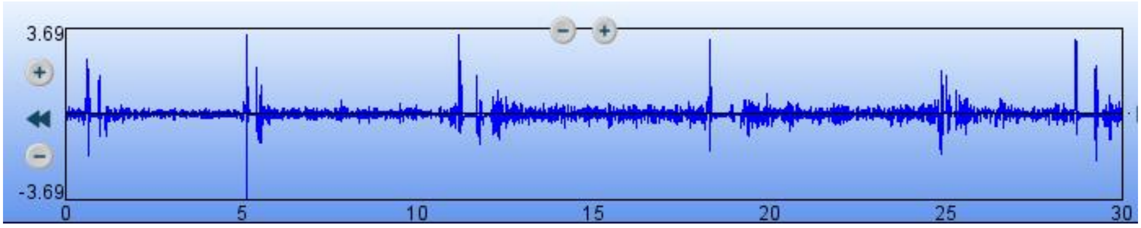


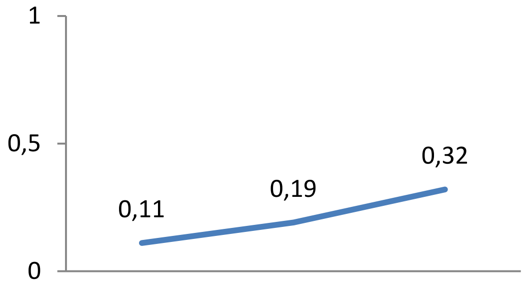


Şekil 5.6. 16.nolu hastanın solunum ses grafiği

$$(\mathcal{P} \circ \mathcal{R})_{16} = \text{mak}\{\min\{\mu\, \mathcal{P}(x,y), \mu\, \mathcal{R}(x,y)\}\} = 0{,}37$$

<u>17.hasta</u> (71 yaş, erkek, ral+ronküs)

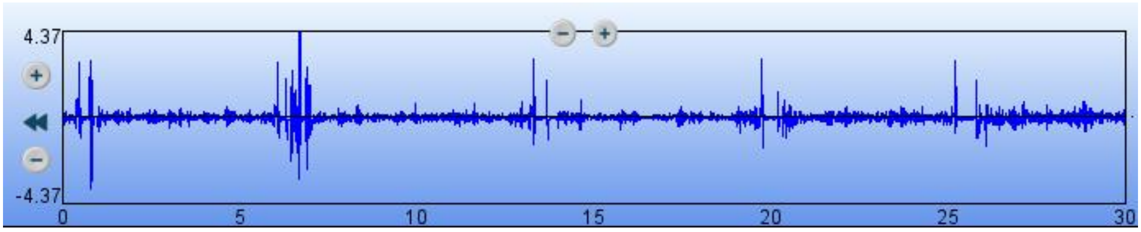


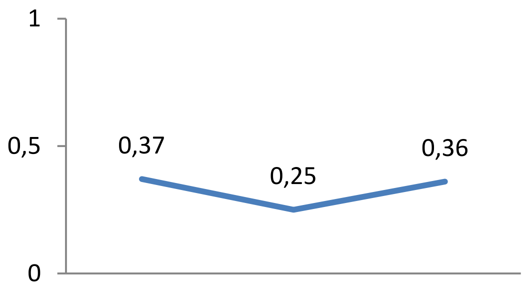


Şekil 5.7. 17.nolu hastanın solunum ses grafiği

$(\mathcal{P} \circ \mathcal{R})_{17} = \text{mak}\{\min\{\mu\, \mathcal{P}(x,y), \mu\, \mathcal{R}(x,y)\}\} = 0{,}19$

18.hasta (82 yaş, erkek, ral)

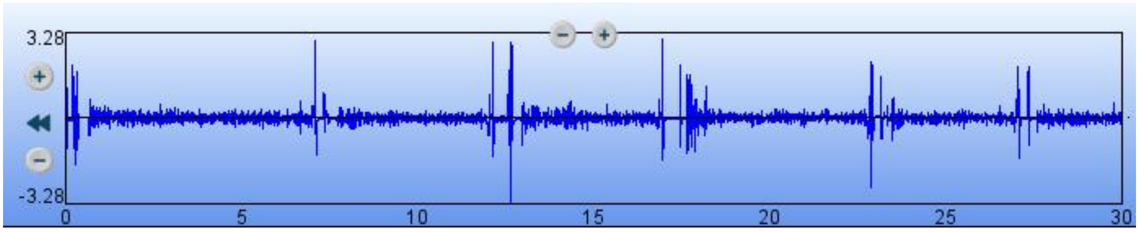


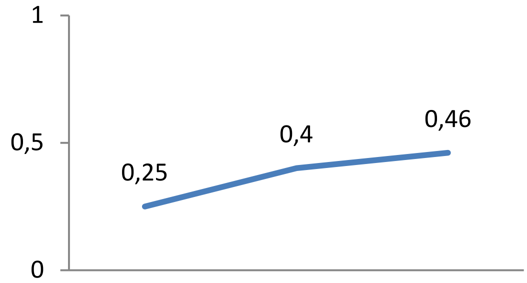


Şekil 5.8. 18.nolu hastanın solunum ses grafiği

$(\mathcal{P} \circ \mathcal{R})_{18} = \text{mak}\{\min\{\mu\, \mathcal{P}(x,y), \mu\, \mathcal{R}(x,y)\}\} = 0{,}25$

19.hasta (56 yaş, bayan, ral, krepitan)

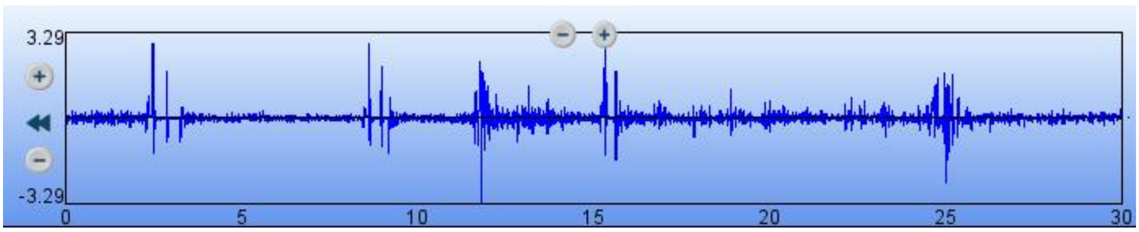


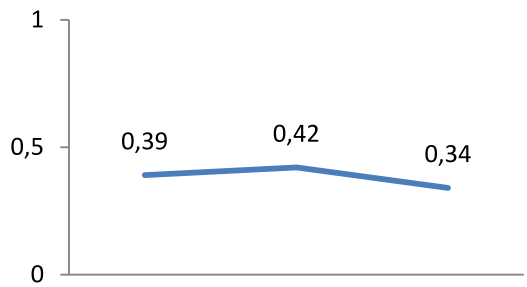


Şekil 5.9. 19.nolu hastanın solunum ses grafiği

$$(\mathcal{P} \circ \mathcal{R})_{19} = \text{mak}\{\min\{\mu\, \mathcal{P}(x,y), \mu\, \mathcal{R}(x,y)\}\} = 0{,}40$$

20.hasta (72 yaş, bayan, ronküs)

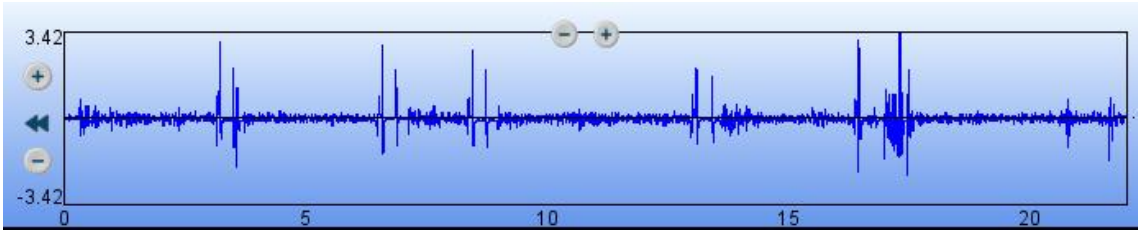


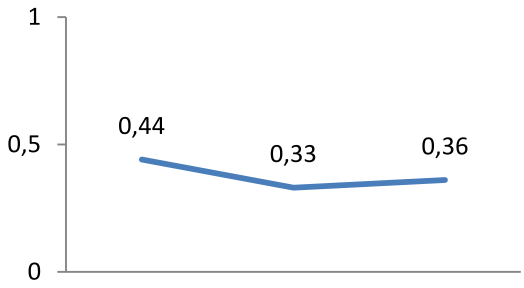


Şekil 5.10. 20.nolu hastanın solunum ses grafiği

$$(\mathcal{P} \circ \mathcal{R})_{20} = \text{mak}\{\min\{\mu\, \mathcal{P}(x,y), \mu\, \mathcal{R}(x,y)\}\} = 0{,}42$$

21.hasta (79 yaş, bayan, ronküs)

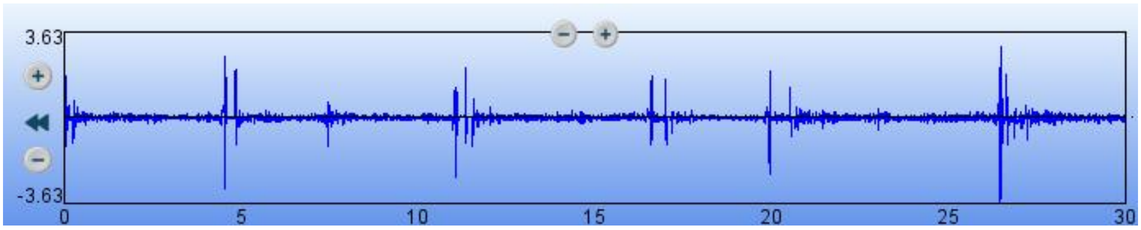


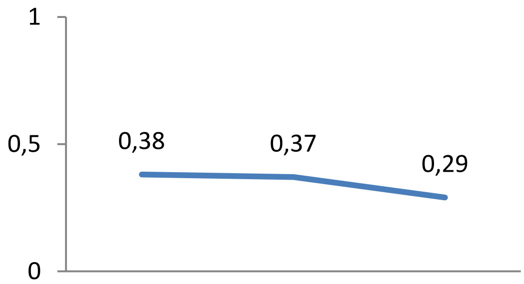


Şekil 5.11. 21.nolu hastanın solunum ses grafiği

$$(\mathcal{P} \circ \mathcal{R})_{21} = \text{mak}\{\min\{\mu\, \mathcal{P}(x,y), \mu\, \mathcal{R}(x,y)\}\} = 0{,}44$$

22.hasta (62 yaş, bayan, ral, krepitan)





Şekil 5.12. 21.nolu hastanın solunum ses grafiği

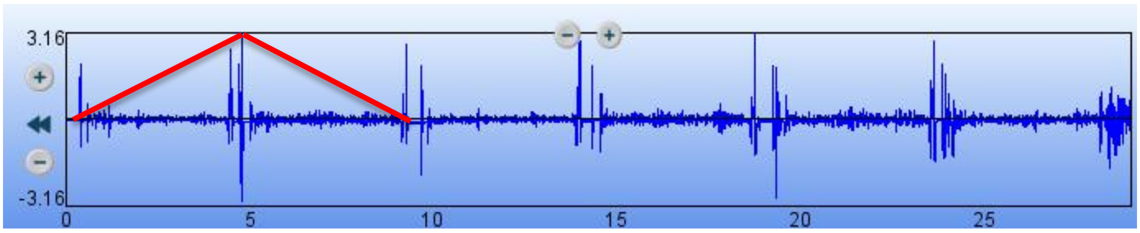
$(\mathcal{P} \circ \mathcal{R})_{22} = \text{mak}\{\min\{\mu\, \mathcal{P}(x,y), \mu\, \mathcal{R}(x,y)\}\} = 0{,}37$

4.adımda kredibility dağılımı ve beklenen değer bulunur

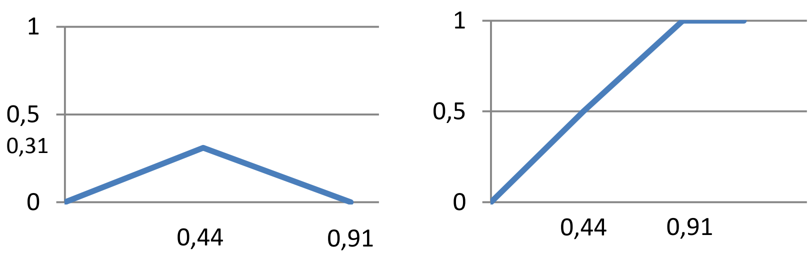
Bulanık bir olayın alternatif bir ölçüsü olarak, kredibility son zamanlarda bulanık ortamlarda belirsizliklerin giderilmesi ve gelecekte olabilecek olayları tahmin için bulanık ortamda güven düzeyinin bir ölçüsü olarak önerildi. Optimizasyon modelinde yani belirli amaçları gerçekleştirmek için en iyi kararları verme yönteminde, bulanık sınırlamalara ilişkin güven düzeyinin yetkin bir ölçütü olarak kabul edildi. Kredibility self-dual olduğu için bulanık bir olayın kredibility değeri 1'e ulaştığında bulanık olay kesinlikle gerçekleşecektir. Kredibility ölçüsü kullanılırken, farklı olasılıklarda meydana gelen bulanık olayların farklı kredibilty değerleri olacaktır. Kredibility değeri yüksek olan bulanık olayın gerçekleşmesi daha fazla olasıdır.

Tablo 5.3. deki verilerin mak değerlerini alarak oluşturduğumuz bulanık kümeyi başlangıç noktasını sıfır olacak şekilde ayarlayıp grafiğini çizdikten sonra kredibility dağılımlarını ve beklenen değerlerini gösterelim.

15.hasta (Kredibility dağılımı ve beklenen değer hesabı)



Bulanık dağılım *Kredibility dağılım*

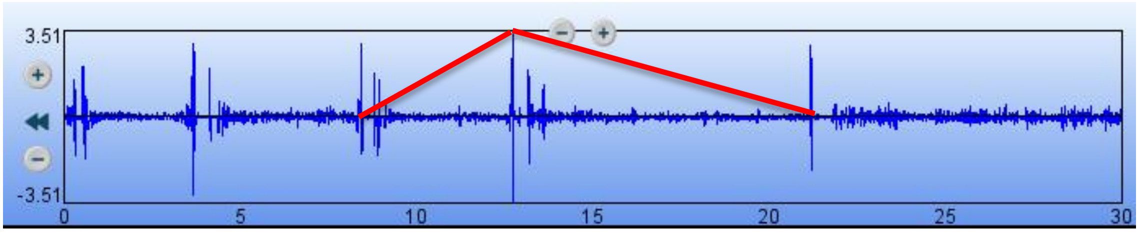


Şekil 5.13. 15.hastanın kredibility dağılımı grafiği

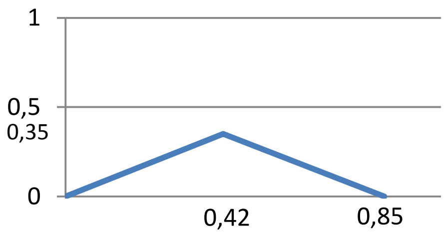
Beklenen değer;

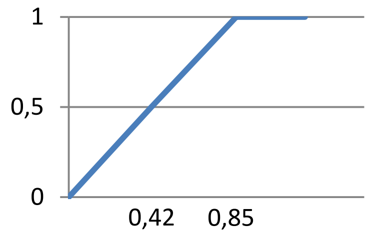
$$E(\xi_{15}) = \frac{a+2b+c}{4} = \frac{0+2.(0{,}44)+0{,}91}{4} = 0{,}44$$

<u>16.hasta </u> (Kredibility dağılımı ve beklenen değer hesabı)



Bulanık dağılım *Kredibility dağılım*

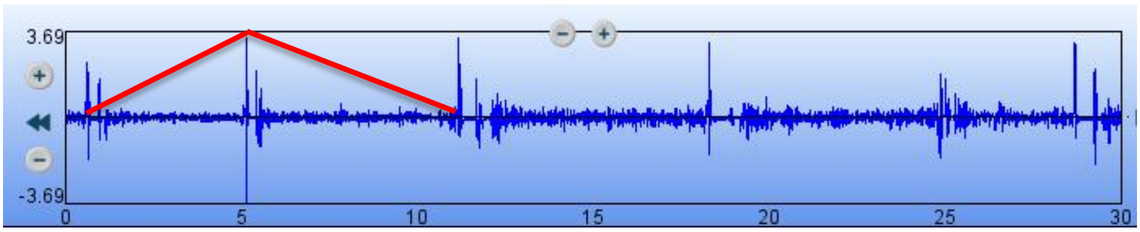




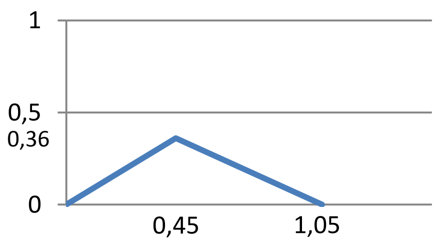
Şekil 5.14. 16.hastanın kredibility dağılımı grafiği

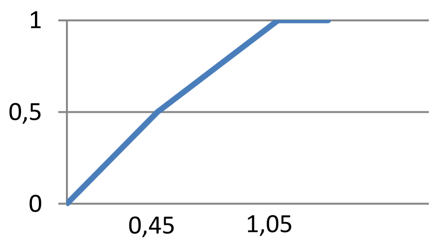
$$E(\xi_{16}) = \frac{a+2b+c}{4} = \frac{0+2.(0{,}42)+0{,}85}{4} = 0{,}42$$

<u>17.hasta </u> (Kredibility dağılımı ve beklenen değer hesabı)



Bulanık dağılım *Kredibility dağılım*

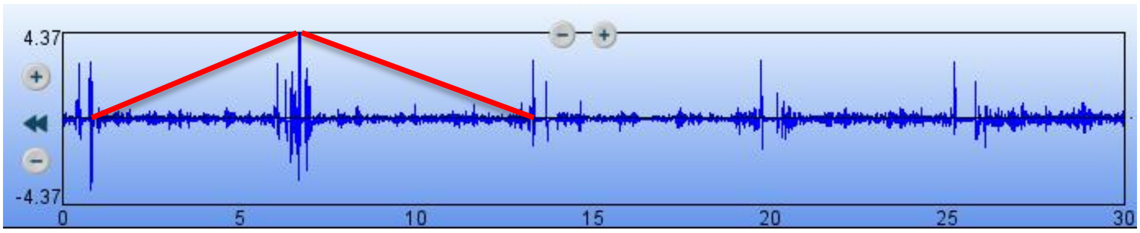




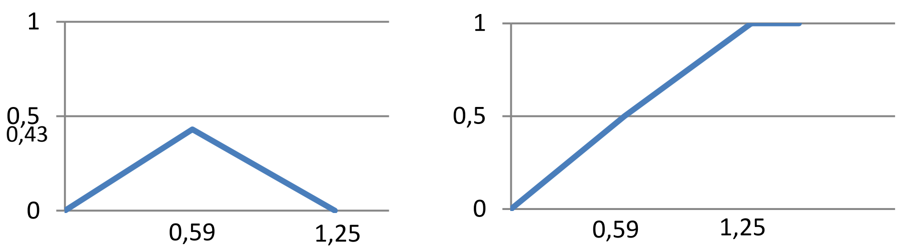
Şekil 5.15. 17.hastanın kredibility dağılımı grafiği

$$E(\xi_{17}) = \frac{a + 2b + c}{4} = \frac{0 + 2.(0{,}45) + 1{,}05}{4} = 0{,}48$$

<u>18.hasta</u> (Kredibility dağılımı ve beklenen değer hesabı)



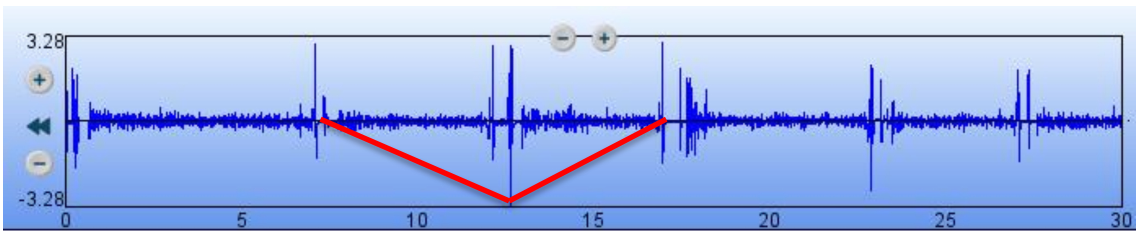
Bulanık dağılım *Kredibility dağılım*

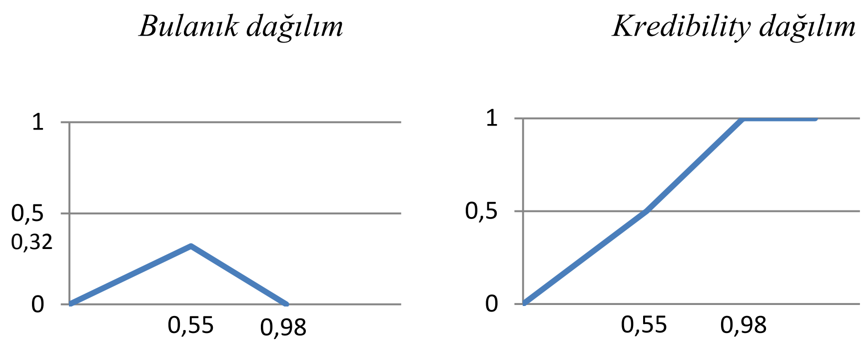


Şekil 5.16. 18.hastanın kredibility dağılımı grafiği

$$E(\xi_{18}) = \frac{a + 2b + c}{4} = \frac{0 + 2.(0{,}59) + 1{,}25}{4} = 0{,}67$$

<u>19.hasta</u> (Kredibility dağılımı ve beklenen değer hesabı)

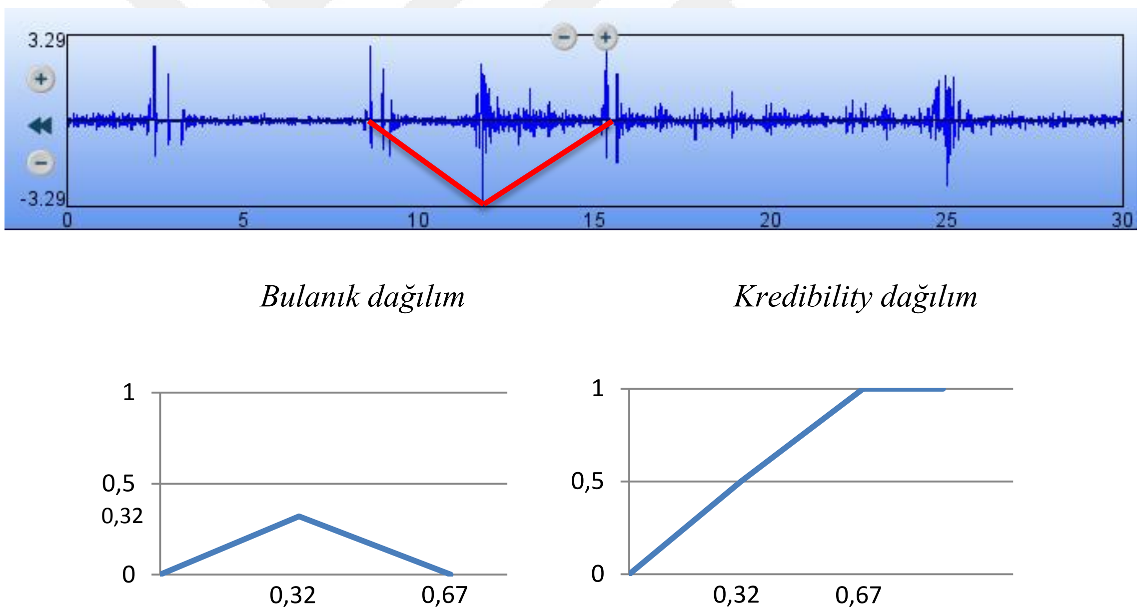




Şekil 5.17. 19.hastanın kredibility dağılımı grafiği

$$E(\xi_{19}) = \frac{a+2b+c}{4} = \frac{0+2.(0{,}55)+0{,}98}{4} = 0{,}52$$

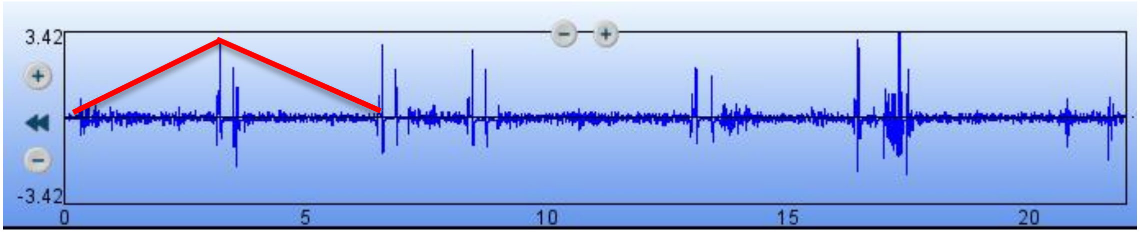
<u>20.hasta</u> (Kredibility dağılımı ve beklenen değer hesabı)



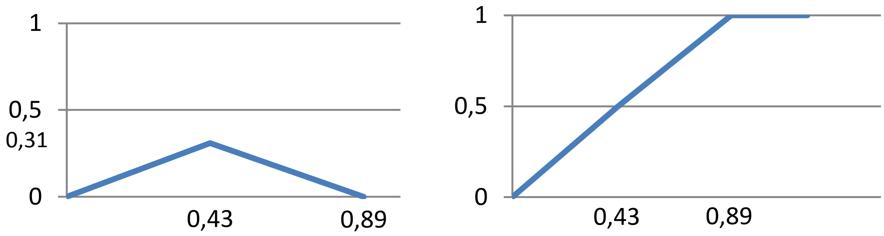
Şekil 5.18. 20.hastanın kredibility dağılımı grafiği

$$E(\xi_{20}) = \frac{a+2b+c}{4} = \frac{0+2.(0{,}32)+0{,}67}{4} = 0{,}32$$

<u>21.hasta</u> (Kredibility dağılımı ve beklenen değer hesabı)



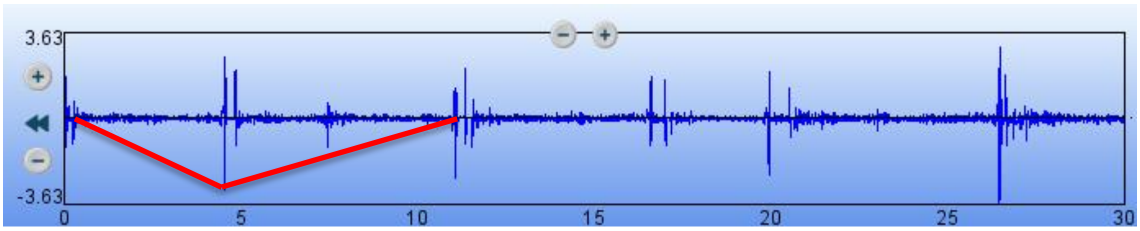
Bulanık dağılım *Kredibility dağılım*



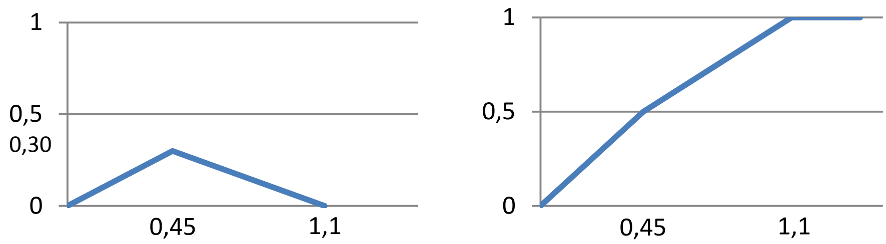
Şekil 5.19. 21.hastanın kredibility dağılımı grafiği

$$E(\xi_{21}) = \frac{a+2b+c}{4} = \frac{0+2.(0{,}43)+0{,}89}{4} = 0{,}43$$

<u>22.hasta</u> (Kredibility dağılımı ve beklenen değer hesabı)



Bulanık dağılım *Kredibility dağılım*



Şekil 5.20. 22.hastanın kredibility dağılımı grafiği

$$E(\xi_{22}) = \frac{a+2b+c}{4} = \frac{0+2.(0{,}45)+1{,}10}{4} = 0{,}50$$

Tablo 5.4. Bulanık Entropi benzerlik ölçüler ve kredibility beklenen değerleri

	15.nolu ses	16.nolu ses	17.nolu ses	18.nolu ses	19.nolu ses	20.nolu ses	21.nolu ses	22.nolu ses
Bulanık Entropi Benzerlik ölçüsü	0,45	0,37	0,32	0,37	0,46	0,42	0,44	0,38
Kredibility beklenen değer	0,44	0,42	0,48	0,67	0,52	0,32	0,43	0,50

Toplam 100 hastanın solunum seslerini inceleyerek bazı analiz ve sentezler yaptık. Belirsiz gibi görünen veya anlamlandırılamayan ses dalgalarını ses verilerine dönüştürdük. Ses verilerini oluşturduğumuz modelle, bulanıklaştırıp mevcut olan belirsizliği gidermek amacıyla bulanık entropi ve benzerliklerini bulduk. Bulanık entropilere ve bulanık benzerlik ölçülerine bulanık kümelerde akıl yürütme yollarını denedik. Bulanık çıkarım yöntemlerinden biri olan $\text{mak} - \text{min}$ birleşimine bakarak hastaların solunum seslerinin bir kısmını tablolaştırıp grafikler ve nümerik sayılar elde ettik. Yani solunum ses verilerini hekimin karar vermesinde yardımcı olmak maksadıyla sayısallaştırdık. Elde edilen verilere bakıldığında $(0{,}5)$ e yaklaşımlar olduğu dikkatimizi çekti. $(0{,}5)$ e yaklaşımların olduğu solunum ses verilerinin hastalarına hekimin daha dikkat etmesi gerektiği kanaatine ulaştık.

Belirsiz görünen bu ses verilerinin güven düzeyini ölçmek ve ilerleyen zamanlardaki olayları tahmin etmek amacıyla belirsiz verileri ölçen ve diğer karar verme kriteri olan kredibility teorisinin ölçülerini kullandık. Kredibility dağılımlarını ve beklenen değerlerini hesaplayıp hastalığın tanı koyulmasında yapılan kredibility derecelendirmeyle karar aşamasında değerlendirilmesi gerektiği önemli olduğu düşünüldü. Dolayısıyla elde edilen sayısal verileri bulduğumuz bulanık entropi benzerlik ölçüsü verileriyle alt alta yazdık. Kredibilitysi çok olanın tahmin edilmesi daha kolay olduğu da dikkate alınırsa çift taraflı bir değerlendirmeyle hekime yol gösterilmiş oldu.

Yapılan bulanık çıkarımlar bir teşhis değildir, hastalığın derecelendirilmesine hekime sunulan sayısal bir dokümandır. Oluşturulan ve eksiklikleri giderilecek model sayesinde hastalıkların tanısı bilgisayarlı teşhise doğru gitmektedir. Bulanık kümelerin tıptaki önemi de giderek artmakta, tıp ve diğer alanlarda göreceli değerlendirme yerine veya bir olayın gerçekleşme durumu, kredibilitysi hakkında dereceli değerlendirmenin önünü açmaktadır.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada bulanık kümeler, bulanık entropi, bulanıklaştırma, durulaştırma, belirsizlik teorisi, bulanık çok amaçlı karar verme yöntemleri tanımları yapılmış, teoremle ve örnekler verilmiştir. Daha sonra bulanık kümelerin kullanım alanlarından olan tıpta teşhis koymada bulanık kümeler kısmına girilmiş ve solunum hastaları üzerinde bir araştırma yapılmıştır. Hastalara ait verileri anlamlandırmak ve hekime teşhis koymada yardımcı olunmak maksadıyla bir model oluşturulmuştur. Bu model sayesinde hem hastanın özellikleri hem de bulanık işlemler sayesinde elde edilmiş nümerik sayı bulunmuştur.

Sonuç olarak solunum seslerinin bulanık entropilerinin, bulanık benzerliklerininin ölçüsünün ve kredibility dağılımı, kredibility beklenen değerinin bulanık bağıntı işlemleriyle düşünüldüğünde karar vermede etkili olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca karar vermede derecelendirme yapılarak bulanık mantığın ne kadar önemli ve etkili olduğu vurgulanmıştır. Bulanık mantıktaki çok değerlilik gelişen teknoloji sayesinde daha güzel sonuçlar çıkartacağı görülmektedir.

Bulanık küme, entropi, kredibility ve belirsizlik konuları seslerin tanısında veya derecelendirmesinde bize ilginç tutarlı sonuçlar çıkarmaktadır. Seslerin daha detaylı ve farklı karar verme yöntemleri değerlendirmesi gerektiği tezimize konulacak temel önerilerdir. Ayrıca kalp atış seslerinin durulaştırılarak belirsiz gibi görünen seslerin belirlenmesi diğer bir önerimizdir.

KAYNAKLAR

1 . Baykal N.,Beyan T.. "Bulanık Mantık Uzman Sistemler ve Denetleyiciler", *Bıçaklar Kitabevi*, Ankara, 2004.

2 . Özdağoğlu A.. "Bulanık İşlemler Durulaştırma ve Sözel Eşikler", *Detay Yayıncılık*, Ankara, 2016.

3 . Barnabas B.. "Studies in Fuzziness and Soft Computing", *Springer Heidelberg* , New York, 2013.

4 . Paksoy T., Pehlivan N., Özceylan E.. "Bulanık Küme Teorisi", *Nobel Yayınevi*, Ankara, 2013.

5 . Jaynes E. T.,“Probability Theory”, The Logic of Science, p.241, 09 April 2003.

6 . Lowen R.."Fuzzy Sets and Systems", *Elsevier*, 1980.

7 . Choi H.C., “The completeness of convergent sequences space of fuzzy numbers,” *Kangweon-Kyungki Math. Jour.*, vol. 4, no. 2, pp. 117–124, 1996.

8 . Chaudhuri A., Ghosh S.K., “ Studies in Fuzziness and Soft Computing”, 2016.

9 . Liu, B., “Uncertainty Theory”, 5th edn, *Springer*, Berlin (2015).

10 . Chaudhuri A., “Ghosh S.K., Studies in Fuzziness and Soft Computing”, *Springer International Publishing Switzerland*, 2016.

11 . Liu B., “Uncertainly Theory”, Tsinghua University Beijing 100084, China, 2008.

12 . Rojas, R.. “Neural Network”, *A Systematic Introduction, Springer –Verlag*, Berlin, (1996). Roychowdhury S., Pedrycz W., “A survey of defuzzification strategies”, *International Journal of Intelligent Systems*, //doi.org/10.1002/int.1030, 2001.

13. Liu, B., “Theory and Practice of Uncertain Programming”, *Springer-Verlag*, Berlin Heidelberg 2002 .

14 . Chaudhuri A., Ghosh S.K., “Studies in Fuzziness and Soft Computing”, *Springer International Publishing*, Switzerland 2016.

15 . Liu B., “Uncertainly Theory”, Tsinghua University Beijing 100084, China, 2008.

16. Shannon, C.E., “A mathematical theory of communication”, Reprinted with corrections from, *The Bell System Technical Journal*, 27, 379–423, 623–656, (1948).

17. Zadeh L.. “Fuzzy Sets”, *Information and control sciences*, vol. 8, no. 3, (1965), pp. 338-353.

18. Yavuz, O., Bayram, M.C., ve Yıldırım T., “Chebyshev Filtre Parametrelerinin Yapay Sinir Ağları Kullanılarak Hesaplanması”, *EMO 2007 Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği 12. Ulusal Kongresi,* 2007.

19. H.-J. Zimmermann, “Fuzzy Set Theory- Its Applications”, Second Revised Edition, *Kluwer Academic Publishers*, (1991) USA.

20. Earis, J.E., Cheetham B.M.G., “Current Methods Used for Computerized Respiratory Sound Analysis”, *Eur. Respir. Rev*., 10(77):586-590, (2000).

21. Shannon, C.E., “A mathematical theory of communication. Reprinted with corrections from”, *The Bell System Technical Journal*, 27, 379–423, 623–656, (1948).

22. Zadeh L., “Similarity relations and fuzzy orderings”, *Information sciences*, vol. 3, pp. 177–200, (1971).

23. Sridevi B., Nadarajan R., “Fuzzy Similarity Measure for Generalized Fuzzy Numbers”, *Int. J. Open Problems*, Compt. Math, 2, 240-253, (2009).

24. Tien-Chin Wang, The entropy difference of triangular fuzzy numbers with arithmetic operations, http://ir.lib.isu.edu.tw/handle/987654321/12339.

25. Torres A, Nieto JJ., “Fuzzy logic in medicine and bioinformatics”, *J Biomed Biotechnology*;1-7, 2006.

26. Demirhan A., Kılıç Y.A., Güler İ., “Tıpta yapay zeka uygulamaları”, *Gazi Üniversitesi Teknoloji Fakültesi,* Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Ankara, *Hacettepe Üniversitesi Tıp Fakültesi,* Genel Cerrahi Anabilim Dalı, Ankara 2009.

27. Diamond P., Kloeden P., “Metric Spaces of Fuzzy Sets”, *World Scientific Publishing*, River Edge, NJ,USA, 1994.

28. Şengönül M., Zararsız Z., “Some Additions to the Fuzzy Convergent and Fuzzy Bounded Sequence Spaces of Fuzzy Numbers*”, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, Volume, Article ID 837584, 12 pagesdoi:10. 1155/2011/837584, 2011.

29. Piotr S., Szczepaniak Paulo, Lisboa G,, Kacprzyk J,” Fuzzy Systems in Medicine”, , New York, 2000.

30. Kolmogorov AN, “Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung”, *Julius Springer*, Berlin, 1933.

31. Li P., Liu B., ‘Entropy of Credibility Distributions for Fuzzy Variables’, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol.16, No1, 2008.

32. Gelir E., Koz M., Ersöz G., ‘Fizyoloji Ders Kitabı’, *Nobel yayınları*, Ekim 2016.

33. Jiang Z., Sun P., Ji C., Zhou J., ‘Credibility theory based dynamic control bound optimization for reservoir flood limited water level’, *Journal of Hydrology*, 529 (2015) 928–939, July, China, 2015.

34. Li X, and Liu B, A sufficient and necessary condition for credibility measures, International Journal of Uncertainty, Fuzziness & Knowledge-Based Systems, Vol. 14, No. 5, 527-535, 2006.

35. Liu B, Liu YK, “Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 10, No. 4, 445-450, 2002.

36. Koissi M.C., Shapiro A.F., “Credibility Theory in a Fuzzy Environment Presented at the 47th Actuarial Research Conference”, *University of Manitoba*, Canada, August 2012.

37. Çimen U., ‘Solunum Seslerinin Yapay Zekâ Ortamında Sınıflandırılması’, *Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ocak 2016.

38. Pasterkamp H., Kraman S.S., “Wodicka G.R., Respiratory Sounds Advances Beyond the Stethoscope”, *Am J Respir Crit Care Med*, Vol.156. pp. 974-987, 1997.

39. Güçlü G., Karlık B., Öz H.R., "Akciğer Ses Sinyallerinin Nefes Alma ve Nefes Vermeye Bağlı Olarak Sınıflandırılması" https://www.researchgate.net/publication/ 316646884.

40. Sen I., Kahya Y.P., A Muli-Channel Device for Respiratory Sound Data Acquisition and Transient Detection, *Proceeding of the 2005 IEEE Engineering in Medicine*, China, 2005.

41. Güler H., Ata F., "Solunum Rahatsızlığı Olan Hastalar İçin Bulanık Tabanlı Tidal Volüm Algoritmasının Geliştirilmesi", *Journal of Faculty of Engineering and Arcjitecture of Gazi University*, Vol 29, No 4,699-706, 2014.

42. Hamidzadeh F., Javadzadeh R., Najafzadeh A., "Fuzzy Rule Based Diagnostic System For Detectin The Lung Cancer Disease", *Journal of Renewable Natural Resources Bhutan*, ISSN:1608-4330, vol 3.1, 147-157:2015.

43. Hamad M.A., "Lung Cancer Diagnosis By Using Fuzzy Logic", *International Journal of Computer Science and Mobile Computing*, Vol.5 Issue.3, pg.32-41 March-2016.

44. Kumar H.B., A fuzzy expert system design for analysis of body sounds and design of an unique electronic stethoscope, Biosensors and Bioelectronics ScienceDirect, 22, 1121-1125, 2007.

45. Szmidt E., "Studies in Fuzziness and Soft Computing", Distances and Similarities in Intuitonistic Fuzzy Sets, Springer, *International Publishing Switzerland* , London 2014.

46. Diamond P., Kloeden P., "Metric Spaces of Fuzzy Sets", *World Scientific Publishing, River Edge*, NJ,USA, 1994.

ÖZGEÇMİŞ

İbrahim ŞANLIBABA 1984 yılında Nevşehir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Nevşehir'de tamamladı. 2002 yılında Ankara Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliğini kazandı. 2006 yılında üniversiteden mezun oldu. Aynı yıl devlette matematik öğretmeni olarak atanıp beş yıl Bursa'da görev yaptı. 2008 yılında vatani görevine başlayıp on iki ay asteğmen asker olarak Burdur'da ve Erzurum'da askerlik vazifesini tamamladı ve görev yerine tekrar giderek Matematik öğretmenliğine devam etti. 2011 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesinde yüksek lisansa başladı. Evli ve iki çocuğu vardır. Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesinde yüksek lisans yapmıştır ve doktora eğitimine Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesinde başlamıştır. Halen Nevşehir merkez Damat İbrahim Paşa Ortaokulunda matematik öğretmeni ve idarecilik yapmaktadır.

Adres: Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi

Tel: 05059040422

e-posta: ibrahimsanlibaba@gmail.com, i_sanlibaba@hotmail.com,