

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DOĞURAN
ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU İLE
ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Ayşe ATA**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Mehmet ŞENOL**

**Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi**

**Haziran 2022
NEVŞEHİR**

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DOĞURAN
ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU İLE
ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Ayşe ATA**

**Tez Danışmanları
Doç. Dr. Mehmet ŞENOL
Doç. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR**

**Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi**

**Haziran 2022
NEVŞEHİR**

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve tez çalışma sürecinde bana kıymetli vaktini ayıran, bütün bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen, bu süreçte eşsiz bilgi birikimleriyle yetişmeme ve gelişmeme katkıda bulunan çok kıymetli danışman hocalarım sayın Doç. Dr. Mehmet ŞENOL ve sayın Doç. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü çalışmalarım boyunca değerli tavsiyelerinden ve desteklerinden yararlandığım sayın Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ'a teşekkürlerimi sunarım.

İlgi ve desteklerini her zaman hissettiğim annem Emine ÖZ'e, babam Hasan ÖZ'e, kardeşlerime ve eşime sonsuz teşekkür ederim. Bu tezi, hayatıma anlam katan çocuklarım Mehmet Kağan ATA ve Hakan ATA'ya ithaf ediyorum.

**KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ
HİLBERT UZAYI METODU İLE ÇÖZÜMLERİ
(Doktora Tezi)**

Ayşe ATA

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Haziran 2022

ÖZET

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, kesir mertebeli türev ve doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu hakkında tarihsel gelişim ve literatür taraması verilmiştir. İkinci bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan temel tanım, teorem ve ön bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Bagley-Torvik denkleminin klasik doğuran çekirdekli Hilbert uzayı ve Legendre doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu kullanılarak nümerik çözümleri elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, Troesch denkleminin nümerik çözümlerini elde etmek için klasik doğuran çekirdekli Hilbert uzayı ve Legendre doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu kullanılmıştır. Beşinci bölümde, lineer olmayan çoklu mertebeden kesirli türev içeren çok noktalı başlangıç-sınır değer problemlerinin nümerik çözümlerini elde etmek için ek baz kullanılarak Legendre doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu uygulanmıştır. Altıncı bölümde, lineer ve lineer olmayan Volterra ve Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için ek baz yöntemiyle Legendre doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu kullanılmıştır. Son bölümde, tartışma, sonuç ve değerlendirme yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Doğuran çekirdek, Hilbert uzayı, Legendre polinomları, Gram-Schmidt ortogonalleştirme, Caputo türevi.

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet ŞENOL

2. Tez Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR

Sayfa Adedi: 131

**SOLUTIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH
REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACE METHOD**

(PhD Thesis)

Ayşe ATA

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

June 2022

ABSTRACT

This thesis consists of seven chapters. In the first chapter, the historical development and literature review about the fractional derivative and the reproducing kernel Hilbert space method are given. In the second chapter, some definitions, theorems and preliminaries are given for use the following chapters. In the third chapter, numerical solution of Bagley-Torvik equation is obtained by using classical reproducing kernel Hilbert space method and Legendre reproducing kernel Hilbert space method. In the fourth chapter, numerical solutions of the Troesch equation, are obtained by using classical reproducing kernel Hilbert space method and Legendre reproducing kernel Hilbert space method. In the fifth chapter, numerical solutions of multi-order fractional nonlinear three-point boundary value problems are obtained by using the Legendre reproducing kernel Hilbert space method with additional basis. In the sixth chapter, Legendre reproducing kernel Hilbert space method with by using additional basis is used to achieve numerical solution of linear and non-linear Volterra and Fredholm integro-differential equations. Finally, last chapter is consist of discussion and conclusion which is an evaluation of the thesis.

Keywords: Reproducing kernel, Hilbert space, Legendre polynomial, Gram-Schmidt orthogonalization process, Caputo derivative.

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet ŞENOL

Co-Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet Gıyas SAKAR

Number of Pages: 131

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLOLAR LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ	xii
SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xiv
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
TEMEL TANIMLAR VE ÖN BİLGİLER.....	4
2.1. Kesir Mertebeli Türev Hakkında Bazı Temel Bilgiler.....	4
2.2. Doğuran Çekirdek Uzayı ve Doğuran Çekirdek Fonksiyonu için Bazı Temel Bilgiler.....	5
2.3. $W_2^m[a, b]$ Doğuran Çekirdek Uzayı ve Doğuran Çekirdek Fonksiyonu.....	12
2.4. $W_2^m[a, b]$ Uzayında Doğuran Çekirdek Fonksiyonu $R_y(\eta)$ 'nin Bulunması	15
2.5. Baz Fonksiyon ve Birinci Tip Shifted Legendre Doğuran Çekirdek	17
2.6. Shifted Legendre Doğuran Çekirdek Yaklaşımı	19
2.7. Volterra ve Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler.....	20
3. BÖLÜM	
BAGLEY-TORVIK DENKLEMİNİN KLASİK DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU (K-RKM) VE LEGENDRE DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU (L-RKM) İLE ÇÖZÜMÜ	22

3.1.	Doğuran Çekirdekli Hilbert Uzaylar	23
3.2.	$W_2^3[a, b]$ Uzayında Yaklaşık Çözümün Oluşturulması	27
3.3.	Baz Fonksiyon ve Legendre Doğuran Çekirdek	32
3.4.	Legendre Doğuran Çekirdek Yaklaşımı.....	33
3.5.	Legendre Doğuran Çekirdek Metodu (L-RKM)	35
3.5.1.	${}^0P_\rho^m[0,1]$ Uzayında Tam Çözümün Temsili	35
4. BÖLÜM		
TROESCH DENKLEMİNİN KLASİK DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU VE LEGENDRE DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU İLE ÇÖZÜMÜ		
		47
4.1.	Doğuran Çekirdekli Hilbert Uzaylar	48
4.2.	$W_2^3[a, b]$ Uzayında Yaklaşık Çözümün Oluşturulması	53
4.3.	İteratif Sürecin Oluşturulması.	57
4.4.	Legendre Doğuran Çekirdek Yaklaşımı.....	59
4.5.	Legendre Doğuran Çekirdek Metodu (L-RKM).	60
4.6.	İteratif Sürecin Oluşturulması.	64
5. BÖLÜM		
ÇOKLU MERTEBEDEN KESİRLİ TÜREV İÇEREN ÇOK NOKTALI BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN EK BAZLI LEGENDRE DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU İLE ÇÖZÜMÜ.....		
		70
5.1.	Legendre Doğuran Çekirdek Metodu (L-RKM)	71
5.2.	İteratif Sürecin Oluşturulması.	75
6. BÖLÜM		
KESİRLİ MERTEBEDEN VOLTERRA VE FREDHOLM İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN EK BAZLI LEGENDRE DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU İLE ÇÖZÜMÜ.....		
		82
6.1.	Legendre Doğuran Çekirdek Metodu (L-RKM)	83

7. BÖLÜM

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....	96
KAYNAKLAR	97
ÖZGEÇMİŞ	113



TABLolar LİSTESİ

Tablo 3.1.	Örnek 3.1.'de K-RKM yöntemi kullanılarak $m = 10$ için hesaplanan yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri.	40
Tablo 3.2.	Örnek 3.1.'de K-RKM yöntemi kullanılarak $m = 20$, $m = 30$, $m = 40$ değerleri için hesaplanan yaklaşık çözüm ve tam çözüm değerleri.....	41
Tablo 3.3.	Örnek 3.1.'de L-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$ için hesaplanan yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri.....	42
Tablo 3.4.	Örnek 3.2.'de L-RKM yöntemi kullanarak $m = 4$ için hesaplanan yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri.....	43
Tablo 3.5.	Örnek 3.3.'te L-RKM yöntemi kullanarak $m = 4$ için hesaplanan yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri.....	45
Tablo 4.1.	Örnek 4.1.'de K-RKM yöntemi kullanarak $m = 5$, $n = 5$, $\gamma = 1$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_5^5(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri.....	66
Tablo 4.2.	Örnek 4.1.'de K-RKM yöntemi kullanarak $m = 5$, $n = 5$, $\gamma = 0.5$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_5^5(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri.....	66
Tablo 4.3.	Örnek 4.1.'de K-RKM yöntemi kullanarak $m = 5$, $n = 5$, $\gamma = 0.1$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_5^5(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri.....	67
Tablo 4.4.	Örnek 4.1.'de K-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 5$, $\gamma = 1$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_3^5(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri.....	67
Tablo 4.5.	Örnek 4.1.'de K-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 5$, $\gamma = 0.5$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_3^5(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri.....	68

Tablo 4.6.	Örnek 4.1.'de K-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 5$, $\gamma = 0.1$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_3^5(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri..... 68
Tablo 4.7.	Farklı yöntemler kullanarak $\alpha = 2$ ve $\gamma = 1$ için Troesch denkleminin yaklaşık çözümleri 69
Tablo 4.8.	Farklı yöntemler kullanarak $\alpha = 2$ ve $\gamma = 1$ için Troesch denkleminin mutlak hata değerleri69
Tablo 5.1.	Örnek 5.1.'de L-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 15$ ve farklı α, β değerleri için hesaplanan mutlak hata değerleri..... 77
Tablo 5.2.	Örnek 5.1.'de L-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 20$ ve farklı α, β değerleri için hesaplanan mutlak hata değerleri..... 78
Tablo 5.3.	Örnek 5.1.'de L-RKM yöntemi kullanarak $m = 4$, $n = 25$ ve $\alpha = 1.75$, $\beta = 0.75$ değerleri için hesaplanan u_4^{25} yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri..... 78
Tablo 5.4.	Örnek 5.2.'de L-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 15$ ve farklı α, β değerleri için hesaplanan mutlak hata değerleri..... 80
Tablo 5.5.	Örnek 5.2.'de L-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 20$ ve farklı α, β değerleri için hesaplanan mutlak hata değerleri..... 80
Tablo 5.6.	Örnek 5.2.'de L-RKM yöntemi kullanarak $m = 4$, $n = 25$ ve $\alpha = 1.75$, $\beta = 0.75$ değerleri için hesaplanan u_4^{25} yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri..... 81
Tablo 6.1.	Örnek 6.1.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m = 7$ ve farklı α değerleri için hesaplanan yaklaşık çözümler ile $\alpha = 4$ için yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri..... 88
Tablo 6.2.	Örnek 6.1.'de $m = 7$ için hesaplanan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4 değerleri.....89
Tablo 6.3.	Örnek 6.2.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m = 7$, $n = 20$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_7^{20}(x)$ yaklaşık çözümleri, tam çözüm ve mutlak hata değerleri..... 90

Tablo 6.4.	Örnek 6.2.'de $m = 7, n = 20$ için hesaplanan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4 değerleri.....	90
Tablo 6.5.	Örnek 6.3.'te ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m = 7$ ve farklı α değerleri için hesaplanan yaklaşık çözümler ile $\alpha = 4$ için yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri.....	92
Tablo 6.6.	Örnek 6.3.'te $m = 7$ için hesaplanan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4 değerleri.....	92
Tablo 6.7.	Örnek 6.4.'te ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m = 7, n = 20$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_7^{20}(x)$ yaklaşık çözümleri, tam çözüm ve mutlak hata değerleri.....	93
Tablo 6.8.	Örnek 6.4.'te $n = 20, m = 7$ için hesaplanan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4 değerleri.....	94

ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 3.1. Örnek 3.1.'de K-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 10$ için tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 10$ için mutlak hata grafiği.....41
- Şekil 3.2. Örnek 3.1.'de L-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 3$ için tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 3$ için mutlak hata grafiği.....42
- Şekil 3.3. Örnek 3.2.'de L-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 4$ için tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 4$ için mutlak hata grafiği..... 44
- Şekil 3.4. Örnek 3.3.'de L-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 4$ için tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 4$ için mutlak hata grafiği.....46
- Şekil 5.1. Örnek 5.1. de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 4, n = 25$ ve $\alpha = 1.75, \beta = 0.75$ değerleri için hesaplanan $u_{25}^4(x)$ yaklaşık çözüm ve tam çözümün karşılaştırma grafiği b) $m = 4, n = 25$ ve $\alpha = 1.75, \beta = 0.75$ değerleri için mutlak hata grafiği.....79
- Şekil 5.2. Örnek 5.2.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 4, n = 25$ ve $\alpha = 1.75, \beta = 0.75$ değerleri için hesaplanan $u_{25}^4(x)$ yaklaşık çözüm ve tam çözümün karşılaştırma grafiği b) $m = 4, n = 25$ ve $\alpha = 1.75, \beta = 0.75$ değerleri için mutlak hata grafiği.....81
- Şekil 6.1. Örnek 6.1.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanılarak a) $m = 7$ ve $\alpha = 4$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırma grafiği b) $m = 7$ için mutlak hata grafiği.....89
- Şekil 6.2. Örnek 6.2.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanılarak a) $m = 7, n = 20$ ve $\alpha = 4$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırma grafiği b) $m = 7, n = 20$ ve $\alpha = 4$ için mutlak hata grafiği.....91

- Şekil 6.3. Örnek 6.3.'te ek bazlı L-RKM yöntemi kullanılarak a) $m = 7$ ve $\alpha = 4$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırma grafiği b) $m = 7$ için mutlak hata grafiği.....92
- Şekil 6.4. Örnek 6.2.'te ek bazlı L-RKM yöntemi kullanılarak a) $m = 7$, $n = 20$ ve $\alpha = 4$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırma grafiği b) $m = 7$, $n = 20$ ve $\alpha = 4$ için mutlak hata grafiği.....94



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
$\langle \cdot \rangle$	İç Çarpım fonksiyonu
$\ \cdot \ $	Norm fonksiyonu
\perp	Diklik sembolü
\hookrightarrow	Gömme (embedding) sembolü
$AC[a, b]$	$[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon kümesi
$R_y(x)$	Doğuran çekirdek fonksiyonu
K-RKM	Klasik doğuran çekirdekli Hilber uzayı
L-RKM	Legendre doğuran çekirdekli Hilbert uzayı
RKHS	Doğuran çekirdekli Hilbert uzayı

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Diferansiyel denklemler fiziksel olayların anlaşılmasında ve modellenmesinde oldukça önemlidir. Bu nedenle mühendislik, fizik, astronomi, biyoloji, kimya, ekonomi, tıp ve sosyal bilimler gibi birçok bilim alanında önemli bir yer tutmaktadır. Diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri yalnızca temel düzeydeki denklemler için mümkünken daha karmaşık yapıdaki denklemlerde bu durum genellikle mümkün olmayabilir. Bu sebeple diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri, üzerinde çalışılan modelin nitel ve nicel sonuçlarının bulunmasında büyük bir öneme sahiptir.

Uzun yıllar boyunca tamsayı mertebeden türev içeren diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik sonuçları üzerine çalışan bilim insanları, ilk defa 1695 yılında Leibniz'in L'Hospital'e yazdığı mektupla türev operatörünün mertebesinin kesirli olması durumunda ne olacağı sorusuyla karşılaştı. Liouville, Grünwald, Letnikov ve Riemann kesirli mertebeden türev operatörü üzerinde çalışmalar yaparak teoremin gelişmesine büyük katkı sağladılar. Kesirli mertebeden türev sayesinde mühendislik, fizik, akışkanlar dinamiği, akışkanlar mekaniği, dinamik sistemler, kontrol teorisi, ısı transferi, petrol sanayisi gibi birçok bilim alanında yapılan çalışmalarda modellenen yapının davranışlarını ve süreci daha iyi ifade ettiği görüldü. Bu tez çalışmasında, kesirli mertebeden türev içeren diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini sonlu ve sonsuz boyutlu doğuran çekirdekli Hilbert uzaylarında bulunması amaçlandı.

Doğuran çekirdekli Hilbert uzayı, ilk defa 1907 yılında Zaremba tarafından harmonik ve biharmonik fonksiyonların sınır değer problemlerinin çözümünde ele alındı [1-2]. Bu çalışma ile birlikte doğuran çekirdek kavramı ve çekirdeğin doğurma özelliği ifade edildi. Zaremba'nın çalışmasından kısa bir süre sonra 1909 yılında Mercer, bu teoriyi pozitif tanımlı çekirdekler adı altında genişletti ve integral denklemlerin sürekli çekirdekleri için

$$\sum_{i,j}^n K(x_i, y_j) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad (1.1)$$

eşitsizliğini buldu [3-4]. Mercer'in yaptığı çalışmaları daha da ileri taşıyan Moore, 1916'dan 1939 yılına kadar Mercer'in yaptığı çalışmaları ileri taşıyarak bu çekirdekleri pozitif Hermityen matrisi adı altında çalıştı ve integral denklemlerin genelleştirilmiş bir haline uyguladı. Moore, araştırmaları sonucunda her bir Hermityen matrisine bir Hilbert uzayının karşılık geldiğini ve çekirdek fonksiyonununun

$$f(y) = \langle f(x), K(x, y) \rangle \quad (1.2)$$

eşitliği ile doğurma özelliğine sahip olduğunu gösterdi [5-6].

Doğuran çekirdek teorisi 1920-1940 yılları arasında Bergman tarafından ileri taşınarak bir ya da daha fazla değişkenli analitik ve harmonik fonksiyonların çekirdeklerini oluşturup bunları eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin çözümü için kullandı. Bu dönemde kullanılan çekirdeklerin çoğu Bergman çekirdekleridir [7].

Bochner, 1933 yılında yaptığı çalışmada pozitif tanımlı fonksiyonlar adı altında Fourier dönüşümü torisinde uygulama yapmak amacıyla x değişkenine bağlı $\phi(x)$ sürekli fonksiyonunu ele alarak pozitif tanımlı çekirdek olma şartını sağlayan

$$k(x, y) = \phi(x - y) \quad (1.3)$$

çekirdeğini kullandı [8].

1950'li yıllara gelindiğinde Aronszajn, doğuran çekirdek teorisini genel anlamda toparlayarak daha sistematik bir hale getirdi [9]. Schwartz, 1964 yılında bu teoriyi büyük ölçüde genişletti [10].

21. yüzyılın başlarından itibaren doğuran çekirdek teorisi birçok bilim insanı tarafından farklı türdeki denklemlere uygulandı. Doğuran çekirdekli Hilbert uzayı (RKHS) metodunu, Yang ve Cui lineer olmayan integro-diferansiyel denklemlere [11], Yu-lan ve Lu değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklemlere uyguladı [12]. Aynı yılda Cui ve Lin, yayınladıkları kitapta doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu ile ilgili geniş kapsamlı bilgiler vererek literatüre büyük katkı sağladılar [13]. RKHS metodunu Yang ve Lin, ikinci mertebeden lineer hiperbolik başlangıç sınır değer problemine [14], Mu ve Du, lokal olmayan sınır şartlarına sahip parabolik denkleme [15], Li ve Cui, tek

boyutlu değişken katsayılı Burgers denklemine [16], Lin ve Zhou, lokal olmayan başlangıç sınır şartlarına sahip reaksiyon-difüzyon denklemine [17], Yao, integral sınır şartlı lineer olmayan hiperbolik telgraf denklemine uyguladılar [18]. Jiang ve Lin, iki farklı çalışmanın birinde kesirli mertebeden adveksiyon-dispersiyon denklemi diğer çalışmada ise kesir mertebeli telgraf denklemine uyguladılar [19-20]. Wang ve arkadaşları, RKHS metodunu her biri farklı bir çalışma olmak üzere singüler pertürbe kısmi diferansiyel denkleme, klasik olmayan sınır şartlarının kabul edildiği kesirli mertebeden türeve sahip kısmi diferansiyel denkleme uygulayıp farklı bir çalışmalarında ise singüler pertürbe kısmi diferansiyel denklemine RKHS metodu ve pertürbasyon metodunu uygulayarak elde edilen sonuçların karşılaştırmasını yaptılar [21-23]. Li ve Wu, her biri farklı çalışmalar olmak üzere lokal olmayan sınır şartlarına sahip parabolik denklemlere ve değişken kesirli mertebeden fonksiyonel sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için RKHS yöntemini kullandılar [24-25]. Mohammadi ve Mokhtari, genelleştirilmiş regüler uzun dalga denklemi ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için RKHS metodunu kullandılar [26-27]. Akgül ve arkadaşları, bir boyutlu sine-Gordon denkleminin nümerik çözümleri için RKHS metodunu kullandı [28]. Arqub yaptığı farklı çalışmalarda, başlangıç ve Neuman sınır şartlı kesirli mertebeden türev içeren kısmi diferansiyel denklem ile başlangıç ve Robin sınır şartları içeren zaman kesir mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için RKHS metodunu kullandı [29-30]. Mei ve arkadaşları, gecikmeli impulsif diferansiyel denkleme [31], Geng ve arkadaşları singüler pertürbe parametresi içeren tek boyutlu başlangıç Bratu denkleminde sınır değer problemi için RKHS yöntemini kullandılar [32]. Sakar, Ricatti denklemine iteratif doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu uygulayarak nümerik sonuçları elde etti [33]. Sakar ve arkadaşları, doğuran çekirdekli Hilbert uzayı yönteminde shifted Legendre polinomlarını kullanarak yönteme yeni bir bakış açısı getirip bu tekniği kesirli mertebeden türev içeren Bratu denklemine uyguladılar [34]. Sakar ve Saldır, çoklu mertebeden kesirli türev içeren lineer olmayan üç noktalı başlangıç-sınır değer problemine doğuran çekirdek metodunda shifted Legendre polinomlarını kullanarak yaklaşık çözümleri inşa ettiler [35].

2. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE ÖN BİLGİLER

2.1 Kesir Mertebeli Türev Hakkında Bazı Temel Bilgiler

Tanım 2.1. Gama fonksiyonu (Γ), $p > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir [36].

Tanım 2.2. Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu $E_{\alpha}(p)$ ve iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu $E_{\alpha,\beta}(p)$ sırasıyla

$$E_{\alpha}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0 \quad (2.2)$$

ve

$$E_{\alpha,\beta}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır [37].

Tanım 2.3. $f \in C[a, b]$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere, $f(p)$ fonksiyonunun α mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville integrali

$$J_a^{\alpha} f(p) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^p (p-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad a < p < b \quad (2.4)$$

şeklinde gösterilir [37].

Tanım 2.4. $f \in C[a, b]$ ve $n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(p)$ fonksiyonunun α mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville türevi

$$D_a^\alpha f(p) = \frac{d^n}{dx^n} [J_a^{n-\alpha} f(p)], \quad a < p < b \quad (2.5)$$

olarak ifade edilir [37-39].

Tanım 2.5. $f \in AC^n[a, b]$ ve $n - 1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(p)$ fonksiyonunun α mertebeden sol taraflı Caputo türevi

$$D_{*a}^\alpha f(p) = J_a^{n-\alpha} f^{(n)}(p) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left\{ \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(p-t)^{\alpha+1-n}} dt \right\} \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilir [37-39].

2.2 Doğuran Çekirdek Uzayı ve Doğuran Çekirdek Fonksiyonu İçin Bazı Temel Bilgiler

Tanım 2.7. F , \mathbb{C} (kompleks sayılar cismi) üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\langle ., . \rangle: F \times F \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu aşağıda verilen şartlarını sağlıyorsa $\langle ., . \rangle$ dönüşümü F de bir iç çarpım olarak adlandırılır.

$$a) \forall x \in F \text{ için } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$b) \forall x \in F \text{ için } \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$c) \forall x, y \in F \text{ için } \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$d) \forall x, y \in F \text{ ve } \gamma \in \mathbb{C} \text{ için } \langle \gamma x, y \rangle = \gamma \langle x, y \rangle$$

$$e) \forall x, y, z \in F \text{ için } \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Eğer $\langle ., . \rangle$ fonksiyonu F vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım ise $(F, \langle ., . \rangle)$ ifadesine iç çarpım uzayı denir [40].

Tanım 2.8. $(F, \langle ., . \rangle)$ uzayı, üzerinde tanımlı iç çarpım metriğine göre tam ise bu uzaya Hilbert uzayı denir [41].

Tanım 2.9. $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uzayında bulunan herhangi x, y vektörü için $\langle x, y \rangle = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu vektörlere ortogonaldır denir. $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uzayında ortogonallık " \perp " sembolü ile gösterilir [42].

Tanım 2.10. H_1, H_2 Hilbert uzayları ve $P \in L(H_1, H_2)$ olsun. Her $x \in H_1$ ve $y \in H_2$ için $\langle Px, y \rangle = \langle x, P^*y \rangle$ olacak şekilde sürekli lineer P^* operatörüne P 'nin Hilbert adjointi denir. Eğer $P^* = P$ veya her $x, y \in H_1$ ve $P \in L(H_1, H_1)$ için $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ ise P 'ye self adjoint operatör denir [40].

Tanım 2.11. H , bir Hilbert uzayı olsun. $i \neq j$ için $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ ve $\forall i$ için $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ özelliğine sahip $\{e_i\}$ dizisine ortonormal dizi denir [41].

Tanım 2.12. H , bir Hilbert uzayı olsun. Bu uzaydaki $\{e_i\}$ ortonormal dizinin tam olması için gerek ve yeter şart $\forall i$ için $\langle x, e_i \rangle = 0$ ise $x = 0$ olmasıdır [41].

Tanım 2.13. X , normlu bir lineer uzay olsun. $f: X \rightarrow \mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ya da $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) operatörüne fonksiyonel denir. Eğer bu fonksiyonel lineer ise lineer fonksiyonel denir [41].

Tanım 2.14. H , bir fonksiyonel Hilbert uzayı olsun. $E_t: H \rightarrow \mathbb{F}$ dönüşümüne lineer hesaplama fonksiyoneli (evaluation functional) denir. Bu dönüşüm $E_t(f) = f(t)$ olarak ifade edilir [43].

Teorem 2.1. (Riesz Temsil Teoremi) H , fonksiyonellerin bir Hilbert uzayı olsun. $f: H \rightarrow \mathbb{C}$ sınırlı lineer bir fonksiyonel ise her $x \in H$ için $f(x) = \langle x, h_f \rangle$ olacak şekilde tek bir $h_f \in H$ vardır ve $\|h_f\| = \|f\|$ dir [41].

Tanım 2.15. A, H Hilbert uzayının kapalı bir alt uzayı olsun. A^\perp , A 'nın ortogonal tümleyeni olmak üzere $H = A \oplus A^\perp$, yani H hilbert uzayı A ile A^\perp direkt toplamı şeklinde ifade edilebilir. $a \in A, b \in A^\perp$ ve $c \in H$ için $c = b + a$ yazılır. Buradan $P: H \rightarrow H$ olmak üzere $Pc = c$ şeklinde tanımlanan lineer operatöre H 'nin A üzerine ortogonal projeksiyonu denir [44].

Teorem 2.2. H Hilbert uzayı ve P^* , P 'nin self-adjoint operatörü olmak üzere $P: H \rightarrow H$ lineer operatörün ortogonal projeksiyon olması için gerek ve yeter şart $P = P^* = P^2$ olmasıdır [44].

Tanım 2.16. (Gram-Schmidt Süreci) X bir iç çarpım uzayı, (u_n) ise bu uzayda lineer bağımsız vektörlerin dizisi olsun.

$$v_1 = u_1 \quad (2.7)$$

$$x_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad (2.8)$$

birim vektör olmak üzere (v_k) dizisi

$$v_k = u_k - \sum_{n=1}^{k-1} \langle u_k, x_n \rangle x_n \quad (2.9)$$

$$x_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}, k = 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

şeklinde verilir. Tümevarım yöntemi ile bu dizisinin ortonormal olduğu gösterilebilir. v_1, v_2, \dots, v_{k-1} vektörlerinin ortogonal olduklarını kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \langle v_2, v_1 \rangle &= \langle u_2 - \langle u_2, x_1 \rangle u_1 \rangle \\ &= \langle u_2, u_1 \rangle - \langle u_2, x_1 \rangle \langle x_1, u_1 \rangle \\ &= \langle u_2, u_1 \rangle - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle \langle u_1, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

elde edilir.

Herhangi bir $m < k$ için

$$\langle v_k, v_m \rangle = \langle u_k, v_m \rangle - \frac{\sum_{n=1}^{k-1} \langle u_k, v_n \rangle \langle v_n, v_m \rangle}{\|v_m\|^2} = \langle u_k, v_m \rangle - \frac{\langle u_k, v_m \rangle \langle v_m, v_m \rangle}{\|v_m\|^2} = 0. \quad (2.12)$$

Elde edilen bu denklem sayesinde v_1, v_2, \dots, v_k vektörlerinin ortogonal olduğu ifade edilir. (v_n) dizisi ortogonal ve (x_n) dizisi ortonormaldir [42].

Tanım 2.17. X bir metrik uzay olsun. $A \subseteq X$ ve $\bar{A} = X$ ise A kümesi X uzayında yoğundur denir. Bu durumda X 'in her noktası A 'nın bir limit noktasıdır [45].

Tanım 2.18. X bir metrik uzay olsun. X uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi var ise bu uzaya ayrılabilir denir [45].

Tanım 2.19. $1 \leq p < \infty$ ve $(x_n) \in l_p$ için l_p ve $\|x_n\|_p$ sırasıyla

$$l_p = \left\{ (x_n) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\} \quad (2.13)$$

$$\|x_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \quad (2.14)$$

olarak ifade edilir. $\|\cdot\|_p$ operatörü l_p 'de bir normdur ve standart norm olarak adlandırılır [46].

Tanım 2.20. $1 \leq p < \infty$ ve $X = [a, b]$ olmak üzere $L^p[a, b]$ uzayı

$$L^p(X) = \left\{ f: f \text{ ölçülebilir ve } \left(\int_a^b |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty \right\} \quad (2.15)$$

şeklinde ifade edilir. Lebesgue ölçüsüne göre $|f|^p$ 'nin integrali alınmaktadır. $L^p[a, b]$ uzayı $f \in C[a, b]$ için

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad (2.16)$$

normu ile bir normlu uzaydır [46].

Teorem 2.3. (Sobolev Gömülme) T , \mathbb{R}^n 'in tanım kümesi ve T^k , T ile $k -$ boyutlu ve $n -$ düzleminin kesişiminden elde edilmiş bir küme olsun $1 \leq k \leq n$. Dolayısıyla $T^k \equiv T$ olur. $j \geq 0$, $l \geq 0$, $j, l \in \mathbb{Z}$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun T koni özelliğine sahip ise aşağıda verilen gömülmeler oluşur.

a) $lp < n$ ve $n - lp < k \leq n$ veya $p = 1$ ve $n - l \leq k \leq n$ ise

$$W_p^{j+l}(D) \hookrightarrow W_q^j(D_k), \quad p \leq q \leq p^* = \frac{kp}{n-lp} \quad (2.17)$$

özel olarak

$$W_p^m(D) \hookrightarrow L^q(D), \quad p \leq q \leq p^* = \frac{np}{n-lp} \quad (2.18)$$

olur.

b) $1 \leq k \leq n$ ve $lp = n$ ise $p \leq q < \infty$ için

$$W_p^{j+l}(D) \hookrightarrow W_q^j(D_k) \quad (2.19)$$

olur.

c) $lp > n$ veya $l = n$ ve $p = 1$ ise

$$W_p^{j+l}(D) \hookrightarrow C_B^j(D) \quad (2.20)$$

ayrıca $1 \leq k \leq n$ olduğundan $p \leq q \leq \infty$ ise

$$W_p^{j+l}(D) \hookrightarrow W_q^j(D_k) \quad (2.21)$$

olur. Özel olarak $p \leq q \leq \infty$ için

$$W_p^l(D) \hookrightarrow L^q(D) \quad (2.22)$$

olur [47].

Teorem 2.4. Her H Hilbert uzayı yansımalıdır [40].

Tanım 2.21.

$$H = \{f(\eta): f(\eta) \text{ reel veya kompleks değerli bir fonksiyon, } \eta \in X\} \quad (2.23)$$

kümesi, $\langle f(\eta), g(\eta) \rangle_H$ iç çarpımı ile tanımlı bir Hilbert uzayı olsun. Eğer her $y \in X$ ve her bir $f(\eta) \in H$ için $\langle f(\eta), R_y(\eta) \rangle_H = f(y)$ eşitliğini sağlayan $R_y(\eta) \in H$ varsa

$R_y(\eta)$ fonksiyonuna H Hilbert uzayının doğuran çekirdeği ve H Hilbert uzayına da doğuran çekirdekli Hilbert uzayı denir [48].

Teorem 2.5. H doğuran çekirdekli bir Hilbert uzayı ve R_y , H Hilbert uzayının doğuran çekirdeği olsun. $R_y(\eta) = \overline{R_\eta(y)}$ sağlanıyorsa R_y doğuran çekirdeği simetrik eşleniktir denir [48].

İspat. İç çarpım ve doğurma özelliği kullanılarak,

$$R_y(\eta) = \langle R_y(\cdot), R_\eta(\cdot) \rangle_H = \overline{\langle R_\eta(\cdot), R_y(\cdot) \rangle_H} = \overline{R_\eta(y)} \quad (2.24)$$

eşitliği elde edilir. Bu durum ispatı tamamlar. \square

Teorem 2.6. H doğuran çekirdekli bir Hilbert uzayı olsun. H uzayının doğuran çekirdeği iç çarpıma göre tektir [49].

İspat. $R_y(\eta)$ ve $Q_y(\eta)$, H Hilbert uzayının farklı iki doğuran çekirdeği olsun. Bu durumda

$$Q_y(\eta) = \langle Q_y(\cdot), R_\eta(\cdot) \rangle_H = \overline{\langle R_\eta(\cdot), Q_y(\cdot) \rangle_H} = \overline{R_\eta(y)} = R_y(\eta) \quad (2.25)$$

eşitliği sayesinde ispat tamamlanır.

Teorem 2.7. H doğuran çekirdekli bir Hilbert uzayı ve R_y onun çekirdeği olsun. $\forall \eta \in X$ için $R_\eta(\eta) \geq 0$ dır. Ayrıca $R_\eta(\eta) = 0 \Leftrightarrow H = \{0\}$ dır [48].

İspat. Doğuran çekirdek fonksiyonu tanımından yararlanarak

$$R_\eta(\eta) = \langle R_\eta(\cdot), R_\eta(\cdot) \rangle_H = \|R_\eta(\cdot)\|^2 \quad (2.26)$$

eşitliği sayesinde ispat tamamlanır. \square

Teorem 2.8. $\eta_i \in X$ ve $\beta_i \in \mathbb{C}$ için

$$\sum_{i,j=1}^n R_{\eta_i}(\eta_j) \bar{\beta}_i \beta_j \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.27)$$

ise $R_y(\eta)$ doğuran çekirdeği pozitif yarı tanımlı çekirdektir [48].

Teorem 2.9. H Hilbert uzayının doğuran çekirdekli bir uzay olması için gerek ve yeter şart en az bir $\eta \in X$ için $|\mathbf{I}(f)| = |f(\eta)| < M$ olmasıdır [48].

Tanım 2.22. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{F}$ ve $a \leq y_1 < x_1 < \dots < y_n < x_n \leq b$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\exists \delta > 0$ olmak üzere $\sum_{i=1}^n |y_i - x_i| < \delta$ için $\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ şartını sağlayan f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir [46].

Önerme 2.1. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı mutlak sürekli ise aynı zamanda süreklidir [48].

Önerme 2.2. $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı f fonksiyonu için $\eta \in [a, b]$ olmak $|f'(\eta)| \leq K$ eşitsizliği varsa $f(\eta)$ fonksiyonu mutlak süreklidir [48].

Sonuç 2.1. $[a, b]$ aralığında $f'(\eta)$ fonksiyonu sürekli ise aynı aralıkta $f(\eta)$ fonksiyonu mutlak süreklidir [48].

Teorem 2.10 Eğer $f(\eta)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon ise, $\int_a^b f(t)dt$ fonksiyonu aynı aralıkta mutlak süreklidir [48].

İspat. İntegralde mutlak süreklilik tanımı ile keyfi $\varepsilon > 0$ için $\int_E f(t)dt < \varepsilon$ ölçümü $m(E) < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayı vardır. $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ kümesi ikişer ikişer ayrık $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$ özelliğini sağlayan $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ aralıklarının bir kümesi olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^n \left| \int_a^{b_k} f(t)dt - \int_a^{a_k} f(t)dt \right| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{a_k}^{b_k} f(t)dt \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |f(t)| dt$$

$$= \int_{\cup_{k=1}^n (a_k, b_k)} |f(t)| dt < \varepsilon \quad (2.28)$$

olur. Bu durum ispatı tamamlar. \square

2.3 $W_2^m[a, b]$ Doğuran Çekirdek Uzayı ve Doğuran Çekirdek Fonksiyonu

$W_2^m[a, b]$ fonksiyon uzayı ,

$$W_2^m[a, b] = \{f(\eta) | f^{(m-1)}(\eta) \text{ mutlak sürekli, } f^{(m)}(\eta) \in L^2[a, b], \eta \in [a, b]\} \quad (2.29)$$

şeklinde olup bu fonksiyon uzayına ait iç çarpım ve norm sırasıyla

$f(\eta), g(\eta) \in W_2^m[a, b]$ için

$$\langle f, g \rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(\eta)g^{(m)}(\eta)d\eta \quad (2.30)$$

ve

$$\|f\|_{W_2^m} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{W_2^m}} \quad (2.31)$$

olarak ifade edilir. Dolayısıyla $W_2^m[a, b]$ uzayı bir iç çarpım uzayıdır [48].

Teorem 2.11. $W_2^m[a, b]$ uzayı bir Hilbert uzayıdır [48].

İspat. $n = 1, 2, \dots$ için $f_n(\eta)$ dizisi $W_2^m[a, b]$ fonksiyon uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Böylece

$$\|f_{n+p} - f_n\|_{W_2^m}^2 = \sum_{i=0}^{m-1} [f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b [f_{n+p}^{(m)}(\eta) - f_n^{(m)}(\eta)]^2 d\eta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.32)$$

olur. Bu ifadeden,

$$f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (2.33)$$

ve

$$\int_a^b [f_{n+p}^{(m)}(\eta) - f_n^{(m)}(\eta)]^2 d\eta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.34)$$

elde edilir. $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere her i ($0 \leq i \leq m - 1$) için $f_n^{(i)}(a), \mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir ve $f_n^{(i)}(a)$ dizisi de $L^2[a, b]$ uzayında bir Cauchy dizisidir. $\lambda_i \in \mathbb{R}$ için tek $h(x) \in L^2[a, b]$ fonksiyonu vardır böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(i)}(a) \rightarrow \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1 \quad (2.35)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n^{(m)}(\eta) - h(\eta)]^2 d\eta \rightarrow 0 \quad (2.36)$$

ifade edilir.

$$g(\eta) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{i!} (\eta - a)^i + \overbrace{\int_a^\eta \int_a^\eta \dots \int_a^\eta h(\eta) (d\eta)^m}^m \quad (2.37)$$

olduğunu kabul edilirse. $h(\eta) \in L^2[a, b]$ olduğu için $g^{(m-1)}(\eta) = \lambda_{m-1} + \int_a^\eta h(\eta) d\eta$

fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde mutlak süreklidir ve $g^{(m)}(\eta) = h(\eta) \in L^2[a, b]$

şeklinde ifade edilir. Bu durum $[a, b]$ aralığının hemen hemen her yerinde doğrudur.

$g(\eta) \in W_2^m[a, b]$ ve $g^{(i)}(a) = \lambda_i$ için

$$\begin{aligned} \|f_n(\eta) - g(\eta)\|_{W_2^m}^2 &= \sum_{i=0}^{m-1} [f_n^{(i)}(a) - g^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b [f_n^{(m)}(\eta) - g^{(m)}(\eta)]^2 d\eta \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} [f_n^{(i)}(a) - \lambda_i]^2 + \int_a^b [f_n^{(m)}(\eta) - h(\eta)]^2 d\eta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

eşitliklerinden, $W_2^m[a, b]$ fonksiyon uzayı Hilbert uzayıdır.

Teorem 2.12. $W_2^m[a, b]$ uzayı bir doğuran çekirdek uzayıdır [48].

İspat. $W_2^m[a, b]$ uzayında f , $\eta \in [a, b]$ için bir $I(f) = f(\eta)$ lineer fonksiyonel olsun. Böylece

$$f^{(m-1)}(\eta) = f^{(m-1)}(a) + \int_a^\eta f^{(m)}(\eta) d\eta \quad (2.39)$$

ve

$$|f^{(m-1)}(\eta)| \leq |f^{(m-1)}(a)| + \int_a^\eta |f^{(m)}(\eta)| d\eta \leq |f^{(m-1)}(a)| + \int_a^b |f^{(m)}(\eta)| d\eta \quad (2.40)$$

olur. her bir i ($0 \leq i \leq m-1$) için

$$\int_a^b |f^{(m)}(\eta)| d\eta \leq \left[(b-a) \int_a^b |f^{(m)}(\eta)|^2 d\eta \right]^{\frac{1}{2}} = M_0 \left[\int_a^b |f^{(m)}(\eta)|^2 d\eta \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.41)$$

$$\leq M_0 \left[\sum_{i=0}^{m-1} [f^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b |f^{(m)}(\eta)|^2 d\eta \right]^{\frac{1}{2}} = M_0 \|f\|_{W_2^m} \quad (2.42)$$

eşitsizliğinden yararlanarak

$$|f^{(i)}(a)| \leq \left[\sum_{i=0}^{m-1} [f^{(i)}(a)]^2 + \int_a^b |f^{(m)}(\eta)|^2 d\eta \right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{W_2^m} \quad (2.43)$$

ifadesi elde edilir. Böylece,

$$|f^{(m-1)}(\eta)| \leq M_1 \|f\|_{W_2^m} \quad (2.44)$$

$$|f^{(m-2)}(\eta)| \leq |f^{(m-2)}(a)| + \int_a^\eta |f^{(m-1)}(\eta)| d\eta \leq |f^{(m-2)}(a)| + \int_a^b |f^{(m-1)}(\eta)| d\eta$$

ifadesi bulunup (2.43) ve (2.44) eşitsizliklerinden yararlanarak

$$|f^{(m-2)}(\eta)| \leq \|f\|_{W_2^m} + (b-a)M_1 \|f\|_{W_2^m} = M_2 \|f\|_{W_2^m} \quad (2.45)$$

elde edilir. Devam edildiğinde

$$|I(f)| = |f(\eta)| \leq M_m \|f\|_{W_2^m} \quad (2.46)$$

bulunur. $W_2^m[a, b]$ uzayında I sınırlı olduğu için Teorem 2.9'dan yararlanarak $W_2^m[a, b]$ doğuran çekirdekli uzaydır.

2.4. $W_2^m[a, b]$ Uzayında Doğuran Çekirdek Fonksiyonu $R_y(\eta)$ 'nin Bulunması

$R_y(\eta)$ fonksiyonu $W_2^m[a, b]$ uzayının doğuran çekirdek fonksiyonu olduğunu kabul edelim. Her bir $y \in [a, b]$ ve her bir $f(\eta) \in W_2^m[a, b]$ için $R_y(\eta)$ fonksiyonu

$$\langle f(\eta), R_y(\eta) \rangle_{W_2^m} = f(y) \quad (2.47)$$

eşitliği sağlaması gerekmektedir. $W_2^m[a, b]$ üzerinde tanımlanan iç çarpımdan

$$\langle f(\eta), R_y(\eta) \rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial \eta^i} + \int_a^b f^{(m)}(\eta) \frac{\partial^m R_y(\eta)}{\partial \eta^m} d\eta \quad (2.48)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki integral ifadesinde kısmi integrasyon kullanarak

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(m)}(\eta) \frac{\partial^m R_y(\eta)}{\partial \eta^m} &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(\eta) \frac{\partial^{m+i} R_y(\eta)}{\partial \eta^{m+i}} + \\ &(-1)^m \int_a^b f(\eta) \frac{\partial^{2m} R_y(\eta)}{\partial \eta^{2m}} dx \end{aligned} \quad (2.49)$$

yazılabilir. Değişken dönüşümü sayesinde,

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(\eta) \frac{\partial^{m+i} R_y(\eta)}{\partial \eta^{m+i}} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(\eta) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(\eta)}{\partial \eta^{2m-i-1}} \quad (2.50)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\langle f(\eta), R_y(\eta) \rangle &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \left[\frac{\partial^i R_y(a)}{\partial \eta^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial \eta^{2m-i-1}} \right] \\
&+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(b) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial \eta^{2m-i-1}} \\
&+ (-1)^m \int_a^b f(\eta) \frac{\partial^{2m} R_y(\eta)}{\partial \eta^{2m}} d\eta
\end{aligned} \tag{2.51}$$

olur. Bu durumda $R_y(\eta)$ doğuran çekirdek fonksiyonu (2.51) ile verilen genelleştirilmiş diferansiyel denklemin çözümünden elde edilecektir.

$$\begin{cases}
(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(\eta)}{\partial \eta^{2m}} = \delta(\eta - y), \\
\frac{\partial^i R_y(a)}{\partial \eta^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial \eta^{2m-i-1}} = 0 \\
\frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial \eta^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.
\end{cases} \tag{2.52}$$

$R_y(\eta)$, $\eta \neq y$ iken aşağıda sınır şartları ile verilen $2m$ mertebeli sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemin

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(\eta)}{\partial \eta^{2m}} = 0 \tag{2.53}$$

çözümüdür. (2.53) ile ifade edilen denklemin $\lambda^{2m} = 0$ karakteristik denklemi ile $2m$ katlı $\lambda = 0$ öz değerine sahiptir. Denklemin sınır şartları ise

$$\begin{cases}
\frac{\partial^i R_y(a)}{\partial \eta^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial \eta^{2m-i-1}} = 0 \\
\frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial \eta^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1
\end{cases} \tag{2.54}$$

şeklinde alınır. Böylece (2.52) denkleminin genel çözümü

$$R_y(\eta) = \begin{cases} lR_y(\eta) = \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) \eta^{i-1}, & \eta < y \\ rR_y(\eta) = \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) \eta^{i-1}, & \eta > y \end{cases} \tag{2.55}$$

olarak ifade edilir.

Bu denklemler oluşturulduktan sonra $c_i(y)$ ve $d_i(y)$ katsayıları hesaplanır.

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(\eta)}{\partial \eta^{2m}} = \delta(\eta - y) \quad (2.56)$$

olup

$$\frac{\partial^i l R_y(y)}{\partial \eta^i} = \frac{\partial^i r R_y(y)}{\partial \eta^i}, i = 0, 1, \dots, 2m - 2 \quad (2.57)$$

$$(-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} r R_y(y^+)}{\partial \eta^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} l R_y(y^-)}{\partial \eta^{2m-1}} \right) = 1 \quad (2.58)$$

olur. (2.55) denklemindeki $c_i(y)$ ve $d_i(y)$ katsayılarının bulunması için (2.57) ve (2.58) deki $2m$ denklem, $2m$ tane şart sağlar. (2.54) denklemini $2m$ tane sınır şartı sağladığı zaman $4m$ denkleme elde edilir. Değişkenleri $c_i(y)$ ve $d_i(y)$ olan bu $4m$ denklem lineer denklemlerdir. Bu katsayılar bulunduğunda $R_y(\eta)$ doğuran çekirdek fonksiyonu (2.55) denkleminde elde edilir [48].

2.5. Baz Fonksiyon ve Birinci Tip Shifted Legendre Doğuran Çekirdek

Legendre polinomları, $x \in \mathbb{F}$ cismi için, Rodrigues formülü kullanılarak

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.59)$$

şeklinde yazılabilir. Legendre polinomları için iteratif süreç

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = x,$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1),$$

⋮

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k} \quad (2.60)$$

olup, $[n]$, n 'den küçük en büyük tamsayıyı belirtmektedir.

$L_n(x)$ Legendre polinomlarının çözümleri $[-1,1]$ aralığında olup $x \rightarrow 2x - 1$ dönüşümü uygulanarak çözümleri $[0,1]$ aralığında olan $P_n(x) = L_n(2x - 1)$ shifted Legendre polinomları elde edilir [50].

Tanım 2.23. Birinci tip shifted Legendre polinomları, $[0,1]$ aralığında $\rho_{[0,1]}(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre

$$\begin{aligned} \langle P_n(x), P_m(x) \rangle &= \int_0^1 \rho_{[0,1]}(x) P_n(x) P_m(x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m = 0, \\ \frac{1}{2n + 1}, & n = m \neq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.61)$$

şeklinde verilen ortogonallik şartını sağlamaktadır [49-50].

Shifted Legendre polinomlarının iteratif süreci

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = 2x - 1,$$

⋮

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)(2x - 1)P_n(x) - nP_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots \quad (2.62)$$

şeklinde ifade edilir.

2.6. Shifted Legendre Doğuran Çekirdek Yaklaşımı

Teorem 2.13. $\{e_i\}_{i=1}^n$, n boyutlu H Hilbert uzayının ortonormal bir bazı olsun. H 'nin çekirdek fonksiyonu

$$K_y(x) = \sum_{i=1}^n e_i(x) \overline{e_{i(y)}} \quad (2.63)$$

şeklinde ifade edilir [48].

Tanım 2.24. $P_\rho^m[0,1]$ uzayı derecesi m 'ye eşit ya da m 'den küçük, reel katsayılı, $[0,1]$ üzerinde tanımlı polinomların ağırlıklı iç çarpım uzayı olsun, $\forall u, v \in P_\rho^m[0,1]$ için iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{P_\rho^m} = \int_0^1 \rho_{[0,1]}(x) u(x) v(x) dx \quad (2.64)$$

$$\|u\|_{P_\rho^m} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{P_\rho^m}} \quad (2.65)$$

olarak tanımlanır. Her bir sabit m için

$$L_\rho^2[0,1] = \left\{ f \mid \int_0^1 \rho_{[0,1]}(x) |f(x)|^2 dx < \infty \right\} \quad (2.66)$$

tanımına göre $P_\rho^m[0,1]$ uzayı $L_\rho^2[0,1]$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır ve $\forall u, v \in P_\rho^m[0,1]$ için

$$\langle u, v \rangle_{P_\rho^m} = \langle u, v \rangle_{L_\rho^2} \quad (2.67)$$

eşitliği yazılır [34,51-52].

Teorem 2.14. $P_\rho^m[0,1]$ fonksiyon uzayı kendi üzerinde tanımlanan iç çarpımı ve normu ile bir RKHS dir [34,51-52].

İspat. Tanım 2.24'ten yararlanarak $P_\rho^m[0,1]$ uzayının sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı olduğu ifade edilir. Her sonlu boyutlu iç çarpım uzayı Hilbert uzayı olduğundan ve Teorem 2.13'den $P_\rho^m[0,1]$ uzayı bir RKHS dir. \square

Sınır değer probleminin çözümü için homojen sınır koşullarını sağlayan $P_\rho^m[0,1]$ uzayının kapalı bir alt uzayını tanımlamak yeterlidir.

Tanım 2.25.

$${}^0P_\rho^m[0,1] = \{u | u \in P_\rho^m[0,1], u(0) = u(1) = 0\} \quad (2.68)$$

olsun. ${}^0P_\rho^m[0,1]$ fonksiyon uzayının bir RKHS olduğu kolayca görülür. Teorem 2.13'den yararlanarak ${}^0P_\rho^m[0,1]$ 'in $K_y^m(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$K_y^m(x) = \sum_{i=2}^m h_i(x) \overline{h_i(y)} \quad (2.69)$$

şeklinde ifade edilir [34].

Buradaki $h_i(x)$, Gram-Schmidt ortogonalizasyon süreci kullanılarak elde edilen tam ortonormal sistemdir. (2.70) denklemini uygulama için oldukça elverişli olup, $K_y^m(x)$ çekirdek fonksiyonu ve $P_\rho^m[0,1]$ uzayı artan m değerleri için kolayca yeniden hesaplanabilir.

2.7. Volterra ve Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.26. $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun aynı anda integral ve türevini bulunduran denklemlere integro-diferansiyel denklemler denir. İkinci tip Fredholm ve Volterra integro-diferansiyel denklemleri sırasıyla,

$$u^k(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad u^k(x) = \frac{d^k u}{dx^k}, \quad k \geq 1 \quad (2.70)$$

ve

$$u^k(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt, \quad u^k(x) = \frac{d^k u}{dx^k}, \quad k \geq 1. \quad (2.71)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki λ sayısal parametre, $f(x)$ ve $K(x, t)$ bilinen fonksiyon olup $K(x, t)$ fonksiyonuna Fredholm ve Volterra integro-diferansiyel denklemlerin çekirdeği denir [53].

Tanım 2.27. İntegral denklem ya da integro-diferansiyel denklemlerde integral operatörü içindeki $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun derecesi bir ise denklem lineer denklem olarak adlandırılır. Ancak $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun derecesi birden farklı ya da içerisinde e^u , $\sinh u$, $\cos u$, $\ln(1 + u)$ gibi lineer olmayan fonksiyonlar bulunduruyorsa bu türdeki denklemlere lineer olmayan denklem denir [53].



3. BÖLÜM

BAGLEY-TORVİK DENKLEMİNİN KLASİK DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU (K-RKM) VE LEGENDRE DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU (L-RKM) İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde klasik doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu ile Legendre doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu Bagley-Torvik denkleme uygulanmıştır.

Bagley-Torvik denklemi, sert bir plakanın Newton sıvısına batırıldığında yaptığı hareketin incelenmesiyle ortaya çıkmıştır [54]. Genel olarak kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri oldukça zordur. Bu nedenle yaklaşık ve nümerik yöntemler yaygın olarak kullanılır [55-57]. Literatürde Bagley-Torvik denklemi için farklı çözüm metotları kullanılmıştır. Ray ve Bera, Bagley Torvik denkleminin başlangıç değer problemini Adomin ayrıştırma metodu kullanarak çözdüler [58]. Diethelm ve Ford, Bagley-Torvik denklemini sistem haline getirip ve Adams tipi yaklaşımı kullanarak nümerik çözümü elde ettiler [59]. Saadatmandi ve Dehghan, Legendre operasyonel matris metodunu uygulayarak denklemi çözdüler [60]. Yüzbaşı, Bagley-Torvik denkleminin sınır değer problemi için Bessel kolokasyon yöntemi olarak adlandırılan birinci dereceden Bessel fonksiyonlarının ve kolokasyon noktalarının kombinasyonunu uyguladı [61]. Gülsu, Öztürk ve Anapalı, Taylor matris metodu kullanarak yaklaşık çözüme ulaştılar [62]. Sakar, Saldır, Akgül Bagley-Torvik denkleminin sınır değer problemin yaklaşık çözümü için basitleştirilmiş doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullandılar [63].

Kesir mertebeli türev içeren sabit katsayılı Bagley-Torvik denkleminin sınır değer problemi, Caputo türev tanımı kullanılarak klasik doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu(K-RKM) ve Legendre doğuran çekirdekli Hilbert uzayı (L-RKM) metodu ile yaklaşık çözümü elde edildi.

Bagley-Torvik denklemi

$$a_0 D^2 u(x) + a_1 D^{\frac{3}{2}} u(x) + a_2 u(x) = c(x) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Denklemin sınır şartları

$$u(0) = \beta_1 \text{ ve } u(X) = \beta_2 \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilir [63].

Burada $c(x)$ sürekli fonksiyon olup a_0, a_1, a_2 reel sabitlerdir. (3.2)'de verilen sınır şartları kolaylıkla $u(0) = 0$ ve $u(X) = 0$ şeklinde homejenleştirilebilir.

Bagley-Torvik denkleminin, klasik doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu ile çözülebilmesi için öncelikle denkleme ait Hilbert uzayı tanımlanıp daha sonra bu uzay üzerinde iç çarpım ve norm tanımlanarak doğuran çekirdek fonksiyonları hesaplanacaktır.

3.1. Doğuran Çekirdekli Hilbert Uzaylar

Tanım 3.1. $W_2^1[0, X]$ Hilbert uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$W_2^1[0, X] = \{u(x) | u \text{ fonksiyonu } [0, X] \text{ aralığında mutlak sürekli ve } u'(x) \in L^2[0, X], x \in [0, X]\}.$$

$W_2^1[0, X]$ uzayına ait iç çarpım $u(x), g(x) \in W_2^1[0, X]$,

$$\langle u(x), g(x) \rangle_{W_2^1[0, X]} = \int_0^x [u(x)g(x) + u'(x)g'(x)] dx \quad (3.3)$$

ve norm ise

$$\|u\|_{W_2^1[0, X]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^1[0, X]}}, \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır [63].

Teorem 3.1. $W_2^1[0, X]$ doğuran çekirdekli bir Hilbert uzayıdır. Her $u(y) \in W_2^1[0, X]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, X]$ için $\langle u(y), K_x(y) \rangle_{W_2^1[0, X]} = u(x)$ olacak şekilde $K_x(y) \in W_2^1[0, X]$ tanımlanır. $K_x(y)$ çekirdek fonksiyonu (3.3) iç çarpımına göre

$$K_x(y) = \begin{cases} \frac{\cosh(X-x)\cosh(y)}{\sinh(X)}, & y \leq x \\ \frac{\cosh(x)\cosh(X-y)}{\sinh(X)}, & y > x \end{cases} \quad (3.5)$$

olarak tanımlanır [63].

Tanım 3.2. $W_2^3[0, X]$ Hilbert uzayı,

$W_2^3[0, X] = \{u(x) | u, u', u'' \text{ fonksiyonu } [0, X] \text{ aralığında mutlak sürekli ve } u'''(x) \in L^2[0, X], u(0) = 0, u(X) = 0\}$.

$W_2^3[0, X]$ uzayına ait iç çarpım $u(x), g(x) \in W_2^3[0, X]$,

$$\langle u(x), g(x) \rangle_{W_2^3[0, X]} = u(0)g(0) + u'(0)g'(0) + u(X)g(X) + \int_0^X u'''(x)g'''(x)dx \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilir. Aynı uzay üzerinde tanımlanan norm

$$\|u\|_{W_2^3[0, X]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^3[0, X]}} \quad (3.7)$$

olarak ifade edilir [63].

Teorem 3.2. $W_2^3[0, X]$ doğuran çekirdekli bir Hilbert uzayıdır. Her $u(y) \in W_2^3[0, X]$ ve her bir sabit $x, y \in [0, X]$ için $\langle u(y), R_x(y) \rangle_{W_2^3[0, X]} = u(x)$ olacak şekilde $R_x(y) \in W_2^3[0, X]$ çekirdek fonksiyonu vardır.

$R_x(y)$ çekirdek fonksiyonu (3.6) iç çarpımına göre

$$R_x(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 c_i(x)y^{i-1}, & y \leq x \\ \sum_{i=1}^6 d_i(x)y^{i-1}, & x < y \end{cases} \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $c_i(x)$ ve $d_i(x)$ aşağıdaki gibidir.

$$c_1(x) = 0,$$

$$c_2(x) = x - \frac{x^2}{X},$$

$$c_3(x) = \frac{x^2X}{20} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24X} - \frac{x^5}{120X^2} - \frac{x}{X} + \frac{x^2}{X^2},$$

$$c_4(x) = 0,$$

$$c_5(x) = -\frac{x}{24} + \frac{x^2}{24X},$$

$$c_6(x) = -\frac{x^2}{120X^2} + \frac{1}{120},$$

$$d_1(x) = \frac{x^5}{120},$$

$$d_2(x) = -\frac{x^4}{24} + x - \frac{x^2}{X},$$

$$d_3(x) = \frac{x^2X}{20} + \frac{x^4}{24X} - \frac{x^5}{120X^2} - \frac{x}{X} + \frac{x^2}{X^2},$$

$$d_4(x) = -\frac{x^2}{12},$$

$$d_5(x) = \frac{x^2}{24X},$$

$$d_6(x) = -\frac{x^2}{120X^2}.$$

İspat. $W_2^3[0, X]$ uzayının iç çarpımından

$$\begin{aligned} \langle u(y), R_x(y) \rangle_{W_2^3[0, X]} &= u(0)R_x(0) + u'(0)R_x'(0) + u(X)R_x(X) \\ &\quad + \int_0^X u'''(y)R_x'''(y) dy \end{aligned} \quad (3.9)$$

eşitliğinin sağ tarafındaki integral ifadesinde kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned}
& \langle u(y), R_x(y) \rangle_{W_2^3[0,X]} \\
& = u(0)R_x(0) + u'(0)R_x'(0) + u(X)R_x(X) + u''(X)R_x'''(X) - u''(0)R_x'''(0) \\
& \quad - u'(X)R_x^{(4)}(X) + u'(0)R_x^{(4)}(0) \\
& \quad + \int_0^X u'(y)R_x^{(5)}(y)dy
\end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir.

$$\langle u(y), R_x(y) \rangle_{W_2^3[0,X]} = u(x) \tag{3.11}$$

çekirdek doğurma özelliğine dayanarak

$$R_x(0) = 0,$$

$$R_x'(0) + R_x^{(4)}(0) = 0,$$

$$R_x''(0) - R_x'''(0) = 0,$$

$$R_x(X) = 0,$$

$$R_x^{(4)}(X) = 0,$$

$$R_x'''(X) = 0,$$

ifadeleri yazılır.

$$R_x^{(6)}(y) = \delta(y - x)$$

ifadesinde $x \neq y$ iken

$$R_x^{(6)}(y) = 0$$

elde edilir. Böyle bir durumda

$$R_x(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 c_i(x)y^{i-1}, & y \leq x \\ \sum_{i=1}^6 d_i(x)y^{i-1}, & x < y \end{cases} \quad (3.12)$$

bulunur.

$$R_y^{(6)}(x) = \delta(x - y)$$

ifadesinden yararlanarak

$$\partial R_{x^+}(x) = \partial R_{x^-}(x),$$

$$\partial^1 R_{x^+}(x) = \partial^1 R_{x^-}(x),$$

$$\partial^2 R_{x^+}(x) = \partial^2 R_{x^-}(x),$$

$$\partial^3 R_{x^+}(x) = \partial^3 R_{x^-}(x),$$

$$\partial^4 R_{x^+}(x) = \partial^4 R_{x^-}(x),$$

$$(-1)(\partial^5 R_{x^+}(x) - \partial^1 R_{x^-}(x)) = 1,$$

denklemleri bulunur. Böylece $c_i(x)$ ve $d_i(x)$ katsayıları hesaplanıp $R_x(y)$ çekirdek fonksiyonu kolaylıkla bulunabilir.

3.2. $W_2^3[0, X]$ Uzayında Yaklaşık Çözümün Oluşturulması

Burada ilk önce $W_2^3[0, X]$ Hilbert uzayında yaklaşık çözümün oluşturulması için Bagley-Torvik denklemine ait lineer operatör seçilecektir. Daha sonra çekirdek fonksiyon ve lineer operatör yardımıyla $W_2^3[0, X]$ uzayının ortonormal bazı elde edilecek ve denklemin yaklaşık çözümü oluşturulacaktır.

L lineer operatörünü,

$$L: W_2^3[0, X] \rightarrow W_2^1[0, X] \quad (3.13)$$

şeklinde seçelim.

$$Lu(x) = a_0 D^2 u(x) + a_1 D^{\frac{3}{2}} u(x) + a_2 u(x). \quad (3.14)$$

Sınır şartlarının homojenleştirilmesinden sonra Bagley-Torvik denklemi

$$Lu(x) = g(x), x \in [0, X], \quad (3.15)$$

$$u(0) = 0, u(X) = 0$$

haline gelir. Burada $g(x)$, sınır şartları homojenleştirildikten sonra elde edilen homojen olmayan terimleri göstermektedir.

$$\varphi_i(x) = K_{x_i}(x) \quad (3.16)$$

ve

$$\psi_i(x) = L^* \varphi_i(x) \quad (3.17)$$

fonksiyonları tanımlanıp, L lineer operatörünün adjointi L^* operatördür. $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ifadesini Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinde kullanarak

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \quad (\beta_{ii} > 0, i = 1, 2, 3 \dots) \quad (3.18)$$

eşitliğini sağlayan $W_2^3[0, X]$ uzayının $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal sistemi elde edilir. β_{ik} ortogonalizasyon katsayısıdır.

Teorem 3.3. L operatörü sınırlı bir lineer operatördür.

İspat. $A > 0$ sabit sayı olmak üzere

$$\|Lu\|_{W_2^1[0, X]}^2 \leq A \|u\|_{W_2^3[0, X]}^2$$

olduğu gösterilir.

$W_2^1[0, X]$ uzayındaki iç çarpım ve norm tanımından yararlanarak

$$\|Lu\|_{W_2^1[0,X]}^2 = \langle Lu, Lu \rangle_{W_2^1[0,X]} = \int_0^X [Lu(x)]^2 + [Lu'(x)]^2 dx$$

yazılır. Çekirdek doğurma özelliği sayesinde

$$u(x) = \langle u(y), R_y(x) \rangle_{W_2^3[0,X]}$$

ve

$$Lu(x) = \langle u(y), LR_y(x) \rangle_{W_2^3[0,X]}$$

ifadeleri elde edilir. Böylece

$A_1 > 0$ sabit sayı olmak üzere

$$|Lu(x)| \leq \|u\|_{W_2^3[0,X]} \|LR_y\|_{W_2^3[0,X]} = A_1 \|u\|_{W_2^3[0,X]}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\int_0^X [(Lu)(x)]^2 dx \leq X A_1^2 \|u\|_{W_2^3[0,X]}^2$$

ifade edilir. $A_2 > 0$ sabit sayı olmak üzere

$$[(Lu)'(x)]^2 \leq \langle u(y), (LR_y)'(x) \rangle_{W_2^3[0,X]}$$

ve

$$|(Lu)'(x)| \leq \|u\|_{W_2^3[0,X]} \|(LR_y)'\|_{W_2^3[0,X]} = A_2 \|u\|_{W_2^3[0,X]}$$

olduğu için

$$[(Lu)'(x)]^2 \leq A_2^2 \|u\|_{W_2^3[0,X]}^2$$

ve

$$\int_0^X [(Lu)'(x)]^2 dx \leq X A_2^2 \|u\|_{W_2^3[0,X]}^2$$

ifadeleri elde edilir.

Buradan $A = (A_1^2 + A_2^2) > 0$ olduğu için

$$\|Lu\|_{W_2^1[0,X]}^2 \leq \int_0^X [(Lu)(x)]^2 + [(Lu)'(x)]^2 dx \leq X(A_1^2 + A_2^2) \|u\|_{W_2^3[0,X]}^2 = A \|u\|_{W_2^3[0,X]}^2$$

elde edilir. Bu durum ispatı tamamlar. \square

Teorem 3.4. $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ kümesi $[0, X]$ aralığında yoğun ve $\psi_i(x) = L_y R_x(y)|_{y=x_i}$ olsun. O zaman $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $W_2^3[0, X]$ uzayının tam sistemidir.

İspat. $\psi_i(x) = (L^* \varphi_i)(x) = \langle (L^* \varphi_i)(y), R_x(y) \rangle = \langle \varphi_i(y), L_y R_x(y) \rangle = L_y R_x(y)|_{y=x_i}$ yazılabildiği için $\psi_i(x) \in W_2^3[0, X]$ olduğu açıktır. Her bir sabit $u(x) \in W_2^3[0, X]$ için $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots$

ifadesi gerçekleşirse

$$\langle u(x), L^* \varphi_i(x) \rangle = \langle Lu(\cdot), \varphi_i(\cdot) \rangle = (Lu)(x_i) = 0$$

elde edilir.

$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ifadesi $[0, X]$ aralığında yoğun olduğundan dolayı

$$(Lu)(x) = 0$$

yazılabilir. L^{-1} ters operatörün varlığından $u \equiv 0$ sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır. \square

Teorem 3.5. Eğer $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}, [0, X]$ 'de yoğun ise (3.1) denkleminin çözümü

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} g(x_k) \bar{\psi}_i(x) \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. Teorem 3.4.'den yararlanarak $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ifadesi $W_2^3[0, X]$ uzayının ortonormal sistemidir. Buradan

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{W_2^3[0, X]} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u(x), \psi_k(x) \rangle_{W_2^3[0, X]} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u(x), L^* \varphi_k(x) \rangle_{W_2^3[0, X]} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Lu(x), \varphi_k(x) \rangle_{W_2^1[0, X]} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle g(x), K_{x_k}(x) \rangle_{W_2^1[0, X]} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} g(x_k) \bar{\psi}_i(x)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanır. \square

Yaklaşık çözüm ise

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} g(x_k) \bar{\psi}_i(x) \quad (3.20)$$

şeklinde $u(x)$ serisinde sonlu terimler alınarak elde edilir.

Teorem 3.6. Eğer $u(x) \in W_2^3[0, X]$ ise o zaman öyle bir $F > 0$ vardır ki $\|u^{(i)}(x)\|_{C[0, X]} \leq F \|u(x)\|_{W_2^3[0, X]}$, $i = 0, 1, 2$. Burada $\|u(x)\|_{C[0, X]} = \max_{x \in [0, X]} |u(x)|$ dır.

İspat. Her $x, y \in [0, X]$ için $u^{(i)}(x) = \langle u(y), \partial_x^i R_x(y) \rangle_{W_2^3[0, X]}$, $i = 0, 1, 2$ eşitlikleri yazılır. $R_x(y)$ çekirdek fonksiyonu sayesinde $\|\partial_x^i R_x(y)\|_{W_2^3[0, X]} \leq F_i$, $i = 0, 1, 2$ sonucuna ulaşılır. Böylece

$$\begin{aligned}
|u^{(i)}(x)| &= |\langle u(x), \partial_x^i R_x(y) \rangle_{W_2^3[0, X]}| \leq \|u(x)\|_{W_2^3[0, X]} \|\partial_x^i R_x(y)\|_{W_2^3[0, X]} \\
&\leq F_i \|u(x)\|_{W_2^3[0, X]}, \quad i = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\|u^{(i)}(x)\|_{C[0,X]} \leq \max\{F_0, F_1, F_2\} \|u(x)\|_{W_2^3[0,X]}, \quad i = 0,1,2.$$

Bu durumda ispat tamamlanmış olur. \square

Teorem 3.7. $u_n(x)$ ve onun $u_n'(x)$ ve $u_n''(x)$ 'nin yaklaşık çözümleri $[0, X]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

İspat. Teorem 3.6.'den yararlanılarak her $x \in [0, X]$ için

$$\begin{aligned} |u_n^{(i)}(x) - u^{(i)}(x)| &= |\langle u_n(x) - u(x), \partial_x^i R_x(x) \rangle_{W_2^3[0,X]}| \\ &\leq \|\partial_x^i R_x(x)\|_{W_2^3[0,X]} \|u_n(x) - u(x)\|_{W_2^3[0,X]} \\ &\leq F_i \|u_n(x) - u(x)\|_{W_2^3[0,X]}, \quad i = 0,1,2. \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve buradaki F_0, F_1 ve F_2 pozitif sabitlerdir. Dolayısıyla eğer $n \rightarrow \infty$ $W_2^3[0, X]$ 'in normu anlamında $u_n(x) \rightarrow u(x)$ ise $u_n(x)$ ve onun $u_n'(x)$ ve $u_n''(x)$ türevleri sırasıyla $u(x)$ tam çözümüne ve tam çözümün $u'(x)$ ve $u''(x)$ türevlerine düzgün yakınsar. \square

Legendre doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunda ise shifted Legendre polinomları kullanılarak, klasik yöntemle göre farklı bir iç çarpım tanımlanır. Bu durum üzerinde çalışılan Hilbert uzayındaki çekirdek fonksiyonunu değiştirmektedir. Klasik yöntemde çekirdek değişmezken L-RKM de çekirdek değişebilir. K-RKM de sonsuz boyutlu Hilbert uzayında çalışılırken L-RKM de ise sonlu boyutlu Hilbert uzayında çalışılır. Ayrıca L-RKM de klasik yöntemde olduğu gibi yoğun kümeye ihtiyaç duyulmayıp çalışılan aralıkta farklı noktaların kullanımının yeterli olduğu görülür. Bu nedenle L-RKM, K-RKM den farklıdır.

3.3. Baz Fonksiyon ve Legendre Doğuran Çekirdek

Bu alt bölümde (3.1), (3.2) problemi $X = 1$ olacak şekilde göz önüne alınacaktır. Daha sonra $[0,1]$ aralığının $[0, X]$ aralığına nasıl genişletileceği detaylı olarak verilecektir.

Birinci tip shifted Legendre polinomları, $[0,1]$ aralığında $\rho_{[0,1]}(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre aşağıda verilen ortogonallik şartını sağlamaktadır.

$$\begin{aligned} \langle P_n(x), P_m(x) \rangle &= \int_0^1 \rho_{[0,1]}(x) P_n(x) P_m(x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m = 0, \\ \frac{1}{2n+1}, & n = m \neq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Bu sayede shifted Legendre polinomlarının iteratif süreci

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= 2x - 1, \\ &\vdots \\ (n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)(2x-1)P_n(x) - nP_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

şeklinde ifade edilir.

$u(0) = 0$ ve $u(1) = 0$ homojen sınır koşullarını sağlayan Legendre baz fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} P_i(x) - P_0(x), & i \text{ çift ise,} \\ P_i(x) - P_1(x), & i \text{ tek ise,} \end{cases} \quad i \geq 2. \quad (3.23)$$

Yani baz fonksiyonu aşağıda verilen sınır şartlarına sağlar

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0. \quad (3.24)$$

3.4. Legendre Doğuran Çekirdek Yaklaşımı

Teorem 3.8. H , n boyutlu bir Hilbert uzayı olsun. $\{e_i\}_{i=1}^n$ H 'in ortonormal bir bazıdır. H 'in çekirdek fonksiyonu

$$K_y(x) = \sum_{i=1}^n e_i(x) \overline{e_i(y)} \quad (3.25)$$

şeklindedir [48].

Tanım 3.3. $P_\rho^m[0,1]$ uzayı derecesi m 'ye eşit ya da m 'den küçük reel katsayılı $[0,1]$ üzerinde tanımlı polinomların ağırlıklı iç çarpım uzayı olsun, $\forall u, v \in P_\rho^m[0,1]$ için iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{P_\rho^m} = \int_0^1 \rho_{[0,1]}(x) u(x) v(x) dx \quad (3.26)$$

$$\|u\|_{P_\rho^m} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{P_\rho^m}} \quad (3.27)$$

şeklindedir.

Her bir sabit m için

$$L_\rho^2[0,1] = \left\{ f \mid \int_0^1 \rho_{[0,1]}(x) |f(x)|^2 dx < \infty \right\} \quad (3.28)$$

tanımına göre $P_\rho^m[0,1]$ uzayı $L_\rho^2[0,1]$ uzayının alt uzayıdır ve $\forall u, v \in P_\rho^m[0,1]$ için

$$\langle u, v \rangle_{P_\rho^m} = \langle u, v \rangle_{L_\rho^2} \quad (3.29)$$

eşitliği yazılabilir [52].

Teorem 3.9. $P_\rho^m[0,1]$ fonksiyon uzayı kendi üzerinde tanımlanan iç çarpımı ve normu ile bir RKHS dir.

İspat. Tanım 3.3.'ten $P_\rho^m[0,1]$ uzayı sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayıdır. Her sonlu boyutlu iç çarpım uzayı Hilbert uzayıdır. Bu sonuçtan ve Teorem 3.8.'den $P_\rho^m[0,1]$ uzayı bir RKHS dir. \square

Sınır değer probleminin çözümü için homojen sınır koşullarını sağlayan $P_\rho^m[0,1]$ uzayının kapalı bir alt uzayını tanımlamak gerekir.

Tanım 3.4.

$${}^0P_\rho^m[0,1] = \{u | u \in P_\rho^m[0,1], u(0) = u(1) = 0\} \quad (3.30)$$

olsun. Denklem (3.23) kullanılarak ${}^0P_\rho^m[0,1]$ fonksiyon uzayının bir RKHS olduğu kolayca gösterilir. Teorem 3.9.'dan yararlanarak ${}^0P_\rho^m[0,1]$ 'in $K_y^m(x)$ çekirdek fonksiyonu

$$K_y^m(x) = \sum_{i=2}^m h_i(x) h_i(y) \quad (3.31)$$

şeklinde yazılabilir [34,52].

Buradaki $h_i(x)$, Gram-Schmidt kullanılarak (3.23) denkleminde türetilen tam ortonormal sistemdir. (3.31) denklemi uygulama için oldukça elverişlidir. Yani $K_y^m(x)$ çekirdek fonksiyonu ve $P_\rho^m[0,1]$ uzayı artan m değerleri için kolayca yeniden hesaplanabilir.

3.5. Legendre Doğuran Çekirdek Metodu (L-RKM)

3.5.1. ${}^0P_\rho^m[0, 1]$ Uzayında tam çözümün temsili

Bu alt bölümde Bagley-Torvik denkleminin ${}^0P_\rho^m[0,1]$ uzayında yaklaşık çözümünü elde etmek için Legendre doğuran çekirdek metodu kullanılacaktır. İlk önce L lineer operatörü

$$L: {}^0P_\rho^m[0,1] \rightarrow L_\rho^2[0,1]$$

$$Lu(x) = D^2u(x) + {}^cD^{\frac{3}{2}}u(x) + u(x) \quad (3.32)$$

şeklinde seçilir. Buradan (3.1) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\begin{cases} Lu = g(x), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

Burada $g(x)$ sınır şartlarını homojenleştirdikten sonra elde edilen homojen olmayan fonksiyon ifadesidir. Yukarıdaki bölümlerde L nin sınırlı bir lineer operatör olduğu gösterildi. (3.33) denkleminin ${}^0P_\rho^m[0,1]$ uzayında yaklaşık çözümünün oluşturulması için bu uzayın polinom bazlı $K_y^m(x)$ doğuran çekirdek fonksiyonu bulunmalıdır.

Teorem 3.10. Denklem (3.1) için, eğer $\{x_i\}_{i=0}^{m-2}$ ifadesi $(0,1)$ aralığında $(m-1)$ tane farklı nokta ise o zaman $\psi_i(x) = L^*K_{x_i}^m(x) = L_yK_y^m(x)|_{y=x_i}$ yazılır.

İspat. Herhangi sabit $x_i \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= L^*K_{x_i}^m(x) = \langle L^*K_{x_i}^m(x), K_x^m(y) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} \\ &= \langle K_{x_i}^m(x), L_yK_x^m(y) \rangle_{L_\rho^2} = L_yK_x^m(y)|_{y=x_i}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Tanım 3.4'ten yararlanarak $K_x^m(y) = K_y^m(x)$ eşitliği yazılabilir. Bu nedenle

$$\psi_i(x) = L^*K_{x_i}^m(x) = L_yK_y^m(x)|_{y=x_i} \quad (3.35)$$

ifadesi yazılır. Burada L^*, L 'nin adjointidir ve L 'nin y alt indisi L operatörünün y fonksiyonuna uygulandığını gösterir. Her sabit m ve $x_i \in (0,1)$ için $\psi_i \in {}^0P_\rho^m[0,1]$ olur. \square

Teorem 3.11. $m \geq 2$ için, eğer $\{x_i\}_{i=0}^{m-2}$ kümesi $(0,1)$ aralığında $m-1$ farklı noktadan oluşursa $\{\psi_i\}_{i=0}^{m-2}$, ${}^0P_\rho^m[0,1]$ uzayın tam sistemidir.

İspat. Her sabit $y \in {}^0P_\rho^m[0,1]$ için

$$\langle y(x), \psi_i(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-2$$

olsun. Bunun anlamı $i = 0, 1, \dots, m-2$ için

$$\langle y(x), \psi_i(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m} = \langle y(x), L^*K_{x_i}^m(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle Ly(x), K_{x_i}^m(x) \rangle_{L^2_\rho} \\
&= Ly(x_i) = 0.
\end{aligned}$$

L^{-1} ters operatörün varlığından $y \equiv 0$ olduğu sonucuna varılır. Bu nedenle $\{\psi_i\}_{i=0}^{m-2}$, ${}^0P_\rho^m[0,1]$ uzayın tam sistemidir. Bu ise ispatı tamamlar. \square

Teorem 3.11 sayesinde L-RKM de sonlu farklı noktanın kullanımının yeterli olduğunu ve yoğun bir diziye ihtiyaç duyulmadığını gösterir. Bu nedenle L-RKM, K-RKM den farklıdır.

${}^0P_\rho^m[0,1]$ uzayının $\{\bar{\psi}_i\}_{i=0}^{m-2}$ ortonormal sistemi, $\{\psi_i\}_{i=0}^{m-2}$ ifadesini Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinde kullanarak aşağıda belirtilen şekilde

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \quad (\beta_{ii} > 0, i = 1, 2, 3 \dots) \quad (3.36)$$

elde edilir. Buradaki β_{ik} ortogonalizasyon katsayılarıdır.

Teorem 3.12. u_m (3.1) denkleminin tam çözümü olsun ve $\{x_i\}_{i=0}^{m-2}$ ifadesi (0,1) aralığında $m - 1$ farklı noktadan oluşsun. Yaklaşık çözüm

$$u_m(x) = \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} g(x_k) \bar{\psi}_i(x) \quad (3.37)$$

şeklindedir.

İspat. $u_m \in {}^0P_\rho^m[0,1]$ olduğu için Teorem 3.11.'den yararlanarak

$$u_m(x) = \sum_{i=0}^{m-2} \langle u_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x)$$

yazılabilir. Ayrıca (3.33) denkleminin ${}^0P_\rho^m[0,1]$ uzayında tam çözümü olan $u_m(x)$, (3.34) ve (3.36) denklemleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
u_m(x) &= \sum_{i=0}^{m-2} \langle u_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{\mathcal{O}_{P_\rho^m}[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m-2} \langle u_m(x), \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \rangle_{\mathcal{O}_{P_\rho^m}} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \langle u_m(x), \psi_k(x) \rangle_{\mathcal{O}_{P_\rho^m}} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \langle u_m(x), L^* K_{x_k}^m(x) \rangle_{\mathcal{O}_{P_\rho^m}} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \langle Lu_m(x), K_{x_k}^m(x) \rangle_{L_\rho^2} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \langle g(x), K_{x_k}^m(x) \rangle_{L_\rho^2} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} g(x_k) \bar{\psi}_i(x).
\end{aligned}$$

Bu ise ispatı tamamlar. \square

Teorem 3.13. Eğer $u_m(x) \in \mathcal{O}_{P_\rho^m}[0,1]$ ise $r = 0, 1, \dots, m-1$ için $|u_m^{(r)}(x)| \leq F \|u_m\|_{\mathcal{O}_{P_\rho^m}}$ yazılır. Burada F bir sabittir.

İspat. Her $x, y \in [0,1]$ için

$$u_m^{(r)}(x) = \langle u_m(y), \partial_x^r K_x(y) \rangle_{\mathcal{O}_{P_\rho^m}}, \quad r = 0, 1, \dots, m-1$$

yazabilir. $K_x(y)$ ifadesiyle $\|\partial_x^r K_x(y)\|_{\mathcal{O}_{P_\rho^m}} \leq F_r$ eşitsizliği yazılır.

Böylece;

$$\begin{aligned}
|u_m^{(r)}(x)| &= |\langle u(x), \partial_x^r K_x(y) \rangle_{0P_\rho^m}| \\
&\leq \|u_m(x)\|_{0P_\rho^m[a,b]} \|\partial_x^r K_x(y)\|_{0P_\rho^m} \\
&\leq F_r \|u_m(x)\|_{0P_\rho^m}, \quad r = 0, 1, \dots, m-1
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$|u_m^{(r)}(x)| \leq \max\{F_0, \dots, F_{m-1}\} \|u_m(x)\|_{0P_\rho^m}, \quad r = 0, 1, \dots, m-1$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. \square

Teorem 3.14. $u_m(x)$ yaklaşık çözümü ve onun $u_m^{(r)}(x)$ türevleri sırasıyla $u(x)$ ve $u^{(r)}(x)$ ($r = 0, 1, \dots, m-1$) ifadelerine düzgün yakınsar.

İspat. Herhangi $x \in [0, 1]$ için, Teorem 3.13'ten

$$\begin{aligned}
|u_m^{(r)} - u^{(r)}(x)| &= |\langle u_m(x) - u(x), \partial_x^r K_x(y) \rangle_{0P_\rho^m}| \\
&\leq \|\partial_x^r K_x(y)\|_{0P_\rho^m} \|u_m(x) - u(x)\|_{0P_\rho^m} \\
&\leq F_r \|u_m(x) - u(x)\|_{0P_\rho^m}, \quad r = 0, 1, \dots, m-1
\end{aligned}$$

olur. Burada F_0, F_1, \dots, F_{m-1} pozitif sabitlerdir. Bu nedenle, eğer $m \rightarrow \infty$ iken $0P_\rho^m$ nin normuna göre $u_m(x) \rightarrow u(x)$ ise $u_m(x)$ yaklaşık çözümü ve türevleri $(u'_m(x), \dots, u_m^{(m-1)}(x))$, $u(x)$ ve onun türevlerine $(u'(x), \dots, u^{(m-1)}(x))$ sırasıyla düzgün yakınsar. \square

Örnek 3.1.

$$D^2 u(x) + {}^c D^{\frac{3}{2}} u(x) + u(x) = x^3 + 5x + \frac{8x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}, \quad x \in [0, 1]$$

Kesirli Bagley-Torvik denkleminin sınır değer şartları

$$u(0) = 0, u(1) = 0$$

ve tam çözümünü

$$u(x) = x^3 - x$$

dir [63]. Denklemin K-RKM ile çözümü için $x_i = \frac{i}{m}$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$ olarak alındı.

Tablo 3.1.'de $m = 10$ için tam çözüm, yaklaşık çözüm ve mutlak hata tablosu yapıldı.

Tablo 3.2.'de $m = 20$, $m = 30$, $m = 40$ için yaklaşık çözüm ile tam çözüm

karşılaştırması yapıldı. Şekil 3.1.'de $m = 10$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün

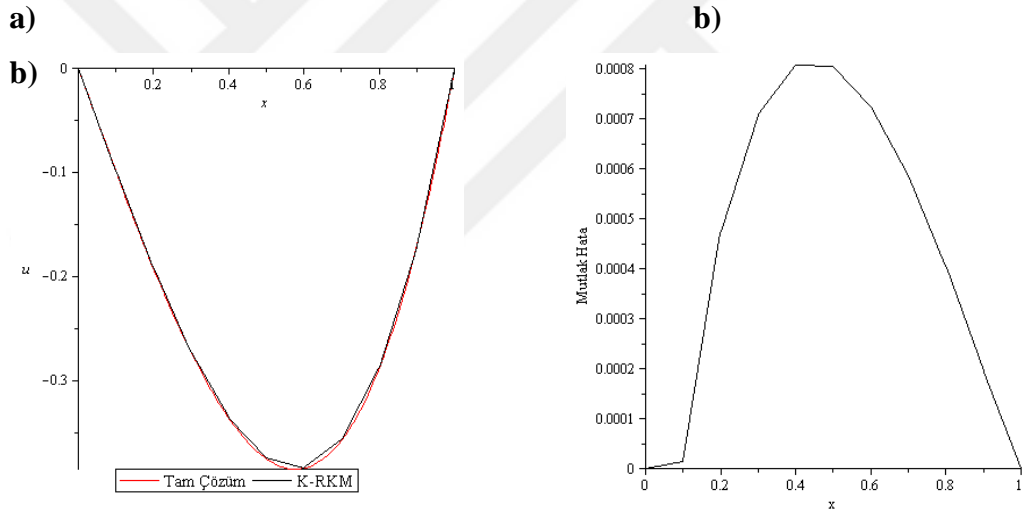
karşılaştırma grafiği ile mutlak hata grafiği verildi.

Tablo 3.1. Örnek 3.1.'de K-RKM yöntemi kullanarak $m = 10$ için hesaplanan yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Mutlak Hata
0.1	-0.0989868460	-0.0990000000	0.0000131539
0.2	-0.1915262302	-0.1920000000	0.0004737698
0.3	-0.2722912952	-0.2730000000	0.0007087048
0.4	-0.3351934355	-0.3360000000	0.0008065645
0.5	-0.3741958966	-0.3750000000	0.0008041034
0.6	-0.3832752650	-0.3840000000	0.0007247350
0.7	-0.3564138916	-0.3570000000	0.0005861084
0.8	-0.2875962893	-0.2880000000	0.0004037107
0.9	-0.1708055194	-0.1710000000	0.0001944806

Tablo 3.2. Örnek 3.1.'de K-RKM yöntemi kullanarak $m = 20$, $m = 30$, $m = 40$ değerleri için hesaplanan yaklaşık çözüm ve tam çözüm değerleri

x	$m = 20$	$m = 30$	$m = 40$	Tam Çözüm
0.1	-0.0989088998	-0.0989469375	-0.0989665486	-0.0990000000
0.2	-0.1918111422	-0.1919051972	-0.1919434784	-0.1920000000
0.3	-0.2727622900	-0.2728847808	-0.2729323527	-0.2730000000
0.4	-0.3357464795	-0.3358789934	-0.3359294523	-0.3360000000
0.5	-0.3747553952	-0.3748842103	-0.3749327294	-0.3750000000
0.6	-0.3837834650	-0.3838979607	-0.3839408414	-0.3840000000
0.7	-0.3568263803	-0.3569183506	-0.3569527063	-0.3570000000
0.8	-0.2878803687	-0.2879437246	-0.2879674033	-0.2880000000
0.9	-0.1709412261	-0.1709721986	-0.1709838612	-0.1710000000

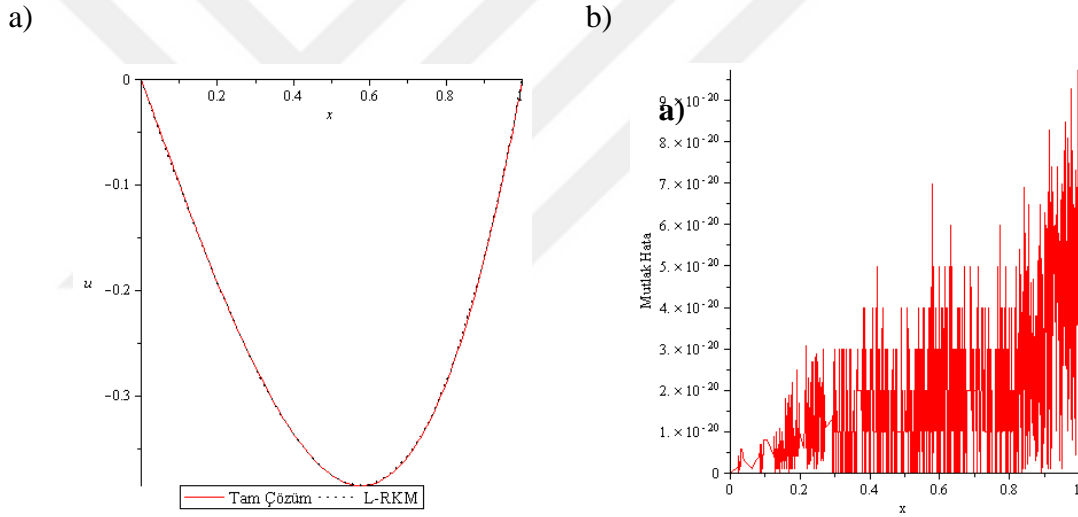


Şekil 3.1. Örnek 3.1.'de K-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 10$ için tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 10$ için mutlak hata grafiği

L-RKM yönteminde kullanılan m , $(0,1)$ aralığındaki hem nokta hem de baz sayısını vermektedir. Bu yöntemde m değerinin çok büyük kullanılması çekirdek fonksiyonda kullanılan shifted Legendre polinomlarının sayısını artıracığı için çok kullanışlı olmamaktadır. Örnek 3.1.'in L-RKM yöntemiyle çözümünde $x_i = \frac{i+0.3}{m}$, $i = 0,1, \dots, (m - 1)$ olarak alındı. Tablo 3.3.'te $m = 3$ için yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata tablosu yapıldı. Şekil 3.2.'de $m = 3$ için tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırma grafiği ile mutlak hata grafiği verildi.

Tablo 3.3. Örnek 3.1.'de L-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$ için hesaplanan yaklaşık çözüm, tam çözümün ve mutlak hata değerleri

x	Yaklaşık çözüm	Tam çözüm	Mutlak Hata
0.1	-0.0990000000	-0.0990000000	8.0×10^{-21}
0.2	-0.1920000000	-0.1920000000	1.2×10^{-20}
0.3	-0.2730000000	-0.2730000000	1.0×10^{-20}
0.4	-0.3360000000	-0.3360000000	2.0×10^{-20}
0.5	-0.3749999999	-0.3750000000	1.0×10^{-20}
0.6	-0.3840000000	-0.3840000000	0
0.7	-0.3570000000	-0.3570000000	2.0×10^{-20}
0.8	-0.2880000000	-0.2880000000	1.0×10^{-20}
0.9	-0.1709999999	-0.1710000000	3.5×10^{-20}



Şekil 3.2. Örnek 3.1.'de L-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 3$ için tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 3$ için mutlak hata grafiği

Örnek 3.2.

$${}^c D_{\frac{3}{2}} u(x) + u(x) = x^4 - 8x + \frac{64x^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{\pi}}, \quad x \in [0,2]$$

kesirli Bagley-Torvik denkleminin sınır değer şartları

$$u(0) = 0, u(2) = 0$$

ve tam çözümünü

$$u(x) = x^4 - 8x$$

dir [63]. İncelediğimiz denklemin L-RKM yöntemiyle çözümü için $x_i = \frac{i+0.3}{m}$, $i = 0, 1, \dots, (2m - 1)$ eşitliği kullanıldı. Kullanılan bu eşitlik sayesinde $m = 4$ alındığında $[0, 2]$ aralığına ait eşit dağılımlı 8 farklı nokta oluşturuldu. Çekirdek fonksiyonun oluşması için shifted Legendre polinomlarının $[0, 1] \rightarrow [0, 2]$ aralığında uygun dönüşüm olması için aşağıda verilen iteratif süreç uygulandı.

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x - 1,$$

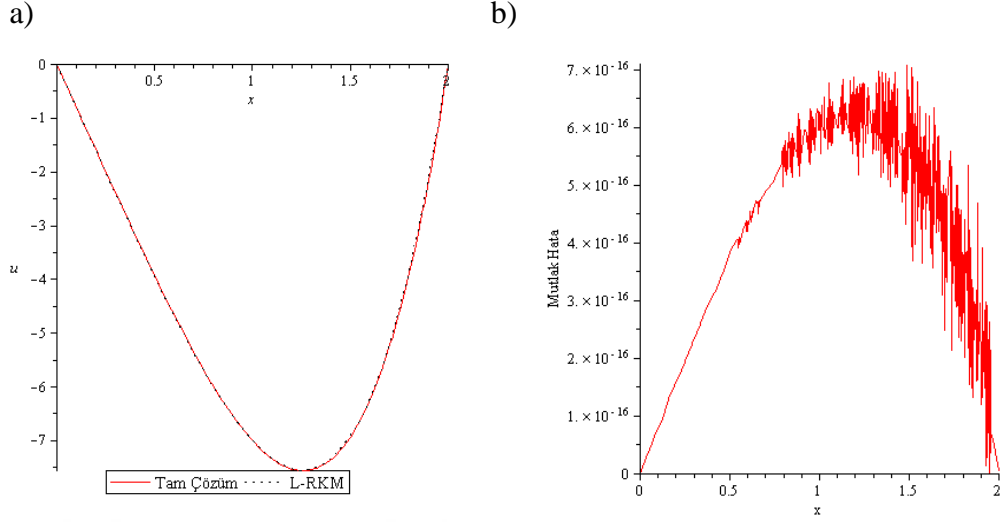
⋮

$$P_k(x) = \left(\frac{2k-1}{k}\right)(x-1)P_{k-1}(x) - \left(\frac{k-1}{k}\right)P_{k-2}(x), \quad k = 2, \dots, n.$$

Tablo 3.4.'te $m = 4$ için yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata karşılaştırması yapıldı. Şekil 3.3.'te $m = 4$ için tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırma grafiği ile mutlak hata grafiği verildi.

Tablo 3.4. Örnek 3.2.'de L-RKM yöntemi kullanarak $m = 4$ için hesaplanan yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Mutlak Hata
0.2	-1.5984000000	-1.5984000000	1.595×10^{-16}
0.4	-3.1744100000	-3.1744000000	3.016×10^{-16}
0.6	-4.6704000000	-4.6704000000	4.193×10^{-16}
0.8	-5.9904000000	-5.9904000000	5.726×10^{-16}
1.0	-7.0000000000	-7.0000000000	5.957×10^{-16}
1.2	-7.5264000000	-7.5264000000	6.139×10^{-16}
1.4	-7.3584000000	-7.3584000000	5.517×10^{-16}
1.6	-6.2464000000	-6.2464000000	6.193×10^{-16}
1.8	-3.9024000000	-3.9024000000	3.422×10^{-16}



Şekil 3.3. Örnek 3.2.'de L-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 4$ için tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 4$ için mutlak hata grafiği

Örnek 3.3.

$${}^c D^{\frac{3}{2}} u(x) + u(x) = x^2 - 4x + \frac{4x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}, \quad x \in [0,4]$$

denkleminin sınır değer şartları

$$u(0) = 0, u(4) = 0$$

ve tam çözümü

$$u(x) = x^2 - 4x$$

dir [63]. Alınan denklemin $[0,4]$ genişletilmiş aralığında L-RKM yöntemiyle çözümü için $x_i = \frac{i+0.3}{m}$, $i = 0,1, \dots, (4m - 1)$ eşitliği kullanıldı. Kullanılan bu eşitlik sayesinde $m = 4$ alındığında, çalışılan aralıkta eşit dağılımlı 16 farklı nokta oluşturuldu. Çekirdek fonksiyonun oluşması için shifted Legendre polinomlarının $[0,1] \rightarrow [0,4]$ aralığında uygun dönüşüm olması için aşağıda verilen iteratif süreç uygulandı.

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = \frac{x}{2} - 1,$$

⋮

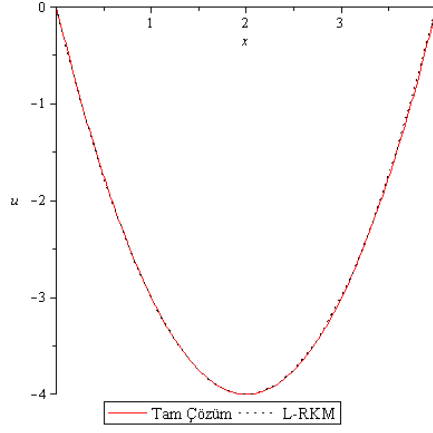
$$P_k(x) = \left(\frac{2k-1}{k}\right) \left(\frac{x}{2} - 1\right) P_{k-1}(x) - \left(\frac{k-1}{k}\right) P_{k-2}(x), \quad k = 2, \dots, m.$$

Tablo 3.5.'te $m = 4$ için yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata karşılaştırması yapıldı. Şekil 3.4. de $m = 4$ için tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırma grafiği ile mutlak hata grafiği verildi.

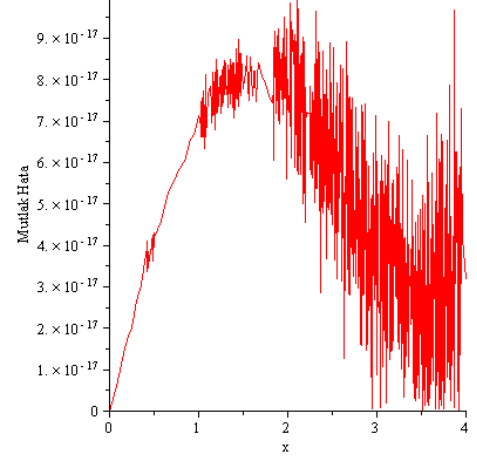
Tablo 3.5. Örnek 3.3.'te L-RKM yöntemi kullanarak $m = 4$ için hesaplanan yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Mutlak Hata
0.2	-0.75999999999	-0.76000000000	1.732×10^{-17}
0.4	-1.43999999999	-1.44000000000	3.883×10^{-17}
0.6	-2.03999999999	-2.04000000000	4.624×10^{-17}
0.8	-2.55999999999	-2.56000000000	5.980×10^{-17}
1.0	-2.99999999999	-3.00000000000	7.050×10^{-17}
1.2	-3.35999999999	-3.36000000000	7.870×10^{-17}
1.4	-3.63999999999	-3.64000000000	8.190×10^{-17}
1.6	-3.83999999999	-3.84000000000	7.930×10^{-17}
1.8	-3.95999999999	-3.96000000000	8.270×10^{-17}
2.0	-3.99999999999	-4.00000000000	8.100×10^{-17}
2.2	-3.95999999999	-3.96000000000	6.350×10^{-17}
2.4	-3.83999999999	-3.84000000000	8.940×10^{-17}
2.6	-3.63999999999	-3.64000000000	5.510×10^{-17}
2.8	-3.35999999999	-3.36000000000	4.950×10^{-17}
3.0	-2.99999999999	-3.00000000000	7.610×10^{-17}
3.2	-2.55999999999	-2.56000000000	5.460×10^{-17}
3.4	-2.03999999999	-2.04000000000	3.510×10^{-17}
3.6	-1.43999999999	-1.44000000000	3.390×10^{-17}
3.8	-0.76000000000	-0.76000000000	1.950×10^{-17}

a)



b)



Şekil 3.4. Örnek 3.3.'te L-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 4$ için tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 4$ için mutlak hata grafiği

Bu bölümde ve sonraki tüm bölümlerde tüm tablo sonuçları bilgisayarda 20 basamak olarak hesaplanmıştır ve mutlak hata sonuçları buna göre yazılmıştır. Ancak tablolardaki yaklaşık çözüm ve tam çözüm sonuçları ise yer genişliğine göre yazılmıştır.

4. BÖLÜM

TROESCH DENKLEMİNİN KLASİK DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU VE LEGENDRE DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde radyasyon basıncı altında bir plazma kolonunun hareketinin araştırılmasında ve ayrıca gaz gözenekli elektrotlar teorisinde ortaya çıkan lineer olmayan sınır değer denklemi olan Troesch problemi ele alınacaktır. Büyük parametreliliğe sahip değerler için oldukça hassas olan Troesch denklemi, ilk kez Weibel [64] tarafından tanımlandı ancak analitik çözüm Roberts ve Shipmann tarafından Jacobi eliptik fonksiyonu kullanarak elde edildi [65]. Birçok araştırmacının dikkatini çeken bu denklemin yaklaşık çözümünü elde etmek için farklı yöntemler kullanıldı. Scott, gömme yöntemi (imbedding method) kullanarak Troesch denkleminin sayısal çözümünü elde etti [66]. Khuri, modifiye edilmiş ayrıştırma metodu sayesinde sonuçlara ulaştı [67]. Feng ve arkadaşları değiştirilmiş homotopi pertürbasyon tekniğini kullanırken [68], Chang ve arkadaşları lineer olmayan fonksiyonların tek boyutlu diferansiyel dönüşümü üzerine oluşturulan yeni bir teknik önerdiler [69]. Troesch denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için kullanılan diğer yöntemler ise Chang, ateşleme yöntemi (shooting method) [70], Zarebnia ve Sajjadian, Sinc-Galerkin yöntemini [71], Vazquez-Leal ve arkadaşları, homotopi pertürbasyon yöntemi [72], Khuri ve Sayfy, B-spline yöntemi [73], Doha ve arkadaşları, Jakobi kolakasyon yöntemi [74], Temimi, süreksiz Galerkin (Discontinuous Galerkin method) yöntemi [75], Chang, varyasyon iterasyon yöntemi [76], Inc ve Akgül ise klasik doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunu kullandılar [77].

Kesir mertebeli türev içeren lineer olmayan Troesch denkleminin sınır değer problemi, Caputo türev tanımı kullanılarak klasik doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu (K-RKM) ile Legendre doğuran çekirdekli Hilbert uzayı (L-RKM) metodu kullanılarak yaklaşık çözümleri elde edilerek karşılaştırılacaktır.

Ele alınan Troesch denklemi

$${}^c D^\alpha u(x) = \gamma \sinh(\gamma u(x)), \quad 0 < x < 1, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (4.1)$$

ve sınır koşulları

$$u(0) = 0 \text{ ve } u(1) = 1 \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir [67]. Burada γ sabit bir sayıdır.

Bu problemin kapalı form çözümü, Roberts ve Shipmann tarafından Jacobian eliptik fonksiyonu kullanılarak

$$u(x) = \frac{2}{\gamma} \sinh^{-1} \left\{ \frac{u'(0)}{2} \operatorname{sc}[\gamma x|k] \right\} \quad (4.3)$$

tam çözümünü elde etmişlerdir. Buradaki $u(x)$ 'in $x = 0$ noktasındaki türevi

$$\frac{\sinh(\frac{\gamma}{2})}{\sqrt{1-k}} = \operatorname{sc}(\gamma|k) \quad (4.4)$$

denklemin çözümü ile bulunup $k = 1 - \frac{1}{4}u'(0)^2$ olarak ifade edilir. Jacobian eliptik fonksiyonu

$$\operatorname{sc}(\gamma|k) = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanmış olup β

$$\gamma = \int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1-k\sin^2\theta}} d\theta \quad (4.6)$$

integrali ile hesaplanır [67].

4.1. Doğuran Çekirdekli Hilbert Uzaylar

Bu bölümde Troesch denkleminin ait yaklaşık çözümünü bulmak için K-RKM kullanılacak olup denkleme ait doğuran çekirdek uzayları ve bu uzaylara ait çekirdek fonksiyonları elde edilecektir. Fakat bu işlemlere geçmeden önce kesir mertebeli türev içeren lineer olmayan Troesch denkleminin sınır değer probleminin K-RKM ve L-RKM ile yaklaşık çözümlerinin elde edilebilmesi için denklemin sınır şartlarının homojenleştirilmesi gerekmektedir. Yapılan $u(x) = v(x) + x$ dönüşümünden sonra Troesch denklemi

$${}^c D^\alpha v(x) = \gamma \sinh(\gamma(v(x) + x)), \quad 0 < x < 1, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (4.7)$$

ve sınır koşulları

$$v(0) = 0 \text{ ve } v(1) = 0 \quad (4.8)$$

olacak şekilde elde edilir.

Tanım 4.1. $W_2^1[0,1]$ Hilbert uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır

$$W_2^1[0,1] = \{v(x) | v \text{ fonksiyonu } [0,1] \text{ aralığında mutlak sürekli ve } v'(x) \in L^2[0,1], x \in [0,1]\}.$$

$W_2^1[0,1]$ uzayına ait iç çarpım $v(x), g(x) \in W_2^1[0,1]$

$$\langle v(x), g(x) \rangle_{W_2^1[0,1]} = \int_0^1 v(x)g(x) + v'(x)g'(x)dx \quad (4.9)$$

ve norm ise

$$\|v\|_{W_2^1[0,1]} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{W_2^1[0,1]}} \quad (4.10)$$

şeklinde tanımlanır [48].

Teorem 4.1. $W_2^1[0,1]$ Hilbert uzayı doğuran çekirdekli Hilbert uzayıdır. Bu uzaya ait çekirdek fonksiyonu $K_x(y)$, (4.9) iç çarpımına göre

$$K_x(y) = \begin{cases} \frac{\cosh(1-x)\cosh(y)}{\sinh(1)}, y \leq x \\ \frac{\cosh(x)\cosh(1-y)}{\sinh(1)}, y > x \end{cases} \quad (4.11)$$

şeklindedir [48].

Tanım 4.2. $W_2^3[0,1]$ Hilbert uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır

$$W_2^3[0,1] = \left\{ v(x) | v(x), v'(x), v''(x) \text{ fonksiyonları } [0,1] \text{ aralığında mutlak sürekli} \right. \\ \left. \text{ve } v'''(x) \in L^2[0,1], x \in [0,1], v(0) = 0, v(1) = 0 \right\}$$

$W_2^3[0,1]$ uzayına ait iç çarpım $v(x), g(x) \in W_2^3[0,1]$

$$\langle v(x), g(x) \rangle_{W_2^3[0,1]} = \sum_{i=0}^2 v^{(i)}(0)g^{(i)}(0) + v(1)g(1) + \int_0^1 v'''(x)g'''(x)dx \quad (4.12)$$

ve norm ise

$$\|v\|_{W_2^3[0,1]} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{W_2^3[0,1]}}, \quad (4.13)$$

şeklinde tanımlanır [48].

Teorem 4.2. $W_2^3[0,1]$ doğuran çekirdekli bir Hilbert uzayıdır. Her $v(y) \in W_2^3[0,1]$ ve her bir sabit $x, y \in [0,1]$ için $\langle v(y), R_x(y) \rangle_{W_2^3[0,1]} = v(x)$ olacak şekilde $R_x(y) \in W_2^3[0,1]$ çekirdek fonksiyonu vardır.

$R_x(y)$ çekirdek fonksiyonu (4.12) iç çarpımına göre

$$R_x(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 c_i(x)y^{i-1}, & y \leq x \\ \sum_{i=1}^6 d_i(x)y^{i-1}, & x < y \end{cases} \quad (4.14)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki $c_i(x)$ ve $d_i(x)$ ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$c_1(x) = 0,$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{156}x^5 + \frac{5}{156}x^4 - \frac{5}{78}x^3 - \frac{5}{26}x^2 + \frac{3}{13}x,$$

$$c_3(x) = -\frac{1}{624}x^5 + \frac{5}{624}x^4 + -\frac{5}{312}x^3 + \frac{21}{104}x^2 - \frac{5}{26}x,$$

$$c_4(x) = -\frac{1}{1872}x^5 + \frac{5}{1872}x^4 - \frac{5}{936}x^3 + \frac{7}{104}x^2 - \frac{5}{78}x,$$

$$c_5(x) = \frac{1}{3744}x^5 - \frac{5}{3744}x^4 + \frac{5}{1872}x^3 + \frac{5}{624}x^2 - \frac{1}{104}x,$$

$$c_6(x) = -\frac{1}{18720}x^5 + \frac{1}{3744}x^4 - \frac{1}{1872}x^3 - \frac{1}{624}x^2 - \frac{1}{156}x + \frac{1}{120},$$

$$d_1(x) = \frac{1}{120}x^5,$$

$$d_2(x) = -\frac{1}{156}x^5 - \frac{1}{104}x^4 - \frac{5}{78}x^3 - \frac{5}{26}x^2 + \frac{3}{13}x,$$

$$d_3(x) = -\frac{1}{624}x^5 + \frac{5}{624}x^4 + \frac{7}{104}x^3 + \frac{21}{104}x^2 - \frac{5}{26}x,$$

$$d_4(x) = -\frac{1}{1872}x^5 + \frac{5}{1872}x^4 - \frac{5}{936}x^3 - \frac{5}{312}x^2 - \frac{5}{78}x$$

$$d_5(x) = +\frac{1}{3744}x^5 - \frac{5}{3744}x^4 + \frac{5}{1872}x^3 + \frac{5}{624}x^2 + \frac{5}{156}x,$$

$$d_6(x) = -\frac{1}{18720}x^5 + \frac{1}{3744}x^4 - \frac{1}{1872}x^3 - \frac{1}{624}x^2 - \frac{1}{156}x.$$

İspat. $W_2^3[0,1]$ uzayının iç çarpımından

$$\begin{aligned} & \langle v(y), R_x(y) \rangle_{W_2^3[0,1]} \\ &= v(0).R_x(0) + v'(0).R_x'(0) + v(1)R_x(1) \\ &+ \int_0^1 v'''(y).R_x'''(y)dy \end{aligned} \quad (4.15)$$

ifadesi yazılabilir.(4.15) eşitliğinin sağ tarafındaki integral ifadesinde kısmi integraller uygulanarak

$$\begin{aligned} & \langle v(y), R_x(y) \rangle_{W_2^3[0,1]} \\ &= v(0).R_x(0) + v'(0).R_x'(0) + v(1).R_x(1) + v''(1).R_x'''(1) - v''(0).R_x'''(0) \\ &- v'(1).R_x^{(4)}(1) + v'(0).R_x^{(4)}(0) \\ &+ \int_0^1 v'(y).R_x^{(5)}(y)dy \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir.

$$\langle v(y), R_x(y) \rangle_{W_2^3[0,1]} = v(x) \quad (4.17)$$

çekirdek doğurma özelliğine dayanarak

$$R_x(0) = 0,$$

$$R'_x(0) + R_x^{(4)}(0) = 0,$$

$$R''_x(0) - R_x'''(0) = 0,$$

$$R_x(1) = 0,$$

$$R_x^{(4)}(1) = 0,$$

$$R_x'''(1) = 0,$$

ifadeleri yazılır.

$$R_x^{(6)}(y) = \delta(y - x)$$

ifadesinde $x \neq y$ iken

$$R_x^{(6)}(y) = 0$$

elde edilir. Böyle bir durumda

$$R_x(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 c_i(x)y^{i-1}, & y \leq x \\ \sum_{i=1}^6 d_i(x)y^{i-1}, & x < y \end{cases} \quad (4.18)$$

bulunur.

$$R_y^{(6)}(x) = \delta(x - y)$$

ifadesinden yararlanarak

$$\partial R_{x^+}(x) = \partial R_{x^-}(x),$$

$$\partial^1 R_{x^+}(x) = \partial^1 R_{x^-}(x),$$

$$\partial^2 R_{x^+}(x) = \partial^2 R_{y^-}(x),$$

$$\partial^3 R_{x^+}(x) = \partial^3 R_{x^-}(x),$$

$$\partial^4 R_{x^+}(x) = \partial^4 R_{x^-}(x),$$

$$(-1)(\partial^5 R_{x^+}(x) - \partial^1 R_{x^-}(x)) = 1,$$

denklemleri bulunur. $c_i(x)$ ve $d_i(x)$ katsayıları hesaplanıp $R_x(y)$ çekirdek fonksiyonu aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$R_x(y) = \begin{cases} \frac{3}{13}yx - \frac{1}{156}yx^5 + \frac{5}{156}yx^4 - \frac{5}{78}yx^3 - \frac{5}{26}yx^2 + \frac{21}{104}y^2x^2 - \frac{1}{624}y^2x^5 + \frac{5}{624}y^2x^4 - \frac{5}{312}y^2x^3 - \frac{5}{26}y^2x \\ + \frac{7}{104}y^3x^2 - \frac{1}{1872}y^3x^5 + \frac{5}{1872}y^3x^4 - \frac{5}{936}y^3x^3 - \frac{5}{78}y^3x - \frac{1}{104}y^4x + \frac{1}{3744}y^4x^5 - \frac{5}{3744}y^4x^4 + \frac{5}{1872}y^4x^3 \\ + \frac{5}{624}y^4x^2 - \frac{1}{18720}y^5x^5 + \frac{1}{3744}y^5x^4 - \frac{1}{1872}y^5x^3 - \frac{1}{624}y^5x^2 - \frac{1}{156}y^5x + \frac{1}{120}y^5 & y < x \\ \frac{3}{13}yx - \frac{1}{156}yx^5 + \frac{1}{104}yx^4 - \frac{5}{78}yx^3 - \frac{5}{26}yx^2 + \frac{21}{104}y^2x^2 - \frac{1}{624}y^2x^5 + \frac{5}{624}y^2x^4 + \frac{7}{104}y^2x^3 - \frac{5}{26}y^2x \\ - \frac{5}{312}y^3x^2 - \frac{1}{1872}y^3x^5 + \frac{5}{1872}y^3x^4 - \frac{5}{936}y^3x^3 - \frac{5}{78}y^3x + \frac{5}{156}y^4x + \frac{1}{3744}y^4x^5 - \frac{5}{3744}y^4x^4 + \frac{5}{1872}y^4x^3 \\ + \frac{5}{624}y^4x^2 - \frac{1}{18720}y^5x^5 + \frac{1}{3744}y^5x^4 - \frac{1}{1872}y^5x^3 - \frac{1}{624}y^5x^2 - \frac{1}{156}y^5x + \frac{1}{120}x^5 & y \geq x \end{cases} \quad (4.19)$$

4.2. $W_2^3[0, 1]$ Uzayında Yaklaşık Çözümün Oluşturulması

$W_2^3[0,1]$ Hilbert uzayında lineer olmayan Troesch sınır değer probleminin, yaklaşık çözümünün oluşturulması için denkleme ait lineer operatör tanımlanacaktır. Daha sonra çekirdek fonksiyon ve lineer operatör yardımıyla $W_2^3[0,1]$ uzayının ortonormal bazı elde edilecek ve denklemin yaklaşık çözümü oluşturulacaktır.

İlk olarak (4.7) denkleminde, L lineer operatörü

$$L: W_2^3[0,1] \rightarrow W_2^1[0,1],$$

$$Lv(x) = {}^c D^\alpha v(x), \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (4.20)$$

olarak seçilir. (4.7) ve (4.8) denklemleri

$$f(x, v) = \gamma \sinh(\gamma(v(x) + x))$$

ve

$$\begin{cases} Lv = f(x, v), x \in [0,1] \\ v(0) = 0, v(1) = 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

olacak şekilde ifade edilebilir.

L lineer operatörünün adjointi L^* operatörüdür.

$$\varphi_i(x) = K_{x_i}(x) \quad (4.22)$$

ve

$$\psi_i(x) = L^* \varphi_i(x) \quad (4.23)$$

fonksiyonları tanımlanır. $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ fonksiyonlarına Gram-Schmidt ortogonalizasyon metodu uygulanarak

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \quad (\beta_{ii} > 0, i = 1, 2, 3 \dots) \quad (4.24)$$

eşitliğini sağlayan $W_2^3[0,1]$ uzayının $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal sistemi elde edilir.

Teorem 4.3. (4.20) ile verilen L operatörü sınırlı lineer operatörüdür.

İspat. $A > 0$ sabit sayı olmak üzere

$$\|Lv\|_{W_2^1[0,1]}^2 \leq A \|v\|_{W_2^3[0,1]}^2$$

olduğu gösterilir.

$W_2^1[0,1]$ uzayındaki iç çarpım ve norm tanımından yararlanarak

$$\|Lv\|_{W_2^1[0,1]}^2 = \langle Lv, Lv \rangle_{W_2^1[0,1]} = \int_0^1 [Lv(x)]^2 + [Lv'(x)]^2 dx$$

yazılır. Çekirdek doğurma özelliği sayesinde

$$v(x) = \langle v(y), R_y(x) \rangle_{W_2^3[0,1]}$$

ve

$$Lv(x) = \langle v(y), LR_y(x) \rangle_{W_2^3[0,1]}$$

ifadelerine sahip olunur. Böylece

$A_1 > 0$ sabit sayı olmak üzere

$$|Lv(x)| \leq \|v\|_{W_2^3[0,1]} \|LR_y\|_{W_2^3[0,1]} = A_1 \|v\|_{W_2^3[0,1]}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\int_0^1 [(Lv)(x)]^2 dx \leq A_1^2 \|v\|_{W_2^3[0,1]}^2$$

elde edilir. $A_2 > 0$ sabit sayı olmak üzere

$$[(Lv)'(x)]^2 \leq \langle v(y), (LR_y)'(x) \rangle_{W_2^3[0,1]}$$

ve

$$|(Lv)'(x)| \leq \|v\|_{W_2^3[0,1]} \|(LR_y)'\|_{W_2^3[0,1]} = A_2 \|v\|_{W_2^3[0,1]}$$

olduğu için

$$[(Lv)'(x)]^2 \leq A_2^2 \|v\|_{W_2^3[0,1]}^2$$

ve

$$\int_0^1 [(Lv)'(x)]^2 dx \leq A_2^2 \|v\|_{W_2^3[0,1]}^2$$

ifadeleri elde edilir.

Buradan $A = (A_1^2 + A_2^2) > 0$ olduğu için

$$\|Lv\|_{W_2^1[0,1]}^2 \leq \int_0^1 [(Lv)(x)]^2 + [(Lv)'(x)]^2 dx \leq (A_1^2 + A_2^2) \|v\|_{W_2^3[0,1]}^2 = A \|v\|_{W_2^3[0,1]}^2$$

elde edilir. Bu durum ispatı tamamlar. \square

Teorem 4.4. $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $[0,1]$ aralığında yoğun ve $\psi_i = L_y R_x(y)|_{y=x_i}$ olsun. O zaman $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $W_2^3[0,1]$ uzayının tam sistemidir.

İspat. $\psi_i(x) = (L^* \varphi_i)(x) = \langle (L^* \varphi_i)(y), R_x(y) \rangle = \langle \varphi_i(y), L_y R_x(y) \rangle = L_y R_x(y)|_{y=x_i}$ yazılabildiği için $\psi_i(x) \in W_2^3[0,1]$ olduğu açıktır. Her bir sabit $v(x) \in W_2^3[0,1]$ için

$$\langle v(x), \psi_i(x) \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

ifadesi gerçekleşirse

$$\langle v(x), L^* \varphi_i(x) \rangle = \langle Lv(\cdot), \varphi_i(\cdot) \rangle = (Lv)(x_i) = 0$$

elde edilir.

$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ifadesi $[0,1]$ aralığında yoğun olduğundan dolayı

$$(Lv)(x) = 0$$

yazılabilir. L^{-1} ters operatör sayesinde $v \equiv 0$ sonucuna ulaşılır. Bu durum ise ispatı tamamlar. \square

Teorem 4.5. Eğer $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $[0,1]$ aralığında yoğun ise (4.7) denkleminin çözümü

$$v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, v_k) \bar{\psi}_i(x) \quad (4.25)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. Teorem 4.4'ten yararlanarak $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ ifadesi $W_2^3[0,1]$ uzayının ortonormal sistemidir.

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle v(x) \bar{\psi}_i(x) \rangle_{W_2^3[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle v(x), \psi_k(x) \rangle_{W_2^3[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle v(x), L^* \varphi_k(x) \rangle_{W_2^3[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Lv(x), \varphi_k(x) \rangle_{W_2^1[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle f(x, v), K_{x_k}(x) \rangle_{W_2^1[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, v_k) \bar{\psi}_i(x)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu durum ispatı tamamlar. \square

Yaklaşık çözüm ise

$$v_m = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, v_k) \bar{\psi}_i(x) \quad (4.26)$$

şeklinde $v_m(x)$ serisinde sonlu terimler alınarak elde edilir.

Teorem 4.6.

Eğer $v(x) \in W_2^3[0,1]$ ise o zaman öyle bir $F > 0$ vardır ki $\|v^{(i)}(x)\|_{C[0,1]} \leq F \|v(x)\|_{W_2^3[0,1]}$, $i = 0,1,2$. Burada $\|v(x)\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |v(x)|$ dir.

İspat önceki bölümde yapılan benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.7. $v_m(x)$ ve onun $v_m'(x)$ ve $v_m''(x)$ 'nin yaklaşık çözümleri $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

İspat önceki bölümde yapılan benzer şekilde yapılabilir.

Eğer ele alınan (4.7) denklemi lineer ise K-RKM yöntemi kullanılarak (4.26) denkleminde yaklaşık çözüm elde edilir. Eğer (4.7) denklemi lineer değilse aşağıda belirtilen iteratif süreç kullanılacaktır.

4.3. İteratif Sürecin Oluşturulması

Öncelikle v_m ifadesine ait iteratif dizi

$$\begin{cases} Lv_{m,n}(x) = f(x, w_{m,n-1}(x)) \\ w_{m,n}(x) = C_{m-1} v_{m,n}(x). \end{cases} \quad (4.27)$$

olarak alınır. Buradaki $C_{m-1}: W_2^3[0,1] \rightarrow \text{span}\{\bar{\psi}_1(x), \bar{\psi}_2(x), \dots, \bar{\psi}_{m-1}(x)\}$ ortogonal projeksiyon operatör olup $v_{m,n}(x) \in W_2^3[0,1]$ ise (4.27) eşitliğinin n . iteratif yaklaşık çözümüdür.

Teorem 4.8. $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ ifadesi $[0,1]$ aralığında farklı noktalardan oluşsun o halde

$$v_{m,n}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m f(x_k, w_{m,n-1}(x_k)) \bar{\psi}_i(x).$$

İspat. $v_{m,n}(x) \in W_2^3[0,1]$ olduğu için $\{\bar{\psi}_i^m(x)\}_{i=0}^\infty, W_2^3[0,1]$ uzayında tam sistemdir,

$$\begin{aligned} v_{m,n}(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_{m,n}(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{W_2^3[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle v_{m,n}(x), \psi_k(x) \rangle_{W_2^3[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle v_{m,n}(x), L^* \varphi_k(x) \rangle_{W_2^3[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Lv_{m,n}(x), \varphi_k(x) \rangle_{W_2^3[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} Lv_{m,n}(x_k) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, w_{m,n-1}(x_k)) \bar{\psi}_i(x). \end{aligned}$$

Bu ise ispatı tamamlar. \square

$w_{m,0}(x) = 0$ alınarak iteratif süreç başlatılır ($w(x) \in W_2^3[0,1]$ olacak şekilde herhangi bir sabit alınabilir). Burada $w_{m,n}(x)$ aşağıdaki gibi alınabilir.

$$w_{m,n}(x) = C_{m-1}v_{m,n}(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m f(x_k, w_{m,n-1}(x_k)) \bar{\psi}_i(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.28)$$

Buradan $v(x)$ bulunur. $u(x) = v(x) + x$ dönüşümü sayesinde (4.1) ve (4.2) denkleminin çözümü kolaylıkla bulunabilir

4.4. Legendre Doğuran Çekirdek Yaklaşımı

Teorem 4.9. H , n boyutlu bir Hilbert uzayı olsun. $\{e_i\}_{i=1}^n$ H 'in ortonormal bir bazıdır. H 'in çekirdek fonksiyonu

$$K_y(x) = \sum_{i=1}^n e_i(x) \bar{e}_i(y) \quad (4.29)$$

şeklinde ifade edilir[48].

Tanım 4.3. $P_\rho^m[0,1]$ uzayı derecesi m 'ye eşit ya da m 'den küçük reel katsayılı $[0,1]$ üzerinde tanımlı polinomların ağırlıklı iç çarpım uzayı olsun, $\forall u, v \in P_\rho^m[0,1]$ için iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u, v \rangle_{P_\rho^m} = \int_0^1 \rho_{[0,1]}(x) u(x) v(x) dx \quad (4.30)$$

$$\|u\|_{P_\rho^m} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{P_\rho^m}} \quad (4.31)$$

şeklindedir.

Her bir sabit m için

$$L_\rho^2[0,1] = \left\{ f \mid \int_0^1 \rho_{[0,1]}(x) |f(x)|^2 dx < \infty \right\} \quad (4.32)$$

tanımına göre $P_\rho^m[0,1]$ uzayı $L_\rho^2[0,1]$ uzayının alt uzayıdır ve $\forall u, v \in P_\rho^m[0,1]$ için

$$\langle u, v \rangle_{P_\rho^m} = \langle u, v \rangle_{L_\rho^2} \quad (4.33)$$

eşitliği yazılabilir [52].

Teorem 4.10. $P_\rho^m[0,1]$ fonksiyon uzayı kendi üzerinde tanımlanan iç çarpımı ve normu ile bir RKHS dir.

İspat. Tanım 4.3.'ten $P_\rho^m[0,1]$ uzayı sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayıdır. Her sonlu boyutlu iç çarpım uzayı Hilbert uzayıdır. Bu sonuçtan ve Teorem 4.9.'dan $P_\rho^m[0,1]$ uzayı bir RKHS dir. \square

Sınır değer probleminin çözümü için homojen sınır koşullarını sağlayan $P_\rho^m[0,1]$ uzayının kapalı bir alt uzayını tanımlamak gerekir.

Tanım 4.4.

$${}^0P_\rho^m[0,1] = \{u | u \in P_\rho^m[0,1], u(0) = u(1) = 0\} \quad (4.34)$$

olsun.

$u(0) = 0$ ve $u(1) = 0$ homojen sınır koşullarını sağlayan Legendre baz fonksiyonu

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} P_i(x) - P_0(x), & i \text{ çift ise,} \\ P_i(x) - P_1(x), & i \text{ tek ise,} \end{cases} \quad i \geq 2 \quad (4.35)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu ifadeden yararlanarak ${}^0P_\rho^m[0,1]$ fonksiyon uzayının bir RKHS olduğu kolayca gösterilebilir. Teorem 4.9.'dan yararlanarak ${}^0P_\rho^m[0,1]$ 'in $K_y^m(x)$ çekirdek fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir [52].

$$K_y^m(x) = \sum_{i=2}^m h_i(x) h_i(y) \quad (4.36)$$

Buradaki $h_i(x)$, Gram-Schmidt kullanılarak (4.35) denkleminde türetilen tam ortonormal sistemdir.

4.5. Legendre Doğuran Çekirdek Metodu (L-RKM)

Bu alt bölümde lineer olmayan Troesch denkleminin sınır değer probleminin, ${}^0P_\rho^m[0,1]$ uzayında yaklaşık çözümünü elde etmek için Legendre doğuran çekirdek metodu kullanılacaktır.

Ele alınan Troesch denklemi

$${}^cD^\alpha u(x) = \gamma \sinh(\gamma u(x)), \quad u(0) = 0, u(1) = 1, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (4.37)$$

şeklindedir. Bu denklemin Legendre doğuran çekirdek metoduyla yaklaşık çözümünün elde edilmesi için homojen olmayan sınır şartlarının $v(x) = u(x) - x$ dönüşümü sayesinde homojenleştirilerek, kullanılan denklem

$${}^cD^\alpha v(x) = \gamma \sinh(\gamma(v(x) + x)), \quad v(0) = 0, v(1) = 0, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (4.38)$$

şeklinde ifade edilir.

İlk önce L lineer operatörü

$$L: {}^0P_\rho^m[0,1] \rightarrow L_\rho^2[0,1]$$

$$Lv(x) = {}^cD^\alpha v(x) \quad (4.39)$$

şeklinde seçilip, (4.38) denklemini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f(x, v) = \gamma \sinh(\gamma(v(x) + x))$$

$$\begin{cases} Lv = f(x, v) \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \quad (4.40)$$

Yukarıdaki bölümlerde L nin sınırlı bir lineer operatör olduğu gösterildi. İlk önce (4.40) denkleminin ${}^0P_\rho^m[0,1]$ uzayında yaklaşık çözümünün oluşturulması için bu uzayın polinom bazlı $K_y^m(x)$ doğuran çekirdek fonksiyonu bulunmalıdır.

Teorem 4.11. (4.38) denklemini için, eğer $\{x_i\}_{i=0}^{m-2}$ ifadesi $(0,1)$ aralığında $(m - 1)$ tane farklı nokta ise o zaman $\psi_i(x) = L^*K_{x_i}^m(x) = L_yK_y^m(x)|_{y=x_i}$ yazılır.

İspat. Herhangi sabit $x_i \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned}\psi_i(x) &= L^*K_{x_i}^m(x) = \langle L^*K_{x_i}^m(x), K_x^m(y) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} \\ &= \langle K_{x_i}^m(x), L_yK_x(y) \rangle_{L_\rho^2} = L_yK_x^m(y)|_{y=x_i}.\end{aligned}\quad (4.41)$$

Tanım 4.4.'ten yararlanarak $K_x^m(y) = K_y^m(x)$ eşitliği yazılabilir. Bu nedenle

$$\psi_i(x) = L^*K_{x_i}^m(x) = L_yK_y^m(x)|_{y=x_i} \quad (4.42)$$

ifadesi yazılır. Burada L^*, L 'nin adjointidir ve L 'nin y alt indisi L operatörünün y fonksiyonuna uygulandığını gösterir. Her sabit m ve $x_i \in (0,1)$ için $\psi_i \in {}^0P_\rho^m[0,1]$ olur. \square

Teorem 4.12. $m \geq 2$ için, $\{x_i\}_{i=0}^{m-2}$ ifadesi $(0,1)$ aralığında $m - 1$ farklı noktadan oluşsun. $\{\psi_i\}_{i=0}^{m-2}, {}^0P_\rho^m[0,1]$ uzayın tam sistemidir.

İspat. Her sabit $v \in {}^0P_\rho^m[0,1]$ için

$$\langle v(x), \psi_i(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m - 2$$

olsun. Bunun anlamı $i = 0, 1, \dots, m - 2$ için

$$\begin{aligned}\langle v(x), \psi_i(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} &= \langle v(x), L^*K_{x_i}^m(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} \\ &= \langle Lv(x), K_{x_i}^m(x) \rangle_{L_\rho^2} \\ &= Lv(x_i) = 0.\end{aligned}$$

L^{-1} ters operatörün varlığından $v \equiv 0$ olduğu sonucuna varılır. Bu nedenle $\{\psi_i\}_{i=0}^{m-2}, {}^0P_\rho^m[0,1]$ uzayın tam sistemidir. Bu ispatı tamamlar. \square

Teorem 4.12., L-RKM de sonlu farklı noktanın kullanımının yeterli olduğunu ve yoğun bir diziye ihtiyaç duyulmadığını gösterir. Bu nedenle L-RKM, K-RKM den farklıdır.

${}^0P_\rho^m[0,1]$ uzayının $\{\bar{\psi}_i\}_{i=0}^{m-2}$ ortonormal sistemi, $\{\psi_i\}_{i=0}^{m-2}$ ifadesini kullanılarak Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden aşağıda belirtilen şekilde

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \quad (\beta_{ii} > 0, i = 1, 2, 3 \dots) \quad (4.43)$$

elde edilir. Buradaki β_{ik} ortogonalizasyon katsayılarıdır.

Teorem 4.13. $\{x_i\}_{i=0}^{m-2}$ ifadesi $(0,1)$ aralığında $m - 1$ farklı noktadan oluşsun, (4.38) denkleminin tam çözümü v_m ,

$$v_m(x) = \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} f(x_k, v_m(x_k)) \bar{\psi}_i(x) \quad (4.44)$$

şeklindedir.

İspat. $v_m \in {}^0P_\rho^m[0,1]$ olduğu için Teorem 4.12'den yararlanarak

$$v_m(x) = \sum_{i=0}^{m-2} \langle v_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x)$$

yazılabilir. Ayrıca (4.40) denkleminin ${}^0P_\rho^m[0,1]$ uzayında tam çözümü olan $v_m(x)$, (4.41) ve (4.43) denklemleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} v_m(x) &= \sum_{i=0}^{m-2} \langle v_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{m-2} \langle v_m(x), \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \langle v_m(x), \psi_k(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \langle v_m(x), L^* K_{x_k}^m(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \langle Lv_m(x), K_{x_k}^m(x) \rangle_{L_\rho^2} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \langle f(x, v_m(x)), K_{x_k}^m(x) \rangle_{L_\rho^2} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} f(x_k, v_m(x_k)) \bar{\psi}_i(x).
\end{aligned}$$

Bu durum ispatı tamamlar. \square

(4.38) denklemi lineer ise L-RKM yöntemi ile yaklaşık çözüm (4.44) denkleminde bulunur. Lineer değil ise aşağıda verilen iteratif süreç kullanılarak yaklaşık çözüm elde edilir.

4.6. İteratif Sürecin Oluşturulması

Öncelikle v_m iteratif dizi oluşturulur

$$\begin{cases} Lv_{m,n}(x) = f(x, w_{m,n-1}(x)) \\ w_{m,n}(x) = C_{m-1} v_{m,n}(x). \end{cases} \quad (4.45)$$

Buradaki $C_{m-1}: {}^0P_\rho^m[0,1] \rightarrow \text{span}\{\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_{m-2}\}$ ortogonal projeksiyon operatör olup $v_{m,n}(x) \in {}^0P_\rho^m[0,1]$ ise (4.45) eşitliğinin n . iteratif yaklaşık çözümüdür.

Teorem 4.14. $\{x_i\}_{i=0}^{m-2}$ dizisi $(0,1)$ aralığında farklı noktalardan oluşsun. O halde yaklaşık çözüm

$$v_{m,n}(x) = \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} f(x_k, w_{m,n-1}(x_k)) \bar{\psi}_i(x)$$

Şeklindedir.

İspat. $v_{m,n}(x) \in {}^0P_\rho^m[0,1]$ olduğu için $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=0}^{m-2}$, ${}^0P_\rho^m[0,1]$ uzayında tam sistemdir,

$$\begin{aligned} v_{m,n}(x) &= \sum_{i=0}^{m-2} \langle v_{m,n}(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{m-2} \langle v_{m,n}(x), \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \langle v_{m,n}(x), \psi_k(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \langle v_{m,n}(x), L^* K_{x_k}^m(x) \rangle_{{}^0P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \langle Lv_{m,n}(x), K_{x_k}^m(x) \rangle_{L_\rho^2} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} \langle f(x, w_{m,n-1}(x)), K_{x_k}^m(x) \rangle_{L_\rho^2} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} f(x_k, w_{m,n-1}(x_k)) \bar{\psi}_i(x). \end{aligned}$$

Bu ise ispatı tamamlar. \square

$w_{m,0}(x) = 0$ alınarak iteratif süreç başlatılır ($w_{m,0}(x) \in {}^0P_\rho^m[0,1]$ olacak şekilde herhangi bir sabit alınabilir).

$$w_{m,n}(x) = C_{m-1} v_{m,n}(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{k=0}^i \beta_{ik} f(x_k, w_{m,n-1}(x_k)) \bar{\psi}_i(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.46)$$

buradan $v(x)$ bulunur. $u(x) = v(x) + x$ dönüşümü sayesinde (4.37) denkleminin çözümü kolaylıkla bulunabilir.

Örnek 4.1.

Troesch denklemi

$${}^c D^\alpha u(x) = \gamma \sinh(\gamma u(x)), \quad 0 < x < 1, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (4.47)$$

ve sınır koşulları

$$u(0) = 0 \text{ ve } u(1) = 1 \quad (4.48)$$

şeklinde ifade edilir [67]. Alınan denklemin K-RKM ile $u_m^n(x)$ yaklaşık çözümü için $x_i = \frac{i}{m}$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$ olarak alındı. m nokta sayısı, n iterasyon sayısıdır. $m = 5$, $n = 5$ alınarak farklı γ ve α için $u_5^5(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata tabloları yapıldı.

Tablo 4.1. Örnek 4.1.'de K-RKM yöntemi kullanarak $m = 5$, $n = 5$, $\gamma = 1$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_5^5(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	$u_5^5(x)$ $\gamma = 1$ $\alpha = 2$	$u_5^5(x)$ $\gamma = 1$ $\alpha = 1.9$	$u_5^5(x)$ $\gamma = 1$ $\alpha = 1.8$	$u_5^5(x)$ $\gamma = 1$ $\alpha = 1.7$	Tam Çözüm $\gamma = 1$ $(\alpha = 2)$	Mutlak Hata $\gamma = 1$ $(\alpha = 2)$
0.1	0.08452783121	0.08253843892	0.08077747206	0.0788083832	0.0817969965	0.00273083471
0.2	0.1699057202	0.1667250018	0.1633738957	0.1596740769	0.1645308708	0.0053748494
0.3	0.2569979279	0.2529494463	0.2482910992	0.2432133707	0.2491673606	0.0078305673
0.4	0.3467145987	0.3421157723	0.3365402687	0.3305334565	0.3367322088	0.0099823899
0.5	0.4400102019	0.4352565489	0.4292252134	0.4227885141	0.4283471608	0.0116630411
0.6	0.5378864110	0.5334511782	0.5274520158	0.5210960152	0.5252740292	0.0126123818
0.7	0.6414982487	0.6378593425	0.6324394175	0.6267377323	0.6289711432	0.0125271055
0.8	0.7520534013	0.7498491900	0.7456412603	0.7412404747	0.7411683772	0.0108850241
0.9	0.8709949876	0.8704986858	0.8681055022	0.8656127218	0.8639700206	0.0070249670

Tablo 4.2. Örnek 4.1.'de K-RKM yöntemi kullanarak $m = 5$, $n = 5$, $\gamma = 0.5$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_5^5(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	$u_5^5(x)$ $\gamma = 0.5$ $\alpha = 2$	$u_5^5(x)$ $\gamma = 0.5$ $\alpha = 1.9$	$u_5^5(x)$ $\gamma = 0.5$ $\alpha = 1.8$	$u_5^5(x)$ $\gamma = 0.5$ $\alpha = 1.7$	Tam Çözüm $\gamma = 0.5$ $(\alpha = 2)$	Mutlak Hata $\gamma = 0.5$ $(\alpha = 2)$
0.1	0.09594001905	0.09534307690	0.09484344860	0.09428281143	0.09517690190	0.00076311709
0.2	0.1921185815	0.1911596056	0.1902189069	0.1891786894	0.1906338690	0.0014847125
0.3	0.2887775722	0.2875560766	0.2862641873	0.2848579918	0.2866534032	0.0021241690
0.4	0.3861620033	0.3847767445	0.3832546514	0.3816235282	0.3835229288	0.0026390745
0.5	0.4845196046	0.4830923218	0.4814784960	0.4797737655	0.4815373856	0.0029822190
0.6	0.5841022883	0.5827650044	0.5811999571	0.5795682553	0.5810019748	0.0031003135
0.7	0.6851709329	0.6840584391	0.6826840066	0.6812690292	0.6822351328	0.0029358001
0.8	0.7879902594	0.7872491927	0.7862086984	0.7851487598	0.7855717868	0.0024184726
0.9	0.8928371022	0.8925504088	0.8919702590	0.8913839803	0.8913669876	0.0014701146

Tablo 4.3. Örnek 4.1.'de K-RKM yöntemi kullanarak $m = 5$, $n = 5$, $\gamma = 0.1$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_5^5(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	$u_5^5(x)$ $\gamma = 0.1$ $\alpha = 2$	$u_5^5(x)$ $\gamma = 0.1$ $\alpha = 1.9$	$u_5^5(x)$ $\gamma = 0.1$ $\alpha = 1.8$	$u_5^5(x)$ $\gamma = 0.1$ $\alpha = 1.7$	Tam Çözüm $\gamma = 0.1$ $(\alpha = 2)$	Mutlak Hata $\gamma = 0.1$ $(\alpha = 2)$
0.1	0.0998353509	0.09981017948	0.09978948591	0.09976626760	0.0998041752	0.00003117576
0.2	0.1996805897	0.1996401437	0.1996013284	0.1995584447	0.1996201980	0.0000603917
0.3	0.2995457334	0.2994942639	0.2994411892	0.2993835371	0.2994599206	0.0000858128
0.4	0.3994407892	0.3993825197	0.3993203378	0.3992539404	0.3993352030	0.0001055862
0.5	0.4993757367	0.4993158555	0.4992503919	0.4991816195	0.4992579186	0.0001178181
0.6	0.5993606191	0.5993045698	0.5992416387	0.5991765326	0.5992399580	0.0001206611
0.7	0.6994054404	0.6993587811	0.6993040532	0.6992482699	0.6992932326	0.0001062207
0.8	0.7995202394	0.7994886478	0.7994475875	0.7994062595	0.7994296804	0.0000905590
0.9	0.8997150732	0.8997019279	0.8996792003	0.8996565483	0.8996612690	0.0000905590

Troesch denkleminin, L-RKM yöntemi kullanılarak $u_m^n(x)$ yaklaşık çözümünün elde edilebilmesi için $x_i = \frac{i+0.3}{m}$, $i = 0, 1, \dots, (m - 1)$ olarak alındı. m , $(0,1)$ aralığındaki hem nokta hem de baz sayısı, n ise iterasyon sayısıdır. Örnek 4.1.'in L-RKM yöntemiyle çözümünde $m = 3$, $n = 5$ alınarak farklı γ ve α için $u_3^5(x)$ yaklaşık çözümleri bulunup tam çözüm ile karşılaştırılarak mutlak hata tabloları yapıldı.

Tablo 4.4. Örnek 4.1.'de L-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 5$, $\gamma = 1$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_3^5(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	$u_3^5(x)$ $\gamma = 1$ $\alpha = 2$	$u_3^5(x)$ $\gamma = 1$ $\alpha = 1.9$	$u_3^5(x)$ $\gamma = 1$ $\alpha = 1.8$	$u_3^5(x)$ $\gamma = 1$ $\alpha = 1.7$	Tam Çözüm $\gamma = 1$ ($\alpha = 2$)	Mutlak Hata $\gamma = 1$ ($\alpha = 2$)
0.1	0.08482153655	0.08306548447	0.08118245978	0.07916832176	0.0817969965	0.00302454005
0.2	0.1704887278	0.1671982749	0.1636984624	0.1599896966	0.1645308708	0.0059578570
0.3	0.2578552626	0.2533537433	0.2486060630	0.2436215272	0.2491673606	0.0086879020
0.4	0.3478285799	0.3425190324	0.3369690285	0.3311976028	0.3367322088	0.0110963711
0.5	0.4413698686	0.4357130543	0.4298568369	0.4238280971	0.4283471608	0.0130227078
0.6	0.5394940678	0.5339864919	0.5283446761	0.5225995722	0.5252740292	0.0142200386
0.7	0.6432698663	0.6378593425	0.6335134459	0.6285749741	0.6289711432	0.0142987231
0.8	0.7538197033	0.7501331937	0.7464497561	0.7427936352	0.7411683772	0.0126513261
0.9	0.8723197678	0.8702666735	0.8682459309	0.8662712754	0.8639700206	0.0083497472

Tablo 4.5. Örnek 4.1.'de L-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 5$, $\gamma = 0.5$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_3^5(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	$u_3^5(x)$ $\gamma = 0.5$ $\alpha = 2$	$u_3^5(x)$ $\gamma = 0.5$ $\alpha = 1.9$	$u_3^5(x)$ $\gamma = 0.5$ $\alpha = 1.8$	$u_3^5(x)$ $\gamma = 0.5$ $\alpha = 1.7$	Tam Çözüm $\gamma = 0.5$ ($\alpha = 2$)	Mutlak Hata $\gamma = 0.5$ ($\alpha = 2$)
0.1	0.09595407344	0.09534307690	0.09484344867	0.09435629405	0.09517690196	0.00077717148
0.2	0.1921479010	0.1911596056	0.1902189069	0.1892059268	0.1906338690	0.0015140320
0.3	0.2888219506	0.2875560766	0.2862641873	0.2848830681	0.2866534032	0.0021685474
0.4	0.3862205675	0.3847767445	0.3832546514	0.3816939658	0.3835229288	0.0026976387
0.5	0.4845919735	0.4830923218	0.4814784960	0.4799169464	0.4815373856	0.0030545879
0.6	0.5841882677	0.5827650044	0.5811999571	0.5798024146	0.5810019748	0.0031862929
0.7	0.6852654260	0.6840584391	0.6826840066	0.6815728535	0.6822351328	0.0030302932
0.8	0.7880833013	0.7872491927	0.7862086984	0.7854228244	0.7855717868	0.0025115145
0.9	0.8929056236	0.8925504088	0.8919702590	0.8915189671	0.8913669876	0.0015386360

Tablo 4.6. Örnek 4.1. de L-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 5$, $\gamma = 0.1$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_3^5(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	$u_3^5(x)$ $\gamma = 0.1$ $\alpha = 2$	$u_3^5(x)$ $\gamma = 0.1$ $\alpha = 1.9$	$u_3^5(x)$ $\gamma = 0.1$ $\alpha = 1.8$	$u_3^5(x)$ $\gamma = 0.1$ $\alpha = 1.7$	Tam Çözüm $\gamma = 0.1$ ($\alpha = 2$)	Mutlak Hata $\gamma = 0.1$ ($\alpha = 2$)
0.1	0.09983512346	0.09981461102	0.09979260326	0.09976919354	0.0998041752	0.00003094826
0.2	0.1996802303	0.1996420969	0.1996016525	0.1995592510	0.1996201980	0.0000600323
0.3	0.2995453050	0.2994937535	0.2994397922	0.2993841358	0.2994599206	0.0000853844
0.4	0.3994403387	0.3993804913	0.3993187935	0.3992563526	0.3993352030	0.0001051357
0.5	0.4993753291	0.4993128348	0.4992495537	0.4991869463	0.4992579186	0.0001174105
0.6	0.5993602802	0.5993009229	0.5992420968	0.5991855028	0.5992399580	0.0001203222
0.7	0.6994052025	0.6993545088	0.6993055730	0.6992601487	0.6992932326	0.0001119699
0.8	0.7995201132	0.7994829601	0.7994482590	0.7994175513	0.7994296804	0.0000904328
0.9	0.8997150356	0.8996952584	0.8996775582	0.8996629188	0.8996612690	0.0000537666

Tablo 4.7'de Trosch denkleminin, literatürde var olan yaklaşık çözümlerinden Sinc-Galerkin metodu (SGM), Laplace metodu (LM), homotopi perturbasyon metodu (HPM) ve perturbasyon metodunun (PM) sonuçları ile $\alpha = 2$ ve $\gamma = 1$ için L-RKM ve K-RKM

çözümleri ile elde edilen yaklaşık sonuçlarla tam çözüm karşılaştırıldı. Tablo 4.8.'de L-RKM, K-RKM yöntemi ile diğer yöntemlerin mutlak hata sonuçları karşılaştırıldı. L-RKM yöntemi kullanılarak $u_m^n(x)$ yaklaşık çözümünün elde edilebilmesi için $x_i = \frac{i+0.3}{m}$, $i = 0,1, \dots, (m-1)$ olarak alındı. $m = 3$, $n = 5$ alınarak $u_3^5(x)$ yaklaşık çözüm bulundu. K-RKM ile $u_m^n(x)$ yaklaşık çözümü için $x_i = \frac{i}{m}$, $i = 0,1,2, \dots, m$ olarak alındı.. $m = 5$, $n = 5$ alınarak $u_5^5(x)$ yaklaşık çözüm elde edildi.

Tablo 4.7. Farklı yöntemler kullanarak $\alpha = 2$ ve $\gamma = 1$ için Troesch denkleminin yaklaşık çözümleri

x	TAM ÇÖZÜM $\gamma = 1$	L-RKM $u_3^5(x)$ $\gamma = 1$	K-RKM $u_5^5(x)$ $\gamma = 1$	SGM[71]] $\gamma = 1$	LM[73] $\gamma = 1$	HPM[78]] $\gamma = 1$	PM[73] $\gamma = 1$
0.1	0.0817969965	0.08482153655	0.08452783121	0.084661250	0.0846631	0.084934415	0.085417
0.2	0.1645308708	0.1704887278	0.1699057202	0.170171338	0.1701750	0.170697546	0.171669
0.3	0.2491673606	0.2578552626	0.2569979279	0.257393933	0.2573995	0.258133224	0.259603
0.4	0.3367322088	0.3478285799	0.3467145987	0.347222839	0.3472304	0.348116627	0.350053
0.5	0.4283471608	0.4413698686	0.4400102019	0.440599836	0.4406094	0.44157274	0.444010
0.6	0.5252740292	0.5394940678	0.5378864110	0.538534416	0.5385460	0.539498234	0.542315
0.7	0.6289711432	0.6432698663	0.6414982487	0.642128589	0.6421421	0.642987984	0.645984
0.8	0.7411683772	0.7538197033	0.7520534013	0.752608114	0.7526227	0.753267551	0.756064
0.9	0.8639700206	0.8723197678	0.8709949876	0.871362527	0.8713749	0.871733059	0.873671

Tablo 4.8. Farklı yöntemler kullanarak $\alpha = 2$ ve $\gamma = 1$ için Troesch denkleminin mutlak hata değerleri

x	L-RKM $u_3^5(x)$ $\gamma = 1$	K-RKM $u_5^5(x)$ $\gamma = 1$	SGM[71]] $\gamma = 1$	LM[73] $\gamma = 1$	HPM[78] $\gamma = 1$	PM[73] $\gamma = 1$
0.1	3.024×10^{-3}	2.703×10^{-3}	2.864×10^{-3}	7.648×10^{-1}	3.137×10^{-3}	3.620×10^{-3}
0.2	5.957×10^{-3}	5.374×10^{-3}	5.640×10^{-3}	5.64×10^{-3}	6.166×10^{-3}	7.140×10^{-3}
0.3	8.687×10^{-3}	7.830×10^{-3}	8.226×10^{-3}	8.23×10^{-3}	8.965×10^{-3}	1.044×10^{-2}
0.4	1.109×10^{-2}	9.982×10^{-3}	1.049×10^{-2}	1.05×10^{-2}	1.138×10^{-2}	1.332×10^{-2}
0.5	1.302×10^{-2}	1.166×10^{-2}	1.225×10^{-2}	1.226×10^{-2}	1.322×10^{-2}	1.566×10^{-2}
0.6	1.422×10^{-2}	1.261×10^{-2}	1.326×10^{-2}	1.327×10^{-2}	1.422×10^{-2}	1.704×10^{-2}
0.7	1.429×10^{-2}	1.252×10^{-2}	1.315×10^{-2}	1.317×10^{-2}	1.401×10^{-2}	1.701×10^{-2}
0.8	1.265×10^{-2}	1.088×10^{-2}	1.143×10^{-2}	1.145×10^{-2}	1.209×10^{-2}	1.490×10^{-2}
0.9	8.349×10^{-3}	7.024×10^{-3}	7.392×10^{-3}	7.4×10^{-3}	7.763×10^{-3}	9.700×10^{-3}

5. BÖLÜM

ÇOKLU MERTEBEDEN KESİRLİ TÜREV İÇEREN ÇOK NOKTALI BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN EK BAZLI LEGENDRE DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Çoklu mertebeden kesirli türev içeren, lineer olmayan, çok noktalı başlangıç-sınır değer problemleri, uygulamalı matematik ve fiziğin farklı alanlarında ortaya çıkan bir denklem türüdür [79-85]. Dinamik sistemler, akışkanlar mekaniği, kontrol teorisi, petrol endüstrileri ve ısı iletimi gibi mühendislik ve uygulamalı bilimlerin birçok önemli alanında kullanılmaktadır [86-87].

Kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak oldukça zordur [88-89]. Bu nedenle yaklaşık çözümleri ve çözümlerin nitel davranışlarını bulmak için, sonlu fark yöntemi [90], sonlu elemanlar yöntemi [91], homotopi pertürbasyon yöntemi [92], Haar dalgacık yöntemleri [93], kolokasyon yöntemleri [94], pertürbasyon-iterasyon algoritması [95], diferansiyel dönüşüm metodu [96], varyasyonel iterasyon metodu [97], doğuran çekirdekli Hilbert uzay metodu [98-99] gibi birçok verimli ve kullanışlı yöntemler geliştirildi [100-109].

İlk olarak Zarembo 1907 yılında doğuran çekirdek kavramını tanıtır Dirichlet koşulunu dâhil ederek sınır değer problemleri üzerine araştırmalar yapmıştır [1]. Daha sonra doğuran çekirdek yöntemi (RKM) kullanılarak birçok adi, kısmi ve integro-diferansiyel denklemler için yakınsak seri formda çözümler üretilmiş olup son zamanlarda ise doğuran çekirdek metodu kesir mertebeden lokal olmayan sınır değer problemleri, Riccati diferansiyel denklemi, lokal olmayan sınır koşullarına sahip zorlanmış Duffing (forced duffing) denklemleri, kesir mertebeden Caputo türevli Burgers denklemi, zaman kesirli Kawahara denklemi, kesir mertebeli Boussinesq denklemi, lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemleri gibi farklı problem türleri için uygulandı [110-116].

Bu bölümde, diğer bölümlerde aşına olduğumuz L-RKM yöntemi farklı bir teknikle, ek baz kullanılarak modifiye edilecektir. Çoklu mertebeden kesirli türev içeren lineer olmayan üç noktalı sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümünü elde etmek için

üzerinde çalışılan problemde α ve β 'ya göre kesirli türevler Caputo anlamında tanımlanıp ele alınan denklem

$$a_0(x) {}^c D^\alpha u(x) + a_1(x) {}^c D^\beta u(x) + a_2(x)u(x) = F(x, u(x), u'(x)) \quad (5.1)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 1$$

ve sınır koşulları ise;

$$u(0) = \mu_0, u(\vartheta) = \mu_1, u(1) = \mu_2, \quad 0 < \vartheta < 1 \quad (5.2)$$

şeklinde ifade edilir [35].

$a_0(\cdot), a_1(\cdot), a_2(\cdot) \in C^2(0,1)$ ve $F(\cdot, u(x), u'(x)) \in L_\rho^2[0,1]$ düzgün (smooth) fonksiyonlar olup ρ , Legendre polinomlarının ağırlık fonksiyonu olarak ifade edilerek $\rho = 1$ alınır. $P_\rho^m[0,1]$ uzayı, derecesi m 'ye eşit ya da m 'den küçük reel katsayılı $[0,1]$ üzerinde tanımlı polinomların ağırlıklı iç çarpım uzayı olup $P_\rho^m[0,1]$ uzayı sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayıdır.

5.1. Legendre Doğuran Çekirdek Metodu (L-RKM)

Bu alt bölümde lineer olmayan çoklu mertebeli kesirli türev içeren diferansiyel denklemlerin çok noktalı başlangıç-sınır değer problemlerinin, $P_\rho^m[0,1]$ uzayında yaklaşık çözümlerini elde etmek için ek bazlı Legendre doğuran çekirdek metodu kullanılacaktır.

İlk önce L lineer operatörü,

$$L: P_\rho^m[0,1] \rightarrow L_\rho^2[0,1]$$

$$Lu(x) = a_0(x) {}^c D^\alpha u(x) + a_1(x) {}^c D^\beta u(x) + a_2(x)u(x) \quad (5.3)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece (5.1) ve (5.2) denklemleri:

$$Lu = F(x, u(x), u'(x))$$

$$u(0) = \mu_0, u(\vartheta) = \mu_1, u(1) = \mu_2 \quad (5.4)$$

olarak ifade edilebilir.

Burada L 'nin sınırlı bir lineer operatör olduğunu göstermek kolaydır. (5.4) denkleminin $P_\rho^m[0,1]$ uzayında yaklaşık çözümünün oluşturulması için bu uzayın polinom bazlı $K_y^m(x)$ doğuran çekirdek fonksiyonu bulunmalıdır.

(5.1) denkleminin $P_\rho^m[0,1]$ fonksiyon uzayında ek bazlı Legendre doğuran çekirdek metodu kullanılarak yaklaşık çözümü verilecektir. Burada

$$\begin{aligned}\psi_i(x) &= L^* K_{x_i}^m(x) = \langle L^* K_{x_i}^m(x), K_x^m(y) \rangle_{P_\rho^m[0,1]} \\ &= \langle K_{x_i}^m(x), L_y K_x^m(y) \rangle_{L_\rho^2} = L_y K_x^m(y) \Big|_{y=x_i}, \quad 1 \leq i \leq m-1\end{aligned}\quad (5.5)$$

ve $\psi_i(x) = x^{i-1}$, $i \geq m$ olduğu da kabul edilecektir. L^*, L 'nin adjoint operatörüdür. Her sabit m ve $x_i \in (0,1)$ için $\psi_i \in P_\rho^m[0,1]$ dir.

Teorem 5.1. (5.1) ve (5.2) denklemleri için, eğer $\{x_i\}_{i=1}^{m-1}$ ifadesi $(0,1)$ aralığında $(m-1)$ tane farklı nokta ise o zaman $\psi_i(x) = L^* K_{x_i}^m(x) = L_y K_y^m(x) \Big|_{y=x_i}$ yazılır.

İspatı daha önceki bölümlerde yapılanlara benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 5.2. $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ ifadesi için $(0,1)$ aralığında farklı noktalar olsun. O zaman $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $P_\rho^m[0,1]$ uzayın tam sistemidir.

İspat. Her sabit $y \in P_\rho^m[0,1]$ için

$$\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{P_\rho^m[0,1]} = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

olsun. Bunun anlamı $i = 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned}\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{P_\rho^m[0,1]} &= \langle u(x), L^* K_{x_i}^m(x) \rangle_{P_\rho^m[0,1]} \\ &= \langle Lu(x), K_{x_i}^m(x) \rangle_{L_\rho^2} \\ &= Lu(x_i) = 0.\end{aligned}$$

L^{-1} ters operatörün varlığından $u \equiv 0$ olduğu sonucuna varılır. Bu nedenle $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $P_{\rho}^m[0,1]$ uzayın tam sistemidir. Bu ispatı tamamlar. \square

Teorem 5.2.'den L-RKM de sonlu farklı nokta kullanımının yeterli olduğunu ve klasik RKM de olduğu gibi yoğun bir diziye ihtiyaç duyulmadığını gösterir. L-RKM yönteminde $P_{\rho}^m[0,1]$ uzayının $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal sistemi, $\{\psi_k\}_{i=1}^{\infty}$ ifadesi kullanılarak Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinden aşağıda belirtilen şekilde

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m \psi_k(x), \quad (\beta_{ii}^m > 0, i = 1, 2, 3 \dots), \quad (5.6)$$

elde edilir. β_{ik}^m ortogonalizasyon katsayısıdır.

Not 5.1. Kullanılan bu yeni yöntemde $m - 1$ tane baz (5.6)'dan gelirken 3 tane ek baz sisteme eklenip sınır şartları sağlanır. Böylece sistemde $m + 2$ tane baz fonksiyonu kullanılmaktadır.

Teorem 5.3. $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ifadesi $(0,1)$ aralığında farklı noktalar olsun. (5.1)'de verilen denklemin tam çözümü $u_m(x)$,

$$u_m(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m F(x_k, u(x_k), u'(x_k)) \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \gamma_i \bar{\psi}_i(x) \quad (5.7)$$

şeklindedir.

İspat. $u_m \in P_{\rho}^m[0,1]$ olduğu için Teorem 5.2.'den yararlanılarak

$$u_m(x) = \sum_{i=1}^{\infty} ((u_m(x), \bar{\psi}_i(x))_{P_{\rho}^m[0,1]}) \bar{\psi}_i(x)$$

yazılabilir. Ayrıca (5.1) denkleminin $P_{\rho}^m[0,1]$ uzayında tam çözümü olan $u_m(x)$,

$$u_m(x) = \sum_{i=1}^{\infty} ((u_m(x), \bar{\psi}_i(x))_{P_{\rho}^m[0,1]}) \bar{\psi}_i(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m-1} (\langle u_m(x), \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m \psi_k(x) \rangle_{P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i^m(x)) + \sum_{i=m}^{\infty} \langle u_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m \langle u_m(x), \psi_k(x) \rangle_{P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \langle u_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m \langle u_m(x), L^* K_{x_i}^m(x) \rangle_{P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \langle u_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m \langle Lu_m(x), K_{x_i}^m(x) \rangle_{L_\rho^2} \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \langle u_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m \langle F(x, u(x), u'(x)), K_{x_i}^m(x) \rangle_{L_\rho^2} \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \gamma_i \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m F(x_k, u(x_k), u'(x_k)) \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \gamma_i \bar{\psi}_i(x).
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu ispatı tamamlar. \square

Ele aldığımız (5.1) denkleminde 3 tane başlangıç-sınır şartı olduğu için 3 tane ek baz gerekmektedir. Daha sonra başlangıç-sınır şartları yerine yazılarak γ_1, γ_2 ve γ_3 bilinmeyen katsayıları bulunur. Dolayısıyla $u_m(x)$ yaklaşık çözüm, $u(x)$ tam çözümünün sonlu $m + 2$ teriminden

$$\begin{aligned}
u_m(x) &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m F(x_k, u(x_k), u'(x_k)) \bar{\psi}_i(x) + \gamma_1 \bar{\psi}_m(x) + \gamma_2 \bar{\psi}_{m+1}(x) \\
&\quad + \gamma_3 \bar{\psi}_{m+2}(x)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

şeklinde elde edilir.

(5.1) denkleminin lineer ise ek bazlı L-RKM yöntemi ile yaklaşık çözüm (5.8) denkleminde bulunur. Fakat lineer değilse aşağıda verilen iteratif süreç kullanılarak yaklaşık çözüm elde edilir.

5.2. İteratif Sürecin Oluşturulması

Ele alınan denklemin lineer olmama durumunda aşağıda verilen iteratif süreç kullanılacaktır. Bu durumda öncelikle u_m iteratif dizi oluşturulur

$$Lv_{m,n}(x) = F(x, u_{m,n-1}(x), u'_{m,n-1}(x))$$

$$u_{m,n}(x) = P_{m+2}v_{m,n}(x). \quad (5.9)$$

Buradaki $P_{m+2}: P_\rho^m[0,1] \rightarrow \text{span}\{\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_{m-1}, \bar{\psi}_m, \bar{\psi}_{m+1}, \bar{\psi}_{m+2}\}$ ortogonal projeksiyon operatör olup $v_{m,n}(x) \in P_\rho^m[0,1]$ ise (5.9) eşitliğinin n . iteratif yaklaşık çözümüdür. Burada her bir iterasyonda $\gamma_{1,n}, \gamma_{2,n}, \gamma_{3,n}$ katsayıları değişmektedir.

Teorem 5.4. $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ dizisi $(0,1)$ aralığında farklı noktalardan oluşsun o halde

$$v_{m,n}(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m F(x_k, u_{m,n-1}(x_k), u'_{m,n-1}(x_k)) \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \gamma_{i,n} \bar{\psi}_i(x). \quad (5.10)$$

İspat. $v_{m,n}(x) \in P_\rho^m[0,1]$ olduğu için $\{\bar{\psi}_i^m(x)\}_{i=1}^\infty, P_\rho^m[0,1]$ uzayında tam sistemdir,

$$\begin{aligned} v_{m,n}(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_{m,n}(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \langle v_{m,n}(x), \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m \psi_k(x) \rangle_{P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \langle v_{m,n}(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m \langle v_{m,n}(x), \psi_k(x) \rangle_{P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \langle v_{m,n}(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m \langle v_{m,n}(x), L^* K_{x_k}^m(x) \rangle_{P_\rho^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \langle v_{m,n}(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m \langle Lv_{m,n}(x), K_{x_k}^m(x) \rangle_{L_\rho^2} \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \langle v_{m,n}(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m \langle F(x, u_{m,n-1}(x), u'_{m,n-1}(x)) K_{x_k}^m(x) \rangle_{L^2_\rho} \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \gamma_{i,n} \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m F(x_k, u_{m,n-1}(x_k), u'_{m,n-1}(x_k)) \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \gamma_{i,n} \bar{\psi}_i(x).
\end{aligned}$$

Bu durum ispatı tamamlar. \square

$u_{m,0}(x) = 0$ alınarak iteratif süreç başlatılır ($u_{m,0}(x) \in P_\rho^m[0,1]$ olacak şekilde herhangi bir sabit alınabilir).

$$u_{m,n}(x) = P_{m+2} v_{m,n}(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik}^m F(x_k, u(x_k), u'(x_k)) \bar{\psi}_i(x) + \gamma_{1,n} \bar{\psi}_m(x) + \gamma_{2,n} \bar{\psi}_{m+1}(x) \\
&\quad + \gamma_{3,n} \bar{\psi}_{m+2}(x) \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Lineer olmayan problemde her bir iterasyon için $\gamma_{s,n}$, $s = 1, 2, 3$ değerleri değişmekte olup iterasyon sürecinin her aşamasında verilen başlangıç-sınır şartları (5.11) denkleminde yerine yazılarak $\gamma_{s,n}$ değerleri bulunur.

Örnek 5.1.

Çoklu mertebeden kesirli türev içeren, lineer olmayan, üç noktalı başlangıç-sınır değer problemi

$$\begin{aligned}
&{}^c D^\alpha u(x) + (x+1) {}^c D^\beta u(x) + xu(x) - u^2(x) = f(x), \\
&1 < \alpha \leq 2, 0 < \beta \leq 1.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Denklemin başlangıç-sınır şartları

$$u(0) = u\left(\frac{1}{2}\right) = u(1) = 0 \tag{5.13}$$

ve tam çözüm

$$u(x) = x \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 1) \quad (5.14)$$

olup $f(x)$ tam çözüm kullanılarak elde edilecek olup bilinen bir fonksiyondur [35].

İncelenen denklemin, ek baz kullanarak L-RKM yöntemiyle çözümü için $x_i = \frac{i+0.3}{m}$, $i = 0, 1, \dots, (m - 1)$ olarak alındı. Burada m , $(0,1)$ aralığındaki hem nokta hem de baz sayısını ifade etmekte olup n ise iterasyon sayısını göstermektedir. Denklemin çözümü için $m - 1$ tane baz sistemden gelirken 3 tane başlangıç-sınır değer şartı olduğu için 3 tane ek baz sisteme eklendi. Bu sayede toplamda $m + 2$ tane baz denklemin yaklaşık çözümü için kullanıldı. Tablo 5.1. ve Tablo 5.2.'de farklı α ve β değerleri için mutlak hatalar karşılaştırılırken Tablo 5.3.'te ise $\alpha = 1.75$ ve $\beta = 0.75$ için tam çözüm ile yaklaşık çözümün karşılaştırılması yapıp Şekil 5.1 ile $m = 4$, $n = 25$ ve $\alpha = 1.75$, $\beta = 0.75$ değerleri için hesaplanan $u_4^{25}(x)$ yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırma grafiği ile aynı parametreler için mutlak hata grafiği verildi.

Tablo 5.1. Örnek 5.1.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 15$ ve farklı α, β değerleri için hesaplanan mutlak hata değerleri

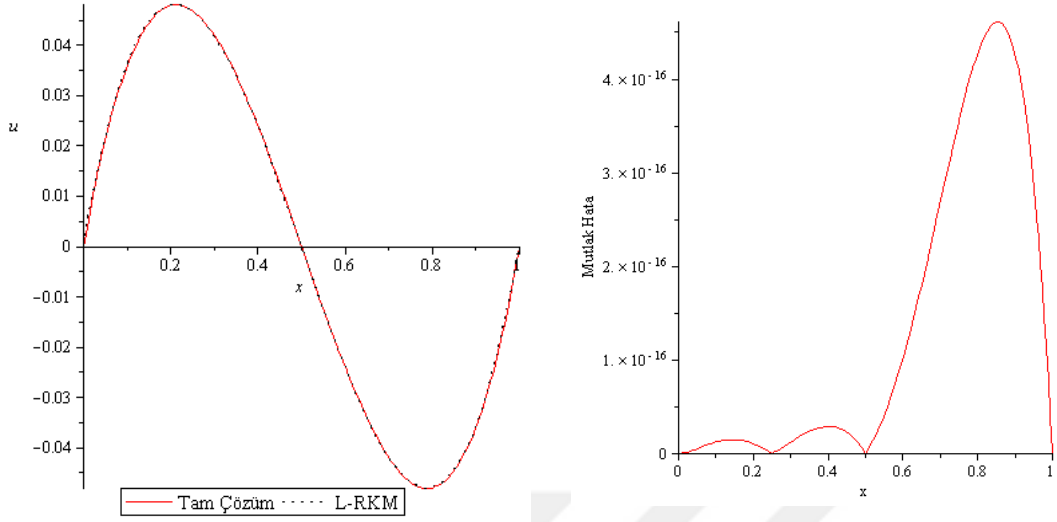
x	$\alpha = 2$ $\beta = 1$	$\alpha = 1.9$ $\beta = 0.9$	$\alpha = 1.8$ $\beta = 0.8$	$\alpha = 1.7$ $\beta = 0.7$	$\alpha = 1.6$ $\beta = 0.6$
0	0	0	0	0	0
0.1	3.350×10^{-19}	1.517×10^{-18}	1.160×10^{-19}	1.610×10^{-19}	1.629×10^{-18}
0.2	7.440×10^{-19}	2.339×10^{-18}	6.900×10^{-20}	5.980×10^{-19}	2.070×10^{-18}
0.3	8.880×10^{-19}	2.320×10^{-18}	2.510×10^{-19}	8.610×10^{-19}	1.710×10^{-18}
0.4	6.480×10^{-19}	1.500×10^{-18}	2.510×10^{-19}	6.810×10^{-19}	9.300×10^{-19}
0.5	0	0	0	0	0
0.6	9.120×10^{-19}	1.780×10^{-18}	5.190×10^{-19}	1.049×10^{-18}	8.100×10^{-19}
0.7	1.842×10^{-18}	3.400×10^{-18}	1.069×10^{-18}	2.179×10^{-18}	1.320×10^{-18}
0.8	2.372×10^{-18}	4.200×10^{-18}	1.459×10^{-18}	2.879×10^{-18}	1.390×10^{-18}
0.9	1.962×10^{-18}	3.350×10^{-18}	1.289×10^{-18}	2.369×10^{-18}	9.700×10^{-19}
1	0	0	0	0	0

Tablo 5.2. Örnek 5.1.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 20$ ve farklı α, β değerleri için hesaplanan mutlak hata değerleri

x	$\alpha = 2$ $\beta = 1$	$\alpha = 1.9$ $\beta = 0.9$	$\alpha = 1.8$ $\beta = 0.8$	$\alpha = 1.7$ $\beta = 0.7$	$\alpha = 1.6$ $\beta = 0.6$
0	0	0	0	0	0
0.1	5.590×10^{-19}	1.110×10^{-18}	1.890×10^{-19}	7.81×10^{-19}	1.023×10^{-18}
0.2	1.183×10^{-18}	1.591×10^{-18}	7.090×10^{-19}	9.75×10^{-19}	1.025×10^{-18}
0.3	1.421×10^{-18}	1.490×10^{-18}	1.028×10^{-18}	7.99×10^{-19}	6.090×10^{-19}
0.4	1.021×10^{-18}	9.100×10^{-19}	8.080×10^{-19}	4.09×10^{-19}	1.790×10^{-19}
0.5	0	0	0	0	0
0.6	1.479×10^{-18}	9.800×10^{-19}	1.282×10^{-18}	3.71×10^{-19}	1.390×10^{-19}
0.7	2.969×10^{-18}	1.840×10^{-18}	2.642×10^{-18}	5.91×10^{-19}	5.590×10^{-19}
0.8	3.829×10^{-18}	2.190×10^{-18}	3.492×10^{-18}	6.11×10^{-19}	9.790×10^{-19}
0.9	3.159×10^{-18}	1.760×10^{-18}	2.952×10^{-18}	4.31×10^{-19}	9.490×10^{-19}
1	0	0	0	0	0

Tablo 5.3. Örnek 5.1.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m = 4$, $n = 25$ ve $\alpha = 1.75, \beta = 0.75$ değerleri için hesaplanan $u_4^{25}(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	$u_4^{25}(x)$	Tam Çözüm	Mutlak Hata
0	0	0	0
0.1	0.0359999999999999699150	0.0360000000000000000000	3.008×10^{-17}
0.2	0.0479999999999999644740	0.0480000000000000000000	3.552×10^{-17}
0.3	0.04200000000000000008210	0.0420000000000000000000	8.210×10^{-19}
0.4	0.02400000000000000346210	0.0240000000000000000000	3.462×10^{-17}
0.5	0	0	0
0.6	-0.0240000000000000150799	-0.0240000000000000000000	1.507×10^{-16}
0.7	-0.0420000000000000407349	-0.0420000000000000000000	4.073×10^{-16}
0.8	-0.04800000000000000661359	-0.0480000000000000000000	6.613×10^{-16}
0.9	-0.03600000000000000666779	-0.0360000000000000000000	6.667×10^{-16}
1	0	0	0



Şekil 5.1. Örnek 5.1. için ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 4$, $n = 25$ ve $\alpha = 1.75, \beta = 0.75$ değerleri için hesaplanan $u_4^{25}(x)$ yaklaşık çözüm ve tam çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 5$, $n = 25$ ve $\alpha = 1.75, \beta = 0.75$ değerleri için mutlak hata grafiği

Örnek 5.2.

Çoklu mertebeden kesirli türev içeren, lineer olmayan, üç noktalı başlangıç-sınır değer problemi

$$x^2 {}^c D^\alpha u(x) + (x^2 - 1) {}^c D^\beta u(x) + x^3 u(x) - u(x)u'(x) - u^3(x) = f(x),$$

$$1 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (5.15)$$

Denklemin başlangıç-sınır şartları

$$u(0) = u\left(\frac{3}{5}\right) = u(1) = 0 \quad (5.16)$$

ve tam çözüm

$$u(x) = x \left(x - \frac{3}{5}\right) (x - 1) \quad (5.17)$$

olup $f(x)$ tam çözüm kullanılarak elde edilecek olup bilinen bir fonksiyondur [35].

Alınan denklemin ek baz kullanarak L-RKM yöntemiyle çözümü için $x_i = \frac{i+0.3}{m}$, $i = 0, 1, \dots, (m - 1)$ olarak seçildi. Denklemin çözümü için $m - 1$ tane baz sistemden gelirken, 3 tane başlangıç-sınır değer şartı olduğu için 3 tane ek bazı sisteme biz ekledik. Bu sayede toplamda $m + 2$ baz denklemin yaklaşık çözümü için kullanıldı. Tablo 5.4. ve Tablo 5.5.'te farklı α ve β değerleri için mutlak hatalar karşılaştırılırken Tablo 5.6.'da ise $\alpha = 1.75$ ve $\beta = 0.75$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırılması yapıp Şekil 5.2. ile $m = 4$, $n = 25$ ve $\alpha = 1.75, \beta = 0.75$ değerleri için hesaplanan $u_4^{25}(x)$ yaklaşık çözüm ve tam çözümün karşılaştırılma grafiği ile aynı parametreler için mutlak hata grafiği verildi.

Tablo 5.4. Örnek 5.2.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 15$ ve farklı α, β değerleri için hesaplanan mutlak hata değerleri

x	$\alpha = 2$ $\beta = 1$	$\alpha = 1.9$ $\beta = 0.9$	$\alpha = 1.8$ $\beta = 0.8$	$\alpha = 1.7$ $\beta = 0.7$	$\alpha = 1.6$ $\beta = 0.6$
0	0	0	0	0	0
0.1	4.142×10^{-18}	1.535×10^{-17}	5.510×10^{-17}	2.198×10^{-16}	8.444×10^{-16}
0.2	5.146×10^{-18}	1.916×10^{-17}	6.068×10^{-17}	2.229×10^{-16}	7.701×10^{-16}
0.3	4.340×10^{-18}	1.624×10^{-17}	4.234×10^{-17}	1.311×10^{-16}	3.340×10^{-16}
0.4	2.730×10^{-18}	1.037×10^{-17}	1.900×10^{-17}	3.262×10^{-17}	6.859×10^{-17}
0.5	1.130×10^{-18}	4.379×10^{-18}	2.970×10^{-18}	1.809×10^{-17}	2.039×10^{-16}
0.6	0	0	0	0	0
0.7	4.800×10^{-19}	1.931×10^{-18}	9.070×10^{-18}	7.402×10^{-17}	4.541×10^{-16}
0.8	3.600×10^{-19}	1.561×10^{-18}	2.262×10^{-17}	1.576×10^{-16}	9.074×10^{-16}
0.9	9.000×10^{-20}	2.610×10^{-19}	2.657×10^{-17}	1.708×10^{-16}	9.473×10^{-16}
1	0	0	0	0	0

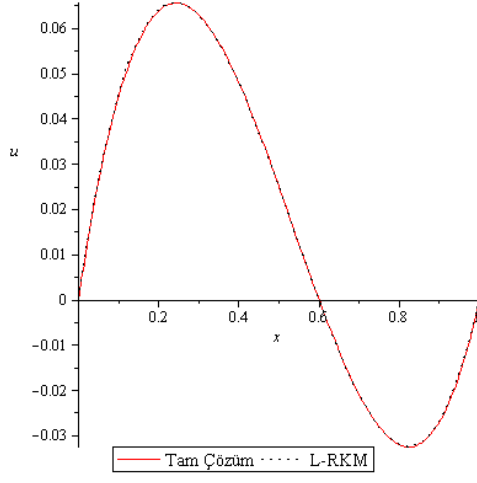
Tablo 5.5. Örnek 5.2.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m = 3$, $n = 20$ ve farklı α, β değerleri için hesaplanan mutlak hata değerleri

x	$\alpha = 2$ $\beta = 1$	$\alpha = 1.9$ $\beta = 0.9$	$\alpha = 1.8$ $\beta = 0.8$	$\alpha = 1.7$ $\beta = 0.7$	$\alpha = 1.6$ $\beta = 0.6$
0	0	0	0	0	0
0.1	1.820×10^{-19}	6.800×10^{-19}	2.250×10^{-19}	2.520×10^{-19}	4.500×10^{-20}
0.2	7.700×10^{-20}	1.797×10^{-18}	6.460×10^{-19}	8.000×10^{-20}	4.100×10^{-19}
0.3	9.900×10^{-20}	2.580×10^{-18}	9.600×10^{-19}	5.000×10^{-19}	8.900×10^{-19}
0.4	2.090×10^{-19}	2.590×10^{-18}	9.800×10^{-19}	7.100×10^{-19}	1.020×10^{-18}
0.5	1.790×10^{-19}	1.670×10^{-18}	6.500×10^{-19}	5.300×10^{-19}	7.100×10^{-19}
0.6	0	0	0	0	0
0.7	2.910×10^{-19}	1.920×10^{-18}	7.700×10^{-19}	7.400×10^{-19}	9.500×10^{-19}
0.8	4.910×10^{-19}	3.380×10^{-18}	1.340×10^{-18}	1.380×10^{-18}	1.640×10^{-18}
0.9	5.410×10^{-19}	3.150×10^{-18}	1.260×10^{-18}	1.330×10^{-18}	1.630×10^{-18}
1	0	0	0	0	0

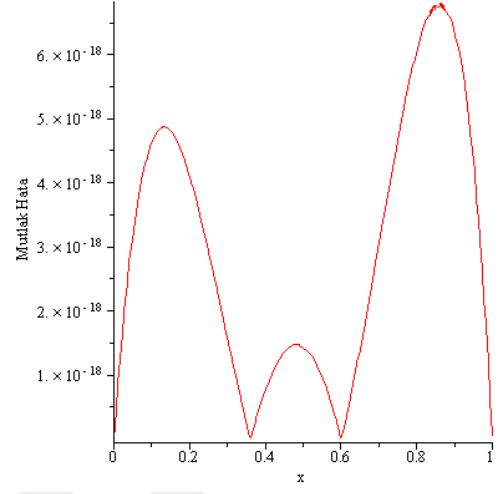
Tablo 5.6. Örnek 5.2.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m = 4$, $n = 25$ ve $\alpha = 1.75, \beta = 0.75$ değerleri için hesaplanan $u_4^{25}((x))$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	$u_4^{25}(x)$	Tam Çözüm	Mutlak Hata
0	0	0	0
0.1	0.0450000000000000002253	0.0450000000000000000000	2.253×10^{-18}
0.2	0.0639999999999999990974	0.0640000000000000000000	9.026×10^{-18}
0.3	0.0629999999999999991061	0.0630000000000000000000	8.939×10^{-18}
0.4	0.0480000000000000002281	0.0480000000000000000000	2.281×10^{-18}
0.5	0.02500000000000000010681	0.0250000000000000000000	1.068×10^{-18}
0.6	0	0	0
0.7	-0.02100000000000000036859	-0.0210000000000000000000	3.685×10^{-17}
0.8	-0.03200000000000000086539	-0.0320000000000000000000	8.653×10^{-17}
0.9	-0.027000000000000000103759	-0.0270000000000000000000	1.037×10^{-16}
1	0	0	0

a)



b)



Şekil 5.2. Örnek 5.2. için ek bazlı L-RKM

yöntemi kullanarak a) $m = 4$, $n = 25$ ve $\alpha = 1.75$, $\beta = 0.75$ değerleri için hesaplanan $u_4^{25}(x)$ yaklaşık çözüm ve tam çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 4$, $n = 25$ ve $\alpha = 1.75$, $\beta = 0.75$ değerleri için mutlak hata grafiği

6. BÖLÜM

KESİRLİ MERTEBEDEN VOLTERRA VE FREDHOLM İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN EK BAZLI LEGENDRE DOĞURAN ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYI METODU (L-RKM) İLE ÇÖZÜMÜ

İntegro-diferansiyel denklemler, fizik, biyoloji, elektrokimya, kimya, ekonomi, elektromanyetik, kontrol teorisi ve viskoelastisite gibi mühendislik ve bilimsel disiplinlerde ortaya çıkan, birçok dinamiğin tanımlanması için verimlilik sağlayan önemli bir denklem türüdür. Diferansiyel ve integral denklemlerin bir kombinasyonu olan dördüncü mertebeden integro-diferansiyel denklemlerin sınır değer problemleri akışkanlar dinamiği, biyolojik modeller, kimyasal kinetik, biyomekanik, elektromanyetik, elastikiyet, elektrodinamik, ısı ve kütle transferi ve oskilasyon teorisi gibi birçok alanda sıklıkla kullanılmaktadır [117-120].

İntegro-diferansiyel denklemlerin analitik olarak çözümlerini bulmak oldukça güçtür. Bu nedenle lineer ve lineer olmayan integro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü elde etmek için birçok yöntem kullanıldı. Behiry, Adomian polinomları ile diferansiyel transform metodunu [121], Heris, modifiye edilmiş Laplace Adomian ayrıştırma metodunu [122], Wang, varyasyonel iterasyon yöntemini [123], Yeganeh ve arkadaşları Sinc-collocation metodunu [124], Dehghan, Chebyshev sonlu fark yöntemini [125], Rashed, Lagrange inrerpolasyon yöntemini [126], Maleknejad ve Mahmoudi Taylor polinomlarını [127], Maleknejad ve arkadaşları rasyonelleştirilmiş Haar fonksiyonları metodunu [128], Abbasbandy ve Taati, operasyonel Tau metodunu [129], Biazar ve arkadaşları, homotopi pertürbasyon yöntemini [130] kullanarak başarılı sonuçlar elde etmişlerdir. İntegro-diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümü için daha farklı yöntemler de kullanıldı [131-133].

Doğuran çekirdek teorisi, lineer olmayan Fredholm integro-diferansiyel denklem sistemleri, lineer olmayan operatör denklemler, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, ikinci tip Wiener-Hopf denklemleri, lineer olmayan Abel integral denklemleri gibi lineer ve lineer olmayan birçok denklemde başarılı bir şekilde kullanıldı [134-138]. Doğuran çekirdek teorisinin kullanıldığı daha birçok başarılı çalışma bulunmaktadır [139-145].

Bu bölümde, diğer bölümlerde aşına olduğumuz L-RKM yöntemi farklı bir teknikle kullanılacaktır. Diğer bölümlerde kullanılan denklemlerin sınır şartları homojen ya da sınır şartlarını homojenleştirildikten sonra çözülmekteydi, burada dördüncü mertebeden kesirli türev içeren lineer ve lineer olmayan Volterra ve Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinin sınır değer problemlerini, sınır şartları homojenleştirilmeden ek baz kullanarak L-RKM ile çözülecektir.

Volterra integro-diferansiyel denklemi ve başlangıç sınır şartları

$$\begin{cases} Du^\alpha(x) = f_1(x, u, u', u'', u''') + \int_a^x k(x, t)f_2(u, u')dt, x \in (0, b) & 3 < \alpha \leq 4 \\ u(0) = \beta_0, u''(0) = \beta_1, u(b) = \beta_2, u''(b) = \beta_3 \end{cases} \quad (6.1)$$

Fredholm integro-diferansiyel denklemi ve başlangıç sınır şartları

$$\begin{cases} Du^\alpha(x) = f_1(x, u, u', u'', u''') + \int_0^1 k(x, t)f_2(u, u')dt, x \in [0, 1], & 3 < \alpha \leq 4 \\ u(a) = \beta_0, u'(a) = \beta_1, u(b) = \beta_2, u'(b) = \beta_3 \end{cases} \quad (6.2)$$

şeklinde ifade edilir. $i = 0, 1, 2, 3$ için β_i sabit sayı olup $k(x, t)$, $[0, 1] \times [0, 1]$ de sürekli fonksiyondur.

6.1. Legendre Doğuran Çekirdek Metodu (L-RKM)

Bu alt bölümde lineer ve lineer olmayan kesirli mertebeden türev içeren Volterra ve Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinin, sınır değer problemlerinin $P_\rho^m[0, 1]$ uzayında yaklaşık çözümlerini elde etmek için Legendre doğuran çekirdek metodu kullanılacaktır.

Ele alınan Volterra integro-diferansiyel denklemi ve Fredholm integro-diferansiyel denklemi sırasıyla

$$D^\alpha u(x) = F(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x), T_1 u(x)), 0 < x < 1, 3 < \alpha \leq 4 \quad (6.3)$$

$$D^\alpha u(x) = F(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x), T_2 u(x)), 0 < x < 1, 3 < \alpha \leq 4 \quad (6.4)$$

şeklindedir. (6.3) ve (6.4)'te ifade edilen $u(x), u'(x), u''(x), u'''(x) \in P_\rho^m[0,1]$ olup $T_1 u(x) = \int_a^x k(x,t) f_2(u(t), u'(t)) dt$, $T_2 u(x) = \int_0^1 k(x,t) f_2(u(t), u'(t)) dt$, ve $y = y(x), z = z(x), w_1 = w_1(x), w_2 = w_2(x), w_3 = w_3(x) \in P_\rho^m[0,1]$, $F(x, y, z, w_1, w_2, w_3) \in L_\rho^2[0,1]$ dir.

İlk önce her iki integro-diferansiyel denklem için L lineer operatörü

$$L: P_\rho^m[0,1] \rightarrow L_\rho^2[0,1]$$

$$Lu(x) = {}^c D^\alpha u(x) \quad (6.5)$$

şeklinde seçilir.

Önceki bölümlerde L nin sınırlı bir lineer operatör olduğunu göstermiştik. (6.3) denkleminin $P_\rho^m[0,1]$ uzayında yaklaşık çözümünün oluşturulması için bu uzayın polinom bazlı $K_y^m(x)$ doğuran çekirdek fonksiyonu bulunmalıdır.

Not 6.1. Burada teorik analizler Volterra integro-diferansiyel denklemine göre yapılacak olup, Fredholm integro-diferansiyel denklemi için de teorik analiz benzer şekilde yapılabilir.

(6.1) denkleminin $P_\rho^m[0,1]$ fonksiyon uzayında ek bazlı Legendre doğuran çekirdek metodu kullanılarak yaklaşık çözümü verilecektir. Problemin çözümünün varlık ve tekliği kabul edilecek olup $P_\rho^m[0,1]$ uzayı, (0,1) aralığında sınır şartlarını sağlamamaktadır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= L^* K_{x_i}^m(x) = \langle L^* K_{x_i}^m(x), K_x^m(y) \rangle_{P_\rho^m[0,1]} \\ &= \langle K_{x_i}^m(x), L_y K_x^m(y) \rangle_{L_\rho^2} = L_y K_x^m(y) \Big|_{y=x_i}, \quad 1 \leq i \leq m-1 \end{aligned}$$

ve $\psi_i(x) = x^{i-1}, i \geq m$ olduğu kabul edilecektir. L^*, L 'nin adjointidir. Her sabit m ve $x_i \in [0,1]$ için $\psi_i \in P_\rho^m[0,1]$ dir.

Teorem 6.1. (6.3) denklemleri için, eğer $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ifadesi $(0,1)$ aralığında farklı noktalar ise o zaman $\psi_i(x) = L^*K_{x_i}^m(x) = L_yK_x^m(y)|_{y=x_i}$.

İspatı daha önceki bölümlerde yapılanlara benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 6.2. $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ifadesi $(0,1)$ aralığında farklı noktalar olsun. O zaman $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisi $P_{\rho}^m[0,1]$ uzayın tam sistemidir.

İspat. Her sabit $u \in P_{\rho}^m[0,1]$ için

$$\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{P_{\rho}^m[0,1]} = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

olsun. Bunun anlamı $i = 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned} \langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{P_{\rho}^m[0,1]} &= \langle u(x), L^*K_{x_i}^m(x) \rangle_{P_{\rho}^m[0,1]} \\ &= \langle Lu(x), K_{x_i}^m(x) \rangle_{L_{\rho}^2} \\ &= Ly(x_i) = 0. \end{aligned}$$

L^{-1} ters operatörün varlığından $u \equiv 0$ olduğu sonucuna varılır. Bu nedenle $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $P_{\rho}^m[0,1]$ uzayın tam sistemidir. Bu ispatı tamamlar. \square

Teorem 6.2., ek bazlı L-RKM de sonlu farklı noktanın kullanımının yeterli olduğunu ve klasik RKM de olduğu gibi yoğun bir diziye ihtiyaç duyulmadığını gösterir. Ek bazlı L-RKM yönteminde, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ifadesi Gram-Schmidt ortogonalizasyon sürecinde kullanılarak $P_{\rho}^m[0,1]$ uzayının $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ ortonormal sistemi, aşağıda belirtilen şekilde

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x), \quad (\beta_{ii} > 0, i = 1, 2, 3 \dots), \quad (6.6)$$

elde edilir. β_{ik} ortogonalizasyon katsayısıdır.

Not 6.2. Kullanılan bu yeni yöntemde $m - 1$ tane baz (6.6) denkleminde gelirken 4 tane ek baz sisteme eklenip sınır şartları sağlanır. Bu sayede sistemde $m + 3$ tane baz fonksiyonu kullanılmaktadır.

Teorem 6.3. $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ifadesi $(0,1)$ aralığında farklı noktalar olsun. (6.3)'te verilen denklemin tam çözümü $u_m(x)$,

$$u_m(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(x_k, u(x_k), u'(x_k), u''(x_k), u'''(x_k), T_1 u(x_k)) \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \gamma_i \bar{\psi}_i \quad (6,7)$$

şeklindedir.

İspat. $u_m \in P_{\rho}^m[0,1]$ olduğu için Teorem 6.2.'den yararlanarak

$$u_m(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\langle u_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{P_{\rho}^m[0,1]}) \bar{\psi}_i(x)$$

yazılabilir. Ayrıca (6.3) denkleminin $P_{\rho}^m[0,1]$ uzayında tam çözümü olan $u_m(x)$, aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} u_m(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\langle u_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{P_{\rho}^m[0,1]}) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} (\langle u_m(x), \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \rangle_{P_{\rho}^m[0,1]}) \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \langle u_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u_m(x), \psi_k(x) \rangle_{P_{\rho}^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \langle u_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u_m(x), L^* K_{x_i}^m(x) \rangle_{P_{\rho}^m[0,1]} \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \langle u_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle Lu_m(x), K_{x_i}^m(x) \rangle_{L_p^2} \bar{\psi}_i(x) + \sum_{i=m}^{\infty} \langle u_m(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle F(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x), T_1 u(x)), K_{x_i}^m(x) \rangle_{L_p^2} \bar{\psi}_i(x) \\
&\quad + \sum_{i=m}^{\infty} \gamma_i \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(x_k, u(x_k), u'(x_k), u''(x_k), u'''(x_k), T_1 u(x_k)) \bar{\psi}_i(x) \\
&\quad + \sum_{i=m}^{\infty} \gamma_i \bar{\psi}_i(x).
\end{aligned}$$

Bu ispatı tamamlar. \square

Ele alınan (6.3) ve (6.4) denklemlerine ait 4 tane sınır şartı olduğundan 4 tane ek bazın eklenmesi gerekir ve sınır şartları yerine yazılarak lineer denklemler için $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4 bilinmeyen katsayıları bulunur. Dolayısıyla $u_m(x)$ yaklaşık çözüm, $u(x)$ tam çözümünün sonlu $m + 3$ teriminden

$$\begin{aligned}
u_m(x) &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(x_k, u(x_k), u'(x_k), u''(x_k), u'''(x_k), T_1 u(x_k)) \bar{\psi}_i(x) + \gamma_1 \bar{\psi}_m(x) \\
&\quad + \gamma_2 \bar{\psi}_{m+1}^m(x) + \gamma_3 \bar{\psi}_{m+2}^m(x) + \gamma_4 \bar{\psi}_{m+3}^m(x)
\end{aligned} \tag{6.8}$$

elde edilir.

Not 6.3. (6.3) denklemi lineer ise ek bazlı L-RKM yöntemi ile yaklaşık çözüm (6.8) denkleminde bulunur fakat lineer değil ise daha önceki bölümde verilen iteratif sürecin benzeri (6.8) denklemi için de kullanılacaktır. Lineer olmayan problemde her bir iterasyon için $\gamma_{s,n}$ ($s = 1,2,3,4$) değerleri değişmekte olup, iterasyon sürecinin her aşamasında yeni $\gamma_{s,n}$ değerleri bulunup bir sonraki iterasyona aktarılır.

Örnek 6.1.

Dördüncü mertebeden kesirli türev içeren lineer Volterra integro-diferansiyel denklemi.

$$D^\alpha u(x) = x(1 + e^x) + 3e^x + u(x) - \int_0^x u(t)dt \quad 0 < x < 1, \quad 3 < \alpha \leq 4$$

sınır şartları

$$u(0) = 1, \quad u''(0) = 2, \quad u(1) = 1 + e, \quad u''(1) = 3e$$

ve $\alpha = 4$ için tam çözüm $u(x) = 1 + xe^x$ şeklinde ifade edilir [144].

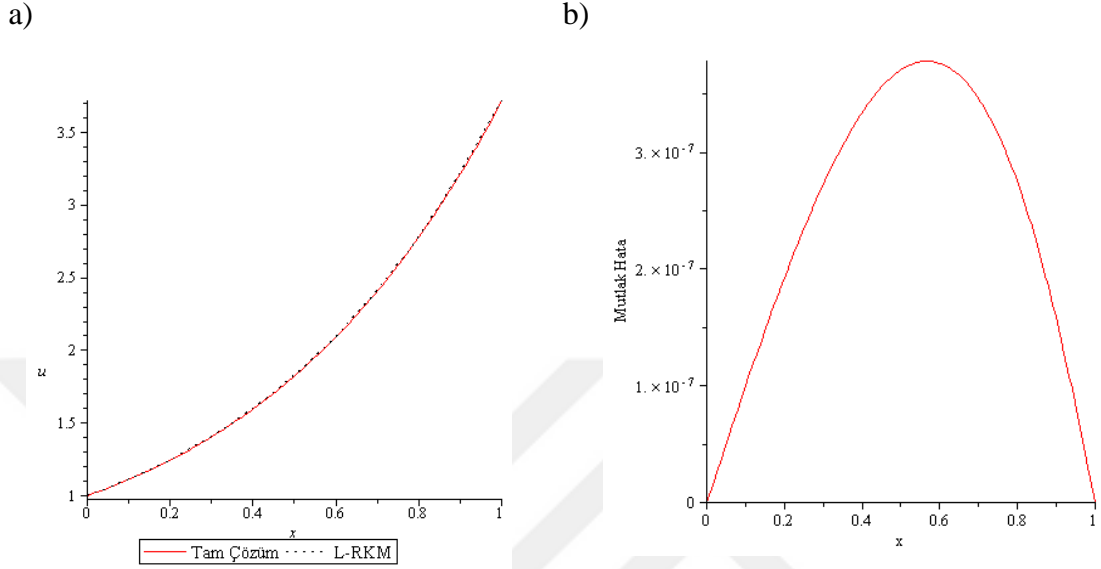
Alınan denklemin ek baz kullanılarak L-RKM yöntemiyle çözümü için $x_i = \frac{i+0.3}{m}$, $i = 0, 1, \dots, (m-1)$ olarak alındı. m , $(0,1)$ aralığındaki hem nokta hem de baz sayısını ifade etmekte olup $m-1$ tane baz sistemden gelirken 4 tane sınır şartı olduğu için 4 tane ek bazı sisteme eklendi. Toplamda $m+3$ baz ile incelenen denklemin farklı α değerlerinde $m=7$ için yaklaşık değerleri bulunup tablo ve grafiklerle gösterildi. $m=7$ için γ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ değerlerinin değişim tablosu verildi.

Tablo 6.1. Örnek 6.1.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m=7$ ve farklı α değerleri için hesaplanan yaklaşık çözümler ile $\alpha=4$ için yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	$\alpha = 3.8$	$\alpha = 3.9$	$\alpha = 4$	Tam Çözüm ($\alpha = 4$)	Mutlak Hata ($\alpha = 4$)
0.1	1.11451296811026	1.112621288666486	1.110517046346279	1.110517091807564	4.546×10^{-8}
0.2	1.251747423104280	1.248224286973852	1.244280463514345	1.244280551632033	8.811×10^{-8}
0.3	1.415032953978463	1.410298108097953	1.404957517343828	1.404957642272800	1.249×10^{-7}
0.4	1.608350900190870	1.602914412438139	1.596729726101880	1.596729879056508	1.529×10^{-7}
0.5	1.836374621615915	1.830782931722656	1.824360465730824	1.824360635350064	1.696×10^{-7}
0.6	2.104533378237897	2.099321855435146	2.093271107797011	2.093271280234305	1.724×10^{-7}
0.7	2.419089595781681	2.414739798790654	2.409626736480074	2.409626895229333	1.587×10^{-7}
0.8	2.787231923831191	2.784130457365996	2.780432616935802	2.780432742793974	1.258×10^{-7}
0.9	3.217181061106566	3.215580106973511	3.213642728098380	3.213642800041254	7.194×10^{-8}

Tablo 6.2. Örnek 6.1.'de $m = 7$ için hesaplanan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4 değerleri

γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
1.6205717968334814	-0.99548551955552237	0.77859436011887114	-0.61139807628145488



Şekil 6.1 Örnek 6.1.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 7$ ve $\alpha = 4$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 7$ için mutlak hata grafiği

Örnek 6.2.

Dördüncü mertebeden kesirli türev içeren lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemi

$$D^\alpha u(x) = 1 + \int_0^x e^{-t} u^2(t) dt \quad 0 < x < 1, \quad 3 < \alpha \leq 4$$

sınır şartları

$$u(0) = 1, \quad u''(0) = 1, \quad u(1) = e, \quad u''(1) = e$$

ve $\alpha = 4$ için tam çözüm $u(x) = e^x$ şeklinde ifade edilir [144].

Ele alınan denklemin ek bazlı L-RKM yöntemiyle çözümü için. $x_i = \frac{i+0.3}{m}$, $i = 0, 1, \dots, (m-1)$ olarak alındı. m , $(0,1)$ aralığındaki hem nokta hem de baz sayısını ifade etmekte olup n ise iterasyon sayısını temsil etmektedir. $m = 7$, $n = 20$ alınarak farklı α

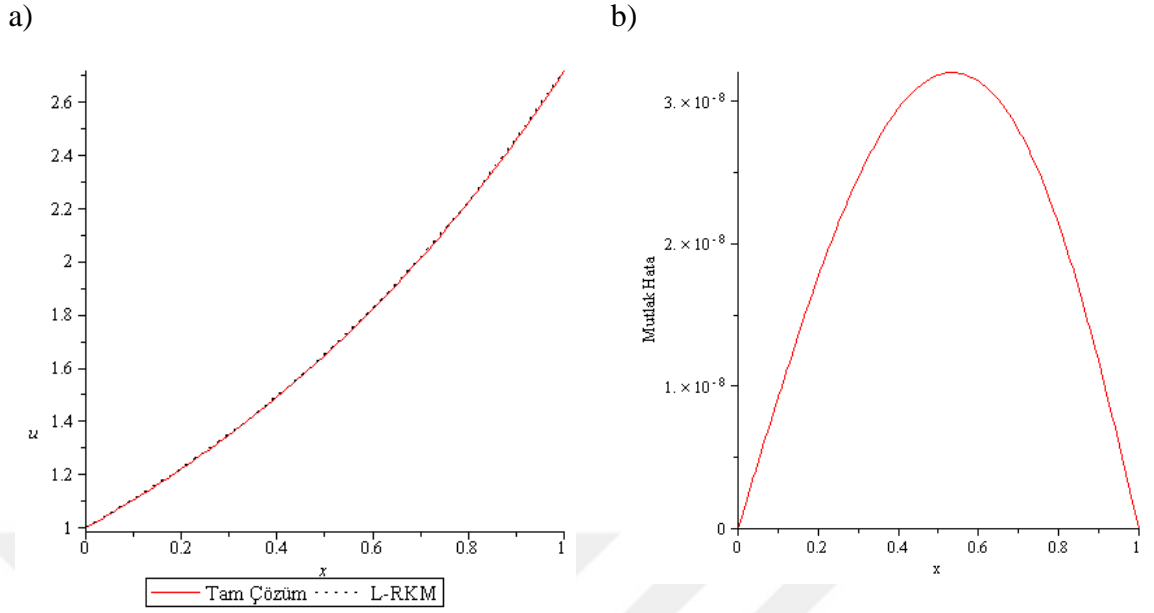
değerleri için $u_7^{20}(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata tablosu yapıldı. İterasyon sürecinde değişen $\gamma_{s,n}$, $s = 1,2,3,4$ değerlerinin değişim tablosu verildi.

Tablo 6.3. Örnek 6.2.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m = 7$, $n = 20$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_7^{20}(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	$u_7^{20}(x)$ $\alpha = 3.8$	$u_7^{20}(x)$ $\alpha = 3.9$	$u_7^{20}(x)$ $\alpha = 4$	Tam Çözüm ($\alpha = 4$)	Mutlak Hata ($\alpha = 4$)
0.1	1.10593585846065	1.10558570254487	1.10517089636118	1.10517091807564	2.171×10^{-8}
0.2	1.22282232695311	1.22217601548752	1.22140271617243	1.22140275816016	4.198×10^{-8}
0.3	1.35175733460533	1.35089872352941	1.34985874827101	1.34985880757600	5.930×10^{-8}
0.4	1.49399246735440	1.49301963293877	1.49182462541302	1.49182469764127	7.222×10^{-8}
0.5	1.65093801514142	1.64995193028360	1.64872119116527	1.64872127070012	7.953×10^{-8}
0.6	1.82417319008818	1.82326849666727	1.82211872030014	1.82211880039050	8.009×10^{-8}
0.7	2.01545877433934	2.01471620931542	2.01375263475658	2.01375270747047	7.271×10^{-8}
0.8	2.22675263760468	2.22623235750487	2.22554087206323	2.22554092849246	5.642×10^{-8}
0.9	2.46022718228955	2.45996304320901	2.45960307982560	2.45960311115694	3.133×10^{-8}

Tablo 6.4. Örnek 6.2.'de $m = 7$, $n = 20$ için hesaplanan $\gamma_{1,n}$, $\gamma_{2,n}$, $\gamma_{3,n}$ ve $\gamma_{4,n}$ değerleri

n	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
1	1.2441995212230805082	-0.85673706330285457304	0.72803800200382351839	-0.60244789680430913114
2	1.2459226550079328779	-0.86070390541826975382	0.73233121630744915497	-0.60409089033951011214
3	1.2459366819496998044	-0.86073619189138976681	0.73236587961072555873	-0.60410408095811273807
4	1.2459367954682982639	-0.86073645315816477115	0.73236616003925591994	-0.60410418765962165279
5	1.2459367963867114911	-0.86073645527191693409	0.73236616230801919269	-0.60410418852287136237
6	1.2459367963941417588	-0.86073645528901789580	0.73236616232637425250	-0.60410418852985534418
7	1.2459367963942019108	-0.86073645528915632568	0.73236616232652281826	-0.60410418852991187094
8	1.2459367963942023920	-0.86073645528915743529	0.73236616232652401309	-0.60410418852991232607
9	1.2459367963942023776	-0.86073645528915740681	0.73236616232652398920	-0.60410418852991231764
10	1.2459367963942024087	-0.86073645528915747277	0.73236616232652405344	-0.60410418852991234153
11	1.2459367963942023551	-0.86073645528915736054	0.73236616232652394482	-0.60410418852991230090
12	1.2459367963942023844	-0.86073645528915742091	0.73236616232652400148	-0.60410418852991232186
13	1.2459367963942023854	-0.86073645528915742287	0.73236616232652400425	-0.60410418852991232309
14	1.2459367963942023972	-0.86073645528915745001	0.73236616232652403154	-0.60410418852991233310
15	1.2459367963942024150	-0.86073645528915748418	0.73236616232652406042	-0.60410418852991234364
16	1.2459367963942024566	-0.86073645528915757231	0.73236616232652414523	0.604104188529912374911
17	1.2459367963942023952	-0.86073645528915744443	0.73236616232652402568	-0.60410418852991233107
18	1.2459367963942024073	-0.86073645528915747068	0.73236616232652405295	-0.60410418852991234165
19	1.2459367963942023933	-0.86073645528915743854	0.73236616232652401739	-0.60410418852991232775
20	1.2459367963942023874	-0.86073645528915742700	0.73236616232652400853	-0.60410418852991232485



Şekil 6.2 Örnek 6.2.'de ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 7$, $n = 20$ ve $\alpha = 4$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 7$, $n = 20$ ve $\alpha = 4$ için mutlak hata grafiği

Örnek 6.3.

Dördüncü mertebeden kesirli türev içeren lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemi

$$Du^\alpha(x) = 4e^x + 1 + u(x) - \int_0^1 u(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 3 < \alpha \leq 4$$

sınır şartları

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad u(1) = 1 + e, \quad u'(1) = 2e$$

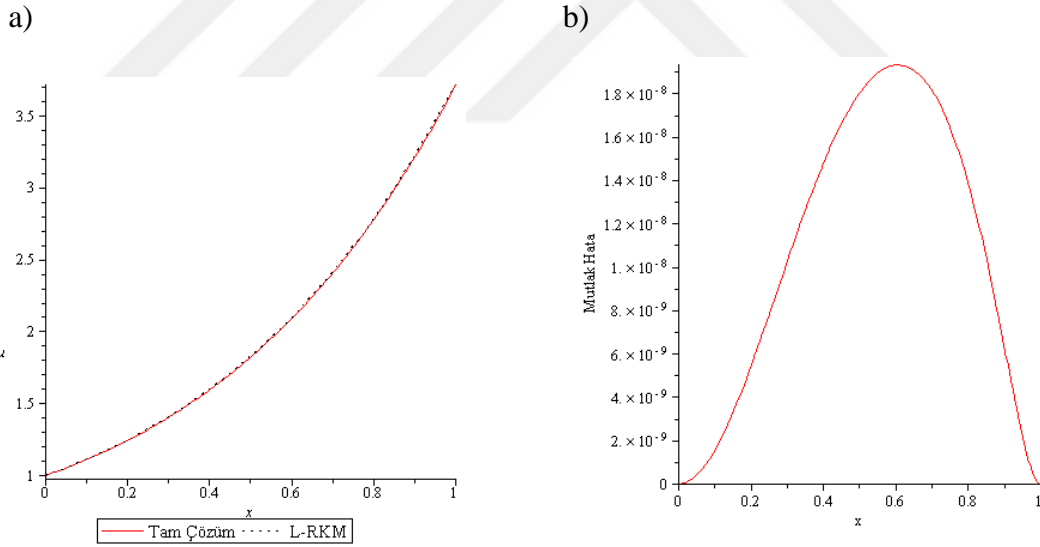
$\alpha = 4$ için tam çözüm ise $u(x) = 1 + xe^x$ şeklinde ifade edilir [145]. Yukarıda ifade edilien Fredholm denkleminin ek bazlı L-RKM yöntemiyle çözümü için $x_i = \frac{i+0.3}{m}$, $i = 0, 1, \dots, (m-1)$ olarak alındı. $m = 7$ ve farklı α değerleri için yaklaşık değerleri bulunup tam çözümle karşılaştırma yapılarak tablo ve grafiklerle gösterildi. $m = 7$ için $\gamma_i, i = 1, 2, 3, 4$ değerlerinin değişim tablosu verildi.

Tablo 6.5. Örnek 6.3.'te ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m = 7$ ve farklı α değerleri için hesaplanan yaklaşık çözümler ile $\alpha = 4$ için yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	$\alpha = 3.8$	$\alpha = 3.9$	$\alpha = 4$	Tam Çözüm ($\alpha = 4$)	Mutlak Hata ($\alpha = 4$)
0.1	1.11087152832480	1.11069892936192	1.11051709065470	1.11051709180756	1.152×10^{-9}
0.2	1.24535723835491	1.24483699693760	1.24428054764657	1.24428055163203	3.985×10^{-9}
0.3	1.40675541191570	1.40589197718632	1.40495763488979	1.40495764227280	7.383×10^{-9}
0.4	1.59901608147162	1.59792419176984	1.59672986869528	1.59672987905650	1.036×10^{-8}
0.5	1.82678130007609	1.82563203357898	1.82436062299336	1.82436063535006	1.235×10^{-8}
0.6	2.09544902025021	2.09442235288905	2.09243090814293	2.09327126713882	1.309×10^{-8}
0.7	2.41125035941044	2.41049242539878	2.40887832910415	2.40962688288519	1.234×10^{-8}
0.8	2.78134265934682	2.78092460707740	2.77992864050307	2.78043273313348	9.660×10^{-9}
0.9	3.21391531250610	3.21379383217674	3.21364279548491	3.21364280004125	4.556×10^{-9}

Tablo 6.6. Örnek 6.3.'te $m = 7$ için hesaplanan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve γ_4 değerleri

γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
1.6205718463858205	-0.99548562249960733	0.77859446203127477	-0.61139811537587374



Şekil 6.3 Örnek 6.3.'te ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 7$ ve $\alpha = 4$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 7$ için mutlak hata grafiği

Örnek 6.4.

Dördüncü mertebeden kesirli türev içeren lineer olmayan Fredholm integro-diferansiyel denklemi

$$Du^\alpha(x) = e^x + 1 - e + \int_0^1 e^{-t} u^2(t) dt, \quad 0 < x < 1, \quad 3 < \alpha \leq 4$$

sınır şartları

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1, \quad u(1) = e, \quad u'(1) = e$$

tam çözüm $\alpha = 4$ için $u(x) = e^x$ şeklinde ifade edilir [145].

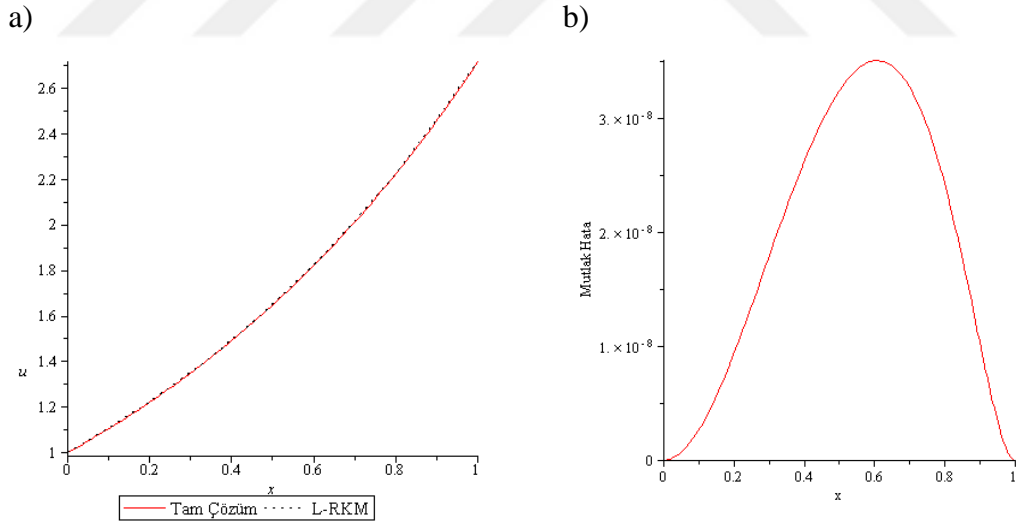
Ele alınan denklem, ek bazlı L-RKM yöntemiyle çözüldü. $x_i = \frac{i+0.3}{m}$, $i = 0, 1, \dots, (m - 1)$ olarak alındı. $m = 7$, $n = 20$ alınarak farklı α değerleri için $u_7^{20}(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata tablosu yapıp grafiklerle gösterildi. İterasyon sürecinde değişen $\gamma_{s,n}$, ($s = 1, 2, 3, 4$) değerlerinin değişim tablosu verildi

Tablo 6.7. Örnek 6.4.'te ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak $m = 7$, $n = 20$ ve farklı α değerleri için hesaplanan $u_7^{20}(x)$ yaklaşık çözüm, tam çözüm ve mutlak hata değerleri

x	$u_7^{20}(x)$ $\alpha = 3.8$	$u_7^{20}(x)$ $\alpha = 3.9$	$u_7^{20}(x)$ $\alpha = 4$	Tam Çözüm ($\alpha = 4$)	Mutlak Hata ($\alpha = 4$)
0.1	1.10524159689325	1.10520789833453	1.10517091616623	1.10517091807564	1.909×10^{-9}
0.2	1.22161302190476	1.22151396183660	1.22140275162742	1.22140275816016	6.532×10^{-9}
0.3	1.35020294770812	1.35004241424337	1.34985879531642	1.34985880757600	1.225×10^{-8}
0.4	1.49225371009526	1.49205550758277	1.49182468003305	1.49182469764127	1.760×10^{-8}
0.5	1.64916630490136	1.64896285851501	1.64872124934221	1.64872127070012	2.135×10^{-8}
0.6	1.82251055278835	1.82233373718005	1.82211877775241	1.82211880039050	2.263×10^{-8}
0.7	2.01403769529534	2.01391134240427	2.01375268665686	2.01375270747047	2.081×10^{-8}
0.8	2.22569586763149	2.22562919248214	2.22554091316778	2.22554092849246	1.532×10^{-8}
0.9	2.45964750986571	2.45962950461517	2.45960310464975	2.45960311115694	6.507×10^{-9}

Tablo 6.8. Örnek 6.4.'te $m = 7$, $n = 20$ için hesaplanan $\gamma_{1,n}$, $\gamma_{2,n}$, $\gamma_{3,n}$ ve $\gamma_{4,n}$ değerleri

n	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
1	1.2454379860516901424	-0.85896381928461996649	0.73028777726018597889	-0.60354822895498095190
2	1.2459354242250435521	-0.86073156210993516875	0.73236042040872499806	-0.60410265532132561837
3	1.2459368045487817733	-0.86073646735749267638	0.73236617171349419893	-0.60410419377960155287
4	1.2459368083830032177	-0.86073648098314067072	0.73236618768929427314	-0.60410419805308432333
5	1.2459368083936538328	-0.86073648102098969257	0.73236618773367149516	-0.60410419806495510870
6	1.2459368083936834178	-0.86073648102109482876	0.73236618773379476524	-0.60410419806498808311
7	1.2459368083936835000	-0.86073648102109512079	0.73236618773379510764	-0.60410419806498817470
8	1.2459368083936835002	-0.86073648102109512164	0.73236618773379510863	-0.60410419806498817496
9	1.2459368083936835002	-0.86073648102109512160	0.73236618773379510858	-0.60410419806498817495
10	1.2459368083936835002	-0.86073648102109512161	0.73236618773379510860	-0.60410419806498817495
11	1.2459368083936835002	-0.86073648102109512163	0.73236618773379510862	-0.60410419806498817496
12	1.2459368083936835002	-0.86073648102109512163	0.73236618773379510862	-0.60410419806498817496
13	1.2459368083936835002	-0.86073648102109512163	0.73236618773379510862	-0.60410419806498817496
14	1.2459368083936835002	-0.86073648102109512160	0.73236618773379510858	-0.60410419806498817495
15	1.2459368083936835002	-0.86073648102109512163	0.73236618773379510862	-0.60410419806498817496
16	1.2459368083936835002	-0.86073648102109512163	0.73236618773379510862	-0.60410419806498817496
17	1.2459368083936835002	-0.86073648102109512160	0.73236618773379510858	-0.60410419806498817495
18	1.2459368083936835002	-0.86073648102109512162	0.73236618773379510861	-0.60410419806498817496
19	1.2459368083936835002	-0.86073648102109512161	0.73236618773379510860	-0.60410419806498817495
20	1.2459368083936835002	-0.86073648102109512162	0.73236618773379510861	-0.60410419806498817496

**Şekil 6.4** Örnek 6.4.'te ek bazlı L-RKM yöntemi kullanarak a) $m = 7$, $n = 20$ ve $\alpha = 4$ için yaklaşık çözüm ile tam çözümün karşılaştırılma grafiği b) $m = 7$, $n = 20$ ve $\alpha = 4$ için mutlak hata grafiği

Ek bazlı L-RKM ile yaklaşık çözümleri bulunan lineer Volterra ve Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinde $m = 7$ nokta sayısı ve $n = 20$ iterasyonla sonuçlar tablolarla verildi. Nokta ve iterasyon sayısı artırıldıkça elde edilen sonuçlar $\alpha = 4$ için

elde edilen tam çözüme daha da yaklaşacaktır. Bulunan sonuçlar, az nokta ve az iterasyon sayısı ile yöntemin gayet başarılı ve etkili olduğunu göstermektedir.



7. BÖLÜM

TARTIŞMA SONUÇ VE ÖNERİLER

Kesirli mertebeden türev sayesinde mühendislik, fizik, akışkanlar dinamiği, akışkanlar mekaniği, dinamik sistemler, kontrol teorisi, ısı transferi, petrol sanayisi gibi birçok bilim alanında yapılan çalışmalarda modellenen yapının davranışlarını ve süreci daha iyi ifade ettiği görüldü.

Bu tez çalışmasında, kesirli mertebeden türev içeren diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin sonlu ve sonsuz boyutlu doğuran çekirdekli Hilbert uzaylarında bulunması amaçlandı. Tezin 3. bölümünde Bagley-Torvik denkleminin Klasik doğuran çekirdekli Hilbert uzayı (K-RKM) metodu ile Legendre doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodu (L-RKM) uygulanarak iki yöntem arasında karşılaştırma yapılırken 4. Bölümde Troesch denkleminin K-RKM ile L-RKM uygulanıp daha önce literatürde var olan sonuçlarla karşılaştırdı. Doğuran çekirdekli Hilbert uzayı metodunun uygulanabilir olması için başlangıç ve sınır şartlarının homojen olması gerekmektedir fakat 5. bölümde L-RKM yöntemine yeni bir bakış açısı getirilerek ek baz eklenip, çoklu mertebeden türev içeren çok noktalı lineer olmayan model denklemlere uygulanarak yaklaşık sonuçlar elde edildi. Son bölümde ise lineer ve lineer olmayan Volterra ve Fredholm integro-diferansiyel denklemleri ek bazlı L-RKM yöntemiyle homojenleştirilmesine gerek kalmadan denklemlerin yaklaşık sonuçlarını elde edildi.

Elde edilen sonuçlardan metodların etkili ve kullanışlı olduğu sonucuna varılmıştır. Kullanılan metodlarla değişik türden kesir mertebeli adi ve integro-diferansiyel denklemlere uygulanabileceği düşünülebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Zaremba, S. “L’équation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques”, *Imprimerie de l’Universite.*, 1907.
- [2] Zaremba, S., “Sur le calcul numérique des fonctions demandées dans le problème de Dirichlet et le problème hydrodynamique”, *Imprimerie de l’Universite*, 1909.
- [3] Mercer, J., “Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations”, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 209(1909): 415-446, 1909.
- [4] Mercer, J., “Sturm-Liouville series of normal functions in the theory of integral equations”, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 211(1911): 111-198, 1911.
- [5] Moore, E. H., “On properly positive Hermitian matrices”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 23(1916): p.59, 1916.
- [6] Moore, E. H., “General Analysis”, *Memoirs of the American Philosophical Society*, Part I, 1935, Part II, 1939, 1939.
- [7] Bergman, S., “Ueber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen”, *Math. Ann.*, 86(1922): 238-271, 1922.
- [8] Bochner, S. “Monotone funktionen, stieltjessche integrale und harmonische analyse”, *Mathematische Annalen*, 108(1), 378-410, 1933.
- [9] Aronszajn, N., “Theory of reproducing kernels”, *Trans. Am. Math. Soc.*, 68: 337-404, 1950.
- [10] Schwartz, L., “Sous-espaces hilbertines d’espaces vectoriels topologiques et noyaux associes (noyaux reproduisants)”, *J. Anal. Math.*, 13: 115-256, 1964.
- [11] Yang, L., Cui, M., “New algorithm for a class of nonlinear integro-differential equations in the reproducing kernel space”, *Applied Mathematics and Computation*, 174(2006): 942-960, 2006.

- [12] Yu-lan, W., Lu, C., “Using reproducing kernel for solving a class of partial differential equation with variable-coefficients”, *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 29(1): 129-137, 2008.
- [13] Cui, M., Lin, Y., “Nonlinear Numerical Analysis in Reproducing Kernel Space”, *Nova Science Publishers, Inc.*, New York, 2009.
- [14] Yang, L. H., Lin, Y., “Reproducing kernel methods for solving linear initial-boundary-value problems”, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2008(29): 1-11, 2008
- [15] Mu, L., Du, H., “The solution of parabolic differential equation with non-local boundary conditions in the reproducing kernel space”, *Applied Mathematics and Computation*, 202(2008): 708-714, 2008.
- [16] Li, F., Cui, M., “A best approximation for the solution of one-dimensional variable-coefficient Burgers’ equation” *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 25(6): 1353-1356, 2009.
- [17] Lin, Y., Zhou, Y., “Solving the reaction-diffusion equations with nonlocal boundary conditions based on reproducing kernel space”, *Numerical methods for Partial Differential Equations: An International Journal* 25(6): 1468-1481, 2009.
- [18] Yao, H., “Reproducing kernel method for the solution of nonlinear hyperbolic telegraph equation with integral condition”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(4): 867-886, 2010.
- [19] Jiang, W., Lin, Y., “Approximate solution of the fractional advection-dispersion equation”, *Computer Physics Communications*, 181(2010): 557-561, 2010.
- [20] Jiang, W., Lin, Y., “Representation of exact solution for the time-fractional telegraph equation in the reproducing kernel space”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16(2011): 3639-3645, 2011.

- [21] Wang, Y., Su, L., Cao, X., Li, X., “ Using reproducing kernel for solving a class of singularly perturbed problems”, *Computers and Mathematics with Applications*, 61(2011): 421-430, 2011
- [22] Wang, Y., Du, M., Tan, F., Li, Z., Nie, T., “ Using reproducing kernel for solving a class of fractional partial differential equation with non-classical conditions”, *Applied Mathematics and Computation*, 219(2013): 5918-5925, 2013
- [23] Wang, Y. L., Yu, H., Tan, F. G., Qu, S., “Solving a class of singularly perturbed partial differential equation by using the perturbation method and reproducing kernel method”, *Abstract and Applied Analysis*, 2014: 1-5, 2014.
- [24] Li, X., Wu, B., “New algorithm for nonclassical parabolic problems based on the reproducing kernel method”, *Mathematical Sciences*, 7(4): 1-5, 2013.
- [25] Li, X., Wu, B., “A new reproducing kernel method for variable order fractional boundary value problems for functional differential equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 311(2017): 387-393, 2017.
- [26] Mohammadi, M., Mokhtari, R., “Solving the generalized regularized long wave equation on the basis of a reproducing kernel space”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(2011): 4003-4014, 2011.
- [27] Mohammadi, M., Mokhtari, R., “A reproducing kernel method for solving a class of nonlinear systems of PDEs”, *Mathematical Modelling and Analysis*, 19(2): 180-198, 2014.
- [28] Akgül, A., Inc, M., Kilicman, A., Baleanu, D., “A new approach one-dimensional sine-Gordon equation”, *Advances in Difference Equations*, 2016(8): 1-20, 2016.
- [29] Arqub, O. A., “Fitted reproducing kernel Hilbert space method for the solutions of some certain classes of time-fractional partial differential equations subject to initial and Neumann boundary conditions”, *Computers and Mathematics with Applications* 73(2017): 1243-1261, 2017.

- [30] Arqub, O. A., “Numerical solutions for the Robin time-fractional partial differential equations of heat and fluid flows based on the reproducing kernel algorithm”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 28(4): 828-856, 2018.
- [31] Mei, L., Jia, Y., Lin, Y., “Simplified reproducing kernel method for impulsive delay differential equations”, *Applied Mathematics Letter* 83(2018): 123-129, 2018.
- [32] Geng, F., Tang, Z., Zhou, Y., “Reproducing kernel method for singularly perturbed one-dimensional initial-boundary value problems with exponential initial layers”, *Qual. Theory Dyn. Syst.* 17(2018): 177-187, 2018.
- [33] Sakar, M. G. Iterative reproducing kernel Hilbert spaces method for Riccati differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 309, 163-174, 2017.
- [34] Sakar, M. G., Saldır, O., & Akgül, A., “Numerical solution of fractional Bratu type equations with Legendre reproducing kernel method”, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 4(5), 1-14, 2018.
- [35] Sakar, M. G., & Saldır, O., “A new reproducing kernel approach for nonlinear fractional three-point boundary value problems”, *Fractal and Fractional*, 4(4), 53, 2020.
- [36] Oldham K. B., Spanier, J., “Fractional Calculus: Theory and Applications, Differentiation and Integration to Arbitrary Order”, *Academic Press, Inc.*, New York, USA, 234. 1974.
- [37] Podlubny, I., “Fractional Differential Equations: An introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solutions and Some of Their Applications”, *Academic Press, California, USA*, 1999.
- [38] Diethelm, K., “The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type”, *Springer*, Berlin, Germany, 247, 2010.

- [39] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J., “Theory and Applications of Fractional Differential Equations (North-Holland Mathematics Studies 204)”, *Elsevier Inc.*, USA, 2006.
- [40] Kreyszig, E., “Introductory Functional Analysis with Applications”, *John Wiley&Sons. Inc.*, New York, Santa Barbara, 1978.
- [41] Moore, R. E., Cloud, M. J., “Computational Functional Analysis”, *Horwood Publishing Chichester*, UK, 2007.
- [42] Debnath, L., Mikusinski, P., “Hilbert Spaces with Applications”, *Elsevier Academic Press*, Amsterdam, 2005
- [43] Paulsen, V. I., Raghupathi, M., “An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces”, *Cambridge University Press*, United Kingdom, 152, 2016.
- [44] Bachman, G. ve Narici, L., “Functional Analysis”, *Academic Press Inc.*, London, 1966.
- [45] Ponnusamy, A., “Foundations of Functional Analysis”, *Alpha Science International Ltd.*, Pangbourne, England, 2002.
- [46] Sen, R., “A First Course in Functional Analysis”, *Anthem Press*, London, 2013.
- [47] Adams, R. A., Fournier, J. J. F., “Sobolev Spaces”, *Academic Press, Elsevier*, New York, 2003.
- [48] Cui, M., Lin, Y., “Nonlinear Numerical Analysis in Reproducing Kernel Space”, *Nova Science Publishers, Inc.*, New York, 2009.
- [49] Istratescu, V. I., “Inner Product Structures”, *D. Reidel Publishing Company*, Tokyo, 1987.
- [50] Dunkl, C. F., & Xu, Y. “Orthogonal polynomials of several variables” , *Cambridge University Press*, (No. 155), 2014.

- [51] Lebedev, N. N., Silverman, R. A., & Livhtenberg, D. B. “Special functions and their applications”, *Physics Today*, 18(12), 70, 1965.
- [52] Ezz-Eldien, S. S., Hafez, R. M., Bhrawy, A. H., Baleanu, D., & El-Kalaawy, A. A. “New numerical approach for fractional variational problems using shifted Legendre orthonormal polynomials”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 174(1), 295-320, 2017.
- [53] Wazwaz, A. M. “Linear and nonlinear integral equations”, *Springer*, Vol. 639, Berlin, 2011.
- [54] Torvik, P. J., & Bagley, R. L. “On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials”, *J Appl Mech* 51(2):294-298, 1984.
- [55] Al-Mdallal, Q. M., Syam, M. I., & Anwar, M. N. “A collocation-shooting method for solving fractional boundary value problems”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(12), 3814-3822, 2010.
- [56] Das, S., Gupta, P. K., & Ghosh, P., “An approximate solution of nonlinear fractional reaction–diffusion equation”, *Applied mathematical modelling*, 35(8), 4071-4076, 2011.
- [57] Sakar, M. G., & Erdogan, F., “The homotopy analysis method for solving the time-fractional Fornberg–Whitham equation and comparison with Adomian’s decomposition method”, *Applied Mathematical Modelling*, 37(20-21), 8876-8885, 2013.
- [58] Ray, S. S., & Bera, R. K., “Analytical solution of the Bagley Torvik equation by Adomian decomposition method”, *Applied Mathematics and Computation*, 168(1), 398-410, 2005.
- [59] Diethelm, K., & Ford, J., “Numerical solution of the Bagley-Torvik equation”, *BIT Numerical Mathematics*, 42(3), 490-507, 2002.

- [60] Saadatmandi, A., & Dehghan, M., “A new operational matrix for solving fractional-order differential equations”, *Computers & mathematics with applications*, 59(3), 1326-1336, 2010.
- [61] Yüzbaşı, Ş., “Numerical solution of the Bagley–Torvik equation by the Bessel collocation method”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36(3), 300-312, 2013.
- [62] Gülsu, M., Öztürk, Y., & Anapali, A., “Numerical solution the fractional Bagley–Torvik equation arising in fluid mechanics”, *International Journal of Computer Mathematics*, 94(1), 173-184, 2017.
- [63] Sakar, M. G., Saldır, O., & Akgül, A., “A novel technique for fractional Bagley–Torvik equation”, *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, 89(3), 539-545, 2019.
- [64] Weibel, E. S., & Landshoff, R. K. M., “The plasma in magnetic field. In A symposium on magneto hydrodynamics”, *Stanford University Press, Stanford* (pp. 60-67), 1958.
- [65] Roberts, S. M., & Shipman, J. S., “On the closed form solution of Troesch's problem”, *Journal of Computational Physics*, 21(3), 291-304, 1976.
- [66] Scott, M. R., “On the conversion of boundary-value problems into stable initial-value problems via several invariant imbedding algorithms”, In *Numerical solutions of boundary value problems for ordinary differential equations* (pp. 89-146). Academic Press, 1975.
- [67] Khuri, S. A., “A numerical algorithm for solving Troesch's problem”, *International Journal of Computer Mathematics*, 80(4), 493-498, 2003.
- [68] Feng, X., Mei, L., & He, G., “An efficient algorithm for solving Troesch's problem”, *Applied Mathematics and Computation*, 189(1), 500-507, 2007.

- [69] Chang, S. H., & Chang, I. L., “A new algorithm for calculating one-dimensional differential transform of nonlinear functions”, *Applied mathematics and computation*, 195(2), 799-808, 2008.
- [70] Chang, S. H., “Numerical solution of Troesch’s problem by simple shooting method”, *Applied Mathematics and Computation*, 216(11), 3303-3306, 2010.
- [71]] Zarebnia, M., & Sajjadian, M., “The sinc–Galerkin method for solving Troesch’s problem”, *Mathematical and Computer Modelling*, 56(9-10), 218-228, 2012.
- [72] Vazquez-Leal, H., Khan, Y., Fernandez-Anaya, G., Herrera-May, A., Sarmiento-Reyes, A., Filobello-Nino, U., ... & Pereyra-Diaz, D., “A general solution for Troesch's problem”, *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.
- [73] Khuri, S. A., & Sayfy, A., “Troesch’s problem: A B-spline collocation approach”, *Mathematical and Computer Modelling*, 54(9-10), 1907-1918, 2011.
- [74] Doha, E. H., Baleanu, D., Bhrawi, A. H., & Hafez, R. M. “A Jacobi collocation method for Troesch’s problem in plasma physics”, *Proceedings of the Romanian Academy, Series A*, 15(2), 130-138, 2014.
- [75] Temimi, H., “A discontinuous Galerkin finite element method for solving the Troesch’s problem”, *Applied Mathematics and Computation*, 219(2), 521-529, 2012.
- [76] Chang, S. H., “A variational iteration method for solving Troesch’s problem”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(10), 3043-3047, 2010.
- [77] Inc, M., & Akgül, A., “The reproducing kernel Hilbert space method for solving Troesch’s problem”, *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 14(1), 19-27, 2013.
- [78] Mirmoradia, S. H., Hosseinpoura, I., Ghanbarpour, S., & Barari, A. “Application of an approximate analytical method to nonlinear Troesch’s problem”, *Applied Mathematical Sciences*, 3(32), 1579-1585, 2009.

- [79] Lin, Y., Niu, J., & Cui, M., “A numerical solution to nonlinear second order three-point boundary value problems in the reproducing kernel space”, *Applied Mathematics and Computation*, 218(14), 7362-7368, 2012.
- [80] Rehman, M., Khan, R. A., & Asif, N. A., “Three point boundary value problems for nonlinear fractional differential equations”, *Acta Mathematica Scientia*, 31(4), 1337-1346, 2011.
- [81] Geng, F., “Solving singular second order three-point boundary value problems using reproducing kernel Hilbert space method”, *Applied Mathematics and Computation*, 215(6), 2095-2102, 2009.
- [82] Zhang, C. P., Niu, J., & Lin, Y. Z., “Numerical solutions for the three-point boundary value problem of nonlinear fractional differential equations”, *In Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2012). Hindawi, 2012.
- [83] Etemad, S., Ntouyas, S. K., & Tariboon, J., “Existence results for three-point boundary value problems for nonlinear fractional differential equations”, *J. Nonlinear Sci. Appl*, 9(5), 2105-2116, 2016.
- [84] Wu, B., & Li, X., “Application of reproducing kernel method to third order three-point boundary value problems”, *Applied Mathematics and Computation*, 217(7), 3425-3428, 2010.
- [85] Ahmad, B., Alghanmi, M., Ntouyas, S. K., & Alsaedi, A., “A study of fractional differential equations and inclusions involving generalized Caputo-type derivative equipped with generalized fractional integral boundary conditions”, *AIMS Mathematics*, 4(1), 26-42, 2019.
- [86] Lakshmikantham, V., Leela, S., & Devi, J. V., “Theory of fractional dynamic systems”, *CSP*, 2009.
- [87] Hilfer, R. (Ed.), “Applications of fractional calculus in physics”, *World scientific*, 2000.

- [88] Tarasov, V. E., “Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media”, *Springer Science & Business Media*, 2011.
- [89] Khalouta, A., & Kadem, A., “A new numerical technique for solving Caputo time-fractional biological population equation”, *AIMS Mathematics*, 4(5), 1307-1319, 2019.
- [90] Tadjeran, C., & Meerschaert, M. M., “A second-order accurate numerical method for the two-dimensional fractional diffusion equation”, *Journal of Computational Physics*, 220(2), 813-823, 2007.
- [91] Esen, A., & Tasbozan, O., “Numerical solution of time fractional Burgers equation by cubic B-spline finite elements”, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(3), 1325-1337, 2016.
- [92] Sakar, M. G., Uludag, F., & Erdogan, F., “Numerical solution of time-fractional nonlinear PDEs with proportional delays by homotopy perturbation method”, *Applied Mathematical Modelling*, 40(13-14), 6639-6649, 2016.
- [93] Saeed, U., & ur Rehman, M., “Haar wavelet–quasilinearization technique for fractional nonlinear differential equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 220, 630-648, 2013.
- [94] Pezza, L., & Pitolli, F., “A multiscale collocation method for fractional differential problems”, *Mathematics and Computers in Simulation*, 147, 210-219, 2018.
- [95] Şenol, M., Timuçin Dolapçı, İ., Aksoy, Y., & Pakdemirli, M. “Perturbation-iteration method for first-order differential equations and systems”, *In Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2013). Hindawi, 2013.
- [96] Jafari, H., Jassim, H. K., Moshokoa, S. P., Ariyan, V. M., & Tchier, F. “Reduced differential transform method for partial differential equations within local fractional derivative operators”, *Advances in Mechanical Engineering*, 8(4), 1687814016633013, 2016.

- [97] Sakar, M. G., & Saldır, O., “Improving variational iteration method with auxiliary parameter for nonlinear time-fractional partial differential equations”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 174(2), 530-549, 2017.
- [98] Xu, M. Q., & Lin, Y. Z., “Simplified reproducing kernel method for fractional differential equations with delay”, *Applied Mathematics Letters*, 52, 156-161, 2016.
- [99] Wang, Y. L., Du, M. J., Temuer, C. L., & Tian, D., “Using reproducing kernel for solving a class of time-fractional telegraph equation with initial value conditions”, *International Journal of Computer Mathematics*, 95(8), 1609-1621, 2018.
- [100] Sakar, M. G., Saldır, O., & Erdogan, F., “A hybrid method for singularly perturbed convection–diffusion equation”, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 5(5), 1-17, 2019.
- [101] Erturk, V. S., Momani, S., & Odibat, Z. “Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(8), 1642-1654, 2008.
- [102] Dabiri, A., & Butcher, E. A. “Stable fractional Chebyshev differentiation matrix for the numerical solution of multi-order fractional differential equations”, *Nonlinear Dynamics*, 90(1), 185-201, 2017.
- [103] Senol, M., “Analytical and approximate solutions of (2+ 1)-dimensional time-fractional Burgers-Kadomtsev-Petviashvili equation”, *Communications in Theoretical Physics*, 72(5), 055003, 2020.
- [104] Kadem, A., & Baleanu, D., “Fractional radiative transfer equation within Chebyshev spectral approach”, *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5), 1865-1873, 2010.
- [105] Khaleghi, M., Babolian, E., & Abbasbandy, S., “Chebyshev reproducing kernel method: application to two-point boundary value problems”, *Advances in Difference Equations*, 2017(1), 1-19, 2017.

- [106] Senol, M., Akinyemi, L., Ata, A., & Iyiola, O. S., “Approximate and generalized solutions of conformable type Coudrey–Dodd–Gibbon–Sawada–Kotera equation”, *International Journal of Modern Physics B*, 35(02), 2150021, 2021.
- [107] Senol, M., Tasbozan, O., Kurt, A., Ata, A., “New Exact And Numerical Solutions Of Fractional Kaup-Kupershmidt Equation”, *Asia Pacific Journal of Mathematics*, 6-16, 2019.
- [108] Senol, M. “New analytical solutions of fractional symmetric regularized-long-wave equation”, *Revista mexicana de fisica*, 66(3), 297-307, 2020.
- [109] Senol, M. “Analytical and approximate solutions of $(2+ 1)$ -dimensional time-fractional Burgers-Kadomtsev-Petviashvili equation”, *Communications in Theoretical Physics*, 72(5), 055003, 2020.
- [110] Alpay, D. “Reproducing kernel spaces and applications”, *Operator Theory: Advances and Applications*, vol. 143, 2003.
- [111] Geng, F., & Cui, M. “A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems”, *Applied Mathematics Letters*, 25(5), 818-823, 2012.
- [112] Geng, F., & Cui, M. “New method based on the HPM and RKHSM for solving forced Duffing equations with integral boundary conditions”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(2), 165-172, 2009.
- [113] Saldır, O., Sakar, M. G., & Erdogan, F. “Numerical solution of fractional order Burgers’ equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions by reproducing kernel method”, *Fractal and Fractional*, 4(2), 27, 2020.
- [114] Saldır, O., Sakar, M. G., & Erdogan, F. “Numerical solution of time-fractional Kawahara equation using reproducing kernel method with error estimate”, *Computational and Applied Mathematics*, 38(4), 1-23, 2019.
- [115] Sakar, M. G., & Saldır, O. “A novel iterative solution for time-fractional Boussinesq equation by reproducing kernel method”, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 64(1), 227-254, 2020.

- [116] Jiang, W., & Tian, T. “Numerical solution of nonlinear Volterra integro-differential equations of fractional order by the reproducing kernel method”, *Applied Mathematical Modelling*, 39(16), 4871-4876, 2015.
- [117] Bloom, F., “Bounds for Solutions to a Class of Integro-differential Equations Associated with a Theory of Rigid Nonconducting Material Dielectrics”, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 11(2), 265-291, 1980.
- [118] Holm aker, K., “Global asymptotic stability for a stationary solution of a system of integro-differential equations describing the formation of liver zones”, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 24(1), 116-128, 1993.
- [119] Forbes, L. K., Crozier, S., & Doddrell, D. M. “Calculating current densities and fields produced by shielded magnetic resonance imaging probes”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 57(2), 401-425, 1997.
- [120] Al-Smadi, M., Abu Arqub, O., & Momani, S. (2013). “A computational method for two-point boundary value problems of fourth-order mixed integrodifferential equations”, *Mathematical Problems in Engineering*, 2013.
- [121] Behiry, S. H., “Nonlinear Integro-differential equations by differential transform method with Adomian polynomials”, *Mathematical Sciences Letters*, 2(3), 209, 2013.
- [122] Heris, J. M., “Solving the Integro-Differential Equations Using the Modified Laplace Adomian Decomposition Method”, *Journal of Mathematical Extension*, 6., 2012.
- [123] Wang, S. Q., & He, J. H., “Variational iteration method for solving integro-differential equations”, *Physics letters A*, 367(3), 188-191, 2007.
- [124] Yeganeh, S., Ordokhani, Y., & Saadatmandi, A., “A sinc-collocation method for second-order boundary value problems of nonlinear integro-differential equation,” *Journal of Information and Computing Science*, 7(2), 151-160, 2012.

- [125] Dehghan, M., & Saadatmandi, A., “Chebyshev finite difference method for Fredholm integro-differential equation”, *International Journal of Computer Mathematics*, 85(1), 123-130, 2008.
- [126] Rashed, M. T. "Lagrange interpolation to compute the numerical solutions of differential, integral and integro-differential equations", *Applied Mathematics and computation*, 151(3), 869-878, 2004.
- [127] Maleknejad, K., & Mahmoudi, Y. “Taylor polynomial solution of high-order nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 145(2-3), 641-653, 2003.
- [128] Maleknejad, K., Mirzaee, F., & Abbasbandy, S., “Solving linear integro-differential equations system by using rationalized Haar functions method”, *Applied mathematics and computation*, 155(2), 317-328, 2004.
- [129] Abbasbandy, S., & Taati, A., “Numerical solution of the system of nonlinear Volterra integro-differential equations with nonlinear differential part by the operational Tau method and error estimation”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 231(1), 106-113, 2009.
- [130] Biazar, J., Ghazvini, H., & Eslami, M., “He’s homotopy perturbation method for systems of integro-differential equations”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 39(3), 1253-1258, 2009.
- [131] Maleknejad, K., Basirat, B., & Hashemizadeh, E., “Hybrid Legendre polynomials and Block-Pulse functions approach for nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations” *Computers & Mathematics with applications*, 61(9), 2821-2828, 2011.
- [132] Wazwaz, A. M., “The combined Laplace transform–Adomian decomposition method for handling nonlinear Volterra integro–differential equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 216(4), 1304-1309, 2010.

- [133] Arikoglu, A., & Ozkol, I., “Solutions of integral and integro-differential equation systems by using differential transform method”, *Computers & Mathematics with Applications*, 56(9), 2411-2417, 2008.
- [134] Al-Smadi, M., & Altawallbeh, Z., “Solution of system of Fredholm integro-differential equations by RKHS method”, *Int. J. Contemp. Math. Sci*, 8(11), 531-540, 2013.
- [135] Li, C. L., & Cui, M. G., “The exact solution for solving a class nonlinear operator equations in the reproducing kernel space”, *Applied Mathematics and Computation*, 143(2-3), 393-399, 2003.
- [136] Lin, Y. Z., Cui, M. G., & Yang, L. H., “Representation of the exact solution for a kind of nonlinear partial differential equation”, *Applied Mathematics Letters*, 19(8), 808-813, 2006.
- [137] Alvandi, A., Lotfi, T., & Paripour, M., “Reproducing kernel method for solving Wiener-Hopf equations of the second kind”, *Journal of Hyperstructures*, 5(1), 2016.
- [138] Alvandi, A., & Paripour, M., “The combined reproducing kernel method and Taylor series to solve nonlinear Abel’s integral equations with weakly singular kernel”, *Cogent Mathematics*, 3(1), 1250705, 2016.
- [139] Alvandi, A., & Paripour, M., “Reproducing kernel method with Taylor expansion for linear Volterra integro-differential equations”, *Communications in Numerical Analysis*, 1, 1-10, 2017.
- [140] Cui, M., & Du, H., “Representation of exact solution for the nonlinear Volterra–Fredholm integral equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 182(2), 1795-1802, 2006.
- [141] Abu Arqub, O., Al-Smadi, M., & Momani, S., “Application of reproducing kernel method for solving nonlinear Fredholm-Volterra integrodifferential equations”, *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2012). Hindawi, 2012.

- [142] Arqub, O. A., Al-Smadi, M., & Shawagfeh, N., “Solving Fredholm integro–differential equations using reproducing kernel Hilbert space method”, *Applied Mathematics and Computation*, 219(17), 8938-8948, 2013.
- [143] Altawallbeh, Z., Al-Smadi, M., & Abu-Gdairi, R., “Approximate solution of second-order integrodifferential equation of Volterra type in RKHS method”, *Int. Journal of Math. Analysis*, 7(44), 2145-2160, 2013.
- [144] Nawaz, Y., “Variational iteration method and homotopy perturbation method for fourth-order fractional integro-differential equations”, *Computers & Mathematics with Applications*, 61(8), 2330-2341, 2011.
- [145] Abu-Gdairi, R., & Al-Smadi, M., “An efficient computational method for 4th-order boundary value problems of Fredholm IDEs”, *Appl. Math. Sci.(Ruse)*, 7(93-96), 4761-4774, 2013.