T.C.

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS (BBM-BURGERS) DENKLEMİNİN B-SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan

Ahmet BOZDAĞ

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2021

NEVŞEHİR

T.C.

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS (BBM-BURGERS) DENKLEMİNİN B-SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan

Ahmet BOZDAĞ

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2021

NEVŞEHİR

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmamda araştırmamın her aşamasında bana yol gösteren, yardımcı olan, engin bilgilerini benimle paylaşan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen, tezimde büyük emeği geçen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ'a, bu tez çalışmasına başlamama vesile olan ve maddi, manevi desteklerini benden esirgemeyen eşim Yasemin BOZDAĞ'a çok teşekkür ederim.

BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS
(BBM-BURGERS) DENKLEMİNİN B-SPLINE SONLU
ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Ahmet BOZDAĞ

NEVŞEHİR HACIBEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ağustos 2021

ÖZET

Bu tez çalışmasında, BBM-Burgers (Benjamin Bona Mahony-Burgers) denkleminin sayısal çözümleri kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin yöntemi ve ayrıca septik B-spline fonksiyonlar kullanılarak kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilmiştir. Bu tez çalışmamız dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, sonlu elemanlar yöntemi, spline fonksiyonlar, B-spline fonksiyonlar, septik B-Spline fonksiyonlar, Galerkin yöntemi, Kollokasyon yöntemi ve BBM-Burgers denklemi hakkında detaylı bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, kübik B-Spline fonksiyonlar ile Benjamin Bona Mahony Burgers denklemi için Galerkin sonlu elemanlar yöntemiyle yaklaşık çözümler elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, Benjamin Bona Mahony Burgers denkleminin septik B-Spline kollokasyon yöntemi ile sayısal çözümleri bulunmuştur.

Dördüncü bölümde, elde edilen sayısal çözümlerle ilgili elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: B-Spline Fonksiyonlar, Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Denklemi, Sonlu Elemanlar Yöntemi, Kollokasyon Yöntemi, Galerkin Yöntemi
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ
Sayfa sayısı: 60

BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS
(BBM-BURGERS) B-SPLINE OF THE EQUATION
NUMERICAL SOLUTIONS WITH FINITE ELEMENT METHODS
(M. Sc. Thesis)

Ahmet BOZDAĞ

NEVŞEHİR HACIBEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLİED SCİENCES
August 2021

ABSTRACT

In this thesis, numerical solutions of the BBM-Burgers (Benjamin Bona Mahony-Burgers) equation are obtained with Galerkin finite element method using cubic B-spline functions and also with collocation finite element method using septic B-spline functions.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, detailed information is given about the finite element method, spline functions, B-spline functions, septic B-Spline functions, Galerkin method, Collocation method and BBM-Burgers equation.

In the second chapter, numerical solutions of the BBM-Burgers equation are obtained with Galerkin finite element method with cubic B-spline functions.

In the third chapter, numerical solutions of the Benjamin Bona Mahony Burgers equation are found by septic B-Spline collocation method.

In the fourth chapter, the obtained results and suggestions about the numerical solutions are given.

Keywords: B-Spline Functions, Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation, Finite Element Method, Collocation Method, Galerkin Method
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ
Number of pages: 60

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

BBM	Benjamin -Bona-Mahony
Exp	Üstel Fonksiyon
EW	Eşit Genişlik
HAM	Homotopy Analiz Method
HPM	Homotopy Perturbasyon Method
KdV	Korteweg-de Vries
RLW	Düzenli Uzun Dalga
W_m	Ağırlık fonksiyonu
U_N	Yaklaşık çözüm
I_1	Kütle
I_2	Momentum
I_3	Enerji
L_2 ve L_∞	Hata normları

1. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu eleman terimi Ray W. Clough tarafından 1960 yılında üçgensel ve dikdörtgensel elemanların düzlemsel gerilme analizinde kullanmasıyla ortaya çıkmıştır [1]. Bu yöntem daha sonra, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü ile ilgili G. Strang ve G. J. Fix gibi matematikçilerin varyasyonel yöntemleri, bir problemin yaklaşık çözümünün bulunmasıyla ilgili yaptıkları çalışmalarda kullanmışlardır [2]. Sonrasında sonlu elemanlar yöntemi üzerine, 1967 yılında yazılan ilk kitapla Zienkiewicz ve Cheung bu yöntemin gelişimine katkı sağlamışlardır [3-4].

Sonlu elemanlar yöntemi düzgün ve düzgün olmayan yapısı karmaşık geometrik şekillerde bilgisayar teknolojisinden de yararlanarak bir programlama dilinde çalıştırıldığında iyi sonuç vermektedir. Bu problem geniş bir sistemi belli düğüm noktalarına ayrıklaştırmak suretiyle daha küçük parçalara ayırır ve tek bir işlemle tüm bölge üzerindeki problemi çözmeden alt bölgeler için çözüm bulunur, sonra veriler birleştirilir [5].

Sonlu elemanlar yönteminin diğer yöntemlere göre avantajları şöyledir:

1- Farklı yöntemlerle modellenemeyen düzgün olmayan şekilli yapıları modellemede kolaylık sağlar.

2- Eleman denklemleri ayrı ayrı ele alındığında farklı malzemelerden oluşan yapıları da modellemede kolaylık sağlar.

3- Sınır şartları değişse dahi sonlu eleman modelinin değişmemesi ve farklı sınır şartları altında da kullanılabilmesi.

4- Elemanların büyüklüklerinin gerektiğinde değiştirilmesi.

5- Sonlu eleman modelinin istenildiğinde rahatlıkla değiştirilebilmesi.

6- Bilgisayar programlama dilinde kolaylıkla uygulanabilir olması olarak sıralanabilir.

Dezavantajları ise;

1- Çözüm bölgesinin alt bölgelere ayrılmasında bir takım tecrübe gerekmesi.

2- Süreklilik şartlarının alt bölgelere uygulanmasında zorluklar çıkması.

3- Bilgisayarla çalıştırılma işlemi sırasında hatalı veri girişinin yapılabilmesi olarak söylenebilir [6].

Bir probleme sonlu eleman yönteminin uygulanmasında kullanılan basamaklar ise şöyledir;

1- Öncelikle verilen bölgenin ayrıklaştırılması (diskritizasyon).

2- Tipik elemanlar için eleman denkleminin oluşturulması.

3- Verilen problemin denklemleri oluşturmak için eleman denklemlerinin birleştirilmesi.

4- Problemin sınır şartlarının uygulanması.

5- Ardından birleştirilmiş denklemlerin çözülmesi.

6- Son olarak sonuçların grafik/tablo şeklinde değerlendirilmesi [7-8].

1.2. Spline Fonksiyonlar

Sayısal yaklaşım yöntemleri, matematik alanında yaygın olarak kullanılan çözüm tekniklerindendir. Bu yöntemlerden biri, veri uydurma problemi diğeri ise bir operatör denklemi vasıtasıyla elde edilen fiziksel problemlerin matematiksel modellemelerinden oluşan yöntemdir. Bu türden problemler adi ve kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer, öz değer ve özvektör, integro-diferansiyel denklemler gibi problemleri kapsamaktadır.

Bu problemlerde hassas bir yaklaşım elde etmek için polinom fonksiyonlar kullanılmıştır fakat yüksek dereceli polinomlar istenilen hassasiyeti göstermeyebileceğinden parçalı polinom haline getirilerek bu olumsuzluk giderilebilir. Spline interpolasyon yöntemi olarak adlandırılan bu yöntemde veri aralıkları sonlu değişik alt aralıklara bölünerek her bir alt aralık daha küçük dereceden polinomlar kullanılarak işlemin daha kolay ilerlemesi sağlanmaktadır [9].

Belirli düzgünlük şartlarında polinom parçalarının bir araya getirilmesi ile elde edilen fonksiyona spline fonksiyon denir. $s(x)$ bir spline fonksiyon olmak üzere $x_1, x_2, ..., x_n$ düğüm noktaları $-\infty = x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} = \infty$ monoton artan reel sayı dizisi olmak üzere $\forall\ (x_i, x_{i+1})$, $(i = 0,...,n)$ aralığında $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = \infty$ için $s(x)$ m. dereceden veya daha az dereceden bir polinomdur ayrıca $s(x)$ spline fonksiyonu ve $1, 2, ..., (m-1)$. mertebeden türevleri her aralıkta süreklidir. Bu durumda süreklilik şartları sağlanan polinomlar ve türevleri bir spline fonksiyon belirtir.

Spline fonksiyonların özellikleri şu şekilde sıralanabilir;

1- Spline fonksiyonlar düzgün (smooth) fonksiyonlardır.

2- Bu fonksiyonlar uygun bazlarla birlikte sonlu boyutlu lineer uzay oluşturur.

3- Spline fonksiyonların integralleri ve türevleri yine bir spline fonksiyon oluşturur.

4-Spline fonksiyonlar bilgisayar ortamında rahatlıkla hesaplanıp sonuçları gözlemlenebilir.

5- Spline fonksiyon kullanılması sonucunda ortaya çıkan matrisler çok kolayca hesaplanabilir.

6- Düşük dereceli spline fonksiyonlar hem esnektir hem de polinomlar kadar keskin salınım sergilemez.

7- Polinomların yapılarında karşılaştığımız işaret ve katsayılar bu yaklaşımda da ortaya çıkar.

8- Spline fonksiyon uygulanması sonucunda oluşan kararlılık ve yakınsaklık işlemleride kolayca incelenebilir.

9- Aynı anda spline fonksiyonlar ve türevleri yaklaşık olarak hesaplanabilir [8].

1.3. B- Spline Fonksiyonlar

B-spline özel bir spline fonksiyon olup aynı zamanda parçalı polinom fonksiyondur. Dolayısıyla spline fonksiyonlar aynı dereceli B-spline fonksiyonların lineer bileşimi olarak yazılabilir [4].

Örneğin $B_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i < x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$ sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyon olup $B_i^0(x_i) = 1$ ve $B_i^0(x_{i+1}) = 0$ olmak üzere bazı özellikleri şu şekilde sıralanabilir.

- $[x_i, x_{i+1})$ aralığında tanımlı olan $B_i^0(x)$ B-spline fonksiyon $\forall x, i$ için $B_i^0(x) \geq 0$ eşitsizliği sağlanır aynı zamanda $\forall x \in R$ için $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1$ eşitliği mevcuttur.
- Sıfırıncı dereceden her spline fonksiyon düğüm noktaları dizisinde bir baz oluştururken B_i^0 fonksiyonu sıçramanın olduğu düğüm noktalarında sayı doğrusu üzerinde sağdan süreklidir.
- Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonlar tüme varım yöntemi kullanılarak daha yüksek dereceden B-spline fonksiyonları hesaplamak için kullanılır [8,10,11].

1.3.1. Kübik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ düzgün bir parçalanışı için, x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonlar, $m = -1(1)N+1$ noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{1.3.1.1}$$

biçiminde parçalı polinom olarak tanımlanır [12]. $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \ldots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$ kümesi $[a,b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için baz meydana getirir. $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfır olur. Şekil 1.1 de görüleceği gibi her bir $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında peş peşe dört elemanı kapsar ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ gibi dört kübik B-spline fonksiyon ile örtülmüş olur.

Tablo 1.1 $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
ϕ_m	0	1	4	1	0
$h\phi'_m$	0	3	0	-3	0
$h^2\phi''_m$	0	6	-12	6	0

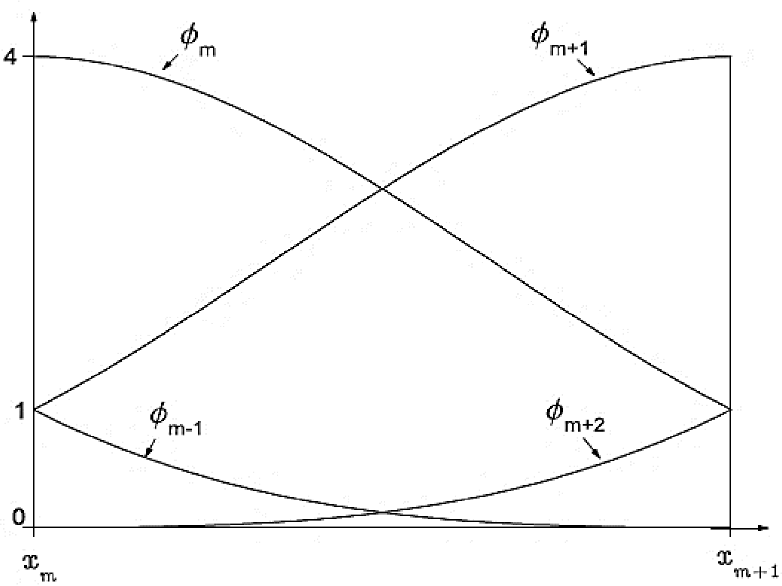
Yukarıdaki tabloda $\phi_m(x)$ ve ikinci mertebeye kadarki $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri verilmiştir. Tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ kapalı aralığında $h\xi = x - x_m$, $0 \le \xi \le 1$ lokal koordinat dönüşümü uygulanmasıyla $[0,1]$ aralığında kübik B-spline fonksiyonlar ξ cinsinden aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\phi_{m-1}(\xi) &= (1-\xi)^3, \\
\phi_m(\xi) &= 1 + 3(1-\xi) + 3(1-\xi)^2 - 3(1-\xi)^3, \\
\phi_{m+1}(\xi) &= 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3, \\
\phi_{m+2}(\xi) &= \xi^3.
\end{aligned} \tag{1.3.1.2}$$

(1.3.1.2) kübik B-spline fonksiyonlardan yararlanarak δ_m eleman parametrelerine göre, x_m düğüm noktasında ki U_N yaklaşık çözümü ve x e bağlı ikinci mertebeye kadar ki türevleri

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\
U'_m &= \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\
U''_m &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})
\end{aligned} \tag{1.3.1.3}$$

şeklindedir [12].



Şekil 1.1. Kübik B-Spline Şekil Fonksiyonları

1.3.2. Septik B-Spline Fonksiyonlar

$a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$, $[a, b]$ kapalı aralığının düzgün bir parçalanışı olmak üzere, x_m düğüm noktalarında $m = -3(1)N+3$ noktaları için $\phi_m(x)$ septik B-spline fonksiyonlar,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7}\begin{cases} (x-x_{m-4})^7 & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x-x_{m-4})^7 - 8(x-x_{m-3})^7 & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x-x_{m-4})^7 - 8(x-x_{m-3})^7 + 28(x-x_{m-2})^7 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x-x_{m-4})^7 - 8(x-x_{m-3})^7 + 28(x-x_{m-2})^7 - 56(x-x_{m-1})^7 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4}-x)^7 - 8(x_{m+3}-x)^7 + 28(x_{m+2}-x)^7 - 56(x_{m+1}-x)^7 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4}-x)^7 - 8(x_{m+3}-x)^7 + 28(x_{m+2}-x)^7 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4}-x)^7 - 8(x_{m+3}-x)^7 & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4}-x)^7 & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad (1.3.2.1)$$

şeklinde tanımlanır. $\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), ..., \phi_N(x), \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x), \phi_{N+3}(x)\}$ kümesi $a \le x \le b$ aralığında tanımlı olan fonksiyonlar için taban meydana getirir.

Septik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığı dışında sıfıra eşittir. Şekil 1.2 de görüleceği üzere her bir $\phi_m(x)$ septik B-spline fonksiyonu $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığında peş peşe sekiz elemanı kapsar ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\phi_{m-3}, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}$ ve ϕ_{m+4} gibi sekiz septik B-spline fonksiyon ile örtülmüş olur. $\phi_m(x)$ ve altıncı mertebeye kadarki $\phi'_m(x), \phi''_m(x), \phi'''_m(x), \phi_m^{(iv)}, \phi_m^{(v)}$ ve $\phi_m^{(vi)}$ türevlerinin aldığı değerler aşağıdaki Tablo 1.2 de verilmiştir.

Tablo 1.2. $\phi_m(x), \phi'_m(x), \phi''_m(x), \phi'''_m(x), \phi_m^{(iv)}(x), \phi_m^{(v)}(x)$ ve $\phi_m^{(vi)}(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler

x	x_{m-4}	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+4}
ϕ_m	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$h\phi'_m$	0	-7	-392	-1715	0	1715	392	7	0
$h^2\phi''_m$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	0
$h^3\phi'''_m$	0	-210	-1680	3990	0	-3990	1680	210	0
$h^4\phi_m^{(iv)}$	0	840	0	-7560	13440	-7560	0	840	0
$h^5\phi_m^{(v)}$	0	-2520	10080	-12600	0	12600	-10080	2520	0
$h^6\phi_m^{(vi)}$	0	5040	-30240	75600	-100800	75600	-30240	5040	0

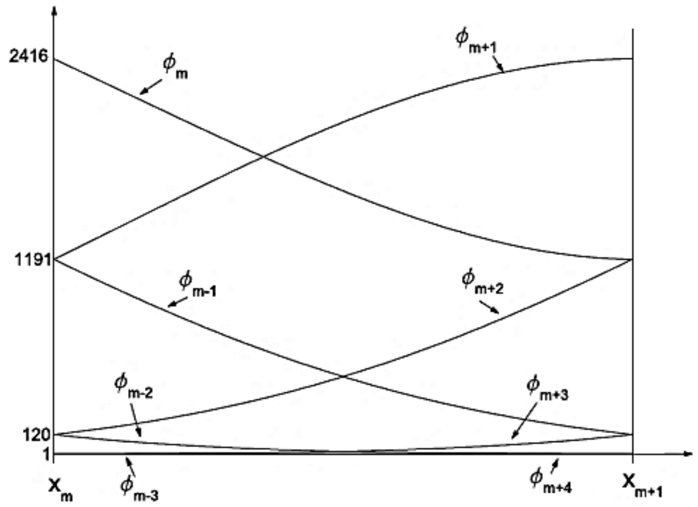
Karakteristik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $h\xi = x - x_m$, $0 \le \xi \le 1$ lokal koordinat dönüşümü ile $[0,1]$ aralığına dönüşür. Böylece septik B-spline fonksiyonlar $[0,1]$ aralığında ξ cinsinden aşağıdaki gibi oluşur.

$$
\begin{aligned}
\phi_{m-3} &= 1-7\xi+21\xi^2-35\xi^3+35\xi^4-21\xi^5+7\xi^6-\xi^7,\\
\phi_{m-2} &= 120-392\xi+504\xi^2-280\xi^3+84\xi^5-42\xi^6+7\xi^7,\\
\phi_{m-1} &= 1191-1715\xi+315\xi^2+665\xi^3-315\xi^4-105\xi^5+105\xi^6-21\xi^7,\\
\phi_{m} &= 2416-1680\xi+560\xi^4-140\xi^6+35\xi^7,\\
\phi_{m+1} &= 1191+1715\xi+315\xi^2-665\xi^3-315\xi^4+105\xi^5+105\xi^6-35\xi^7, \qquad (1.3.2.2)\\
\phi_{m+2} &= 120+392\xi+504\xi^2+280\xi^3-84\xi^5-42\xi^6+21\xi^7,\\
\phi_{m+3} &= 1+7\xi+21\xi^2+35\xi^3+35\xi^4+21\xi^5+7\xi^6-\xi^7,\\
\phi_{m+4} &= \xi^7.
\end{aligned}
$$

(1.3.2.2) şeklinde verilen septik B-spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında $U_N(x,t)$ yaklaşık çözümü ve x e göre altıncı mertebeye kadarki türevleri δ_m eleman parametreleri türünden,

$$
\begin{aligned}
U_N(x_m,t) = U_m &= \delta_{m-3}+120\delta_{m-2}+1191\delta_{m-1}+241\delta_m+1191\delta_{m+1}+120\delta_{m+2}+\delta_{m+3},\\
U'_m &= \frac{7}{h}\left(-\delta_{m-3}-56\delta_{m-2}-245\delta_{m-1}+245\delta_{m+1}+56\delta_{m+2}+\delta_{m+3}\right),\\
U''_m &= \frac{42}{h^2}\left(\delta_{m-3}+24\delta_{m-2}+15\delta_{m-1}-80\delta_m+15\delta_{m+1}+24\delta_{m+2}+\delta_{m+3}\right),\\
U'''_m &= \frac{210}{h^3}\left(-\delta_{m-3}-8\delta_{m-2}+19\delta_{m-1}-19\delta_{m+1}+8\delta_{m+2}+\delta_{m+3}\right), \qquad (1.3.2.3)\\
U^{(iv)}_m &= \frac{840}{h^4}\left(\delta_{m-3}-9\delta_{m-1}+16\delta_m-9\delta_{m+1}+\delta_{m+3}\right),\\
U^{(v)}_m &= \frac{2520}{h^5}\left(-\delta_{m-3}+4\delta_{m-2}-5\delta_{m-1}+5\delta_{m+1}-4\delta_{m+2}+\delta_{m+3}\right),\\
U^{(vi)}_m &= \frac{5040}{h^6}\left(\delta_{m-3}-6\delta_{m-2}+15\delta_{m-1}-20\delta_m+15\delta_{m+1}-6\delta_{m+2}+\delta_{m+3}\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır [8,12].



Şekil 1.2 Septik B-Spline Şekil Fonksiyonları

1.4. Galerkin Yöntemi

Galerkin yöntemi, diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözmek için kullanılan yöntemlerden biridir.

ψ_i ağırlık fonksiyonları , ϕ_i yaklaşım fonksiyonları $\psi_i = \phi_i$ olarak alındığında Galerkin yönteminin cebirsel ifadesi

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} c_j = F_i \tag{1.4.1}$$

biçiminde olup, burada

$$A_{ij} = \int_\Omega \phi_i A(\phi_j) dxdy$$
$$F_i = \int_\Omega \phi_i \left[f - A(\phi_0) \right] dxdy$$

şeklindedir [13].

1.5. Kollokasyon Yöntemi

Kollokasyon yöntemini tanımlamadan önce bu yöntem için yararlanacağımız ağırlıklı kalan yöntemini tanımlamak gerekir. Ağırlıklı kalan yöntemi bir diferansiyel denklemin tam çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki farkın sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılması sonucu toplamlarının en küçük elde edilmesi yöntemi olarak ifade edilir.

Ağırlıklı kalan yöntemini ifade etmek için Ω bölgesinde, A lineer ya da lineer olmayan operatör, f bağımsız değişken, u bağımlı değişken olmak üzere

$$A(u) = f \tag{1.5.1}$$

operatör denklemi yazılır. u çözümü için bir yaklaşım olarak

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j + \phi_0 \tag{1.5.2}$$

kullanılır. (1.5.1) denkleminde (1.5.2) ile verilen u_N yaklaşık çözümü yerine yazıldığında $f_N = A(u_N)$ elde edilir. Elde edilen bu fonksiyon büyük ihtimalle f ye eşit değildir. $A(u_N)$ ile f fonksiyonu arasındaki fark

$$R = A(u) - f = A\left(\sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \tag{1.5.3}$$

şeklinde yaklaşık kalan (rezidüsü) olarak elde edilir. Burada R kalan fonksiyonu c_j parametrelerine bağlı olabileceği gibi konuma da bağlıdır. Ağırlıklı kalan yönteminde c_j parametreleri ağırlıklı kalan integralindeki R kalanı sıfır olacak şekilde belirlenir.

$$\int_{\Omega} \psi_i(x,y) R(x,y,c_j)\,dxdy = 0 \qquad (i = 0,1,2,...,N)\,. \tag{1.5.4}$$

Buradaki Ω iki boyutlu bir bölge ve ψ_i ler ise ağırlıklı kalan fonksiyonları olup (1.5.4) integralinin hesaplanmasıyla elde edilen denklemlerin çözülebilmesi için seçilen ψ_i ağırlıklı kalan fonksiyonlar kümesi lineer bağımsız olmalıdır. Galerkin, Petrov-Galerkin, Subdomain ve Kollokasyon yöntemi ağırlıklı kalan yöntemlerindendir.

Kollokasyon yöntemi Ω çözüm bölgesinden seçilen N adet $x^i \equiv (x^i, y^i)$ kollokasyon noktasında sıfır kalanının elde edilmesi için

$$R(x^i, y^i, c_j) = 0, \qquad (i = 0,1,2,...,N) \tag{1.5.5}$$

şeklinde alınmalıdır ve aynı zamanda x^i kollokasyon noktalarının denklem sistemi iyi şartlı olacak şekilde seçilmelidir. Burada $\psi_i = \delta(x - x^i)$ alınır ve (1.5.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_{\Omega} \delta(x-x^{i})R(x,c_{j})dxdy=0 \tag{1.5.6}$$

veya

$$R(x^{i},c_{j})=0 \tag{1.5.7}$$

elde edilir. Buradaki $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonu olmak üzere

$$\int_{\Omega} f(x)\delta(x-\xi)dxdy=f(\xi) \tag{1.5.8}$$

şeklindedir [8,13,14].

1.6. BBM-Burgers Denklemi

Sığ su dalgalarının dinamikleri, örneğin Korteweg – de Vries (KdV) denklemi, Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi, eşit genişlikli dalga (EW) denklemi, Burgers denklemi, Gardner denklemi, Peregrine denklemi, Kawahara denklemi gibi farklı lineer olmayan denklemleri ile belirtilebilir. Bu denklemler uygulamalı matematik, teorik fizik ve mühendislik bilimlerinde, çeşitli matematiksel ve fiziksel özellikleri ve yapıları nedeniyle çok önemli bir rol oynamaktadırlar. Bu denklemlerin tam çözümlerine genellikle ulaşılamaz. Bu denklemlerin sadece sınırlı sınıflarının analitik yollarla çözülmesi nedeniyle, bu doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin davranışlarını fiziksel olarak incelemek daha uygundur. Düzenli uzun dalga (RLW) denklemi olarak bilinen BBM (Benjamin-Bona- Mahony) denklemi,

$$U_{t}+U_{x}+aUU_{x}-bU_{xxt}=0 \tag{1.6.1}$$

şeklinde olup sığ suda doğrusal olmayan enine dalgalar, soğuk plazmada hidromanyetik dalga, plazmada iyon akustik dalgalar, sıkıştırılabilir sıvılarda akustik yerçekimi dalgaları, sıvı gaz kabarcıklarında basınç dalgaları ve harmonik kristallerde akustik dalgalar gibi çok sayıda fiziksel gelişmeleri yönetebilmek için modellenmiştir. Bu denklemin çözümleri, çarpışmadan sonra formları değişmeyen soliton olarak adlandırılan soliter dalga türleridir. İlk olarak Peregrine [15,16] tarafından bir kanalda su yüzeyinde küçük genlikli uzun dalgaları modellemek için ortaya atılmış olan RLW denklemi Benjamin ve arkadaşları [17] tarafından yaygın olarak incelenmiştir.

Denklemin tam çözümü sınırlı sayıda başlangıç ve sınır koşulları altında elde edildiğinden bu denklemi sayısal olarak çözmek daha ilginç bir hale gelmiştir [18]. Bu nedenle, BBM denkleminin sayısal çözümleri çeşitli birçok çalışmanın konusu olmuştur. BBM denkleminin çözümü için özellikle sonlu farklar [19-21], pseudo (sözde) spektral yöntem [22], ağsız yöntem [23], adomian ayrışım yöntemi [24] ve farklı sonlu eleman yöntemlerini içeren çeşitli sayısal teknikler kullanılmıştır [25-32].

Aslında, lineer olmayan dağıtıcı bir ortamda küçük genlikli uzun dalgaların yayılmasını tanımlamaya çalışırken, genellikle gerçek durumları tamamen yansıtmak için dağıtıcı mekanizmaları dikkate almak gerekir. Çoğunlukla dalganın bozulmasına yol açan mekanizmalar oldukça karmaşıktır ve iyi anlaşılmamıştır. Düzlemsel dalgaların tek yönlü yayılımının modellenmesinde nonlineerlik (lineer olmayanlık) ve dağılım olaylarına ihtiyaç duyulduğundan ortaya çıkan denklemlerden biri BBM-Burgers denklemidir [33]. BBM-Burgers denklemi birçok araştırmacı tarafından sayısal olarak analiz edilmiştir. Y-X Yin ve G.-Rı Pıao tarafından BBM-Burgers denkleminin yaklaşık çözümüne zaman değişkenine yönelik bir mekansal değişken bileşik için ikinci dereceden B-spline sonlu eleman yöntemi önerilmektedir [34]. [32,35-39] referanslarında bu denklemin sayısal çözümleri için sırasıyla kuadratik, kübik ve kuartik B-spline kollokasyon yöntemleri verilmiştir.

BBM-Burgers denklemi bir Cauchy problemi olarak ele alındığında bu problemin çözümlerinin asimptotik özellikleri Mei ve Schmeiser tarafından incelenmiştir [40]. C. Kondo ve C. M. Weblere genelleştirilmiş BBM-Burgers denkleminin düzgün çözümlerinin varlığını ve yakınsamasını incelemişlerdir [41]. Referans [42,43] de denkleme (G'/G) genişleme yöntemi uygulanmıştır. A. Mohebbi ve Z. Faraz [44] lineer olmayan BBM-Burgers denkleminin soliter dalga çözümünü yüksek mertebeden lineer sonlu fark şeması kullanarak incelemişlerdir.

Ganji ve arkadaşları lineer olmayan BBM-Burgers denkleminin sayısal çözümlerini bulmak için lineer ve lineer olmayan sertlik denklemlerine sahip sistemlerin serbest titreşimlerini varyasyonel iterasyon yöntemi ile incelemişlerdir [45]. B. Hong ve D. Lu [46], genelleştirilmiş perturbe olan Burgers –BBM denklemini yok edici terimle çözmek için Homotopy Perturbasyon Method (HPM) uygulamalarını genişletmişlerdir. Sonlu eleman Galerkin yöntemleri Kadri ve arkadaşları tarafından sunulmuştur [47].

Bir Sinc-Galerkin ve tanh yöntemi genelleştirilmiş BBM-Burger denklemine AlQuran ve El-Halit tarafından uygulanmıştır [48]. El-Khaled ve arkadaşları [49] Benjamin-Bona-Mahony-Burgers denklemine yaklaşık bir çözüm bulmak için Adomian ayrıştırma yöntemini kullanmıştır. Maple programı kullanılarak lineer olmayan denklemin sayısal çözümleri Exp fonksiyon yöntemi ile El-Wakil ve arkadaşları tarafından elde edilmiştir [50]. A. Fakhari ve arkadaşları Benjamin-Bona-Mahony-Burgers denklemini (BBM-B) çözmek için Homotopy Analiz Method (HAM) yöntemi geliştirmişlerdir [51].

Matematiksel olarak, her $\left[x_m, x_{m+1}\right]$ aralığında bir kübik $\phi_m\left(x\right)$ fonksiyonu , $\left[x_0, x_N\right]$ aralığında oluşan $\phi\left(x\right)$ parçalı fonksiyonu ve birinci ve ikinci dereceden türevleri $\left[x_0, x_N\right]$ aralığında sürekli olur. Böylelikle kübik spline fonksiyonları, yüksek derecede interpolasyon polinomlarında ortaya çıkan doğal salınımlardan etkilenmezler. Burada birinci dereceden türevin sürekli olması fonksiyonun keskin noktalara sahip olmamasını sağlar, ikinci dereceden türevin sürekliliği f fonksiyonunun her noktasındaki eğim açısının tanımlanmasını sağlar.

2. BÖLÜM

KÜBİK B-SPLINE FONKSİYONLAR İLE BENJAMIN BONA MAHONY BURGERS DENKLEMİ İÇİN GALERKİN SONLU ELEMANLAR ÇÖZÜMÜ

2.1. Giriş

Tezin bu bölümünde Seydi Battal Gazi Karakoç ve Samir Kumar Bhowmik'in **"**Galerkin finite element solution for Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation with cubic B-splines" isimli makaleleri ayrıntılı olarak incelenmiştir [52].

Bu makalede, konumsal yaklaşım için kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak lumped Galerkin yöntemi ile lineer olmayan Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBM-Burgers) denkleminin çözümleri araştırılmış ve bu yöntemin çözümlerinin varlık ve tekliği inşa edilmiştir. Çalışılan yöntem aşağıdaki dört farklı test problemi ile ele alınmıştır;

- Tek bir solitary dalganın yayılımı
- İki solitary dalganın etkileşimi
- Üç solitary dalganın etkileşimi
- Undular bore yayılımı

Nümerik algoritmanın kararlılık analizi Von-Neumann yöntemi ile yapılmıştır. Yöntemin uygulanabilirliği ve etkinliği L_2 ve L_∞ hata normları ve I_1, I_2 ve I_3 değişmezleri ile hem tablo olarak hem de grafik olarak gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlardan yöntemimizin lineer olmayan denklemler için oldukça kullanışlı bir yöntem olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz.

2.2. BBM-Burgers Denklemi İçin Galerkin Yöntemi

Doğrusal olmayan ayırıcı ortamlarda küçük genlikli uzun dalgaların bir matematiksel formu;

$$U(x,0)=g(x)\ , \quad a\le x\le b\ , \tag{2.1}$$

başlangıç koşulu ve

$$U(a,t)=0\,,\quad U(b,t)=0\,,$$
$$U_x(a,t)=0\,,\quad U_x(b,t)=0\,,\tag{2.2}$$
$$U_{xx}(a,t)=0\,,\quad U_{xx}(b,t)=0\,,\quad t>0$$

sınır koşulları olmak üzere

$$U_t-U_{xxt}-\alpha U_{xx}+\beta U_x+UU_x=0\;,\quad a\le x\le b\;,\quad 0\le t\le T\;,\tag{2.3}$$

BBM-Burgers denklemi ile ifade edilir [33].

Burada α , β ile gösterilen pozitif sabitler ve $U(x,t)$ yatay yönde sıvı hızını temsil eden gerçek değerli bir fonksiyondur. Kübik B-spline Galerkin yöntemi kullanıldığından, problemin çözüm alanının dışında kalan noktalar vardır. Bu nedenle, fonksiyonun kendisinin düğüm değerlerini, hem genel matris formu hem de ilk matris formu için türevlerinin kullanılması gerekmektedir. (2.3) ile verilen denklem, 1972 yılında Benjamin ve arkadaşları [17] tarafından Korteweg-de-Vries (KdV) denkleminin bir gelişimi olarak desteklenen iyi bilinen BBM denklemi (1.6.1) ile ilişkilidir.

(2.3) ile verilen denklem $\alpha=0$ için BBM denklemi olarak adlandırılır. BBM – Burgers denklemi, lineer olmayan dağıtıcı etkiler arasında bir denge sağlar, ancak dağılmayı dikkate almaz. (2.3) ile gösterilen denklemin dağıtıcı etkisi ile (1.6.1) ile gösterilen denklemdeki dağıtıcı etki $-U_{xxt}$ teriminden dolayı aynıdır fakat $-\alpha U_{xx}$ dağıtıcı terimine bağlı olarak (2.3) denkleminin dağıtıcı etkisi

$$U_t-\alpha U_{xx}+\beta U_x+UU_x=0\tag{2.4}$$

ile verilen Burger's denklemi ile aynıdır [37]. (2.3) ile verilen denklem daha basit olarak

$$U_t-\Delta U_t-\alpha\Delta U=\nabla f(U),\tag{2.5}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$f(U)=-\left(\beta U+\frac{1}{2}U^2\right)\ \text{dır}.$$

$H^k(\Omega)$, $k\ge 0$ (tamsayı), Ω üzerindeki gerçek değerli fonksiyonların normlu bir uzayı ve

$H_0^k(\Omega)=\{v\in H^k(\Omega): D^i v=0, \partial\Omega \text{ üzerinde } i=0,1,2,...,k-1\}$ olmak üzere $D=\dfrac{\delta}{\delta x}$ olsun.

Bu uzaydaki norm H^k normu olup $\|.\|_k$ ile gösterilir ve eğer $k=0$ olursa, (.,.) ve $\|.\|$ gösterimleri sırasıyla $H^0=L_2$ iç çarpımını ve L_2 normunu göstermektedir [53].

(2.5) ile verilen denklemi $\xi\in H_0^1(\Omega)$ olmak üzere Ω üzerinde integre eder ve Green formülü uygulanırsa $U(.,t)\in H_0^1$ elde edilir öyleki; $U(0)=U_0$ ile birlikte

$$(U_t,\xi)+(\nabla U_t,\nabla\xi)+\alpha(\nabla U,\nabla\xi)=-(f(U),\nabla\xi) \tag{2.6}$$

bulunur.

Teorem 2.1. U , (2.6) ile verilen denklemin bir çözümü ve $U_0\in H_0^1$ olsun.

$\|U\|_1^2+\alpha\int_0^t\|\nabla U\|^2\,ds=\|U_0\|_1^2$, $t\in(0,T]$ ve

$\|U\|_{L^\infty(L^\infty(\Omega))}\le C\|U_0\|_1$ olup C pozitif bir sabittir.

İspat: (2.6) ile verilen denklem göz önüne alındığında ve $\xi=U$ olarak seçildiğinde $U(0)=U_0$ olmak üzere

$$(U_t,U)-(\Delta U_t,U)+\alpha(\nabla U,\nabla U)=-(f(U),\nabla U) \tag{2.7}$$

elde edilir. Yani

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|U\|^2+\|\nabla U\|^2\right]=\int_\Omega U\left[\nabla.f(U)\right]dx-\alpha\|\nabla U\|^2 \text{ dır.} \tag{2.8}$$

Şimdi $U\in H_0^1$ ve $F'(U)=f(U)$ olmak üzere

$U\nabla.f(U)=\nabla.\left[f(U)U\right]-\nabla.\left[F(U)\right]$ dir. Ayrıca, (2.7) ile verilen denklemdeki başlangıç koşullarından $\partial\Omega$ üzerinden $U=0$ ve dolayısıyla $F(0)=0$ olup

$\int_{\Omega} U\left[\nabla . f\left(U\right)\right]dx = \int_{\Omega} \nabla\left(Uf\left(U\right)\right)dx = 0$ elde edilir. Böylece (2.8) ile verilen denklem

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|U\|_1^2\right) + \alpha\|\nabla U\|^2 = 0$ olup

$\|U\|_1^2 + \alpha\int_0^t \|\nabla U\|^2 ds = \|U_0\|_1^2$ olur.

Teorem 2.2. (Sobolev Gömme Teoremi [53-55]**)** $U_0 \in H_0^1$ olmak üzere $T > 0$ için (2.6) ile verilen denklemin $U \in L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$ ve $(U(x,0),\xi) = (U_0,\xi), \xi \in H_0^1(\Omega)$ şeklinde bir tek çözümü vardır.

İspat: $H_0^1\left(\Omega\right)$ için $\left\{w_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ bir ortogonal baz ve $V^m = \left\{w_1, w_2, ...w_m\right\}$ kümesini gersin

$U^m\left(t\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i\left(t\right)w_i$, $U_{0,m} = U^m\left(0\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i\left(0\right)w_i = P^m U_0$, $\forall$ $t > 0$ için

$$\left(U_t^m,\xi\right) - \left(\Delta U_t^m,\xi\right) + \alpha\left(\nabla U^m,\nabla\xi\right) = -\left(f\left(U^m\right),\nabla\xi\right) \tag{2.9}$$

$U^m\left(0\right) = U_{0,m}$ ile birlikte sağlar.

P^m , V^m sonlu boyutlu uzay üzerine bir ortogonal izdüşüm ve $U_{0,m} \to U_0 \in H_0^1(\Omega)$ dır [53,54]. Bunun sonucu olarak (2.9) ile gösterilen denklem lineer olmayan birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemi şeklinde yazılabilir ve $\left(0,t_m\right)$ üzerinde U^m şeklinde bir tek çözüm olacak şekilde pozitif bir $t_m > 0$ vardır.

Ayrıca **Teorem 2.1** den kolayca görülmektedir ki lineer olmayan sistemin $(0,t_m)$ üzerinde tek bir U^m çözümü vardır.

$f\left(U^m\right)$, $L^\infty\left(0,T,L_2\left(\Omega\right)\right)$ üzerinde sınırlı olmak üzere

$\|U^m\|_\infty \leq C\|U_0\|_1$ ve $\left\|f\left(U^m\right)\right\|^2 \leq C\|U_0\|_1^2$ dır.

Şimdi ise $\xi = U_t^m$ eşitliği (2.9) ile verilen denklemde yerine yazılırsa

$\left(U_t^m,U_t^m\right) - \left(\Delta U_t^m,U_t^m\right) + \alpha\left(\nabla U^m,\nabla U_t^m\right) = -\left(f\left(U^m\right),\Delta U_t^m\right)$ elde edilir.

Böylece

$$\left\|U_t^m\right\|_1^2+\alpha\left(\nabla U^m,\nabla U_t^m\right)=-\left(f\left(U^m\right),\nabla U_t^m\right)$$

ve dolayısıyla

$\left\|U_t^m\right\|_1\le C\left\|U_0\right\|_1$ bulunur.

Buradan hareketle $\left\{U^m\right\}$ ve $\left\{U_t^m\right\}$, $L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega))$ üzerinde düzgün sınırlı olduğu görülür. (2.9) ile verilen denklemde $\xi=w_i$ alınırsa

$\left(U_t^m,\omega_i\right)-\left(\Delta U_t^m,\omega_i\right)+\alpha\left(\nabla U^m,\nabla\omega_i\right)=-\left(f\left(U^m\right),\nabla\omega_i\right)$ bulunur.

Bu nedenle problemin çözümlerinin varlığı $H_0^1(\Omega)$ içindeki $\{w_i\}$ lerin yoğunluğundan elde edilir. Şimdi U ve V (2.6) ile verilen denklemin iki çözümü $W=U-V$ ve $W(0)=0$ olsun,

Buradan $\left(W_t^m,\xi\right)-\left(\Delta W_t^m,\xi\right)+\alpha\left(\nabla W^m,\nabla\xi\right)=-\left(f\left(W^m\right),\nabla\xi\right)$ bulunur.

ξ ile W yukarıdaki denklemde yer değiştirirse U ve V nin sınırlılığından

$\frac{d}{dt}\|W\|_1\le C\|W\|_1$ ve böylece

$\|W\|_1\le\|W(0)\|_1+C\int_0^t\|W\|_1\,ds$ bulunur.

Bu nedenle $\|W\|_1\le e^{Ct}\|W(0)\|_1=0$ **Gronwall's Lemmasından** $W=0$ bulunur ki bu ise ispatı tamamlar $[53,55]$.

2.3. Yarı Ayrık Galerkin Şeması

S_h aşağıdaki özelliğe karşılık gelen $0<h<1$, $H_0^1(\Omega)$ sonlu boyutlu alt uzay olsun. $U\in H_0^1(\Omega)\cap H^4(\Omega)$ için h [41-43] den bağımsız bir C vardır öyle ki

$\inf_{\xi\in S_h}\|U-\xi\|\le Ch^4$ dır. (2.10)

(2.3) ile gösterilen denklemin yarı-açık sonlu eleman formülasyonundan $U_h : [0,T] \to S_h$ olmak üzere,

$$\left(U_{ht},\xi\right)-\left(\Delta U_{ht},\xi\right)+\alpha\left(\nabla U_h,\nabla\xi\right)=-\left(f\left(U_h\right),\nabla\xi\right),\ \xi\in S_h \tag{2.11}$$

elde edilir ki burada $U_h(0)=U_{0,h}\in S_h$, U_0 ın bir yaklaşımıdır. Orijinal yakınsama sonucunu göstermeden önce ilk olarak (2.11) ile verilen çözümün bir ön sınırlılığı kanıtlanmalıdır.

Teorem 2.3. (2.11) ile verilen denklemin çözümü olan U_h ve C bir pozitif sabitler olmak üzere

$$\|U_h\|_1^2+\alpha\int_0^T\|\nabla U_h\|^2\,dt=\|U_{0,h}\|_1^2\ ,\quad t\in(0,T]$$

ve

$$\|U_h\|_{L^\infty\left(L^\infty(\Omega)\right)}\le C\|U_{0,h}\|_1$$

ifadelerini sağlar.

İspat: *İspat*, **Teorem 2.1** in ispatından elde edilir. Şimdi (2.11) ile verilen yarı-ayrık şemanın doğruluğunu inceleyeceğiz.

$\forall\ U$ ve $V\in H_0^1$, $A(U,V)=(\nabla U,\nabla V)$

$|A(U,V)|\le M\,\|U\|_1\,\|V\|_1$, $\forall U,V\in H_0^1$ zorlayıcılık özelliği (Ω üzerinden) (2.12)

bazı $\alpha\in R$ için

$A(U,U)\ge\alpha\|U\|_1$, $(\forall U\in H_0^1)$ sınırlılık özelliğini sağlayan (2.13)

burada A, $A\left(U-\tilde{U},\xi\right)=0$, $\xi\in S_h$ (2.14)

eşitliğini sağlar ve $\tilde{U}$, U nun yardımcı bir izdüşümüdür [53-55]. Şimdi yarı açık şema da hata için bir sınır elde edeceğiz.

Teorem 2.4. $U_h \in S_h$, (2.11) ile verilen denklemin bir çözümü ve $U \in H_0^1$ de (2.6) ile verilen denklemin bir çözümü,

$\left\|U(0)-U_{0,h}\right\| \leq Ch^4$ ise bazı $C>0$ için $\left\|U-U_h\right\| \leq Ch^4$ dir.

İspat. $v=U-\tilde{U}$ ve $\theta=\tilde{U}-U_h$ için hatayı $e=U-U_h=\left(U-\tilde{U}\right)+\left(\tilde{U}-U_h\right)=v+\theta$ şeklinde tanımlanır. Şimdi (2.13) ve (2.14) ile verilen denklemden $\alpha\left\|U-\tilde{U}\right\|_1^2 \leq A(U-\tilde{U},U-\tilde{U}) = A(U-\tilde{U},U-\xi),\, \xi \in S_h$ olduğu görülür.

Ayrıca (2.12) ve (2.14) ile verilen denklemler ve referans [55] in

$$\left\|U-\tilde{U}\right\|_1 \leq \inf_{\xi \in S_h}\left\|U-\xi\right\|_1 \tag{2.15}$$

varlığını garanti eder.

Böylece (2.10) ile (2.15)

$$\left\|v\right\|_1 \leq Ch^3\left\|U\right\|_4 \quad ve \quad \left\|v\right\| \leq Ch^4\left\|U\right\|_4$$

elde edilir. Ayrıca (2.14) ile verilen denklemde $\dfrac{\delta}{\delta t}$i uygulayarak ve yukarıdaki gibi benzer adımları izleyerek [55]

$$\left\|v_t\right\| \leq Ch^4\left\|U_t\right\|_4$$

elde edilir.

Şimdi (2.6) ile verilen denklemden (2.11) ile verilen denklem çıkarılırsa,

$$\left(\theta_t,\xi\right)+(\nabla\theta_t,\nabla\xi)+\alpha\left(\nabla\theta,\nabla\xi\right)=-\left(v_t,\xi\right)-\left(f\left(U\right)-f\left(U_h\right),\nabla\xi\right)$$

elde edilir.

Böylelikle yukarıdaki denklemde $\xi=\theta$ yazılır ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\theta\right\|_1^2+\alpha\left\|\nabla\theta\right\|^2 \leq \left\|v_t\right\|\left\|\theta\right\|+\left\|f\left(U\right)-f\left(U_h\right)\right\|\left\|\nabla\theta\right\|$$

bulunur.

Şimdi Lipschitz koşulları U ve U_h sınırlılığına uygulanırsa

$\| f(U) - f(U_h) \| \le C(\|v\| + \|\theta\|)$ ve böylece

$$\frac{d}{dt}\|\theta\|_1^2 \le C\left(\|v_t\|^2 + \|v\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\nabla\theta\|^2\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\|\theta\|_1^2 \le \|\theta(0)\|_1^2 + C\int_0^t \left(\|v_t\|^2 + \|v\|^2 + \|\theta\|^2 + \|\nabla\theta\|^2\right)dt$$

eşitsizliği bulunur.

Şimdi $\theta(0) = 0$,

v ve v_t sınırları için **Gronwall's Lemması** uygulanırsa $\|\theta\|_1 \le C(U)h^4$ elde edilir ki buda ispatı tamamlar [53-55].

2.4. BBM-Burgers Denklemi için Galerkin Yönteminin Uygulanışı

Bu bölümde, bilgisayar uygulamasını ayrıntılı olarak göstermek için sonlu eleman denklemlerinin oluşturulmasında yer alan hesaplamalar gösterilmiştir.

$a \le x \le b$ tanım kümesi üzerinde çözüm elde etmek için aralık $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ ile $h = \frac{b-a}{N}$ ve $x_i = a + ih$, N tane alt aralığa bölünür.

Aşağıdaki $\phi_m(x), (m = -1(1)N+1)$, kübik B-spline fonksiyonlar $[a,b]$ aralığı üzerinde ki x_m noktalarında

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3}\begin{cases} (x - x_{m-2})^3 & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}), \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & x \in [x_{m-1}, x_m) \ , \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 & x \in [x_m, x_{m+1}) \ , \\ (x_{m+2} - x)^3 & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \, , \\ 0 & \text{aksi taktirde} \ , \end{cases} \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanır [12].

Şekil 1.1 de $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında kübik B –spline fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir. $U_N(x,t)$ genel bir yaklaşımla kübik B –spline fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$U_N(x,t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \phi_j(x)\delta_j(t), \tag{2.17}$$

burada $\delta_j(t)$ parametreleri, sınır ve ağırlıklı kalan koşullar kullanılarak elde edilir. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında her bir eleman için , $h_\eta = x - x_m$ $(0 \le \eta \le 1)$ lokal koordinat dönüşümü uygulanırsa (2.16) ile verilen kübik B-spline fonksiyonlar η cinsinden

$$\begin{aligned} \phi_{m-1} &= (1-\eta)^3, \\ \phi_m &= 1 + 3(1-\eta) + 3(1-\eta)^2 - 3(1-\eta)^3, \\ \phi_{m+1} &= 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3, \\ \phi_{m+2} &= \eta^3 \end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklinde elde edilir.

$\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$, $\phi_{m+2}(x)$ dışındaki kübik B-spline fonksiyonlar ve türevleri $[0,1]$ bölgesi dışında sıfırdır. Bu yüzden (2.17) ile verilen yaklaşım fonksiyonu δ_{m-1}, δ_m, δ_{m+1}, δ_{m+2} eleman parametreleri ve $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$, $\phi_{m+2}(x)$ B-spline eleman fonksiyonları $[0,1]$ aralığında aşağıdaki gibi verilir:

$$U_N(\eta,t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j \tag{2.19}$$

(2.18) ile (2.19) eşitlikleri kullanıldığında U_m düğüm değerlerinin yaklaşık değerleri ile birinci ve ikinci mertebeden türevleri

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_m &= U'(x_m) = 3(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\ U''_m &= U''(x_m) = 6(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \tag{2.20}$$

biçiminde elde edilir.

$W(x)$ ağırlık fonksiyonu olarak düşünülürse ve (2.3) ile verilen denkleme Galerkin metodu uygulanırsa

$$\int_a^b W\left(U_t - U_{xxt} - \alpha U_{xx} + \beta U_x + UU_x\right)dx = 0\,, \tag{2.21}$$

(2.3) ile verilen denklemin zayıf formülasyonuna ulaşılır.

Galerkin metodunda $W(x)$ ağırlık fonksiyonu yaklaşık fonksiyon ile aynı seçildiğinden ve ayrıca yaklaşık fonksiyonlar B-spline fonksiyonlar olduğundan ağırlık fonksiyonunun düzgünlüğü garanti edilmiş olur. (2.21) ile verilen denklemde $h\eta = x - x_m$ dönüşümü kullanılırsa

$$\int_0^1 W\left(U_t - \frac{1}{h^2}U_{\eta\eta t} - \frac{\alpha}{h^2}U_{\eta\eta} + \frac{\beta}{h}U_\eta + \frac{1}{h}\hat{U}U_\eta\right)d\eta = 0\,, \tag{2.22}$$

denklemi elde edilir.

$\hat{U}$, (2,22) ile verilen integrali alınacak şekilde bir sabittir. (2.22) ile verilen denkleme kısmi integral uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_0^1 \left[W(U_t + \frac{(\beta+\lambda)}{h}U_\eta) + \xi W_\eta U_\eta + \rho W_\eta U_{\eta t}\right]d\eta = \alpha W U_\eta \Big|_0^1 + W U_{\eta t}\Big|_0^1 \quad \text{bulunur ki} \tag{2.23}$$

burada $\lambda = \hat{U}$, $\rho = \dfrac{1}{h^2}$ ve $\xi = \dfrac{\alpha}{h^2}$ dir. (2.18) ile gösterilen denklemde ağırlık fonksiyonu olarak kübik B-spline fonksiyonlar seçilir ve (2.23) ile gösterilen integral denkleminde kullanılır ve bazı ara işlemler yapıldığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\sum_{j=m-1}^{m+2}\left[\left(\int_0^1 \phi_i\phi_j + \rho\phi_i^{'}\phi_j^{'}\right)d\eta - \phi_i\phi_j^{'}\Big|_0^1\right]\dot{\delta}_j^e + \sum_{j=m-1}^{m+2}\int_0^1\left[\left(\frac{(\beta+\lambda)}{h}\phi_i\phi_j^{'} + \xi\phi_i^{'}\phi_j^{'}\right)d\eta - \alpha\phi_i\phi_j^{'}\Big|_0^1\right]\delta_j^e = 0 \tag{2.24}$$

burada $\delta^e = \left(\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}\right)^T$ ve δ nın üzerindeki nokta t ye göre türevi göstermektedir.

$$\left[A^e + \rho B^e - C^e\right]\dot{\delta}^e + \left(\frac{(\beta+\lambda)}{h}D^e + \xi B^e - \alpha C^e\right)\delta^e = 0\,, \tag{2.25}$$

eleman denklemi göz önüne alındığında eleman matrisleri

$$A_{ij}^{e}=\int_{0}^{1}\phi_i\phi_j\,d\eta=\frac{1}{140}\begin{bmatrix}20 & 129 & 60 & 1\\ 129 & 1188 & 933 & 60\\ 60 & 933 & 1188 & 129\\ 1 & 60 & 129 & 20\end{bmatrix}$$

$$B_{ij}^{e}=\int_{0}^{1}\phi_i'\phi_j'\,d\eta=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}18 & 21 & -36 & -3\\ 21 & 102 & -87 & -36\\ -36 & -87 & 102 & 21\\ -3 & -36 & 21 & 18\end{bmatrix}$$

$$C_{ij}^{e}=\phi_i\phi_j'\Big|_0^1=3\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 4 & -1 & -4 & 1\\ 1 & -4 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$D_{ij}^{e}=\int_{0}^{1}\phi_i\phi_j'\,d\eta=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}-10 & -9 & 18 & 1\\ -71 & -150 & 183 & 38\\ -38 & -183 & 150 & 71\\ -1 & -18 & 9 & 10\end{bmatrix}$$

şeklinde olup i ve j alt indisleri $i,j=m-1,m,m+1,m+2$ biçimindedir.

$\lambda=\frac{1}{4h}\left(\delta_{m-1}+5\delta_m+5\delta_{m+1}+\delta_{m+2}\right)^2$ ifadesinde U için bir lumped değer $\frac{\left(U_m+U_{m+1}\right)^2}{4}$ den elde edilir.

Tüm eleman denklemleri birleştirildiğinde (2.25) ile verilen bir eleman denklemi

$$\left[A+\rho B-c\right]\dot{\delta}+\left(\frac{(1+\lambda)}{h}D+\rho B-C\right)\delta=0 \tag{2.26}$$

şeklinde genel bir matris denklemine dönüşür.

Burada $\delta=\left(\delta_{-1},\delta_0,...,\delta_N,\delta_{N+1}\right)^T$ genel eleman parametreleri ve $\alpha=\beta=1$ $\rho=\xi=\frac{1}{h^2}$ dir. Bu yöntemde öncelikle $\left[x_m,x_{m+1}\right]$ aralığında çalışıldı. Dolayısıyla bu aralık için A^e, B^e, C^e ve D^e eleman matrisleri bulundu. Burada "e", $\left[x_m,x_{m+1}\right]$ aralığındaki eleman matrisleri temsil etmektedir.

Daha sonra $[a,b]$ aralığında denklemin çözümü elde edildi. İşte bu yüzden $[a,b]$ aralığında eleman matrislerinin tamamı eklenmelidir. Sonra $A,\ B,\ C$ ve D genel matrisleri bulundu. $A,\ B,\ C$ ve λD matrisleri septa-diagonaldir ve onların her birinin m. satırı aşağıdaki gibidir:

$$A=\frac{1}{140}(1,120,1191,2416,1191,120,1),\ B=\frac{1}{10}(-3,-72,-45,240,-45,-72,-3),$$

$$C=(0,0,0,0,0,0,0),\ D=\frac{1}{20}(-1,-56,-245,0,245,56,1),$$

$$\lambda D=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}-\lambda_1,-18\lambda_1-38\lambda_2,9\lambda_1-183\lambda_2-71\lambda_3,10\lambda_1+150\lambda_2-150\lambda_3-10\lambda_4, \\ 71\lambda_2+183\lambda_3-9\lambda_4,38\lambda_3+18\lambda_4,\lambda_4\end{pmatrix}$$

olup

$$\lambda_1=\frac{1}{4h}(\delta_{m-2}+5\delta_{m-1}+5\delta_m+\delta_{m+1})^2 \quad , \quad \lambda_2=\frac{1}{4h}(\delta_{m-1}+5\delta_m+5\delta_{m+1}+\delta_{m+2})^2,$$

$$\lambda_3=\frac{1}{4h}(\delta_m+5\delta_{m+1}+5\delta_{m+2}+\delta_{m+3})^2 \quad , \quad \lambda_4=\frac{1}{4h}(\delta_{m+1}+5\delta_{m+2}+5\delta_{m+3}+\delta_{m+4})^2 \text{ dir.}$$

$\dot{\delta}=\dfrac{\delta^{n+1}-\delta^n}{\Delta t}$ ileri sonlu fark yaklaşımı ve $\delta=\dfrac{1}{2}\left(\delta^n+\delta^{n+1}\right)$ Crank-Nicolson formülünün denklem (2.26) ye uygulanması ile aşağıdaki septa-diyagonal matris sistemi

$$\left[A+\rho B-C+\left(\frac{(1+\lambda)}{h}D+\rho B-C\right)\frac{\Delta t}{2}\right]\delta^{n+1}=\left[A+\rho B-C-\left(\frac{(1+\lambda)}{h}D+\rho B-C\right)\frac{\Delta t}{2}\right]\delta^n \qquad (2.27)$$

elde edilir.

Sistem (2.27), $(N+1)$ tane doğrusal denklem ve $\left(\delta_{-3},\delta_{-2},\delta_{-1},...,\delta_{N+1},\delta_{N+2},\delta_{N+3}\right)$ şeklinde $(N+7)$ tane de bilinmeyen katsayı içerir. Bu sistem için tek bir çözüm elde etmek için altı ek şarta ihtiyacımız vardır. (2.2) ile verilen sınır koşulları kullanılırsa (2.27) ile verilen sistemden $\delta_{-3},\delta_{-2},\delta_{-1},...,\delta_{N+1},\delta_{N+2},\delta_{N+3}$ bilinmeyenler yok edilerek $(N+1)\times(N+1)$ matris sistemi elde edilir. Ortaya çıkan sistem Thomas algoritması kullanılarak etkili bir şekilde çözülür. Çözüm sürecinde, doğrusal olmayışı azaltmak için her seferinde $\delta^{n*}=\delta^n+\dfrac{1}{2}\left(\delta^n-\delta^{n-1}\right)$ şeklindeki iç iterasyon iki veya üç defa uygulanır.

Böylece (2.27) ile verilen denklem sisteminde δ^{n+1} ve δ^{n} parametrelerine göre n ve $n+1$ gibi iki ardışık zaman arasında ki yineleme bağıntısı

$$\begin{aligned}&\gamma_1\delta_{m-3}^{n+1}+\gamma_2\delta_{m-2}^{n+1}+\gamma_3\delta_{m-1}^{n+1}+\gamma_4\delta_{m}^{n+1}+\gamma_5\delta_{m+1}^{n+1}+\gamma_6\delta_{m+2}^{n+1}+\gamma_7\delta_{m+3}^{n+1}=\\&\gamma_7\delta_{m-3}^{n}+\gamma_6\delta_{m-2}^{n}+\gamma_5\delta_{m-1}^{n}+\gamma_4\delta_{m}^{n}+\gamma_3\delta_{m+1}^{n}+\gamma_2\delta_{m+2}^{n}+\gamma_1\delta_{m+3}^{n}\ ,\end{aligned} \tag{2.28}$$

şeklinde olup burada

$$\gamma_1=\frac{1}{140}-\frac{3\rho}{10}-\left(\frac{(1+\lambda)}{20h}+\frac{3\rho}{10}\right)\frac{\Delta t}{2},\ \gamma_2=\frac{120}{140}-\frac{72\rho}{10}-\left(\frac{56(1+\lambda)}{20h}+\frac{72\rho}{10}\right)\frac{\Delta t}{2},$$

$$\gamma_3=\frac{1191}{140}-\frac{45\rho}{10}-\left(\frac{245(1+\lambda)}{20h}+\frac{45\rho}{10}\right)\frac{\Delta t}{2}\ ,\ \ \gamma_4=\frac{2416}{140}+\frac{240\rho}{10}\ ,$$

$$\gamma_5=\frac{1191}{140}-\frac{45\rho}{10}+\left(\frac{245(1+\lambda)}{20h}-\frac{45\rho}{10}\right)\frac{\Delta t}{2}\ ,\ \ \gamma_6=\frac{120}{140}-\frac{72\rho}{10}+\left(\frac{56(1+\lambda)}{20h}-\frac{72\rho}{10}\right)\frac{\Delta t}{2},$$

$$\gamma_7=\frac{1}{140}-\frac{3\rho}{10}+\left(\frac{(1+\lambda)}{20h}-\frac{3\rho}{10}\right)\frac{\Delta t}{2}\quad \text{dır.}$$

İterasyona başlamak için, başlangıç vektörü olan δ^0 başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak hesaplanır. Bu nedenle, $m=0,1,2,...,N$ olmak üzere düğüm noktalarında

$U_N(x_m,0)=U(x_m,0)$, ve $U_N'(x_0,0)=U'(x_N,0)=0$ eşitlikleri kullanılarak, başlangıç vektör δ^0 aşağıdaki matris formundan

$$\begin{bmatrix}-3 & 0 & 3 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & 4 & 1\\ & & & -3 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{-1}^0\\ \delta_0^0\\ \vdots\\ \delta_N^0\\ \delta_{N+1}^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ U(x_0,0)\\ \vdots\\ U(x_N,0)\\ 0\end{bmatrix}\qquad \text{kolayca bulunur.}$$

2.5. Kararlılık Analizi

Sayısal şemanın lineer kararlılığını araştırmak için, Von-Neumann yaklaşımına dayalı olarak Fourier metodu kullanılmıştır. (2.3) ile verilen BBM-Burgers denkleminin lineer olmayan UU_x terimindeki U ifadesi lokal olarak sabit olduğu kabul edilmiştir.

k mod numarası ve h eleman büyüklüğü olmak üzere $\delta_j^n = g^n e^{ijkh}$ $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ Fourier açılımı (2.28) ile verilen şemada kullanılırsa büyüme faktörü olan g,

$$g = \frac{a - ib}{a + ib} \tag{2.29}$$

eşitliğinden elde edilir.

Burada

$$\begin{aligned} a &= (\gamma_7 + \gamma_1)\cos(3kh) + (\gamma_6 + \gamma_2)\cos(2kh) + (\gamma_5 + \gamma_3)\cos(kh) + \gamma_4 , \\ b &= (\gamma_7 - \gamma_1)\sin(3kh) + (\gamma_6 - \gamma_2)\sin(2kh) + (\gamma_5 - \gamma_3)\sin(kh) \end{aligned} \tag{2.30}$$

olup $|g| = 1$ dir. Bu ise lineerleştirilmiş şemanın koşulsuz olarak kararlı olduğunu göstermektedir.

2.6. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar

Bu bölümde, tek bir dalganın yayılması, iki ve üç tek dalganın etkileşimi ve undular bore dalgalarının yayılımı gibi dört test problemi önerilen algoritmanın yeterliliğini göstermek için çözülmüştür. Tek dalgaların konumlarını ve genliklerini belirleyebilmek için L_2 ve L_∞ hata normları

$$L_2 = \left\| U^{tam} - U_N \right\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^{N} \left| U_j^{tam} - (U_N)_j \right|^2},$$

$$L_\infty = \left\| U^{tam} - U_N \right\|_\infty \simeq \max_j \left| U_j^{tam} - (U_N)_j \right|,$$

şeklinde tanımlanır. BBM-Burgers denklemi,

$$I_1 = \int_a^b U(x,t)\,dx,$$

$$I_2 = \int_a^b \left[U^2(x,t) + U_x^2(x,t) \right] dx, \tag{2.31}$$

$$I_3 = \int_a^b \left[U^3(x,t) + 3U^2(x,t) \right] dx,$$

şeklinde sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen üç tane değişmeze sahiptir.

2.6.1. Tek Bir Solitary Dalganın Yayılımı

Algoritmamızın doğruluğunu ve yeterliliğini doğrulamak için sayısal hesaplamalarda iki durum göz önüne alınmıştır.

1. Durum

Bu durumda giriş bölümünde de ifade edildiği gibi (2.3) ile verilen BBM-Burgers denkleminden $\alpha=0$ ve $\beta=1$ için elde edilen (1.6.1) ile verilen BBM denkleminin bazı sayısal sonuçları verilmiştir. (1.6.1) ile verilen BBM denklemi $U \to 0$ iken $x \to \pm\infty$ sınır şartları ve

$$U(x,0) = 3c\,\text{sech}^2\left[k(x-x_0)\right] \tag{2.32}$$

başlangıç şartıyla ele alınmıştır. Bu problemin tam çözümü

$$U(x,t) = 3c\,\text{sech}^2\left[k(x-x_0-\upsilon t)\right] \tag{2.33}$$

şeklinde olup burada $\nu = 1+\varepsilon c$ dalga hızı ve $k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu(1+\varepsilon c)}}$ dır. Bu denklem , $1+\varepsilon c$ sabit hızlı ve başlangıçta x_0 merkezli , $3c$ genişliğindeki bir tek solitonu simgeler. Daha önceki çalışmalarla uyumlu olması için parametreler $[-40,60]$ aralığında ilk olarak $c = h = \Delta t = 0.1$ ve ikinci olarak $c = 0.03$, $h = \Delta t = 0.1$ şeklinde alınmıştır. Değişmezlerin tam değerleri $c = 0.1$ için $l_1 = 3.9799497$, $l_2 = 0.81046249$, $l_3 = 2.579007$ ve c=0.03 için $l_1 = 2.1094074$, $l_2 = 0.127302$, $l_3 = 0.388806$ şeklindedir. Hesaplamalar hata normlarının ve değişmezlerin değerlerini bulmak için $t=20$ zamanına kadar yapılmıştır. c nin farklı değerleri için elde edilmiş olan veriler Tablo 2.1 ve 2.2 de gösterilmiştir. Bu tablolar açık bir şekilde göstermektedir ki metodumuzla elde edilen hata normları diğerlerinden daha az ve değişmezlerimiz artan zaman adımlarında hemen hemen sabit kalmıştır. Tablolardan $c=1$ olduğunda l_2 değişmezinin değişimi sıfır iken l_1, l_3 değişmezleride sırasıyla 4.54×10^{-5}, 1×10^{-7} den daha az değiştiği görülürken, c=0.03 için l_1, l_2 , l_3 değişmezler sırasıyla 2.42×10^{-3} , 1×10^{-7} ve 1.8×10^{-6} den daha az olduğu görülür. Ayrıca elde edilen değişmezlerin değerlerinin tam değerleriyle uyumlu olduğu söylenebilir.

L_2 ve L_∞ hata normları bilgisayarın çalışması süresince yeterince küçük olduğundan metodumuzun bu denklem için oldukça uygun olduğunu söyleyebiliriz.

Şekil 2.1 (a) ve (b) , $t = 0,5,10,15$ ve 20 deki çözümleri göstermektedir. Görüldüğü üzere tek soliton dalga sabit hızla sağa doğru hareket etmekte ve beklendiği gibi genliğini ve şeklini artan zaman adımlarında korumaktadır.

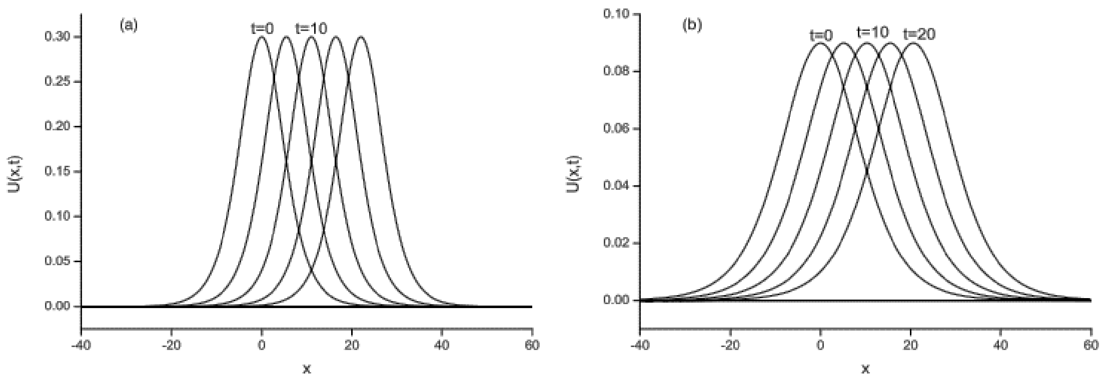
İlk olarak c=0.1 için tek dalganın genliği 0.3000000 olup en yüksek pozisyonu x=0 da alır. t=20 zamanında tek dalganın en yüksek değeri x=22 konumunda 0.2999745 iken c=0.03 için x=0 konumunda solitary dalganın genliği 0.0900000 olup t=20 zamanında x=20.6 konumundaki genliği ise 0.0899994 dir. Dolayısıyla $\left[0,20\right]$ zaman aralığındaki genliklerin mutlak farkı sırasıyla 2.55×10^{-5} ve 6×10^{-7} olarak belirlenir. Farklı zaman adımlarındaki hataların dağılımları Şekil 2.2 (a) ve (b) de sırasıyla $c = 0.1$ ve $c = 0.03$ için resmedilmiştir. Hataların dağılımı $c = 0.1$ için -8×10^{-5} ile 1×10^{-4} aralığında gerçekleşirken $c = 0.03$ için -5×10^{-4} ile 0 arasında gerçekleşir.

Tablo 2.1. $c = h = \Delta t = 0.1$, $[-40, 60]$ parametreleri için tek solitary dalganın farklı zaman adımlarında elde edilen değişmezleri ve hata normları

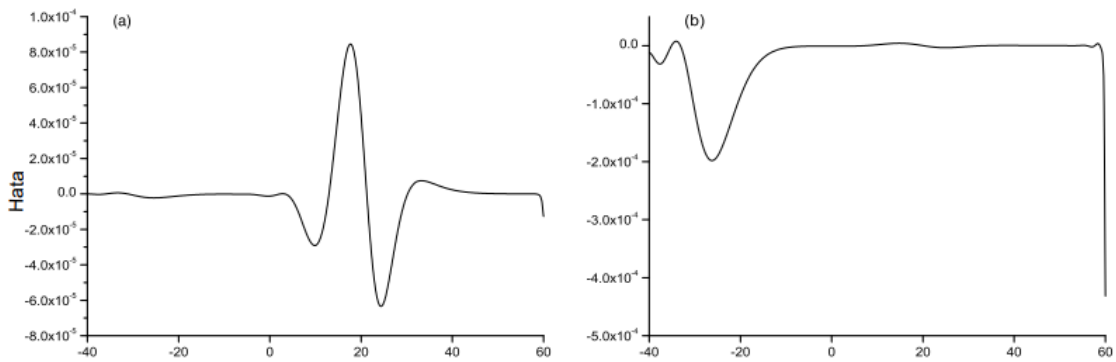
Metod	**Zaman**	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
Galerkin Kübik	0	3.9799274	0.8104627	2.5790082	0	0
	4	3.9799294	0.8104627	2.5790082	0.04746117	0.01883838
	8	3.9799277	0.8104627	2.5790083	0.09291081	0.03788379
	12	3.9799250	0.8104627	2.5790083	0.13646954	0.05534971
	16	3.9799164	0.8104627	2.5790083	0.17731501	0.07064983
	20	3.9798820	0.8104627	2.5790083	0.21615477	0.08455837
$h = 0.05$	20	3.9798786	0.8104621	2.5790061	0.21976198	0.08302370
$h = 0.02$	20	3.9798711	0.8104625	2.5790074	0.18980947	0.07536858
Galerkin kuadratik $(h = 0.1)$[25]	20	3.97989	0.810467	2.57902	0.220	0.086
Sonlu fark $(h = 0.1)$[25]	20	4.41219	0.897342	2.85361	196.1	67.35
[26]	20	3.98203	0.808650	2.57302	4.688	1.755
[27]	20	3.96160	0.804185	2.55829	0.018	1.566
[28]	20	3.98206	0.811164	2.58133	0.511	1.566
[29]	20	3.97988	0.810276	2.57839	0.30	0.116
[31]	20	3.97988	0.810465	2.57901	0.219	0.086
[35]	20	3.97988	0.810461	2.579	0.307172	0.117734
[37]	20	–	–	–	0.20	0.078

Tablo 2.2. $c = 0.03$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $[-40, 60]$ parametreleri için tek solitary dalganın farklı zaman adımlarında elde edilen değişmezleri ve hata normları

Metod	Zaman	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
Galerkin Kübik	0	2.1070056	0.1273011	0.3888039	0	0
	4	2.1070945	0.1273011	0.3888039	0.41223571	0.23007703
	8	2.1068929	0.1273011	0.3888039	0.51129322	0.22109032
	12	2.1065433	0.1273011	0.3888038	0.53606374	0.21259643
	16	2.1059147	0.1273011	0.3888035	0.54486046	0.21388435
	20	2.1045802	0.1273010	0.3888021	0.56955440	0.43153939
$h = 0.05$	20	2.1045976	0.1273009	0.3888018	0.56031080	0.43158143
$h = 0.125$	20	2.1045743	0.1273010	0.3888022	0.57426343	0.43151165
[35]	20	2.10460	0.127302	0.388802	0.562458	0.431512
[36]	20	–	–	–	9.40151	3.54203



Şekil 2.1. Tek solitary dalganın (a) $c = h = \Delta t = 0,1$ (b) $c = 0,03$, $h = \Delta t = 0,1$ parametreleri için $-40 \leq x \leq 60$ aralığında $t = 0,\ 5,\ 10,\ 15$ ve 20 zaman adımlarında ki hareketi



Şekil 2.2. Tek solitary dalganın (a) $c = h = \Delta t = 0{,}1$ (b) $c = 0{,}03,$ $h = \Delta t = 0{,}1$ parametreleri için -40 $\leq x \leq$ 60 aralığında $t = 20$ zaman adımındaki hata dağılımları

2. Durum

Bu kısımda (1.6.1) ile verilen denklem $U \to 0$ iken ve $x \to \pm\infty$ sınır koşulları ve

$$U(x,0) = \text{sech}^2\left[\frac{x}{4}\right] \tag{2.34}$$

başlangıç koşulu altında incelenmiştir. Bu durumda problemin tam çözümü

$$U(x,t) = \text{sech}^2\left[\frac{x}{4} - \frac{t}{3}\right] \tag{2.35}$$

şeklindedir.

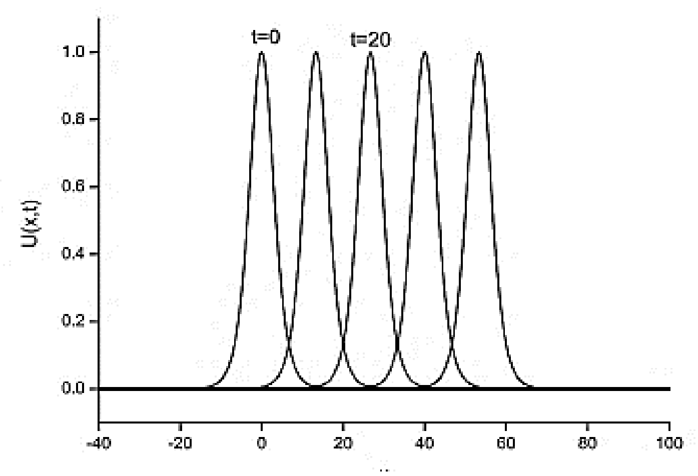
Hesaplamalar farklı konum ve zaman adımları seçilerek $[-40,100]$ aralığında $t = 40$ zamanına kadar yapılmıştır. Daha önceki yöntemlerle karşılaştırma yapabilmek için L_2 , L_∞ hata normları ile l_1 , l_2 , l_3 değişmezlerinin değerleri hesaplanarak Tablo 2.3 te gösterilmiştir. Yöntemimiz ile elde edilen hata normlarının diğerlerinden daha az olduğu ve değişmezlerin zaman arttıkça neredeyse sabit kaldığı Tablo 2.3 ten açık bir şekilde görülmektedir.

Tablodan l_1, l_2, l_3 değişmezlerinin sırasıyla 1 $\times 10^{-6}$, 3.5×10^{-5} ve 3×10^{-4} den daha az değiştiği açık bir şekilde görülmektedir. Ayrıca değişmezlerin değerlerindeki değişiklikler tam çözümündeki değerleriyle örtüşmektedir. Ayrıca programın çalışması boyunca L_2 ve L_∞ hata normlarının değerleri oldukça küçük olarak bulunmuştur.

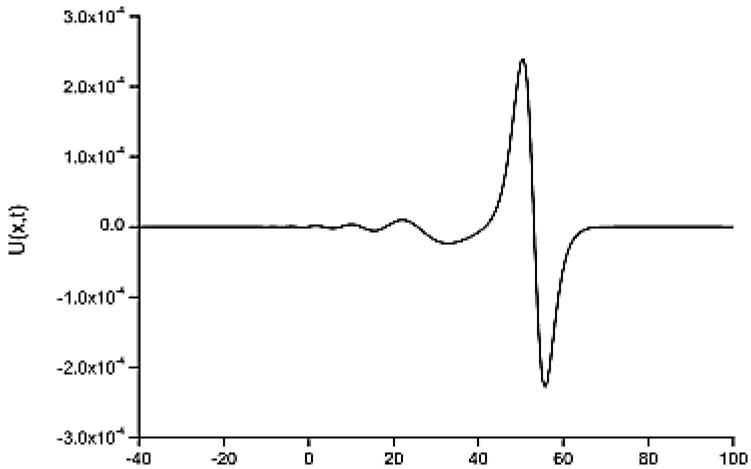
Dolayısıyla yöntemimizin bu denklem için oldukça uygun olduğunu söyleyebiliriz. t=0, 10, 20, 30 ve 40 daki çözümler Şekil 2.3 te gösterilmiştir. Beklendiği gibi tek soliton dalgalar sabit bir hızla sağa doğru ilerlemekte ve artan zamanla birlikte genişliğini ve şeklini korumaktadır. Başlangıçta h=0.05 ve Δt=0.025 için tek dalganın genliği 1.0000000 ve üst pozisyonunu x=0 da almaktadır. t=40 da tek dalganın genliği 0.9999426 olup dalga en büyük değerini x=53.35 de almaktadır. Dolayısıyla $\left[0,40\right]$ zaman aralığında genliklerdeki mutlak fark 5.7×10^{-5} olarak bulunur. Hatanın farklı zamanlarda dağılımı Şekil 2.4 te gösterilmiştir. Hataların değişimi -3×10^{-4} ile 3×10^{-4} arasında gerçekleşir.

Tablo 2.3. Tek solitary dalganın $h=0.05$, $\Delta t = 0.025$, parametreleri için $\left[-40,100\right]$ aralığındaki hareketi

Metod	**Zaman**	L_2	L_∞	I_1	I_2	I_3
$h=0.2, \Delta t=0.4$	10	0.03195399	0.01477190	8.0000005	5.6000315	20.2664360
	20	0.05446985	0.02321340	8.0000001	5.6000536	20.2662535
	30	0.07306022	0.03003074	7.9999998	5.6000631	20.2661684
	40	0.09025102	0.03638003	7.9999995	5.6000671	20.2661288
[44]	40	–	0.10976282			
$h=\Delta t=0.1$	10	0.00204484	0.00095720	8.0000020	5.6000016	20.2666713
	20	0.00341396	0.00147163	8.0000020	5.6000019	20.2666716
	30	0.00457929	0.00189531	8.0000020	5.6000021	20.2666717
	40	0.00571248	0.00231941	8.0000020	5.6000022	20.2666718
[44]	40	–	0.00747237			
$h=0.05, \Delta t=0.025$	10	0.00012459	0.00005984	7.9999964	5.6000010	20.2666706
	20	0.00025628	0.00010502	7.9999964	5.6000010	20.2666706
	30	0.00040853	0.00016268	7.9999964	5.6000010	20.2666706
	40	0.00055868	0.00021891	7.9999964	5.6000010	20.2666706
[44]	40	–	0.00046983			
$h=0.2, \Delta t=0.01$	10	0.00051267	0.00017784	8.0000009	5.6000005	20.2666697
	20	0.00077372	0.00031687	8.0000009	5.6000010	20.2666713
	30	0.00107317	0.00045923	8.0000009	5.6000011	20.2666719
	40	0.00141405	0.00060343	8.0000009	5.6000012	20.2666721
[37]	20	0.00060007	0.00031641			



Şekil 2.3. Tek solitary dalganın $h = 0.05,\ \Delta t = 0.025$ parametreleri için $-40 \le x \le 100$ aralığında $t = 0, 10, 20, 30, 40$ zaman adımlarında ki hareketi



Şekil 2.4. Tek solitary dalganın $h = 0.05,\ \Delta t = 0.025$ parametreleri için $-40 \le x \le 100$ aralığında $t = 20$ zaman adımındaki hata dağılımları

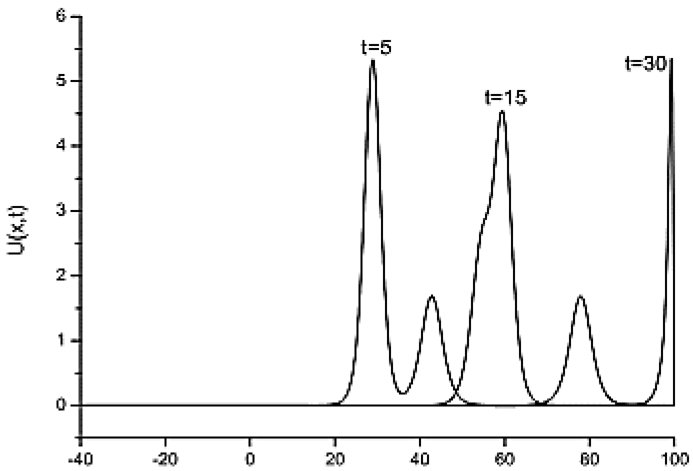
2.6.2. İki Solitary Dalganın Etkileşimi

Bu problem için, farklı genliklere sahip ve aynı yönde hareket eden (2.3) ile verilen BBM-Burgers denklemi için iki solitary dalganın etkileşimi hareketi incelenmiştir. Farklı genliklere sahip iki iyi ayrılmış solitary dalganın başlangıç durumu aşağıdaki forma sahiptir:

$$U(x,0)=\sum_{j=1}^{2}3d_j\,\mathrm{sech}^2\left[k_j\left(x-x_j\right)\right], \tag{2.36}$$

burada $k_1=0.4,\ k_2=0.3,\ x_1=15,\ x_2=35$ ve $d_j=\dfrac{4k^2}{1-4k_j^2}$, $j=1,2.$

Sayısal hesaplamalar için $h=0.05,\ \Delta t=0.025,\ -40\le x\le 100$ parametreleri seçilmiştir. Parametreler, etkileşimi mümkün kılmak için sırasıyla $x=28.85$ ve $x=42.75$ konumlarında 5.3283821 ve 1.6882687 gibi farklı genliklere sahip tek dalgalar üretmektedir. Hesaplamalar $t=30$ zamanına kadar yapılmıştır. Şekil 2.5 den görüldüğü gibi $t=0$ da büyük genliğe sahip dalga küçük genliğe sahip dalganın solunda bulunmaktadır. Daha büyük genliğe sahip dalga küçük genliğe sahip dalgadan daha hızlı hareket ettiği için $t=15$ zamanında küçük genlikli dalgayı yakalar ve iki dalganın girişimi hareketi başlar, daha sonra küçük genlikli dalgadan uzaklaşarak yoluna devam eder.



Şekil 2.5. İki solitary dalganın $t=5,15,30$ zaman adımlarındaki etkileşimi

2.6.3. Üç Solitary Dalganın Etkileşimi

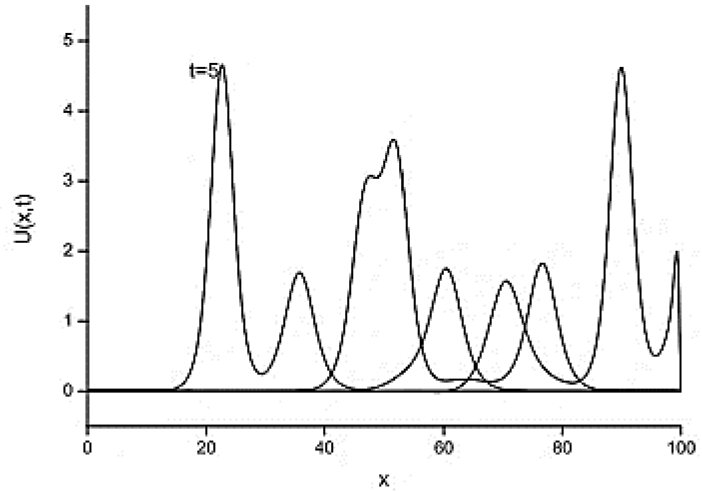
Bu bölümde, farklı genliklere sahip ve aynı yönde hareket eden üç solitary dalganın etkileşimi incelenmiştir. (2.3) ile verilen BBM-Burgers denklemi için, farklı genliklere sahip üç iyi ayrılmış solitary dalganın başlangıç durumu aşağıdaki forma sahiptir:

$$U(x,0)=\sum_{j=1}^{3}3d_j\,\mathrm{sech}^2\left[k_j\left(x-x_j\right)\right], \tag{2.37}$$

Burada $k_1=0.39,\ k_2=0.30,\ k_3=0.25,\ x_1=10,\ x_2=28,\ x_3=52$ ve $d_j=\dfrac{4k_j^2}{1-4k_j^2}$

$j=1,\ 2,\ 3.$

Üç solitary dalganın etkileşiminin gerçekleşmesini sağlamak için, $-40\le x\le 100$ aralığında $h=0.05,\ \Delta t=0.025$ parametreleri ile hesaplamalar yapılmıştır. Bu parametreler ile solitary dalgalar, 4.6526302, 1.6894437 ve 1.7500767 genliklerine sahip olurlar. Hesaplamalar $t=30$ zamanına kadar yapılmıştır. Şekil 2.6 da, üç solitary dalganın etkileşimi çizilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, $t=15$ zamanı civarında etkileşim başlar ve büyük dalga küçük dalgaları yakalar ve üst üste binme süreci gerçekleşir. Artan zaman adımlarında orijinal şekillerine dönmeye başlarlar.



Şekil 2.6. Üç solitary dalganın $t=5,\ 15,\ 30$ zaman adımlarındaki etkileşimi

2.6.4. Undular Bore Yayılımı

Son problem için, (1.6.1) ile verilen BBM denklem $x\to\infty$ iken $U\to 0$ ve $x\to-\infty$ iken $U\to U_0$ sınır koşulları ve

$$U(x,0)=\frac{1}{2}U_0\left[1-\tanh\left(\frac{x-x_c}{d}\right)\right], \tag{2.38}$$

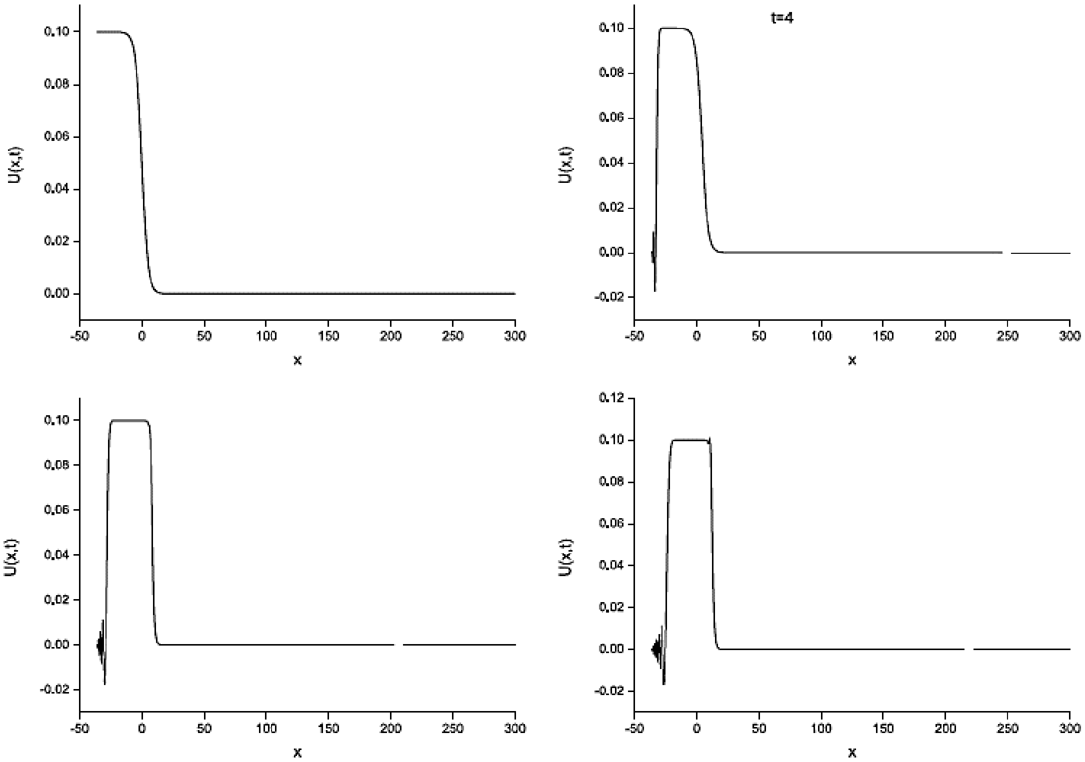
başlangıç koşulları ile ele alınmıştır.

(2.38) ile verilen denklemde, $U(x,0)$, $t=0$ anında su yüzeyinin denge seviyesinin üzerinde yükselmesini, U_0 , $x=x_c$ ye merkezindeki su seviyesindeki değişimin büyüklüğünü, d ise durgun su ile derin su arasındaki eğimi temsil etmektedir.

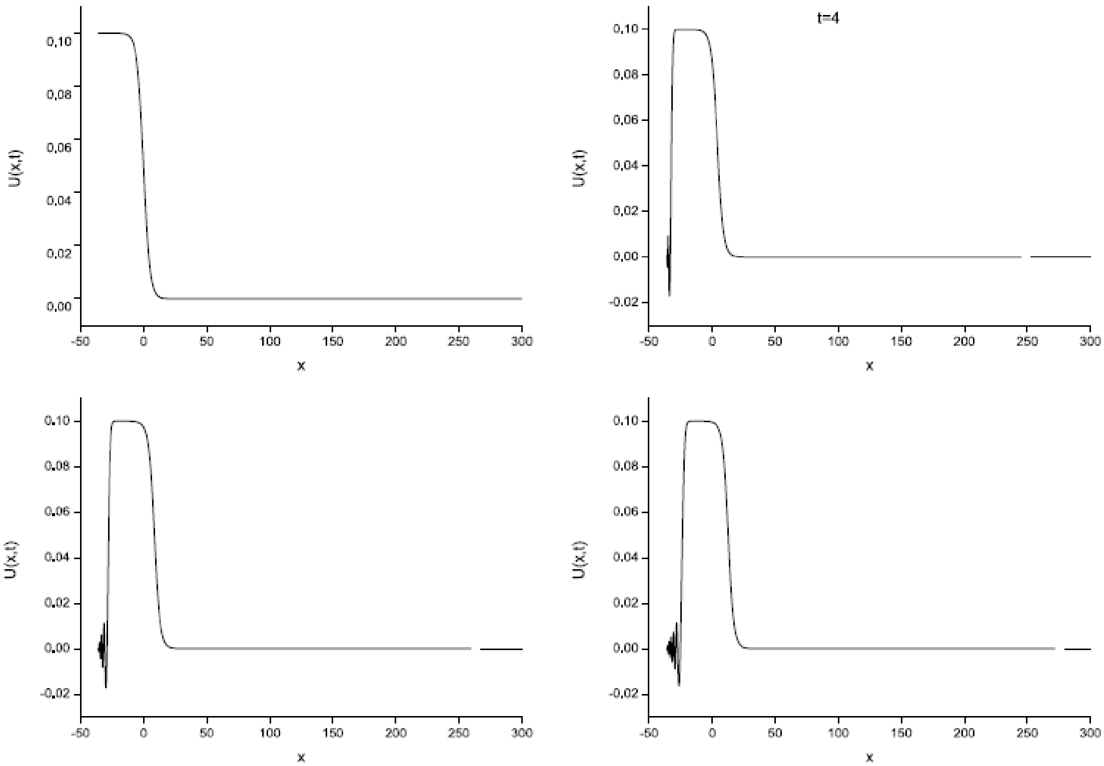
Daha önceki çalışmalarla karşılaştırma yapmak için parametreler $U_0=0.1$, $\mu=1/6$, $x_c=0$, $d=2$, 5 , $h=0.1$, $\Delta t=0.1$, $x\in[-36,300]$ şeklinde seçilmiştir. Hesaplamalar $t=12$ ye kadar yapılmıştır ve elde edilen sonuçlar Tablo 2.4 te verilmiştir. Tablodan değişmezlerdeki değişikliklerin $d=2$ için 1.0×10^{-2} , 4.4×10^{-4} , 2.6×10^{-3} ve $d=5$ için 1.0×10^{-2} , 1.6×10^{-4} , 2.6×10^{-3} değerlerinden daha az değiştiği görülmüştür. Şekil 2.7 ve 2.8 da seçilen parametrelere uygun olarak grafikler $t=0, 4, 8, 12$ zaman adımlarında çizilmiştir. Artan x değerleri ile dalgaların genliğinin arttığı tespit edilmiştir. Bundan sonra dalgalanmalar tepe noktasına ulaşır ve dalgalar sönümlenir.

Tablo 2.4. Bir dalgalı undular bore için değişkenler $U_0=0.1$, $x_0=0$, $d=5$, $\mu=1/6$, $h=0.1$, $\Delta t=0.1$, $x\in[-36,300]$

Zaman	I_1		I_2		I_3	
	$d=2$	$d=5$	$d=2$	$d=5$	$d=2$	$d=5$
0	3.5949976	3.5949977	0.3494998	0.3344998	1.0829493	1.0356993
4	3.6051204	3.6051205	0.3500394	0.3348469	1.0802725	1.0330284
8	3.6053222	3.6053223	0.3499572	0.3347301	1.0802922	1.0330560
12	3.6053828	3.6053830	0.3499396	0.3346661	1.0802964	1.0330707



Şekil 2.7. $d=2$ için $t=0,\ 4,\ 8,\ 12$ deki undular bore un konfigürasyonları



Şekil 2.8. $d=5$ için $t=0,\ 4,\ 8,\ 12$ deki undular bore un konfigürasyonları

3. BÖLÜM

BBM-BURGERS DENKLEMİNİN SEPTİK B-SPLİNE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

3.1. Giriş

Tezin bu bölümünde Seydi Battal Gazi Karakoç ve Khalid Karam Ali'nin "Theoretical and computational structures on solitary wave solutions of Benjamin Bona Mahony-Burgers equation" isimli makaleleri ayrıntılı olarak incelenmiştir [56].

Bu bölümde lineer olmayan BBM-Burgers denkleminin sayısal çözümleri septik-B-spline kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilmiştir. Önerilen sayısal yöntem, tek solitary dalganın yayılması, iki ve üç solitary dalganın etkileşimini içeren üç problemi test etmekte kullanılmıştır. Sayısal şemanın lineer kararlılık analizi, Von-Neumann teorisine dayalı olarak Fourier yöntemi ile yapılmıştır.

Yeni sayısal yöntemin uygunluğunu ve dayanaklığını göstermek için L_2 , L_∞ hata normları ve I_1, I_2 ve I_3 sabitleri hesaplanmış, sonuçlar sayısal ve grafiksel olarak gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlardan mevcut yöntem ile elde edilen sayısal sonuçların lineer olmayan oluşum denklemlerinin çözümlerinde de kullanılabileceğini göstermektedir.

3.2. BBM-Burgers Denklemi İçin Kollokasyon Yöntemi

Lineer olmayan dağılımlı bir ortamdaki küçük genlikli uzun dalgaların matematiksel bir modeli olan BBM-Burgers denklemi ;

$$U_t - U_{xxt} - \alpha U_{xx} + \beta U_x + UU_x = 0, \qquad a \le x \le b, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.1}$$

biçiminde olup burada α ve β pozitif sabitler olmak üzere

$$U(x,0) = f(x), \quad a \le x \le b, \tag{3.2}$$

başlangıç koşulu ve

$$
\begin{aligned}
&U(a,t)=0, \quad && U(b,t)=0, \\
&U_x(a,t)=0, \quad && U_x(b,t)=0, \\
&U_{xx}(a,t)=0, \quad && U_{xx}(b,t)=0, \quad t>0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

sınır koşulları ile tanımlanır. Eğer (3.1) denkleminde α sıfır alınırsa (1.6.1) denklemi elde edilir. BBM-Burgers denklemi hem ayırıcı hem de dağıtıcı etkiler içermektedir. Dağıtıcı terim $-\alpha U_{xx}$ olup dağıtıcı etkisi aşağıdaki Burger denklemi ile aynıdır.

$$
U_t-\alpha U_{xx}+\beta U_x+UU_x=0. \tag{3.4}
$$

(3.1) denkleminin ayırıcı etkisini gösteren terim $-U_{xxt}$ olup bu etki (1.6.1) denklemi ile aynıdır.

$a\le x\le b$ aralığını $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$, $h=\dfrac{b-a}{N}$ olacak şekilde aralıklara bölündüğünü varsayalım $[a,b]$ çözüm aralığı için x_m düğüm noktalarında septik B-spline fonksiyonlar $\phi_m(x)\ (m=-3,-2,-1,\ldots,N+2,N+3)$

$$
\phi_m(x)=\frac{1}{h^7}\begin{cases}
(x-x_{m-4})^7 & [x_{m-4},x_{m-3}]\\
(x-x_{m-4})^7-8(x-x_{m-3})^7 & [x_{m-3},x_{m-2}]\\
(x-x_{m-4})^7-8(x-x_{m-3})^7+28(x-x_{m-2})^7 & [x_{m-2},x_{m-1}]\\
(x-x_{m-4})^7-8(x-x_{m-3})^7+28(x-x_{m-2})^7-56(x-x_{m-1})^7 & [x_{m-1},x_m]\\
(x_{m+4}-x)^7-8(x_{m+3}-x)^7+28(x_{m+2}-x)^7-56(x_{m+1}-x)^7 & [x_m,x_{m+1}]\\
(x_{m+4}-x)^7-8(x_{m+3}-x)^7+28(x_{m+2}-x)^7 & [x_{m+1},x_{m+2}]\\
(x_{m+4}-x)^7-8(x_{m+3}-x)^7 & [x_{m+2},x_{m+3}]\\
(x_{m+4}-x)^7 & [x_{m+3},x_{m+4}]\\
0 & \text{diğer durumlarda}
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

şeklinde tanımlanır [12].

Denklemde $U(x,t)$ tam çözüm fonksiyonu olup buna karşılık gelen yaklaşık çözüm olan $U_N(x,t)$, (3.5) ile verilen $\phi_m(x)$ septik B-spline fonksiyonlar cinsinden

$$U_N(x,t)=\sum_{m=-3}^{N+3}\phi_m(x)\delta_m(t) \tag{3.6}$$

ile verildi. Burada $\delta_m(t)$ zamana bağlı katsayılardır. Her septik B-spline sekiz elemanı kapsar, bu nedenle her bir $[x_m,x_{m+1}]$, sekiz B-spline tarafından örtülmektedir. $[x_m,x_{m+1}]$ sonlu eleman $h\xi = x-x_m$, $0\le\xi\le 1$ şeklinde tanımlanan lokal koordinat dönüşümüyle $[0,1]$ aralığına dönüşür. Bu nedenle, (3.5) ile verilen septik B-spline fonksiyonlar $[0,1]$ aralığında ξ cinsinden:

$$\begin{aligned}
\phi_{m-3} &= 1-7\xi+21\xi^2-35\xi^3+35\xi^4-21\xi^5+7\xi^6-\xi^7,\\
\phi_{m-2} &= 120-392\xi+504\xi^2-280\xi^3+84\xi^5-42\xi^6+7\xi^7,\\
\phi_{m-1} &= 1191-1715\xi+315\xi^2+665\xi^3-315\xi^4-105\xi^5+105\xi^6-21\xi^7,\\
\phi_{m} &= 2416-1680\xi+560\xi^4-140\xi^6+35\xi^7,\\
\phi_{m+1} &= 1191+1715\xi+315\xi^2-665\xi^3-315\xi^4+105\xi^5+105\xi^6-35\xi^7,\\
\phi_{m+2} &= 120+392\xi+504\xi^2+280\xi^3-84\xi^5-42\xi^6+21\xi^7,\\
\phi_{m+3} &= 1+7\xi+21\xi^2+35\xi^3+35\xi^4+21\xi^5+7\xi^6-\xi^7,\\
\phi_{m+4} &= \xi^7.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklindedir.

(3.5) ve (3.6) denklemleri kullanılarak $U_m, U_m^{'}, U_m^{''}, U_m^{'''}$ ve U_m^{iv} düğüm noktalarının δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
U_N(x_m,t) &= U_m = \delta_{m-3}+120\delta_{m-2}+1191\delta_{m-1}+2416\delta_m+1191\delta_{m+1}+120\delta_{m+2}+\delta_{m+3}\ ,\\
U'_m &= \frac{7}{h}\left(-\delta_{m-3}-56\delta_{m-2}-245\delta_{m-1}+245\delta_{m+1}+56\delta_{m+2}+\delta_{m+3}\right),\\
U''_m &= \frac{42}{h^2}\left(\delta_{m-3}+24\delta_{m-2}+15\delta_{m-1}-80\delta_m+15\delta_{m+1}+24\delta_{m+2}+\delta_{m+3}\right),\\
U'''_m &= \frac{210}{h^3}\left(-\delta_{m-3}-8\delta_{m-2}+19\delta_{m-1}-19\delta_{m+1}+8\delta_{m+2}+\delta_{m+3}\right),\\
U^{iv}_m &= \frac{840}{h^3}\left(\delta_{m-3}-9\delta_{m-1}+16\delta_m-9\delta_{m+1}+\delta_{m+3}\right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ve

U nun $[x_m,x_{m+1}]$ aralığı üzerindeki varyasyonu

$$U = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m \delta_m \tag{3.9}$$

şeklindedir.

(3.6) ve (3.8) ile verilen eşitlikler (3.1) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\
&-\frac{42}{h^2}\left(\dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}\right) \\
&-\frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
&+\frac{7}{h} Z_m(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

biçiminde denklem sistemi bulunur. Buradan

$Z_m = U_m = \left(\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}\right)$ dir.

Eğer δ_i ve (3.10) denklem sistemindeki $\dot{\delta}_i$ yerine sırasıyla

$$\delta_i = \frac{\delta_i^{n+1} + \delta_i^n}{2}, \tag{3.11}$$

$$\dot{\delta}_i = \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t}, \tag{3.12}$$

Crank-Nicolson ve ileri sonlu fark yaklaşımı yazılırsa bilinmeyen parametreler olan $\delta_i^{n+1}, \delta_i^n$ $i = m-3, m-2, ..., m+2, m+3$ zaman seviyesi arasında aşağıdaki iterasyon denklemi bulunur:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1\delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2\delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3\delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4\delta_m^{n+1} + \gamma_5\delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6\delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7\delta_{m+3}^{n+1} \\
&= \gamma_7\delta_{m-3}^n + \gamma_6\delta_{m-2}^n + \gamma_5\delta_{m-1}^n + \gamma_4\delta_m^n + \gamma_3\delta_{m+1}^n + \gamma_2\delta_{m+2}^n + \gamma_1\delta_{m+3}^n,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

burada

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 = \left[1 - E - M - K\left(1 + Z_m\right)\right],\\
&\gamma_2 = \left[120 - 24E - 24M - 56K\left(1 + Z_m\right)\right],\\
&\gamma_3 = \left[1191 - 15E - 15M - 245K\left(1 + Z_m\right)\right],\\
&\gamma_4 = \left[2416 + 80E + 80M\right],\\
&\gamma_5 = \left[1191 - 15E - 15M + 245K\left(1 + Z_m\right)\right],\\
&\gamma_6 = \left[120 - 24E - 24M + 56K\left(1 + Z_m\right)\right],\\
&\gamma_7 = \left[1 - E - M + K\left(1 + Z_m\right)\right],\\
&m = 0,1,\dots,N, \qquad E = \frac{42}{h^2}\ , \qquad M = \frac{21\Delta t}{h^2}\ , \quad K = \frac{7}{2h}\Delta t \ \text{ dır.}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

(3.13) ile verilen sistem , $\left(\delta_{-3},\delta_{-2},\delta_{-1},\dots,\delta_{N+1},\delta_{N+2},\delta_{N+3}\right)$ şeklinde $\left(N+7\right)$ tane bilinmeyen ve $\left(N+1\right)$ tane lineer denklem içerir. Bu nedenle, ortaya çıkan sistemin bir tek çözümünü elde etmek için δ_{-3}, δ_{-2}, δ_{-1},..., δ_{N+1}, δ_{N+2}, δ_{N+3} bilinmeyenleri yok etmek gerekir. Bunun için altı ek denkleme ihtiyacımız vardır. Bu altı ek denklem (3.3) sınır koşullarından elde edilir ve δ_{-3}, δ_{-2}, δ_{-1},..., δ_{N+1}, δ_{N+2} ve δ_{N+3} katsayıları yok edildikten sonra (3.13) sistemi

$$
Rd^{n+1} = Sd^{n} \tag{3.15}
$$

gibi $\left(N+1\right)$ tane lineer denklem ve (N+1) tane bilinmeyenden oluşan bir matris sistemine indirgenir. Z_m nin neden olduğu lineer olmamanın üstesinden gelmek için her adımda $\delta^{n*} = \delta^{n} + \frac{1}{2}\left(\delta^{n} - \delta^{n-1}\right)$ şeklinde iç iterasyon iki veya üç defa uygulanır. Çözüme başlamadan önce d^0 parametreleri aşağıdaki başlangıç şartlarından elde edilir.

$$
\begin{aligned}
&U_N\left(x,0\right) = U\left(x_m,0\right); && m = 0,1,2,\dots,N\\
&\left(U_N\right)_x\left(a,0\right) = 0, && \left(U_N\right)_x\left(b,0\right) = 0,\\
&\left(U_N\right)_{xx}\left(a,0\right) = 0, && \left(U_N\right)_{xx}\left(b,0\right) = 0,\\
&\left(U_N\right)_{xxx}\left(a,0\right) = 0, && \left(U_N\right)_{xxx}\left(b,0\right) = 0,
\end{aligned}
$$

Böylece, başlangıç vektörü olan d^0 için $Vd^0 = W$ matris formu elde edilir

ve buradan;

$$
V=\begin{bmatrix}
1536 & 2712 & 768 & 24 & & & & & & \\
\frac{82731}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{10063.5}{81} & 1 & & & & & \\
\frac{9600}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96474}{81} & 120 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \\
 & & & & 1 & 120 & \frac{96474}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{9600}{81} \\
 & & & & & 1 & \frac{10063.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{82731}{81} \\
 & & & & & & 24 & 768 & 2712 & 1536
\end{bmatrix}
$$

$d^0=\left(\delta_0,\delta_1,\delta_2,...,\delta_{N-2},\delta_{N-1},\delta_N\right)^T$ ve W=$\left(U\left(x_0,0\right),U\left(x_1,0\right),...,U\left(x_{N-1},0\right),U\left(x_N,0\right)\right)^T$ dır.

3.3. Kararlılık Analizi

Yöntemin kararlılığı, Von-Neumann teorisine dayanan Fourier seri yöntemi uygulanarak araştırılmıştır. Lineer olmayan UU_x terimindeki U nun yerel olarak sabit olduğu varsayılır. $\delta_m^n=\xi^n e^{i\sigma mh}$, $\left(i=\sqrt{-1}\right)$ Fourier formülü , (3.13) iterasyon denkleminde kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
&\xi^{n+1}\left(\gamma_1 e^{i(m-3)\theta}+\gamma_2 e^{i(m-2)\theta}+\gamma_3 e^{i(m-1)\theta}+\gamma_4 e^{im\theta}+\gamma_5 e^{i(m+1)\theta}+\gamma_6 e^{i(m+2)\theta}+\gamma_7 e^{i(m+3)\theta}\right)\\
&=\xi^{n}\left(\gamma_7 e^{i(m-3)\theta}+\gamma_6 e^{i(m-2)\theta}+\gamma_5 e^{i(m-1)\theta}+\gamma_4 e^{im\theta}+\gamma_3 e^{i(m+1)\theta}+\gamma_2 e^{i(m+2)\theta}+\gamma_1 e^{i(m+3)\theta}\right)
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Bulunur ki burada σ mod numarası, h eleman boyutu $\theta=\sigma h$ dır.

Denklem (3.16) sadeleştirilirse

$$
\begin{aligned}
&A=\left(2382-30E-30M\right)\cos(\theta)+\left(240-48E-48M\right)\cos\left(2\theta\right)+\left(2-2E+2M\right)\cos\left(3\theta\right)+\\
&\left(2416+80E+80M\right),\\
&B=\left(490K\left(1+Z_m\right)\right)\sin\left(\theta\right)+\left(112K\left(1+Z_m\right)\right)\sin\left(2\theta\right)+\left(2K\left(1+Z_m\right)\right)\sin\left(3\theta\right)+\\
&\left(2416+80E-80M\right).
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

olmak üzere

$\xi=\dfrac{A+iB}{A-\dot{I}B}$ elde edilir.

Fourier kararlılık analizine göre, verilen şemanın kararlı olması için $|\xi| \le 1$ koşulunun sağlanması gerekir. Sembolik bir programlama yazılımı kullanarak veya basit hesaplamalar yaparak, $a^2 + b^2 = a^2 + (-b)^2$ olduğu kolaylıkla görülebilir ve böylece $|\xi| = 1$ e eşit olur. Bu nedenle, lineerleştirilmiş algoritma şartsız olarak kararlıdır.

3.4. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar

Bu bölümde, sayısal algoritmamızın doğruluğunu göstermek için tek dalganın hareketi, iki ve üç dalganın girişimi problemi ele alınmıştır. Bu üç problem de, sayısal algoritmamız için simülasyonlar ilerledikçe çözümün konumunun ve genliğinin uygunluğunu göstermek için aşağıdaki hata normları ele alındı:

$$L_2 = \left\| U^{tam} - U_N \right\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^{N} \left| U_j^{tam} - (U_N)_j \right|^2} \quad \text{ve}$$

$$L_\infty = \left\| U^{tam} - U_N \right\|_\infty \simeq \max_j \left| U_j^{tam} - (U_N)_j \right|.$$

BBM-Burgers denklemi için üç tane invaryant (değişmez) vardır. Bunlar kütle, momentum, enerjiye karşılık gelir ve sırasıyla

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U(x,t)dx,\; I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[U^2(x,t) + U_x^2(x,t) \right] dx,\; I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[U^3(x,t) + 3U^2(x,t) \right] dx \qquad (3.18)$$

ile verilir.

3.4.1. Tek Bir Solitary Dalganın Yayılımı

Sayısal şemamızın doğruluğu için iki durum ele alındı.

1. Durum

Bu durumda, giriş kısmında da belirtildiği gibi (3.1) ile verilen BBM-Burgers denkleminde $\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ alındığında elde edilen (1.6.1) ile verilen BBM denklemi için bazı sayısal sonuçlar verildi. (1.6.1) denklemi $U \to 0, x \to \pm\infty$ sınır koşulları ve

$$U(x,0) = 3c\,\text{sech}^2\left[k(x - x_0) \right] \qquad (3.19)$$

başlangıç koşulu ile ele alındı. Bu problem,

$$U(x,t) = 3c\,\text{sech}^2\left[k\left(x - x_0 - vt\right)\right], \tag{3.20}$$

şeklinde bir tam çözüme sahiptir. Burada $v = 1+\varepsilon c$ dalga hızı ve $k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu(1+\varepsilon c)}}$ dir.

Bu denklem, x_0 merkezli $1+\varepsilon c$ sabit hızına ve $3c$ genliğine sahiptir. Daha önceki çalışmalarla karşılaştırabilmek için $[-40,60]$ aralığında parametreler ilk olarak $c = h = \Delta t = 0.1$ ve ikinci olarak $c = 0.03$, $h = \Delta t = 0.1$ alındı. Değişmezlerin tam değerleri $c = 0.1$ için $I_1 = 3.9799497$, $I_2 = 0.81046249$ ve $I_3 = 2.579007$, $c = 0.03$ için $I_1 = 2.1094074$, $I_2 = 0.127302$ ve $I_3 = 0.388806$ olarak bulunur. Simülasyonlar, hata normlarını ve üç korunmuş niceliği elde etmek için $t = 20$ zamanına kadar çalıştırıldı. Farklı c değerleri için elde edilen veriler Tablo 3.1 ve Tablo 3.2 de verildi. Bu tablolar, yöntemimizle elde edilen hata normlarının diğerlerinden daha küçük olduğunu ve zaman arttıkça değişmezlerimizin neredeyse sabit olduğunu açıkça göstermektedir. Tablolardan, $c = 0.1$ için I_1 değişmezinin başlangıç değerinden 4.31×10^{-5} ten daha az değiştiği I_2 ve I_3 değişmezlerininse başlangıç değerlerine göre hiç değişmediği ve $c = 0.03$ için I_1, I_2, I_3 değişmezlerinin başlangıç değerlerine göre sırasıyla $2.41\times10^{-3}, 9\times10^{-7}$ ve 2.2×10^{-6} dan daha az değiştiği görülmektedir. Ayrıca, değişmezlerdeki değişiklikler tam değerleri ile uyumludur. Bilgisayar çalışması süresince L_2 ve L_∞ hata normları yeterince küçük olarak elde edilmiştir. Bu nedenle yöntemimizin yeterince uygun olduğunu söyleyebiliriz. Şekil 3.1 $t = 0,\ 10,\ 20$ anındaki çözümleri göstermektedir. Görüldüğü gibi, tek soliton dalgalar sabit bir hızla sağa doğru hareket etmekte ve beklendiği gibi artan zaman adımlarında genliğini ve şeklini korumaktadır. Başlangıçta, $c = 0.1$ için soliter dalganın genliği 0.30000 dür ve en büyük değerini $x = 0$ da almaktadır. $t = 20$ de, dalganın genliği 0.29997 olup dalganın merkezi $x = 22$ dedir. $c = 0.03$ için soliter dalganın genliği 0.08999 dur ve en büyük değerini $x = 0$ da almaktadır. $t = 20$ de dalganın genliği 0.08999 olup dalganın merkezi $x = 20.6$ dır.

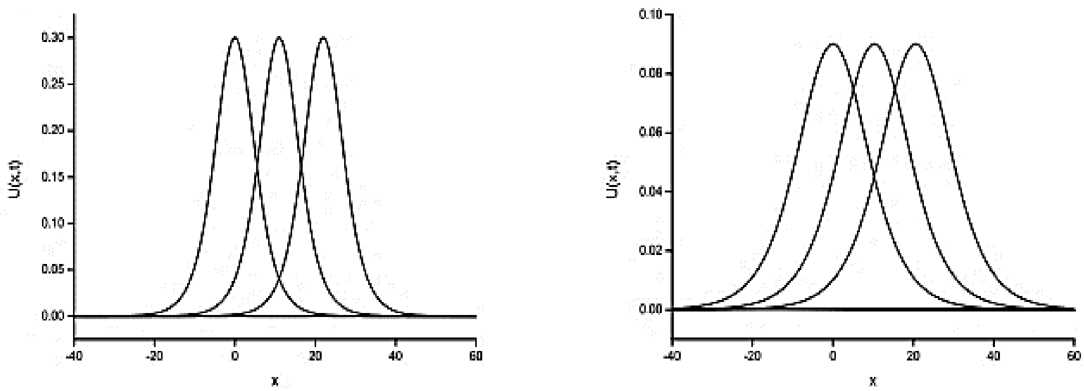
Bu nedenle, $[0,20]$ zaman aralığında genliklerdeki mutlak fark sırasıyla 3×10^{-5} ve 0 olarak ölçülür. Şekil 3.2 de $c=0.1$ ve 0.03 farklı zamanlarda elde edilen hata miktarı gösterilmektedir. Hata sapmaları $c=0.1$ için -8×10^{-5} ile 1×10^{-4} ve $c=0.03$ için -4×10^{-4} ile 4×10^{-4} arasında değişir.

Tablo 3.1. Tek dalganın farklı zaman adımlarında $c=h=\Delta t=0.1$ için $[-40,60]$ aralığında elde edilen değişmezler ve hata normları

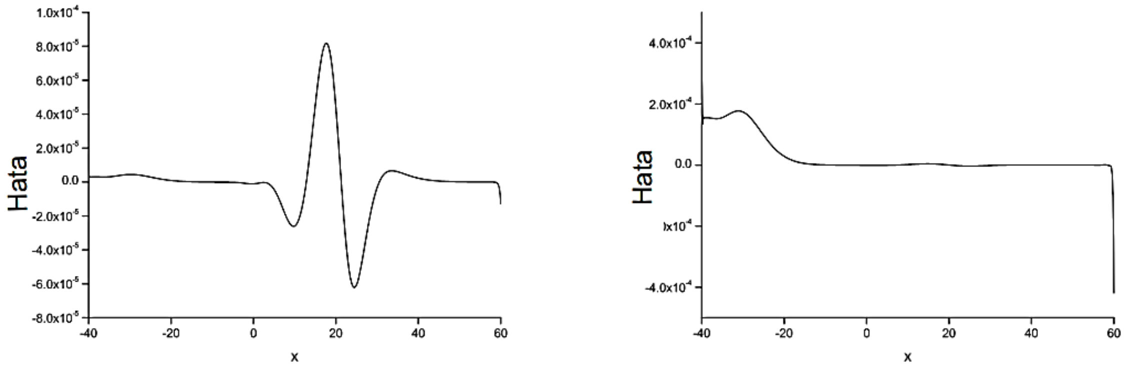
Metod	**Zaman**	I_1	I_2	I_3	$L_2\times10^3$	$L_\infty\times10^3$
Septik Kollokasyon	0	3.9799264	0.8104627	2.5790082	0	0
	4	3.9799532	0.8104627	2.5790082	0.0459217	0.0179172
	8	3.9799717	0.8104627	2.5790082	0.0903127	0.0361521
	12	3.9799860	0.8104627	2.5790082	0.1329449	0.0530899
	16	3.9799910	0.8104627	2.5790082	0.1730352	0.0680887
	20	3.9799695	0.8104627	2.5790082	0.2113133	0.0818479
$h=0.05$	20	3.9799843	0.8104621	2.5790061	0.2193390	0.0823461
$h=0.01$	20	3.9800054	0.8104616	2.5790045	0.2346357	0.0876049
Galerkin ikinci dereceden $(h=0.1)$[25]	20	3.97989	0.810467	2.57902	0.220	0.086
Sonlu fark $(h=0.1)$[25]	20	4.41219	0.897342	2.85361	196.1	67.35
[26]	20	3.98203	0.808650	2.57302	4.688	1.755
[27]	20	3.96160	0.804185	2.55829	0.018	1.566
[28]	20	3.98206	0.811164	2.58133	0.511	0.198
[29]	20	3.97988	0.810276	2.57839	0.30	0.116
[31]	20	3.97988	0.810465	2.57901	0.219	0.086
[35]	20	3.97988	0.810461	2.579	0.307172	0.117734
[37]	20	-	-	-	0.20	0.078

Tablo 3.2. Tek dalganın farklı zaman adımlarında $c = 0.03,\ h = 0.1,\ \Delta t = 0.1$ için $[-40, 60]$ aralığında elde edilen değişmezler ve hata normları

Metod	**Zaman**	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
Septik Kollokasyon	0	2.1070646	0.1273018	0.3888045	0	0
	4	2.1084334	0.1273019	0.3888061	0.15006771	0.19652671
	8	2.1093708	0.1273021	0.3888070	0.30962660	0.29397281
	12	2.1099722	0.1273023	0.3888075	0.44953010	0.34225072
	16	2.1101033	0.1273025	0.3888077	0.55766109	0.36615936
	20	2.1094796	0.1273027	0.3888067	0.65311575	0.41868081
$h = 0.05$	20	2.1105225	0.1273030	0.3888079	0.88555502	0.41872161
$h = 0.125$	20	2.1091488	0.1273027	0.3888064	0.58532273	0.41865389
[35]	20	2.10460	0.127302	0.388802	0.562458	0.431512
[36]	20	-	-	-	9.40151	3.54203



Şekil 3.1. Tek solitary dalganın $c = h = \Delta t = 0.1$ ve $c = 0.03$, $h = \Delta t = 0.1$ parametreleri için $-40 \le x \le 60$ aralığında $t = 0, 10$ ve 20 zaman adımlarındaki hareketi



Şekil 3.2. Tek solitary dalganın $c = h = \Delta t = 0.1$ ve $c = 0.03,\ h = \Delta t = 0.1$ parametreleri için $-40 \le x \le 60$ aralığında $t = 20$ zaman adımındaki hata dağılımı

2. Durum

Bu durumda, (1.6.1) ile verilen denklem için $U \to 0$, $x \to \pm\infty$ sınır koşulları ve

$$U(x,0) = \operatorname{sech}^2\left[\frac{x}{4}\right] \tag{3.21}$$

başlangıç koşulu ile ele alındı. Bu durum için bu problemin tam çözümü

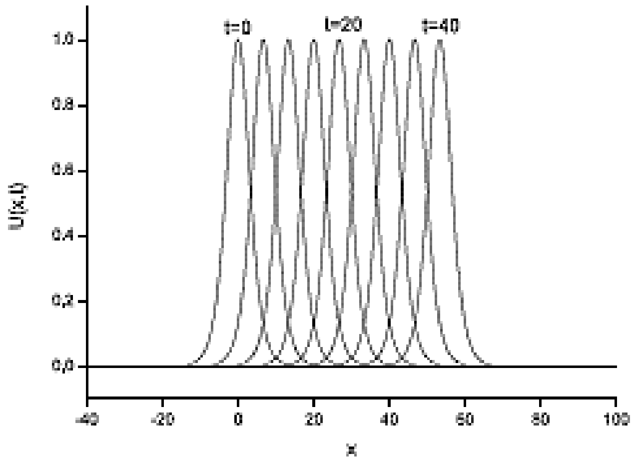
$$U(x,t) = \operatorname{sech}^2\left[\frac{x}{4} - \frac{t}{3}\right] \qquad \text{dir.} \tag{3.22}$$

Hesaplamalar için, farklı konum ve zaman adımlarında bilgisayar programı [−40, 100] aralığında $t = 40$ zaman adımına kadar çalıştırıldı. Tablo 3.3 te $L_2,\ L_\infty$ hata normları $I_1,\ I_2$ ve I_3 değişmezlerinin değerleri ile önceki çalışmalarla yapılan karşılaştırmalar birlikte verilmiştir. Bu tablo, yöntemimiz tarafından elde edilen hata normlarının diğerlerinden daha küçük olduğunu ve zaman arttıkça değişmezlerimizin neredeyse sabit kaldığını açıkça göstermektedir. Tablodan, I_1 ve I_3 değişmezlerinin başlangıç değerlerine göre 1×10^{-7} daha az değiştiği ve I_2 değişmezinin ise hala değişmediği açık bir şekilde görülmektedir. Ayrıca, değişmezlerdeki değişiklikler tam değerleriyle uyumludur. Bilgisayar çalışması süresince L_2 ve L_∞ hata normları yeterince küçük olarak elde edildi. Bu nedenle, yöntemimizin yeterince uygun olduğunu söyleyebiliriz. Şekil 3.3 $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$ ve 40 zaman adımlarındaki çözümleri göstermektedir.

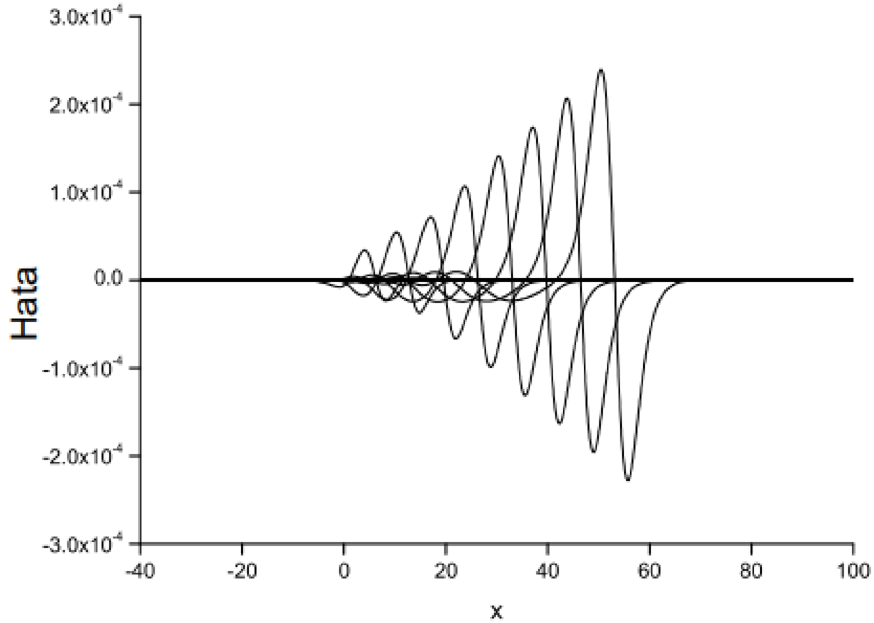
Görüldüğü gibi, tek soliton dalga sabit bir hızla sağa doğru hareket etmekte ve beklendiği gibi artan zaman adımlarında genliğini ve şeklini korumaktadır. Başlangıçta $h=0.05$ ve $\Delta t=0.025$ için, solitary dalganın genliği 0.99995 dir ve en büyük değerini $x=0$ da almaktadır. $t=40$ anındaki genliği $x=53.35$ civarında 0.99995 dir. Bu nedenle, [0, 40] zaman aralığında genliklerdeki mutlak fark sırasıyla 4×10^{-5} ve 0 olarak bulunur. Farklı zamanlarda ki hata sapması Şekil 3.4 te verilmiştir. Hata sapması -3×10^{-4} ve 3×10^{-4} arasında değişmektedir.

Tablo 3.3. Tek dalganın farklı zaman adımlarında $h=0.05,\ \Delta t=0.025$ için $[-40,100]$ aralığında elde edilen değişmezler ve hata normları

Metod	**Zaman**	L_2	L_∞	I_1	I_2	I_3
$h=0.2, \Delta t=0.4$	10	0.03187463	0.01469148	8.0000009	5.5999998	20.2663292
	20	0.05466544	0.02323583	8.0000010	5.5999998	20.2660683
	30	0.07362302	0.03019023	8.0000010	5.5999998	20.2659488
	40	0.09120663	0.03668291	8.0000010	5.5999998	20.2658946
[44]	40	-	0.10976282			
$h=\Delta t=0.1$	10	0.00202237	0.00093646	8.0000021	5.6000010	20.2666693
	20	0.00346138	0.00147827	8.0000021	5.6000010	20.2666683
	30	0.00472296	0.00193615	8.0000022	5.6000010	20.2666676
	40	0.00595841	0.00239601	8.0000022	5.6000010	20.2666676
[44]	40	-	0.00747237			
$h=0.05, \Delta t=0.025$	10	0.00011498	0.00005449	7.9999964	5.6000010	20.2666706
	20	0.00027249	0.00010719	7.9999965	5.6000010	20.2666705
	30	0.00045131	0.00017379	7.9999965	5.6000010	20.2666705
	40	0.00062752	0.00023925	7.9999966	5.6000010	20.2666705
[44]	40	-	0.00046983			
$h=0.2, \Delta t=0.01$	10	0.00002319	0.00001037	8.0000009	5.5999998	20.2666659
	20	0.00001037	0.00001147	8.0000010	5.5999998	20.2666659
	30	0.00002208	0.00000752	8.0000010	5.5999998	20.2666659
	40	0.00002593	0.00001052	8.0000010	5.5999998	20.2666659
[37]	20	0.00060007	0.00031641			



Şekil 3.3. Tek solitary dalganın $h = 0.05, \Delta t = 0.025$ parametreleri için $-40 \le x \le 100$ aralığında $t = 0,5,...,40$ zaman adımlarındaki hareketi



Şekil 3.4. Tek solitary dalganın $h = 0.05, \Delta t = 0.025$ parametreleri için $-40 \le x \le 100$ aralığındaki hata dağılımları

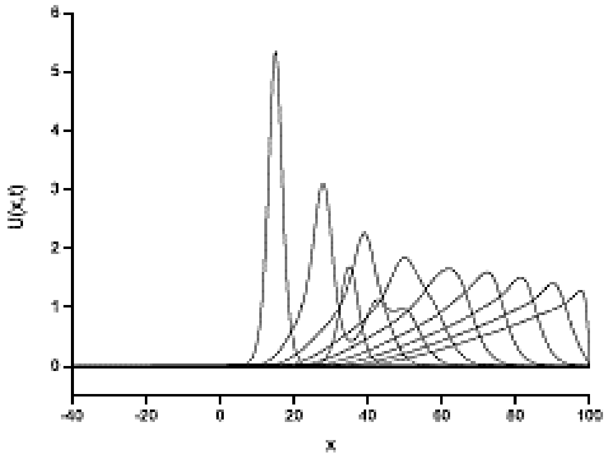
3.4.2. İki Solitary Dalganın Etkileşimi

Bu kısımda (3.1) ile verilen BBM-Burgers denklemi için, farklı genliklere sahip ve aynı yönde hareket eden iki solitary dalganın etkileşimi göz önüne alınmıştır. Farklı genliklerdeki iki iyi ayrılmış solitary dalga için başlangıç şartı

$$U(x,0)=\sum_{j=1}^{2}3d_j\,\mathrm{sech}^2\left[k_j\left(x-x_j\right)\right], \tag{3.23}$$

şeklinde olup burada $k_1=0.4,\ k_2=0.3,\ x_1=15$ ve $d_j=\dfrac{4k_j^2}{1-4k_j^2}$, $j=1,2$ dir.

Sayısal hesaplamalar için $h=0.05,\ \Delta t=0.025,\ -40\le x\le 100$ parametreleri alındı. Bu parametreler, etkileşimi mümkün kılmak için $x=15$ ve $x=35$ civarında sırasıyla 5.33337 ve 1.68758 farklı genliklere sahip tek solitary dalgalar üretir. Hesaplamalar $t=25$ zamanına kadar yapıldı ve iki tek dalganın etkileşiminin davranışı Şekil 3.5 te gösterilmiştir.



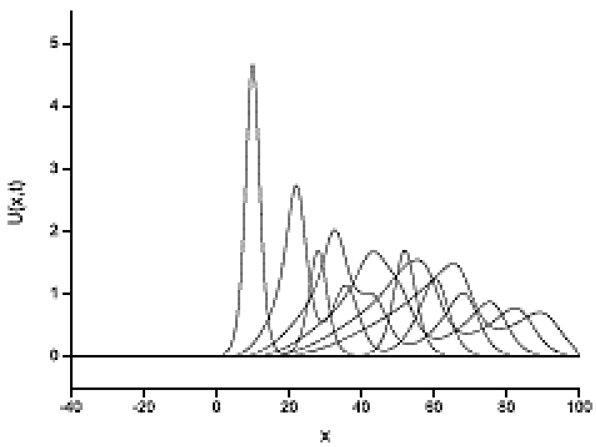
Şekil 3.5. $t=0,5,\ldots,25$ zaman adımlarında iki solitary dalganın girişimi

3.4.3. Üç Solitary Dalganın Etkileşimi

Bu bölümde, farklı genliklere sahip ve aynı yönde hareket eden üç solitary dalganın etkileşimi incelenmiştir. (3.1) ile verilen BBM-Burgers denklemi için, farklı genliklere sahip üç iyi ayrılmış tek dalga

$$U(x,0)=\sum_{j=1}^{3}3d_j \operatorname{sech}^2\left[k_j\left(x-x_j\right)\right], \tag{3.24}$$

şeklinde başlangıç şartına sahip olup burada $k_1=0.39,\ k_2=0.30,\ k_3=0.25,$ $x_1=10,\ x_2=28,\ x_3=52$ ve $d_j=\dfrac{4k_j^2}{1-4k_j^2}$, $j=1,2,3$ dür. Üç solitary dalganın etkileşimini sağlamak için, $-40\le x\le 100$ aralığında $h=0.05,\ \Delta t=0.025$ parametreleri seçildi. Bu parametreler sırasıyla, 4.65926, 1.68755 ve 1.68750 değerlerine sahip tek dalgalar belirtir. Simülasyonlar $t=25$ zamanına kadar çalıştırıldı ve üç soliter dalganın etkileşimi hareketi Şekil 3.6 da gösterildi.



Şekil 3.6. $t=0,5,...,25$ zaman adımlarında üç solitary dalganın girişimi

4. BÖLÜM

SONUÇLAR

Bu çalışmada, BBM-Burgers denklemine kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak lumped Galerkin sonlu eleman yöntemi uygulanmış olan [52] ve [57] referans numaralı makaleler incelenmiştir. Hesaplamalar tam çözümü bilinen tek solitary dalga ile etkileşim süresince tam çözümü bilinmeyen iki, üç solitary dalga ve undular bore dalgaların gelişimi için yapılmıştır. Galerkin yöntemiyle elde edilen çözümlerin varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Konumsal yaklaşım için Galerkin sonlu elemanlar algoritmasının kararlılık analizi ayrıntılı olarak gösterilmiştir.

Ayrıca bu çalışmada BBM-Burgers denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için septik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi kullanılmıştır. Sayısal hesaplamalar tam çözümü bilinen tek solitary dalga ile etkileşim sırasında tam çözümleri bilinmeyen iki ve üç solitary dalganın etkileşimini göstermek için yapılmıştır.

Her iki yöntem için kararlılık analizi yapılarak yöntemin koşulsuz olarak kararlı olduğu gösterilmiştir. Yöntemin doğruluğu hem L_2 hem de L_∞ hata normları ve değişmez büyüklükler I_1, I_2 ve I_3 ile incelenmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar, hata normlarının yeterince küçük olduğunu ve bilgisayar programının çalışması süresince değişmezlerin hemen hemen sabit kaldığını göstermektedir. Sayısal algoritmamızın ele alınan denklem için literatürde bulunan diğer sonuçlara göre daha iyi sonuçlar elde edildiği söylenebilir.

Sonuç olarak, BBM-Burgers denklemi ile temsil edilen geniş uygulamaları olan fiziksel problemler için kübik B-spline Galerkin sonlu eleman yöntemi ile septik B-spline kollokasyon yöntemi doğru, pratik ve güçlü yöntemlerdir.

KAYNAKLAR

1. Clough, R.W., “The finite element in plane stress analysis”, *Proc.2nd A.S.C.E.Conf.on Elektronic Computation*, Pittsburg, Pa., s. 345-378, 1960.

2. G.Strang, G.J.Fix, “An Analysis of the Finite Element Method”, *Wellesley-Cambridge Press*, NJ, 2008.

3. Zienkiewicz, O.C., Cheung, Y.K., “The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics”, *McGraw-Hill Publisher*, 1967.

4. Karaağaç, B. “Bousinesq tipi denklemlerin Galerkin sonlu eleman yöntemi ile Nümerik çözümleri”, *İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Doktora tezi*, s.15, Malatya, 2016.

5. Uçar, Y., “B-spline sonlu eleman yöntemleri ile coupled diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri”, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, *Doktora tezi*, s. 3, Malatya, 2011.

6. Logan D.L., “A first Course in the Finite Element Method(Fourth Edition)”, Thomson, 2007.

7. Reddy, J.N., “An introduction to nonlinear Finite Element Analysis”, *Oxford University Press Inc.*, s. 5-7, New York, 2004.

8. Karakoç, S.B.G., “Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modifiye edilmiş Eşit Genişlikli Dalga Denkleminin Sayısal Çözümleri”, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 9-29 , Malatya, 2011.

9. Yağmurlu, N.M., “2-Boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin B-Spline sonlu eleman yöntemleri ile nümerik çözümleri*”, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s.11, Malatya, 2011.

10. Dağ, İ., “Studies of B-spline finite elements”, *Ph. D. Thesis, University College of North Wales”*, s. 5-8, Bangor, Gwynedd (UK), 1994.

11. Cheney, W. and Kincaid, D., “Numerical mathematics and computing” *Sixth Edition*, Thomson, 2008.

12. Prenter, P.M., “Splines and Variational Methods”, *John Wiley & Sons*, New York, 1975.

13. Stasa, F.L., “ Applied finite element Analysis for Engineers” *CBS College Publishing, s.* 121-129, New York, 1985.

14. Reddy, J. N., “An introduction to nonlinear finite element analysis”, *Oxford Universty Press ınc.*, s. 18-22, New York 2004.

15. Peregrine, D.H., “Calculations of the development of an undular bore”, *J. Fluid Mech.*, 25 s. 321-330, 1996.

16. Peregrine, D.H., “Long waves on a beach”, *J. Fluid Mech., 27*, s. 815–827, 1967.

17. Benjamin, T.B., Bona, J.L., Mahony, J.J., “Model equations for waves in nonlinear dispersive systems”, *Phil. Trans. R. Soc. London, 227*, s. 47–78, 1972.

18. Bona, J.L., Bryant, P.J., “A mathematical model for long waves generated by wave makers in nonlinear dispersive systems”, *Proc. Cambridge Philos. Soc., 73*, s. 391–405, 1973.

19. Eilbeck, J.C., McGuire, G.R., “ Numerical study of the regularized long wave equation II: Interaction of solitary wave”, *J. Comput. Phys., 23*, s. 63-73, 1977.

20. Jain, P.C., Shankar, R., Singh, T.V., “Numerical solution of regularized long-wave equation”, *Commun. Numer. Methods Eng.*, 9, s. 579-586, 1993.

21. Bhardwaj, D., Shankar, R., “A computational method for regularized long wave equation”, *Comput. Math. Appl.*, 40, s. 1397-1404, 2000.

22. Gou, B.Y., Cao, W.M., “The Fourier pseudospectral method with a restrain operator for the RLW equation”, *J. Comput. Phys.*, 74, s. 110–126, 1988.

23. Islam, S., Haq, S., Ali, A., “A meshfree method for the numerical solution of RLW equation”, *J. Comput. Appl. Math.*, 223, s. 997-1012, 2009.

24. Kaya, D., “A numerical simulation of solitary-wave solutions of the generalized regularized long-wave equation”, *Appl. Math. Comput.*, 149, s. 833-841, 2004.

25. Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Dag, I., “A B-spline finite element method for the regularized long wave equation”, *Commun. Numer. Methods Eng.*, 11, s. 59-68, 1995.

26. Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Dogan, A., “A least-squares finite element scheme for the RLW equation”, *Commun. Numer. Methods Eng.*, 12, s. 795-804, 1996.

27. Dag, I., Özer, M.N., “Approximation of RLW equation by least square cubic B-spline finite element method”, *Appl. Math. Model.*, 25, s. 221-231, 2001.

28. Dogan, A., “ Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin’s method”, *Appl. Math. Model.*, 26, s. 771-783, 2002.

29. Dag, I., Saka, B., Irk, D., “Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation”, *Appl. Math. Comput.*, 159, s. 373-389, 2004.

30. Soliman, A.A., Raslan, K.R., “Collocation method using quadratic B-spline for the RLW equation”, *Int. J. Comput. Math.*, 78, s. 399-412, 2001.

31. Esen, A., Kutluay, S., “Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation”, *Appl. Math. Comput.*, 174, s. 833-845, 2006.

32. Ak, T., Dhawan, S., Karakoc, S.B.G., Bhowmik, S.K., Raslan, Kamal R., “Numerical study of rosenau-KdV equation using finite element method based on collocation approach”, *Math. Model. Anal.*, 22 (3), s. 373-388, 2017.

33. Xiao, Q., Zhao, H., “Nonlinear stability of generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers shock profiles in several dimensions”, *J. Math. Anal. Appl.*, 406, s. 165-187, 2013.

34. Yin, Y.-X., Piao, G.-R., “ Quadratic B-spline finite element method for the Benjamin- Bona-Mahony-Burgers equation”, *East Asian Math.J., 29 (5),* 503–510, 2013.

35. Zarebnia, M., Parvaz, R., “Numerical study of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation”, *Bol. Soc. Parana. Mat.*, 35 (1), 127-138, 2017.

36. Zarebnia, M., Parvaz, R., “Cubic B-spline collocation method for numerical solution of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation”, *Int. J. Math. Comput. Sci.*, 7 (3) 540–543, 2013.

37. Arora, G., Mittal, R.C., Singh, B.K., “Numerical solution of BBM-Burger Equation with quartic B-Spline Collocation Method”, *in: Journal of Engineering Science and Technology Special issue on ICMTEA 2013 Conference*, s. 104-116, 2014.

38. Karakoç, S.B.G., Gao, F., Bhowmik, S.K., " Solitons and shock waves solutions for the rosenau-KdV-RLW equation", *J. Sci. Art,* 4 (45), 1073-1088, 2018.

39. Karakoç, S.B.G., Bhowmik, S.K., Gao, F., "A numerical study using finite element method for generalized Rosenau-Kawahara-RLW equation", *Comput. Methods Differential Equations*, 2018 .

40. Mei, M., Schmeiser, C., "Asymptotic profiles of solutions for the BBM-Burgers equation", *Funkcial. Ekvac.,* 44, 151-170, 2001.

41. Kondo, C., Webler, C.M., "Higher-order for the generalized BBM-Burgers Equation: Existence and convergence Results", *J. Appl. Anal. Int. J.*, 88 (7), 1-17, 2009.

42. Shakeel, M., Hassan, Q.M., Ahmad, J., Naqvi, T., "Exact solutions of the time fractional BBM-Burger equation by novel (G′ /G)-expansion method", *Hindawi Publishing Corporation, Adv. Math. Phys.* 181594, s. 15, 2014.

43. Abazari, R., "General solution of a special class on nonlinear BBM-B equation by using the (G′ /G)-Expansion Method", *Rom. Rep. Phys.*, 66 (2), 286-295, 2014.

44. Mohebbi, A., Faraz, Z., "Solitary wave solution of nonlinear Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation using a high-order difference scheme", *Comput. Appl. Math.,* 36, 915-927, 2017.

45. Ganji, D.D., Babazadeh, H., Jalaei, M.H., Tashakkorian, H., "Application of He's variational iteration method for solving nonlinear BBMB equations and free vibration of systems", *Acta Appl. Math.*, 106, 359-367, 2009.

46. Hong, B., Lu, D., " Homotopic approximate solutions for the general perturbed Burgers-BBM equation", *J. Inf. Comput. Sci.*, 11 (11), 4003-4011, 2014.

47. Kadri, T., Khiari, N., Abidi, F., Omrani, K., " Methods for the numerical solution of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation", *Numer Methods Partial Differential Equations*, 24 (6), 1501-1516, 2008.

48. Alquran, M., Al-Khaled, K., "Sinc and solitary wave solutionsto the generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations", *Phys. Scr.*, 83, 065010, s. 6, 2011.

49. Al-Khaled, K., Momani, S., Alawneh, A., “ Approximate wave solutions for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equations”, *Appl. Math. Comput.*, 171 281–292, 2005.

50. El-Wakil, S.A., Abdou, M.A., Hendi, A., “ New periodic wave solutions via Exp-function method”, *Phys. Lett. A*, 372, 830-840, 2008.

51. Fakhari, A., Domairry, G., Ebrahimpour, “Approximate explicit solutions of nonlinear BBM-B equations by homotopy analysis method and comparison with the exact solution”, *Phys. Lett. A,* 368, 64-68, 2007.

52. Karakoç, S. B. G., Bhowmik, S. K. , “Galerkin finite element solution for Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation with cubic B-splines”, *Computers & Mathematics with Applications*, c. 77, s. 7, ss. 1917-1932, Nis. 2019.

53. Atouani, N., Omrani, K., “Galerkin nite element method for the Rosenau-RLW equation”, *Comput. Math. Appl.*, 66 (3), 289-303, 2013.

54. Ciarlet, P.G., “The Finite Element Method for Elliptic Problems”, *Society for Industrial and Applied Mathematics,* 2002.

55. Thomée, Vider “Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems”, *Springer Series in computational Mathematics*, 1997.

56. Karakoç, S. B. G, Ali, K. K., “Theoretical and computational structures on solitary wave solutions of Benjamin Bona Mahony-Burgers equation”, *Tbilisi Mathematical Journal*, 14(2), 33-50, 2021