

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER VE LİNEER OLMAYAN BAZI ADI
DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİNİN MAGNUS VE DÜZELTİLMİŞ MAGNUS
SERİ AÇILIM YÖNTEMLERİ KULLANILARAK
HESAPLANMASI**

**Tezi Hazırlayan
Sure KÖME**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yasin YAZLIK**

**Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi**

**Kasım 2016
NEVŞEHİR**

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER VE LİNEER OLMAYAN BAZI ADI
DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİNİN MAGNUS VE DÜZELTİLMİŞ MAGNUS
SERİ AÇILIM YÖNTEMLERİ KULLANILARAK
HESAPLANMASI**

**Tezi Hazırlayan
Sure KÖME**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yasin YAZLIK**

**Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi**

**Kasım 2016
NEVŞEHİR**

KABUL VE ONAY

Doç. Dr. Yasin YAZLIK danışmanlığında **Sure KÖME** tarafından hazırlanan “**Lineer ve Lineer Olmayan Bazı Adi Diferansiyel Denklemlerinin Nümerik Çözümlerinin Magnus ve Düzeltilmiş Magnus Seri Açılım Yöntemleri Kullanılarak Hesaplanması**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

25/11/2016

JÜRİ

Başkan : Doç. Dr. Sezer SORGUN

Üye : Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hüseyin KAPLAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 06.12.2016 tarih ve 45-415 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

06/12/2016

Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü



TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Sure KÖME



TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve tez çalışmam boyunca bütün bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan ve bu tezi hazırlamamda büyük emekleri olan danışman hocalarıma,

Bu güne kadar ki maddi ve manevi bütün desteklerinden dolayı değerli eşim Cahit KÖME ve varlığıyla bana güç veren biricik kızım Beren KÖME başta olmak üzere tüm aileme,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarıma,

Son olarak ise doktora öğrenimim boyunca eğitime verdikleri destekten dolayı TÜBİTAK' a çok teşekkür ederim.

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN BAZI ADI DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN MAGNUS VE DÜZELTİLMİŞ MAGNUS SERİ AÇILIM YÖNTEMLERİ KULLANILARAK HESAPLANMASI

(Doktora Tezi)

Sure KÖME

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Kasım 2016

ÖZET

Bu tez çalışmasında, Lie-grup yöntemlerinden Magnus ve Düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemlerinin bazı adi diferansiyel denklem sistemleri üzerindeki etkisi incelenmiştir. Magnus ve Düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemlerinin lineer stiff adi diferansiyel denklem sistemlerine, periyodik başlangıç değer problemlerine ve özel olarak lineer olmayan Liénard diferansiyel denklem sistemi ile izotermal gaz küre denklem sistemine uygulanması sonucunda etkinlikleri üzerinde çalışılmıştır. Lineer stiff adi diferansiyel denklem sistemleri, MG4, MG6, RK4 ve RK6 yöntemleri kullanılarak farklı h değerleri için, lineer olmayan Liénard diferansiyel denklem sistemi ve izotermal gaz küre denklem sistemi, NMG4 yöntemi kullanılarak ve Periyodik başlangıç değer problemleri ise MG4, MG6, MMG4 ve MMG6 yöntemleri kullanılarak çözülmüştür. Son olarak elde edilen veriler tablolar ve grafikler halinde sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Magnus seri açılımı, Düzeltilmiş Magnus seri açılımı, Stiff diferansiyel denklem sistemleri, Periyodik başlangıç değer problemi.

Tez Danışman: Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Sayfa sayısı: 115

**COMPUTATION OF NUMERICAL SOLUTIONS OF LINEAR AND
NONLINEAR SOME ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS
USING MAGNUS AND MODIFIED MAGNUS SERIES EXPANSION
METHODS**

(PhD Thesis)

Sure KÖME

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

November 2016

ABSTRACT

In this thesis, it is examined the behaviour of the Magnus and Modified Magnus series expansion methods, so called Lie-group methods, for some ordinary differential equation systems. It is studied the effectiveness of Magnus and Modified Magnus series expansion methods for linear stiff ordinary differential equation systems, periodic initial value problems and specially nonlinear Liénard differential equation system and isothermal gas sphere equation system. Linear stiff ordinary differential equation systems are solved via MG4, MG6, RK4 and RK6 methods for different h values. Nonlinear Liénard differential equation system and isothermal gas sphere equation system are solved via NMG4 method. Periodic initial value problems are solved via MG4, MG6, MMG4 ve MMG6 methods. Finally, results are presented with tables and figures.

Keywords: Magnus series expansion, Modified Magnus series expansion, Stiff differential equation systems, Periodic initial value problem.

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Pages: 115

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TABLolar LİSTESİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xiv
BÖLÜM 1	1
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2	8
GENEL BİLGİLER	8
2.1. Temel Tanımlar.....	8
2.2. Lie Grupları ve Lie Cebirleri.....	10
2.3. Stiff Adi Diferansiyel Denklem Sistemleri	15
2.4. Liénard Diferansiyel Denklem Sistemi.....	15
2.5. İzotermal Gaz Küre Denklem Sistemi	15
2.6. Periyodik Başlangıç Değer Problemleri.....	16
BÖLÜM 3	17
LİE GRUP YÖNTEMLERİ	17
3.1. Lineer diferansiyel denklem sistemleri için Magnus seri açılım yöntemi.....	17
3.1.1. Çok değişkenli tümlev.....	20
3.1.1.1. Çok değişkenli Gauss-Legendre tümlevi	21
3.1.2. Dördüncü mertebeden Magnus seri açılım yöntemi (MG4).....	22
3.1.3. Altıncı mertebeden Magnus seri açılım yöntemi (MG6)	25
3.1.4. Homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sistemleri için Magnus seri açılım yöntemi.....	27
3.1.5. Lineer olmayan diferansiyel denklem sistemleri için Magnus seri açılım yöntemi	27
3.1.5.1. Dördüncü mertebeden lineer olmayan Magnus seri açılım yöntemi (NMG4) ..	28
3.2. Düzeltilmiş (Modifiye Edilmiş) Magnus Seri Açılımı Yöntemi	29
3.2.1. Dördüncü mertebeden düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi (MMG4)	31

3.2.2. Altıncı mertebeden düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi (MMG6).....	32
3.3. Magnus Serilerinin Yakınsaklığı.....	34
BÖLÜM 4	35
NÜMERİK ÇALIŞMALAR	35
BÖLÜM 5	103
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	103
5.1. Sonuçlar.....	103
5.2. Öneriler.....	104
KAYNAKLAR.....	105
ÖZGEÇMİŞ.....	114

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 4.1.	Örnek 4.1' in Magnus seri açılım yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	36
Tablo 4.2.	$h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi	38
Tablo 4.3.	$h = 0.001$ için Örnek 4.2' nin MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi	38
Tablo 4.4.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.2' nin MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi.....	39
Tablo 4.5.	$h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi	40
Tablo 4.6.	$h = 0.001$ için Örnek 4.2' nin MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi	41
Tablo 4.7.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.2' nin MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi.....	42
Tablo 4.8.	$h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	43
Tablo 4.9.	$h = 0.001$ için Örnek 4.2' nin MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	43
Tablo 4. 10.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.2' nin MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	44
Tablo 4.11.	$h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	44
Tablo 4.12.	$h = 0.001$ için Örnek 4.2' nin MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	45
Tablo 4.13.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.2' nin MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	45
Tablo 4.14.	$h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	46
Tablo 4.15.	$h = 0.001$ için Örnek 4.2' nin RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	46
Tablo 4.16.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.2' nin RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	47
Tablo 4.17.	$h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin RK6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	47
Tablo 4.18.	$h = 0.01$ için Örnek 4.3' ün MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi	50
Tablo 4.19.	$h = 0.001$ için Örnek 4.3' ün MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi	51
Tablo 4.20.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.3' ün MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi	52

Tablo 4.21.	$h = 0.01$ için Örnek 4.3' ün MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi	53
Tablo 4.22.	$h = 0.001$ için Örnek 4.3' ün MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi	54
Tablo 4.23.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.3' ün MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi	55
Tablo 4.24.	$h = 0.01$ için Örnek 4.3' ün MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	56
Tablo 4.25.	$h = 0.001$ için Örnek 4.3' ün MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	56
Tablo 4.26.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.3' ün MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	57
Tablo 4.27.	$h = 0.01$ için Örnek 4.3' ün MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	57
Tablo 4.28.	$h = 0.001$ için Örnek 4.3' ün MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	58
Tablo 4.29.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.3' ün MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	58
Tablo 4.30.	$h = 0.01$ Örnek 4.3' ün RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri	59
Tablo 4.31.	$h = 0.001$ için Örnek 4.3' ün RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	59
Tablo 4.32.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.3' ün RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	60
Tablo 4.33.	$h = 0.01$ Örnek 4.3' ün RK6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri	60
Tablo 4.34.	$h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi	63
Tablo 4.35.	$h = 0.001$ için Örnek 4.4' ün MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi	64
Tablo 4.36.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.4' ün MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi	65
Tablo 4.37.	$h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi	66
Tablo 4.38.	$h = 0.001$ için Örnek 4.4' ün MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi	67
Tablo 4.39.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.4' ün MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi	68
Tablo 4.40.	$h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	69

Tablo 4.41.	$h = 0.001$ için Örnek 4.4' ün MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	69
Tablo 4.42.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.4' ün MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	70
Tablo 4.43.	$h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	70
Tablo 4.44.	$h = 0.001$ için Örnek 4.4' ün MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	71
Tablo 4.45.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.4' ün MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	71
Tablo 4.46.	$h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	72
Tablo 4.47.	$h = 0.001$ için Örnek 4.4' ün RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	72
Tablo 4.48.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.4' ün RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	73
Tablo 4.49.	$h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün RK6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	73
Tablo 4.50.	$h = 0.01$ için Örnek 4.5' in MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi.....	76
Tablo 4.51.	$h = 0.001$ için Örnek 4.5' in MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi.....	77
Tablo 4.52.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.5' in MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi.....	78
Tablo 4.53.	$h = 0.01$ için Örnek 4.5' in MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi.....	79
Tablo 4.54.	$h = 0.001$ için Örnek 4.5' in MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi.....	80
Tablo 4.55.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.5' in MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi.....	81
Tablo 4.56.	$h = 0.01$ için Örnek 4.5' in MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	82
Tablo 4.57.	$h = 0.001$ için Örnek 4.5' in MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	82
Tablo 4.58.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.5' in MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	83
Tablo 4.59.	$h = 0.01$ için Örnek 4.5' in MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	83

Tablo 4.60.	$h = 0.001$ için Örnek 4.5' in MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	84
Tablo 4.61.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.5' in MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	84
Tablo 4.62.	$h = 0.01$ için Örnek 4.5' in RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	85
Tablo 4.63.	$h = 0.001$ için Örnek 4.5' in RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	85
Tablo 4.64.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.5' in RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	86
Tablo 4.65.	$h = 0.001$ için Örnek 4.6' nin NMG4 yöntemine ait iterasyon işlemi	89
Tablo 4.66.	$h = 0.001$ için Örnek 4.6' nin NMG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	90
Tablo 4.67.	$h = 0.001$ için Örnek 4.7' nin NMG4 yöntemine ait iterasyon işlemi	91
Tablo 4.68.	$h = 0.001$ için Örnek 4.7' nin NMG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	92
Tablo 4.69.	$h = 0.005$ için Örnek 4.8' in MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	93
Tablo 4.70.	$h = 0.005$ için Örnek 4.8' in MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	94
Tablo 4.71.	$h = 0.005$ için Örnek 4.8' in MMG4 yöntemine ait iterasyon işlemi.....	95
Tablo 4.72.	$h = 0.005$ için Örnek 4.8' in MMG6 yöntemine ait iterasyon işlemi.....	96
Tablo 4.73.	$h = 0.005$ için Örnek 4.8' in MMG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	97
Tablo 4.74.	$h = 0.005$ için Örnek 4.8' in MMG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	97
Tablo 4.75.	$h = 0.0025$ için Örnek 4.9' un MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	98
Tablo 4.76.	$h = 0.0025$ için Örnek 4.9' un MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	99
Tablo 4.77.	$h = 0.0025$ için Örnek 4.9' un MMG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	99

Tablo 4.78.	$h = 0.0025$ için Örnek 4.9' un MMG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	100
Tablo 4.79.	$h = 0.125$ için Örnek 4.10' un MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	101
Tablo 4.80.	$h = 0.125$ için Örnek 4.10' un MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	101
Tablo 4.81.	$h = 0.125$ için Örnek 4.10' un MMG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	102
Tablo 4.82.	$h = 0.125$ için Örnek 4.10' un MMG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri.....	102

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1.	$h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ).....	48
Şekil 4.2.	$h = 0.001$ için Örnek 4.2' nin mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ).....	48
Şekil 4.3.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.2' nin mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ).....	48
Şekil 4.4.	$h = 0.01$ için Örnek 4.3' ün mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ).....	61
Şekil 4.5.	$h = 0.001$ için Örnek 4.3' ün mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ).....	61
Şekil 4.6.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.3' ün mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ).....	61
Şekil 4.7.	$h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ).....	74
Şekil 4.8.	$h = 0.001$ için Örnek 4.4' ün mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ).....	74
Şekil 4.9.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.4' ün mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ).....	74
Şekil 4.10.	$h = 0.01$ için Örnek 4.5' in mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ).....	86
Şekil 4.11.	$h = 0.001$ için Örnek 4.5' in mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ).....	87
Şekil 4.12.	$h = 0.0001$ için Örnek 4.5' in mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ).....	87

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
E^n	n -boyutlu Öklid uzayı
\mathcal{M}	Manifold
C^k	k . mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli olan fonksiyonlar kümesi
V	Vektör uzayı
\mathfrak{G}	Lie grubu
\mathfrak{g}	Lie cebiri
Λ	Sol Lie grup hareketi
exp	Üstel dönüşüm
log	Üstel dönüşümün tersi
$dexp$	Üstel dönüşümün türevi
$dexp^{-1}$	Üstel dönüşümün türevinin tersi
Ad	Lie grubunun adjoint gösterimi
ad	Lie cebirine karşılık gelen hareketlerin lineer adjoint operatörü
B_k	Bernoulli sayıları
h	Adım aralığı
$A(t)$	Katsayılar matrisi
λ_j	$A(t)$ matrisinin özdeğerleri
$\Omega(t)$	Magnus seri açılımı
$P_n(x)$	n . Dereceden Legendre polinomu
$P_n^*(x)$	n . Dereceden ötelenmiş Legendre polinomu
$l_j(x)$	Lagrange interpolasyon polinomu
MG4	Dördüncü mertebeden Magnus seri açılım yöntemi
MG6	Altıncı mertebeden Magnus seri açılım yöntemi
NMG4	Dördüncü mertebeden lineer olmayan Magnus seri açılım yöntemi
MMG4	Dördüncü mertebeden düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi
MMG6	Altıncı mertebeden düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi
RK4	Dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi
RK6	Altıncı mertebeden Runge-Kutta yöntemi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Literatürde, istatistik, biyoloji, mühendislik ve fizik gibi uygulamalı bilimlerin pek çoğunda birçok problem diferansiyel denklem sistemleriyle modellenerek incelenmiştir. Bu modellerin denklemlerin klasik yöntemlerle tam olarak çözümünü bulmak mümkün değildir. Bu sebeple nümerik analizciler bazı yaklaşımlar geliştirmişler ve bu tip modelleri bilgisayar üzerinde nümerik olarak çözmeyi amaçlamışlardır. Nümerik analizin en önemli amacı analitik çözümü bulunamayan problemlerin sayısal sonuçlarını elde etmektir. Nümerik analiz yöntemleri, elde edilen ileri düzeyde matematiksel problemleri bilgisayar programlarının yazılması ve bir bilgisayar sisteminin kullanılması yardımıyla çözmek için kullanılır. Sayısal çözümlerin önemli özelliklerinden biri de yaklaşık çözüm üretmeleridir. Üretilen bu yaklaşık çözümler istenildiği kadar hassas elde edilebilmektedir. Hassasiyet artırıldıkça işlem adımları da artmakla beraber geliştirilmiş bilgisayarlar sayesinde kısa sürede sonuca gidilebilmektedir.

Adi ve kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin nümerik çözümleri ile ilgili literatürde oldukça önemli çalışmalar bulunmaktadır. Gerisch ve çalışma arkadaşları, zaman bağımlı kısmi diferansiyel denklemlerin yüksek mertebeden lineer iki adımlı sonlu eleman yöntemi ile sayısal çözümlerini incelemiştir [1]. Kleefeld ve Martín-Vaquero, orta zorlukta kısmi stiff diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için SERK2v3 yöntemini geliştirmişlerdir [2].

Literatürde stiff adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri birçok farklı yöntem ile incelenmiştir. Cavaglieri ve Bewley daha düşük maliyetli Kapalı / Açık Runge-Kutta yöntemlerini geliştirerek yüksek mertebeden stiff diferansiyel denklemlerin simülasyonu üzerine çalışmışlardır [3]. Abdi, stiff adi diferansiyel denklemlerin nümerik integrasyonu için 2. mertebeden genel lineer bir yöntem geliştirmiştir [4]. Javier ve çalışma arkadaşları, Krylov alt uzaylarını kullanarak parçalı lineer bir algoritma geliştirerek, bu algoritmayı stiff adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde kullanmışlardır [5]. Jibunoh, stiff ve stiff olmayan ve lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerinin integrasyonu için üstel bir yöntem geliştirmiştir [6].

Rang, geleneksel Rosenbrock–Wanner yöntemlerini geliştirerek adi diferansiyel ve diferansiyel cebirsel denklemlerin çözümlerinde kullanmıştır [7]. Abdi ve Hojjati stiff adi diferansiyel denklemler için Nordsieck iki türevli yöntemlerin uygulamalarını incelemiştir [8]. Guibert ve Tromeur-Dervout, stiff adi diferansiyel ve diferansiyel cebirsel denklem sistemlerinin nümerik çözümleri için “Parallel adaptive time domain decomposition” yöntemini geliştirmişlerdir [9]. Stiff adi diferansiyel denklem ve denklem sistemleri üzerine oldukça fazla çalışması olan Butcher ve Podhaisky, genel lineer yöntemlerin stiff adi diferansiyel denklemler için hata tahmini üzerine bir çalışma yapmıştır [10]. Beck ve çalışma arkadaşları, yüksek stiffness değerine sahip adi diferansiyel denklemler için AMF ve Krylov yöntemlerini MATLAB yoluyla kıyaslayan bir çalışma yapmışlardır [11]. Hojjati ve çalışma arkadaşları, A-EBDF adında stiff adi diferansiyel denklem ve sistemleri için etkin olan bir yöntem geliştirmişlerdir [12]. Loffeld ve Tokman, üstel, kapalı ve açık yöntemlerin stiff adi diferansiyel denklem ve denklem sistemleri üzerindeki performanslarını karşılaştırmalı olarak inceleyen bir çalışma yapmışlardır [13]. Aminikhah, stiff adi diferansiyel denklem sistemleri için birleştirilmiş laplace dönüşümü ve yeni bir homotopi perturbasyon yöntemi geliştirerek bu yöntemlerin denklemler üzerindeki etkilerini incelemiştir [14]. Hosseini ve Hojjati, MEBDF yöntemini geliştirerek stiff adi diferansiyel denklem sistemlerinin nümerik çözümlerini bu yöntem ile incelemiştir [15]. Celnik ve çalışma arkadaşları, stiff model olan bir partikül popülasyon dengesi problemi için tahmin edici ve düzeltici yöntem geliştirmişlerdir [16]. Savcenco, stiff adi diferansiyel denklem sistemleri için RODAS yöntemini geliştirmiştir [17]. Brugnano ve Magherini, lineer ve lineer olmayan stiff adi diferansiyel denklem sistemlerinin son yıllardaki yakınsaklığının lineer bir analizi üzerine çalışmışlardır [18]. Bataineh ve çalışma arkadaşları, bazı stiff diferansiyel denklemlerin homotopi analiz yöntemi ile çözümlerini incelemiştir [19]. Hundsdorfer ve Savcenco, stiff adi diferansiyel denklemler için çoklu oranlı teta yönteminin analizi üzerine çalışma yapmışlardır [20]. İbrahim ve çalışma arkadaşları, birinci mertebeden stiff adi diferansiyel denklemlerini çözmek için kapalı “r-point block backward” fark formülünü geliştirmişlerdir [21]. Tokman, yüksek stiffness değerine sahip adi diferansiyel denklemlerin üstel yayılma yöntemi (EPI) ile etkili bir şekilde entegre edilebileceği üzerine çalışmıştır [22]. Wu ve White, adi ve diferansiyel cebirsel denklemlerin çözümleri için sonlu fark yönteminin farklı bir varyasyonu üzerine çalışmışlardır [23]. Ixaru ve çalışma arkadaşları, birinci

mertebeden stiff adi diferansiyel denklemler için üstel olarak uyarlanmış iki adımlı geri fark formülü algoritmasını geliştirmişlerdir [24]. Cash ve çalışma arkadaşları, adi ve diferansiyel cebirsel denklemlerin nümerik çözümlerini modifiye edilmiş genişletilmiş geri fark formülü ile incelemişlerdir [25]. Chartier, farklı tipteki stiff denklemlerinin çözümü için köşegensel Runge-Kutta yöntemi üzerine çalışmalar yapmıştır [26]. Soleimani ve Weiner, stiff sistemler için yeni bir sınıf kapalı yöntem geliştirerek bu yöntemin stiffness katsayısı yüksek olan denklem için nasıl sonuçlar verdiklerini incelemişlerdir [27]. Biazar ve çalışma arkadaşları, stiff sistemlerin yarı analitik çözümleri için rasyonel homotopi pertürbasyon yöntemini geliştirmişlerdir [28]. Rahmanzadeh ve çalışma arkadaşları, stiff başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümleri için “Rahmanzadeh-Cai-White” yöntemini geliştirmişlerdir [29]. Mazzia ve Nagy, açık tipteki Runge-Kutta yöntemleri için stiffness tanılama ile yeni bir düğüm seçme stratejisi geliştirmişlerdir [30]. Celaya ve çalışma arkadaşları, MATLAB paket programına ait Ode15s yöntemi ile BDF-2 formülünün uygulamalarını stiff denklemler için nümerik sonuçlarını kıyaslamışlardır [31]. Aminikhah ve Hemmatnezhad, homotopi pertürbasyon yöntemi için etkili bir modifikasyon yaparak stiff denklemlerin yarı analitik çözümünde daha etkili bir yöntem geliştirmişlerdir [32]. Rahunanthan ve Stanescu, yüksek mertebeden W-yöntemlerini incelemiş ve bu yöntemin stiff adi diferansiyel denklemler üzerindeki etkilerini incelemişlerdir [33]. Xie, kapalı runge-kutta yöntemleri için geliştirilmiş Newton yöntemini bularak bu yöntemin stiff adi diferansiyel denklemler üzerindeki hesaplama maliyetini azaltmıştır [34]. Ibáñez ve çalışma arkadaşları, BDF ve parçalı lineer yöntemler ile iki farklı şekilde adi diferansiyel denklem ve denklem sistemlerinin nümerik çözümlerini incelemişlerdir [35]. Abelman ve Patidar, son yıllarda literatüre giren yöntemlerin stiff adi diferansiyel denklem ve denklem sistemleri üzerindeki etkilerini kıyaslayan bir çalışma yapmışlardır [36]. García-Alonso ve Reyes, bazı zorlanmış stiff sistemleri ve salınım denklemlerinin tam integrasyonu için yeni bir yöntem geliştirmişlerdir [37]. Nguyen ve çalışma arkadaşları, trigonometrik kapalı Runge-Kutta yöntemlerinin analizi üzerine çalışmalar yapmışlardır [38]. Ferracina ve Spijker, tek tip köşegensel kapalı Runge-Kutta yöntemlerinin güçlü kararlılığı üzerine çalışmalar yapmışlardır [39]. Álvarez ve Rojo, skaler stiff adi diferansiyel denklem sistemleri için geliştirilmiş Runge-Kutta yöntemlerinin yeni bir sınıfı üzerine çalışmışlardır [40]. Yine Álvarez ve Rojo, ayrık stiff adi diferansiyel denklem sistemleri için geliştirilmiş Runge-Kutta yöntemlerinin

yeni bir sınıfı üzerine çalışmışlardır [41]. Hojjati ve çalışma arkadaşları, stiff sistemler için yeni bir yöntem olan iki türevli çok adımlı yöntemleri geliştirmişlerdir [42]. Schmitt ve çalışma arkadaşları, stiff başlangıç değer problemleri için kapalı paralel yöntemleri geliştirmişlerdir [43]. Guibert ve Tromeur-Dervout, stiff ve diferansiyel cebirsel denklemler için paralel zaman ayırımı yöntemini geliştirmişlerdir [44]. Sewerin ve Rigopoulos, stiff kimyasal kinetik denklemlerinin integrasyonu için bir yöntemi GPU üzerinde inceleyerek yöntemin performansını artırmışlardır [45]. Li, lineer olmayan kompozit stiff gelişim denklemleri için kanonik euler ayırma yöntemi üzerine çalışmalar yapmışlardır [46]. Akinfenwa ve çalışma arkadaşları, stiff sistemlerin nümerik çözümleri için sürekli blok geri fark formülü yöntemini kullanmışlardır [47]. Migoni ve çalışma arkadaşları, stiff sistemler için lineer kapalı niceleme tabanlı integrasyon yöntemini kullanmışlardır [48]. Bu çalışmalar stiff adi diferansiyel denklemleri çözmek için farklı yöntemler içeren nümerik çalışmalardır.

Son zamanlarda “Geometrik İntegrasyon” olarak adlandırılan bir özellik oldukça önem kazanmaya başlamıştır. Diferansiyel denklemlerde en az hatayla yaklaşık bir çözüm elde etmek oldukça önemli bir konu olsa da sadece yaklaşık çözümün doğruluğu pek çok fiziksel uygulamada yeterli olmayabilir. Bu nedenle elde edilen sayısal çözümlerin geometrik özelliklerinin de korunması oldukça önemlidir. Geometrik integrasyon, diferansiyel denklemlerin çözümlerinin geometrik özelliklerini başarılı bir şekilde koruyan bir sayısal integrasyon yöntemidir. Bu tezde adi diferansiyel denklemleri çözebilmek için geometrik integrasyon yöntemlerinden olan Lie grup yöntemleri üzerinde durulacaktır.

İlk olarak Lie gruplarında adi diferansiyel denklemlerin integrasyonları üzerine çalışmalar Sophus Lie ile başlamıştır [49]. Sophus Lie 1895’ te kendisinin diferansiyel denklemlerin integrasyonunda grup kavramını kullanan ilk kişi olduğunu iddia etmiştir. Elde ettiği yapıya “infinitesimal group” adını vermiş ve daha sonra H. Weyl tarafından bu yapı “Lie Cebiri” olarak yeniden adlandırılmıştır [50]. Lie gruplarında adi diferansiyel denklemlerin sayısal integrasyonu 1993’ te Crouch ve Grosmann tarafından ortaya çıkarılmıştır [51]. Tezin ana konusu olan Magnus seri açılım yöntemi ile ilgili çalışmalar ise şu şekilde ilerlemiştir. İlk olarak 1954 yılında Wilhelm Magnus tarafından bir lineer operatör için birinci mertebeden lineer homojen diferansiyel

denklem çözümünün bir üstel temsili ortaya çıkarılmıştır [52]. Bu çalışmasında Magnus $Y' = A(t)Y$ diferansiyel denkleminin çözümünün $Y(t) = e^{\Omega(t)}Y_0$ şeklinde olduğunu söylemiş ve $\Omega(t)$ seri açılımını vermiştir. Onun bu çalışması ilerleyen dönemlerde “Magnus Seri Açılımı” olarak adlandırılmıştır. 1960’ lardan beri Magnus Seri Açılımı fizik ve kimya gibi pek çok alanlara başarılı bir şekilde uygulanmış ve bu açılım üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bu alanda yapılan en önemli çalışmalardan başlıcaları Iserles, Norsett ve onların çalışma arkadaşları tarafından oluşturulmuştur. Onlar Runge-Kutta Munthe Kaas, Magnus Seri Açılım yöntemi gibi birçok yöntemi geliştirmişlerdir. Aynı zamanda Airy [53], Mathieu [54] gibi bazı özel denklem tiplerine bu yöntemleri uygulamışlardır. 1999 yılında, Iserles ve Norsett Lie gruplarındaki lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerine bir çalışma yapmışlardır ve birinci mertebe lineer homojen diferansiyel denklemi $Y' = A(t)Y$ nin çözümünü incelemişlerdir. Ayrıca Lie tipi denklemler için Magnus serilerine giriş yapmışlardır [55]. Magnus serilerinin yakınsaklığı da üzerinde uzun zamandır çalışılan önemli konulardan biridir. Magnus serilerinin yakınsaklığı ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları şu şekildedir. 1996 yılında Pechukas ve Light [56], belirli kuantum sistemlerini ele almışlardır ve yakınsaklık şartlarını bulmuşlardır. 1976’ da Karasev ve Mosolova [57], $r = \frac{1}{2}\log 2$ sınırından bahsetmişlerdir. Bu çalışmadan hemen sonra 1977 yılında Suzuki [58] BCH için bu sınırı yeniden türetmişlerdir. Agrachev ve Gamkrelidze yaptıkları çalışmada $r = 1.08688$ olduğunu söylemişlerdir [59]. 1998’ de bu sınır Blanes ve çalışma arkadaşları [60] ile Moan [61] tarafından bağımsız olarak ve farklı yöntemler kullanılarak yeniden keşfedilmiştir. Vela, 2003 yılında yapmış olduğu çalışmada yeni bir yakınsaklık sınırı vermiştir [62]. 1991’ de Chacon ve Fomenko Ω_n için alternatif bir ifade bulmuşlardır [63]. Bu ifadeyi ispatlayabilmek için $r = 0.57745$ değerini kullanmışlardır. 1987 yılında Strichartz [64], Bialynicki-Birula ve çalışma arkadaşları [65] tarafından bulunan Ω_n için açık bir ifadeyi yeniden keşfetmiş olup bu açılımı ispatlayabilmek için $r = 1$ olduğunu kabul etmiştir. Sonuç olarak, Moan ve Oteo, buna benzer teknikler kullanarak $r = 2$ sınırını türetmişlerdir [66]. Moan, $r = \pi$ ile reel değerli A için gerçek bir logaritmanın varlığı için bir şart elde etmiştir [67]. Fakat bu şart yapılan çalışmada yeterince açık değildir. O nedenle Moan ve Niesen bu şartı açıklamak için 2008 yılında bir çalışma yapmışlardır [68]. Casas [69], Moan ve Niesen [68], Blanes ve çalışma arkadaşları [60] Magnus serilerinin yakınsaklığı üzerine yapılan

çalışmalardan en önemlilerine sahiplerdir. 2006 yılında Casas ve Iserles, Magnus seri açılım yöntemini lineer olmayan (nonlinear) diferansiyel denklemler için incelemiş ve lineer olmayan diferansiyel denklemler için bir algoritma geliştirmişlerdir [70]. Homojen ve homojen olmayan lineer sınır değer ve başlangıç değer problemlerini çözmek için Magnus seri açılım yöntemi Blanes ve Ponsoda tarafından verilmiştir [71]. Bu çalışmalara ek olarak, Düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi üzerine pek fazla çalışma olmasa da yapılan bazı çalışmalar şu şekildedir. Magnus seri açılım yöntemi için düzeltilmiş bir versiyon 2002 yılında Iserles tarafından sunulmuştur [72]. Bu konu hakkında yapılan en önemli çalışmalar M. Khanamiryan tarafından yapılmıştır. 2008 yılında, Khanamiryan, yüksek salınımlı lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemleri üzerinde çalışmıştır [73].

Literatürde yapılan bütün bu çalışmaların yanısıra tez konusunun temeli olan Magnus seri açılım yöntemleri ile ilgili yapılan özgün çalışmalar ise şu şekilde sıralanabilir. İlk olarak 2015 yılında Atay ve çalışma arkadaşları tarafından homojen lineer stiff adi diferansiyel denklem sistemlerine Magnus seri açılım yöntemi uygulanmıştır. Bu çalışmada Magnus seri açılım yönteminin farklı mertebelerinde yöntemin, seçilen denklem sistemleri üzerindeki davranışı ve etkisi incelenmiştir [74]. Daha sonra 2016 yılında Atay ve çalışma arkadaşları homojen olmayan lineer stiff adi diferansiyel denklem sistemleri için Magnus seri açılım yöntemi üzerinde bir çalışma yapmışlardır [75]. Köme ve çalışma arkadaşları lineer olmayan Liénard diferansiyel denklem sistemi ve İzotermal gaz küre denklem sistemine Magnus seri açılım yöntemini uygulamışlardır [76].

Bu tezin amacı, lineer stiff homojen ve homojen olmayan adi diferansiyel denklem sistemleri, Periyodik başlangıç değer problemleri ve özel tiplerdeki lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerine Lie grup yöntemlerinden Magnus ve Düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemlerini uygulamak ve bu denklem sistemleri üzerindeki etkisini inceleyerek yöntemlerin etkinliği hakkında yargıya varmaktır. Yapılan nümerik çalışmalar neticesinde elde edilecek olan yaklaşık çözümler, analitik çözümlerle kıyaslanarak bulunan hata değerleri tablolar halinde verilip daha anlaşılabilir olması açısından grafiklerle görsel olarak desteklenecektir.

Tez, beş bölüm olarak tasarlanmıştır. Tezin birinci bölümünde, diferansiyel denklem ve sistemlerinin nümerik çözümleri ile ilgili literatür taraması verilmiştir. İkinci bölümde, bu yöntemleri daha iyi anlayabilmek adına gerekli olan temel tanımlar verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde, Magnus ve Düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemlerinin elde edilmişlerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde, bu yöntemleri kullanarak yapılan nümerik çalışmalar neticesinde elde edilen veriler tablolar ve grafikler halinde sunulmuştur. Son bölümde ise, elde edilen sonuçlar ve öneriler verilmiştir.



BÖLÜM 2

GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tezin temel sonuçları ile ilgili diğer bölümlerde yararlanılacak temel kavramlar verilecektir.

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1 (Topolojik Manifold) [77]:

\mathcal{M} bir topolojik uzay olmak üzere

- i. \mathcal{M} bir Hausdorff uzayı
 - ii. \mathcal{M} 'nin her bir açık alt kümesi E^n ' e veya E^n ' nin bir açık alt kümesine homeomorf
 - iii. \mathcal{M} sayılabilir çoklukta açık kümeler ile örtülebilir
- önergelerini sağlayan \mathcal{M} topolojik uzayına n -boyutlu topolojik manifold denir.

Tanım 2.1.2 (Diferansiyellenebilirlik) [77]:

E^n , n -boyutlu Öklid uzayında U bir açık alt küme ve $f: U \rightarrow E^n$ tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun bütün k . mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli ise f fonksiyonuna C^k sınıfından diferansiyellenebilirdir denir.

Tanım 2.1.3 [77]: U ve V sırasıyla E^m ve E^n Öklid uzaylarında açık alt kümeler ve

$\psi: U \rightarrow V$

$$x \rightarrow \psi(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

bir fonksiyon olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ için $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ koordinat fonksiyonları C^k sınıfından ise $\psi \in C^k(U, V)$ dir denir.

Eğer $C^\infty(U, V) = \{\psi \mid \psi \in C^k(U, V), k \in \mathbb{N}\}$ ise f_i fonksiyonlarına ψ nin Öklid koordinat fonksiyonları denir.

Tanım 2.1.4 [77]: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f birebir ve f^{-1} sürekli ise f fonksiyonuna homeomorfizm, eğer f birebir ve f^{-1} diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna diffeomorfizm denir.

Tanım 2.1.5 (Koordinat Komşuluğu) [77]:

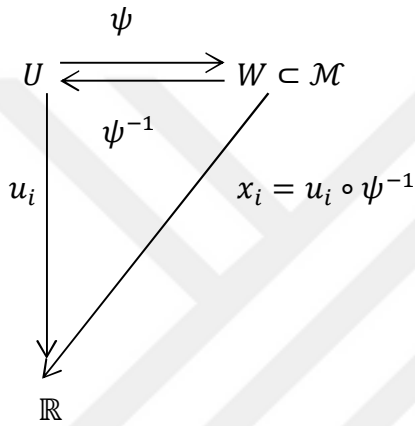
\mathcal{M} , n -boyutlu bir topolojik manifold ve U da E^n nin bir açık alt kümesi olsun. Eğer U bir ψ homeomorfizmi ile \mathcal{M} nin bir W açık alt kümesine eşlenebiliyorsa, yani

$\psi: U \subset E^n \rightarrow W \subset \mathcal{M}$ homeomorfizmi varsa, (ψ, W) ikilisine \mathcal{M} de bir koordinat

komşuluğu denir. $\psi(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u))$, $x_i(u) \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ dir.

Burada $x_i(u)$ reel sayısına $\psi(u) \in \mathcal{M}$ noktasının i -yinci koordinatı ve $u_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna da u nun i -yinci Öklid koordinat fonksiyonudur. Ayrıca

$x_i = u_i \circ \psi^{-1}: W \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna W nin i -yinci Öklid koordinat fonksiyonu denir.



Tanım 2.1.5' teki ψ fonksiyonu homeomorfizm olduğundan W ' nin P ve Q gibi iki noktası için

$$x_i(P) = x_i(Q), \quad 1 \leq i \leq n \implies P = Q$$

olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.1.6 [77]: \mathcal{M} , n -boyutlu bir topolojik manifold ve W ' da \mathcal{M} ' nin bir açık alt kümesi olsun. x_i , W nin i -yinci Öklid koordinat fonksiyonu olmak üzere $x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)$ reel sayılarına $P \in W$ noktasının (ψ, W) koordinat komşuluğuna göre *lokal (yerel) koordinatları* ve W üzerinde tanımlı olan (x_1, x_2, \dots, x_n) reel değerli fonksiyon n -lisine de (ψ, W) üzerindeki *lokal koordinat sistemi* denir.

Tanım 2.1.1 nin (iii) önermesine göre, \mathcal{M} bir topolojik n -manifold olduğundan \mathcal{M} ' yi, E^n ' deki açık alt kümelere homeomorf olan W_α açık alt kümelerinin bir $\{W_\alpha\}$ ailesiyle örtülebildiği için aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.1.7 (Koordinat Komşuluğu Sistemi) [77]:

\mathcal{M} , n -boyutlu bir topolojik manifold olsun. \mathcal{M} ' nin bir açık örtüsü, α indislerinin kümesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ve $\psi_\alpha: U_\alpha \subset E^n \xrightarrow{\text{homeomorfizm}} E_\alpha \subset E^n$ homeomorfizm olsun.

(ψ_α, U_α) koordinat komşuluklarının $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir koordinat komşuluğu sistemi denir.

Tanım 2.1.8 (Diferansiyellenebilir Yapı) [77]:

\mathcal{M} , n -boyutlu bir topolojik manifold ve $S = \{\psi_\alpha, W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ \mathcal{M} ' nin bir koordinat komşuluk sistemi olsun. Eğer $\forall \alpha, \beta \in A$ için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$, $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıftan diferansiyellenebilir iseler S koordinat komşuluk sistemine C sınıftan diferansiyellenebilirdir denir. Eğer S koordinat komşuluk sistemi C^k sınıftan diferansiyellenebilirse S koordinat komşuluk sistemine C^k sınıftan diferansiyellenebilir yapı denir.

Tanım 2.1.9 (Diferansiyellenebilir Manifold) [77]:

\mathcal{M} , n -boyutlu bir topolojik manifold olsun. \mathcal{M} üzerinde C^k sınıftan bir diferansiyellenebilir yapı tanımlanabilirse \mathcal{M} ' ye C^k sınıftan diferansiyellenebilir manifold denir.

2.2. Lie Grupları ve Lie Cebirleri

Bir \mathfrak{G} Lie grubu ve onunla ilişkili \mathfrak{g} Lie cebiri geometrik integrasyonda Lie grup yöntemleri için bütün teorilerin temeli olduğundan bunlarla alakalı tanımlar konunun kavranması açısından oldukça önem arz ettiği için temel tanımlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.2.1 (Lie Operatörü) [78]:

V bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun. $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ dönüşümü

- 1) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (2-lineerlik özelliği)
- 2) $[X, Y] = -[Y, X]$ (Ters simetri özelliği)
- 3) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi özdeşliği)

koşullarını sağlıyorsa $[\cdot, \cdot]$ dönüşümüne, V vektör uzayı üzerinde bir Lie operatörü denir.

Tanım 2.2.2 (Lie Grubu) [78]:

\mathcal{S} diferansiyellenebilir bir manifold olsun. Eğer \mathcal{S} manifoldu $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ikili işlemine göre grup yapısına sahipse \mathcal{S} 'ye Lie grubu denir.

Yani Lie grupları aynı zamanda grup olan diferansiyellenebilir manifoldlardır. O halde bir Lie grubu aynı zamanda bir grup, bir topolojik uzay ve bir manifolddur. Lie grupları, grupların cebirsel yapıları ile manifoldların diferansiyellenebilir geometrik yapıları arasındaki bağ gibidir. Bir \mathcal{S} Lie grubu için çarpma, $\forall a, b \in \mathcal{S}$ elemanları için gruptaki “sol” ve “sağ” çarpım olmak üzere iki şekilde tanımlanır. Bunlar

$$L_a(b) = a \cdot b, \quad R_a(b) = b \cdot a \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.3 [79]: \mathcal{M} diferansiyellenebilir bir manifold ve \mathcal{S} bir Lie grubu olsun. \mathcal{M} üzerindeki sol Lie grup hareketi $\Lambda: \mathcal{S} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ düzgün dönüşümdür. Yani,

$$\Lambda(e, p) = e \cdot p = p, \quad \forall p \in \mathcal{M}, \quad e \in \mathcal{S}$$

$$\Lambda(g_1 \cdot g_2, p) = \Lambda(g_1, \Lambda(g_2, p)), \quad \forall p \in \mathcal{M}, \quad g_1, g_2 \in \mathcal{S}$$

dir. Eğer yukarıda verilenler sadece $e \in \mathcal{S}$ birim elemanın komşuluğundaki elemanlar için sağlanıyorsa $\Lambda: \mathcal{S} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ nin bir lokal (yerel) Lie grup hareketi denir.

Tanım 2.2.4 (Lie Cebirleri) [78]:

\mathfrak{g} , \mathcal{S} Lie grubunun bir reel vektör uzayı olsun. \mathfrak{g} üzerinde Lie operatörü

$$[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

$$(x, y) \rightarrow [x, y]$$

dönüşümü;

i. $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$

ii. $[x, y] = -[y, x]$

iii. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

koşullarını sağlıyorsa \mathfrak{g} vektör uzayına bir Lie cebiri denir.

Tanım 2.2.5 (Lie grup homomorfizmi ve izomorfizmi) [78]:

\mathfrak{G} ve \mathfrak{H} iki Lie grubu ve $\phi: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{H}$ şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olsun.

$$\phi(g \cdot h) = \phi(g) \cdot \phi(h), \quad g, h \in \mathfrak{G}$$

işlemine Lie grup homomorfizmi denir. Eğer ϕ ters dönüşümüne sahipse, ϕ dönüşümü \mathfrak{G} ve \mathfrak{H} arasında aynı zamanda bir izomorfizm olur.

Tanım 2.2.6 (Lie cebir homomorfizmi) [78]:

\mathfrak{g} ve \mathfrak{h} iki Lie cebiri olsun. Eğer $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme Lie cebir homomorfizmi denir.

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y \in \mathfrak{g}$ için $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ lineer bir dönüşüm olmak üzere $\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha \phi(x) + \beta \phi(y)$ dir.
- $\forall x, y \in \mathfrak{g}$ için $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ dir.

Tanım 2.2.7 (Lie cebir izomorfizmi) [78]:

Bir $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ homomorfizmi birebir ve örten ise \mathfrak{g} ve \mathfrak{h} Lie cebirleri birbirlerine izomorfiktir denir ve $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.8 (Reel matris Lie grubu) [78]:

$\mathbb{R}^{n \times n}$, matrislerde çarpma ve matrisin tersi işlemlerine göre kapalı olan bir vektör uzay olsun. $\mathfrak{G} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$, e reel matris Lie grubu denir.

Tanım 2.2.9 (Üstel dönüşüm) [78]:

\mathfrak{G} bir matris Lie grubu ve \mathfrak{g} ' de Lie cebiri olsun. $\forall A \in \mathfrak{g}$ için $exp: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{G}$ şeklinde tanımlanan dönüşüme üstel dönüşüm denir. Üstel dönüşüm,

$$exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Hem üstel dönüşümün türevi $dexp$ hemde onun türevinin tersi $dexp^{-1}$ için tanımlar, Lie grup yöntemlerindeki Magnus seri açılımlarının açıklamalarında oldukça büyük bir

önem taşır. Fakat bu tanımları vermeye başlamadan önce \mathfrak{G} Lie grubunun adjoint gösterimi olan Ad ve \mathfrak{g} Lie cebirine karşılık gelen hareketlerin lineer adjoint operatörü olan ad tanımları verilmelidir.

Tanım 2.2.10 (Adjoint gösterim) [80]:

\mathfrak{G} Lie grubu ve \mathfrak{g} Lie cebiri olsun. Adjoint gösterim $\forall g \in \mathfrak{G}$ ve $A \in \mathfrak{g}$ için $Ad_g: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{G}$ dönüşümü,

$$Ad_g(A) = gAg^{-1} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.11 (Adjoint operatörü) [78]:

\mathfrak{g} Lie cebiri olmak üzere $ad_A: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dönüşümü tanımlansın. Adjoint operatörü $u \in \mathfrak{g}$ yönünde $e \in \mathfrak{G}$ birim elemanına karşılık gelen Ad_g adjoint gösteriminin türevidir [80]. Başka bir deyişle, adjoint operatörü $A, B \in \mathfrak{g}$ için,

$$ad_A(B) = AB - BA = [A, B] \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır [78].

Adjoint operatörü dikkate alınırsa üstel dönüşümün türevi,

$$\frac{d}{dt} \exp(A(t)) = dexp_{A(t)} A'(t) \exp(A(t)) \quad (2.5)$$

şeklinde dir. Burada $dexp: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ bir fonksiyondur [78].

$dexp_A, ad_A$ nın analitik bir fonksiyonu olduğundan,

$$dexp_A = \frac{\exp(ad_A) - I}{ad_A} \quad (2.6)$$

olarak bulunur. Bundan dolayı $dexp_A$ matrisinin tersi,

$$dexp_A^{-1} = \frac{ad_A}{\exp(ad_A) - I} \quad (2.7)$$

şeklindedir. Burada verilen $\exp(ad_A)$, I ve ad_A matris olduğundan ve $\frac{\exp(ad_A)-I}{ad_A}$, $\frac{ad_A}{\exp(ad_A)-I}$ işlemleri matrislerde yapılamayacağından, sırasıyla $\frac{e^x-1}{x}$ ve $\frac{x}{e^x-1}$ in seri açılımlarından yararlanarak $\frac{\exp(ad_A)-I}{ad_A}$ ve $\frac{ad_A}{\exp(ad_A)-I}$ işlemleri kuvvet serilerine açılacaktır.

$$\frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{4!}x^3 + \dots + \frac{1}{(k+1)!}x^k + \dots$$

olduğundan

$$\begin{aligned} dexp_A(C) &= \frac{\exp(ad_A C)-I}{ad_A C} \\ &= C + \frac{1}{2!}ad_A C + \frac{1}{3!}ad_A^2 C + \frac{1}{4!}ad_A^3 C + \dots + \frac{1}{(k+1)!}ad_A^k C + \dots \\ &= C + \frac{1}{2!}[A, C] + \frac{1}{3!}[A, [A, C]] + \frac{1}{4!}[A, [A, [A, C]]] + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} ad_A^k C \end{aligned} \quad (2.8)$$

olarak bulunur.

Şimdi de $\frac{x}{e^x-1}$ in seri açılımından yararlanılırsa,

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

elde edilir. Burada B_k literatürde iyi bilinen Bernoulli sayılarıdır [81]. İlk birkaç Bernoulli sayısı $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$ şeklindedir.

$$\begin{aligned} dexp_A^{-1}(C) &= \frac{ad_A C}{\exp(ad_A C)-I} \\ &= C + \frac{1}{2!}ad_A C + \frac{1}{12}ad_A^2 C - \frac{1}{720}ad_A^4 C + \dots \\ &= C - \frac{1}{2}[A, C] + \frac{1}{12}[A, [A, C]] - \frac{1}{720}[A, [A, [A, [A, C]]]] + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} ad_A^k C \end{aligned} \quad (2.9)$$

olduğu kolayca görülür.

2.3. Stiff Adi Diferansiyel Denklem Sistemleri

Stiff diferansiyel denklemler hesaplanması zor ve oldukça maliyet gerektiren denklemlerdir. Bu denklem tiplerindeki en önemli ifade stiffness (sertlik) oranı ifadesidir. Adi diferansiyel denklemler ile ilgili kesin bir stiffness tanımı yapmak oldukça zordur. Fakat ana tema denklemin, ilgili çözümde hızlı bir şekilde değişim yaratabilen bazı terimler içeriyor olmasıdır. Bu tip denklemlerde biri çok çabuk değişen diğeri ise yavaş değişen terim grubu veya grupları bulunmaktadır. Stiff diferansiyel denklemlerin çözümünde h adım aralığını seçerken dikkat edilmesi gerekir. Genellikle h adım aralığı küçük seçilerek yapılan işlemlerde daha iyi sonuçlar alınmaktadır. Fakat bu durum her yöntem için aynı değildir [82].

Şimdi

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + \phi(t) \quad (2.10)$$

lineer diferansiyel denklem sistemi verilsin. $i = 1, 2, \dots, n$ için $A(t)$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_i \in \mathbb{R}^n$ ise sistemin stiffness oranı $S = \frac{\max |Re(\lambda_i)|}{\min |Re(\lambda_i)|} \gg 1$ dir [82].

2.4. Liénard Diferansiyel Denklem Sistemi

Liénard diferansiyel denklem sistemi biyoloji, fizik, mühendislik ve mekanik alanlarında oldukça önemli bir özel denklem çeşididir [83]. İkinci mertebeden lineer olmayan Liénard tipindeki diferansiyel denklemi, $y(t)$ ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ve $f(y)$ ve $g(y)$ polinomları sırasıyla n . ve m . dereceden y değişkenine bağlı polinomları olmak üzere,

$$y''(t) + f(y)y'(t) + g(y) = h(t) \quad (2.11)$$

dir [84].

2.5. İzotermal Gaz Küre Denklem Sistemi

İzotermal gaz küre denklem sistemi, $y(t)$ ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip bir fonksiyon olmak üzere,

$$y''(t) + \frac{2}{t}y'(t) + e^{y(t)} = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.12)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

şeklindedir [85]. (2.12) denkleminin analitik çözümü olmadığından yarı analitik çözümü,

$$y(t) \simeq -\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{5.4!}t^4 - \frac{8}{21.6!}t^6 + \frac{122}{81.8!}t^8 - \frac{61.67}{495.10!}t^{10}$$

şeklindedir [86].

2.6. Periyodik Başlangıç Değer Problemleri

Periyodik başlangıç değer problemleri kimya, teorik fizik, kuantum mekaniği, elektronik gibi uygulamalı bilimlerin ve mühendisliğin pek çok alanlarında ortaya çıkmaktadır. Periyodik çözümlere sahip ikinci mertebeden bir başlangıç değer problemi,

$$y''(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (2.13)$$

dir [87].

BÖLÜM 3

LİE GRUP YÖNTEMLERİ

Bu bölümde, Lie grup yöntemlerinden Magnus ve Düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemleri, Lie grup yapısı ile Magnus serileri arasındaki ilişki, homojen ve homojen olmayan Lie tipi diferansiyel denklem sistemleri ile lineer ve lineer olmayan Lie tipi diferansiyel denklem sistemleri için Magnus seri açılım yöntemleri detaylı bir şekilde incelenecektir.

3.1. Lineer diferansiyel denklem sistemleri için Magnus seri açılım yöntemi

Magnus seri açılımı yöntemindeki asıl amaç, lineer homojen adi diferansiyel denklem sistemlerine,

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad t \geq 0, \quad Y(0) = Y_0 \in \mathfrak{S} \quad (3.1)$$

Magnus serileri ile yaklaşık bir çözüm bulmaktır. Burada $A(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathfrak{g}$, \mathfrak{S} Lie grubu, \mathfrak{g} Lie cebiridir. (3.1) denklem sisteminin çözümü

$$Y = e^{\Omega(t)}Y_0 \quad (3.2)$$

dir. (3.2) denklem sisteminin her iki tarafının t değişkenine göre türevi alınırsa,

$$Y' = (e^{\Omega(t)})'Y_0 \quad (3.3)$$

elde edilir. Denklem (2.5)' ten,

$$Y' = dexp_{\Omega(t)}(\Omega'(t))e^{\Omega(t)}Y_0$$

$$Y' = dexp_{\Omega(t)}(\Omega'(t))Y \quad (3.4)$$

dır. Denklem (3.1) ve Denklem (3.4)' ten,

$$dexp_{\Omega(t)}(\Omega'(t))Y = A(t)Y$$

$$dexp_{\Omega(t)}(\Omega'(t))Y - A(t)Y = 0$$

$$(dexp_{\Omega(t)}(\Omega'(t)) - A(t))Y = 0$$

$Y \neq 0$ için,

$$dexp_{\Omega(t)}(\Omega'(t)) - A(t) = 0$$

$$dexp_{\Omega(t)}(\Omega'(t)) = A(t) \quad (3.5)$$

elde edilir. Denklem (2.7) ve Denklem (2.9) dikkate alınır,

$$dexp_{\Omega(t)}^{-1} \left(dexp_{\Omega(t)}(\Omega'(t)) \right) = dexp_{\Omega(t)}^{-1}(A(t))$$

$$\Omega'(t) = dexp_{\Omega(t)}^{-1}(A(t)) \quad (3.6)$$

dir. Aşağıda verilen Lemma, Denklem (3.6)'nın Denklem (3.1)'in bir çözümü olduğunu gösterir.

Lemma 3.1.1 : $t \geq 0$ için $Y'(t) = A(t)Y(t)$, $Y(0) = Y_0$ denklem sisteminin çözümü,

$$Y(t) = exp(\Omega(t))Y_0 \quad (3.7)$$

dir. Ayrıca \mathfrak{g} , bir Lie cebiri olmak üzere $\Omega \in \mathfrak{g}$ için,

$$\Omega'(t) = dexp_{\Omega(t)}^{-1}(A(t)), \quad \Omega(0) = 0 \quad (3.8)$$

dır [78].

Denklem (2.9) kullanılarak $dexp_{\Omega(t)}^{-1}(A(t))$ ifadesi seriye açılırsa,

$$\begin{aligned} \Omega'(t) &= dexp_{\Omega(t)}^{-1}(A(t)) \\ &= A(t) - \frac{1}{2}[\Omega(t), A(t)] + \frac{1}{12}[\Omega(t), [\Omega(t), A(t)]] + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} ad_{\Omega(t)}^k(A(t)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

bulunur. Denklem (3.9) literatürde iyi bilinen Picard iterasyon yöntemi kullanılarak çözümlerse,

$$\Omega^{[0]}(t) \equiv 0$$

$$\Omega^{[m+1]}(t) = \int_0^t dexp_{\Omega^{[m]}(s)}^{-1} A(s) ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \int_0^t ad_{\Omega^{[m]}(s)}^k A(s) ds,$$

elde edilir. Buradan, iterasyonun ilk birkaç terimi açılırsa,

$$\Omega^{[1]}(t) = \int_0^t A(s_1) ds_1 \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}\Omega^{[2]}(t) &= \int_0^t A(s_1)ds_1 - \frac{1}{2} \int_0^t [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, A(s_1)]ds_1 \\ &\quad + \frac{1}{12} \int_0^t [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, A(s_1)]]ds_1 + \dots\end{aligned}\quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}\Omega^{[3]}(t) &= \int_0^t A(s_1)ds_1 - \frac{1}{2} \int_0^t [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, A(s_1)]ds_1 \\ &\quad + \frac{1}{12} \int_0^t [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, A(s_1)]]ds_1 \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^t [\int_0^{s_1} [\int_0^{s_2} A(s_3)ds_3, A(s_2)]ds_2, A(s_1)]ds_1 \\ &\quad - \frac{1}{24} \int_0^t [\int_0^{s_1} [\int_0^{s_2} A(s_3)ds_3, [\int_0^{s_2} A(s_3)ds_3, A(s_2)]]ds_2, A(s_1)]ds_1 \\ &\quad - \frac{1}{24} \int_0^t [\int_0^{s_1} [\int_0^{s_2} A(s_3)ds_3, A(s_2)]ds_2, [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, A(s_1)]]ds_1 \\ &\quad - \frac{1}{24} \int_0^t [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, [\int_0^{s_1} [\int_0^{s_2} A(s_3)ds_3, A(s_2)]ds_2, A(s_1)]]ds_1 \\ &\quad - \frac{1}{8} \int_0^t [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, A(s_1)]]]ds_1 \\ &\quad + \dots\end{aligned}\quad (3.12)$$

elde edilir. Picard teoremine göre orijinin uygun küçük bir komşuluğunda

$\Omega(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Omega^{[m]}(t)$ ifadesi vardır ve yukarıdaki ilk birkaç iterasyon $A(t)$ matrisi üzerinde tekrarlı bir şekilde hareket eden komütatörler ve integrallerden oluşan terimlerin lineer kombinasyonu olarak genişletebileceğini göstermektedir. Magnus seri açılımı, $H_k(t) = \frac{B_k}{k!} \int_0^t ad_{\Omega^{[m]}(s)}^k A(s)ds$ olmak üzere,

$$\Omega(t) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(t).\quad (3.13)$$

şeklinindedir. Buradaki her bir H_k , $(k + 1)$ integral içeren veya k tane komütatör içeren terimlerin lineer kombinasyonudur [78]. Böylece Magnus seriş açılımının ilk birkaç terimi aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$H_0(t) = \int_0^t A(s_1)ds_1\quad (3.14)$$

$$H_1(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, A(s_1)]ds_1\quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}H_2(t) &= \frac{1}{12} \int_0^t [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, A(s_1)]]ds_1 \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^t [\int_0^{s_1} [\int_0^{s_2} A(s_3)ds_3, A(s_2)]ds_2, A(s_1)]ds_1\end{aligned}\quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}H_3(t) &= -\frac{1}{24} \int_0^t [\int_0^{s_1} [\int_0^{s_2} A(s_3)ds_3, [\int_0^{s_2} A(s_3)ds_3, A(s_2)]]ds_2, A(s_1)]ds_1 \\ &\quad - \frac{1}{24} \int_0^t [\int_0^{s_1} [\int_0^{s_2} A(s_3)ds_3, A(s_2)]ds_2, [\int_0^{s_1} A(s_2)ds_2, A(s_1)]]ds_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{24} \int_0^t \left[\int_0^{s_1} A(s_2) ds_2, \left[\int_0^{s_1} \left[\int_0^{s_2} A(s_3) ds_3, A(s_2) \right] ds_2, A(s_1) \right] \right] ds_1 \\
& -\frac{1}{8} \int_0^t \left[\int_0^{s_1} A(s_2) ds_2, \left[\int_0^{s_1} A(s_2) ds_2, \left[\int_0^{s_1} A(s_2) ds_2, A(s_1) \right] \right] \right] ds_1. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Denklem (3.13), (3.1) diferansiyel denklem sisteminin yaklaşık çözümünün bir değeridir. Dikkat edilirse, (3.13) Magnus seri açılımındaki terimler k değeri arttıkça çok daha karmaşık bir şekilde ilerlemektedir.

3.1.1. Çok değişkenli tümlev

Bir önceki bölümde verilen Magnus seri açılımının terimlerinde ortaya çıkan katlı integralleri hesaplayabilmek için bazı tümlev formülleri verilmelidir. Tümlev formülünün arkasında yatan ana fikir, tek değişkenli bir fonksiyonun integraline yaklaşık bir değer bulmaktır. Burada integrasyon aralığında belirli noktalarda değerlendirilen fonksiyonun ağırlıklı toplamını bulma işlemi gerçekleştirilir. Newton-Cotes formülündeki gibi yaklaşımlarda, eşit aralıklı noktalardaki fonksiyonun değerleri kullanılır [88]. Fakat Gauss tümlevi durumunda, fonksiyonu hesaplamak için gerekli olan noktalar uygun doğrulukları verecek şekilde seçilir ve bu noktalara düğüm (node) denir. Gauss tümlevinde bu düğümler, $P_n(x)$ $[-1,1]$ simetrik aralığında tanımlı n . dereceden Legendre polinomu olmak üzere, $[0,1]$ aralığında tanımlı ötelenmiş Legendre polinomu $P_n^*(x) = P_n(2x - 1)$ ' in kökleridir [89]. $P_n^*(x)$ ötelenmiş Legendre polinomunun ilk birkaç terimi

$$\begin{aligned}
P_0^*(x) &= 1, \\
P_1^*(x) &= 2x - 1, \\
P_2^*(x) &= 6x^2 - 6x + 1, \\
P_3^*(x) &= 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1,
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Aşağıda tek katlı integrallerin yaklaşımında kullanılan Gauss-Legendre tümlevi tanımı verilmiştir.

Tanım 3.1.1: $i = 1, 2, \dots, n$ için x_i ' ler n . dereceden $P_n^*(x)$ ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri ve $i = 1, 2, \dots, n$ için b_i ağırlıkları,

$$b_i = \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_i}{x_i-x_j} dx \quad (3.18)$$

olsun. Eğer $\phi(x)$, $der(\phi(x)) < 2n$ olacak şekilde herhangi bir polinom ise Gauss-Legendre tümlev formülü

$$\int_0^1 \phi(x) dx = \sum_{i=1}^n b_i \phi(x_i) \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanır [88].

3.1.1.1. Çok değişkenli Gauss-Legendre tümlevi

Tek katlı integrallerdeki gibi katlı integrallerde de Gauss tümlevi çok değişkenli fonksiyonun ağırlıklı toplamı şeklinde yazılmasıyla elde edilir. Bu bölümde, Iserles ve çalışma arkadaşlarının tanımladığı politoplarla katlı integral tümlevi üzerinde durulacaktır [78]. Magnus seri açılımındaki her bir katlı integraller

$$I(h) = \int_S L(A(\xi_1), A(\xi_2), \dots, A(\xi_s)) d\xi_s \dots d\xi_1 \quad (3.20)$$

şeklinde verilsin. Burada L multilineer form (çok değişkenli fonksiyon), s yukarıdaki ifadede verilen integral sayısı, h adım aralığı, S integrasyon bölgesi,

$$S = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s \in \mathbb{R}: \xi_1 \in [0, h], \xi_k \in [0, \xi_{m_k}], k = 2, 3, \dots, s\}, \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlanan bir politop, $m_k \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ dir. Buradan tümlev formülünün yaklaşık değeri

$$I(h) = \int_S L(A(\xi_1), A(\xi_2), \dots, A(\xi_s)) d\xi_s \dots d\xi_1 \approx h^m \sum_{k \in C_s^v} b_k L(A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_s}) \quad (3.22)$$

şeklinindedir [55]. $i = 1, 2, \dots, n$ için $c_i \in [0, 1]$ olmak üzere c_i ' ler n . dereceden $P_n^*(x)$ ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri ve $k_j \in k$, $j = 1, 2, \dots, s$ için

$$l_{k_j}(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k_j}}^n \frac{x-c_i}{c_{k_j}-c_i} \quad \text{Lagrange interpolasyon polinomu olmak üzere Lagrange}$$

interpolasyon polinomlarının çarpımının katlı integralleriyle b_k ağırlıkları,

$$b_k = \int_S \prod_{i=1}^s l_{k_i}(\xi_i) d\xi_i \quad (3.23)$$

olsun. C_s^n , $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin s -katlı k ların tüm kombinasyonlarından oluşan bir küme olmak üzere Gauss tümlevi

$$D(h) = \sum_{k \in C_s^n} b_k L(A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_s}), \quad (3.24)$$

dir.

Şimdi (3.22) işlemi gerçekleştirilebilir. Yani Denklem (3.20)' nin yaklaşık değerini hesaplayabilmek için (3.24) eşitliği kullanılabilir. Fakat bu yöntemin farklı mertebelerini hesaplamak için aşağıdaki teoreme ihtiyaç vardır.

Teorem 3.1.1: $c(t) = \prod_{k=1}^n (t - c_k)$ şeklinde tanımlanan $c(t)$ polinomunun aşağıdaki ortogonalite koşulunu sağladığı en büyük $i \geq 0$ tamsayısı m olmak üzere

$$\int_0^1 \xi^{i-1} c(\xi) d\xi = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

dir. Ortogonalite koşulu, tüm S politopları ve tüm çok değişkenli L fonksiyonları için (3.24) tümlevinin mertebesinin $n + m$ olmasını gerektirir. Eğer c_1, c_2, \dots, c_n n . dereceden ötelenmiş Legendre polinomu $P_n^*(x)$ ' in $[0, 1]$ aralığındaki farklı reel kökleri ise (3.24) tümlevinin mertebesi $2n$ olur [78].

3.1.2. Dördüncü mertebeden Magnus seri açılım yöntemi (MG4)

4. Mertebeden Magnus seri açılım yöntemi için Teorem 3.1.1' e göre Gauss–Legendre tümlevinde yalnızca 2. dereceden ötelenmiş Legendre polinomu $P_2^*(x)$ ' nin kökleri kullanılacaktır [90]. Magnus seri açılımındaki $i \in \mathbb{N}$ için $I_i(t)$ integralleri aşağıdaki şekilde yeniden verilirse,

$$\Omega(t) = I_1(t) - \frac{1}{2}I_2(t) + \frac{1}{12}I_3(t) + \frac{1}{4}I_4(t) \quad (3.25)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$I_1(t) = \int_0^t A(\xi_1) d\xi_1 \approx D_1(h)$$

$$I_2(t) = \int_0^t \int_0^{\xi_1} [A(\xi_2), A(\xi_1)] d\xi_2 d\xi_1 \approx D_2(h)$$

$$I_3(t) = \int_0^t \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} [A(\xi_3), [A(\xi_2), A(\xi_1)]] d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \approx D_3(h)$$

$$I_4(t) = \int_0^t \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} [[A(\xi_3), A(\xi_2)], A(\xi_1)] d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \approx D_4(h)$$

dir. Şimdi Denklem (3.25)' teki ilk dört integralin Gauss-Legendre tümlevi ile yaklaşık olarak toplamları hesaplanmalıdır. $P_2^*(x)$, 2. dereceden ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri c_1 ve c_2 olmak üzere $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ dir. $l_j(x)$ Lagrange interpolasyon polinomları

$$l_1(x) = \frac{x-c_2}{c_1-c_2} = -\sqrt{3}x + \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) \quad (3.26)$$

$$l_2(x) = \frac{x-c_1}{c_2-c_1} = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \quad (3.27)$$

şeklinindedir. Buradan c_1 ve c_2 köklerinde $A(t)$ fonksiyonu için yaklaşık değerleri

$$A_1 = hA\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right), \quad A_2 = hA\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \quad \text{şeklinde elde edilir. İlk } I_1(t)$$

integralinin çok değişkenli tümlevi için L fonksiyonu $L(A(\xi_1)) = A(\xi_1)$ ' dir. Burada $s = 1$ ve $n = 2$ olup $C_s^n = C_1^2 = \{(1), (2)\}$ ' dir. b_k ağırlıkları ise Denklem (3.23)' ten

$$b_{(1)} = \int_0^1 l_1(\xi_1) d\xi_1 = \frac{1}{2}, \quad b_{(2)} = \int_0^1 l_2(\xi_1) d\xi_1 = \frac{1}{2}$$

elde edilir. $I_1(t)$ integrali için Gauss-Legendre noktalarını kullanarak bulunan çok değişkenli tümlev, Denklem (3.24)' ten,

$$D_1(h) = b_{(1)}L(A_1) + b_{(2)}L(A_2) = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \quad (3.28)$$

bulunur. Benzer şekilde $I_2(t)$ integrali için Gauss-Legendre noktalarını kullanarak bulunan çok değişkenli tümlev, Denklem (3.24)' ten,

$$\begin{aligned} D_2(h) &= b_{(1,2)}L(A_1, A_2) + b_{(2,1)}L(A_2, A_1) = b_{(1,2)}[A_2, A_1] + b_{(2,1)}[A_1, A_2] \\ &= (b_{(1,2)} - b_{(2,1)})[A_2, A_1] = -\frac{\sqrt{3}}{6}[A_2, A_1] \end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir. $I_3(t)$ integrali için Gauss-Legendre noktalarını kullanarak bulunan çok değişkenli tümlev, Denklem (3.24)' ten,

$$\begin{aligned}
D_3(h) &= b_{(1,1,2)}L(A_1, A_1, A_2) + b_{(1,2,1)}L(A_1, A_2, A_1) + b_{(2,1,1)}L(A_2, A_1, A_1) \\
&\quad + b_{(2,2,1)}L(A_2, A_2, A_1) + b_{(2,1,2)}L(A_2, A_1, A_2) + b_{(1,2,2)}L(A_1, A_2, A_2) \\
&= (b_{(2,1,1)} - b_{(1,1,2)})[[A_2, A_1], A_1] + (b_{(2,2,1)} - b_{(1,2,2)})[[A_2, A_1], A_2] \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3}{80}\right)[[A_2, A_1], A_1] + \left(\frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{3}{80}\right)[[A_2, A_1], A_2] \tag{3.30}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Son olarak $I_4(t)$ integrali için Gauss–Legendre noktalarını kullanarak bulunan çok değişkenli tümlev, Denklem (3.24)’ten,

$$\begin{aligned}
D_4(h) &= (b_{(1,2,1)} - b_{(1,1,2)})[A_1, [A_2, A_1]] + (b_{(2,2,1)} - b_{(2,1,2)})[A_2, [A_2, A_1]] \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{48} - \frac{3}{80}\right)[A_1, [A_2, A_1]] + \left(\frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{3}{80}\right)[A_2, [A_2, A_1]] \tag{3.31}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece yapılan işlemler sonucunda Denklem (3.28)’den Denklem (3.31)’e kadar elde edilen denklemler Magnus seri açılımına yaklaşık olacak şekilde

$$\begin{aligned}
\Omega(t) &\approx D_1(h) - \frac{1}{2}D_2(h) + \frac{1}{12}D_3(h) + \frac{1}{4}D_4(h) + \dots \\
&\approx \frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{\sqrt{3}}{12}[A_2, A_1] + \frac{1}{80}[[A_2, A_1], A_1] - \frac{1}{80}[[A_2, A_1], A_2] + \dots
\end{aligned}$$

yerine yazılır. $I_3(t)$ ve $I_4(t)$ ’ye karşılık gelen integraller 4. mertebe Magnus seri açılımında olup bu integrallerin lineer kombinasyonları 4. mertebeden Magnus seri açılım yönteminin (MG4) sonucunu etkilemez. Böylece açılımdaki son iki terim ihmal edilirse 4. mertebeden Magnus seri açılımı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\Omega(t) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{\sqrt{3}}{12}[A_2, A_1] + O(t^5).$$

Sonuç olarak, $y(t_n) = y_n$ ve $h = t_{n+1} - t_n$ olmak üzere 4. mertebeden Magnus seri açılım yöntemi (MG4),

$$\begin{aligned}
A_1 &= A\left(t_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \\
A_2 &= A\left(t_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \tag{3.32}
\end{aligned}$$

$$\Omega_4 = \frac{1}{2}h(A_1 + A_2) + \frac{\sqrt{3}}{12}h^2[A_2, A_1]$$

$$y_{n+1} = \exp(\Omega_4) y_n$$

şeklinde elde edilir [55].

3.1.3. Altıncı mertebeden Magnus seri açılım yöntemi (MG6)

6. Mertebeden Magnus seri açılım yöntemi için Teorem 3.1.1' e göre Gauss–Legendre tümleminde yalnızca 3. dereceden ötelenmiş Legendre polinomu $P_3^*(x)$ ' nin kökleri kullanılacaktır [90]. Magnus seri açılımındaki $i \in \mathbb{N}$ için $I_i(t)$ integralleri aşağıdaki şekilde yeniden verilirse,

$$\Omega(t) = I_1(t) - \frac{1}{2}I_2(t) + \frac{1}{12}I_3(t) + \frac{1}{4}I_4(t) \quad (3.33)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$I_1(t) = \int_0^t A(\xi_1) d\xi_1 \approx D_1(h)$$

$$I_2(t) = \int_0^t \int_0^{\xi_1} [A(\xi_2), A(\xi_1)] d\xi_2 d\xi_1 \approx D_2(h)$$

$$I_3(t) = \int_0^t \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} [A(\xi_3), [A(\xi_2), A(\xi_1)]] d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \approx D_3(h)$$

$$I_4(t) = \int_0^t \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} [[A(\xi_3), A(\xi_2)], A(\xi_1)] d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \approx D_4(h)$$

dir. Şimdi Denklem (3.33)' teki ilk dört integralin Gauss-Legendre tümlevi ile yaklaşık olarak toplamları hesaplanmalıdır. $P_3^*(x)$, 3. dereceden Legendre polinomunun kökleri c_1 , c_2 ve c_3 olmak üzere $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$, dir. $l_j(x)$ Lagrange interpolasyon polinomları ise

$$l_1(x) = \frac{(x-c_2)(x-c_3)}{(c_1-c_2)(c_1-c_3)} = \frac{10}{3}x^2 - \frac{10+\sqrt{15}}{3}x + \frac{5+\sqrt{15}}{6} \quad (3.34)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-c_1)(x-c_3)}{(c_2-c_1)(c_2-c_3)} = -\frac{20}{3}x^2 + \frac{20}{3}x - \frac{2}{3} \quad (3.35)$$

$$l_3(x) = \frac{(x-c_1)(x-c_2)}{(c_3-c_1)(c_3-c_2)} = \frac{10}{3}x^2 - \left(\frac{10-\sqrt{15}}{3}\right)x + \frac{55\sqrt{15}}{6} \quad (3.36)$$

şeklinde dir. Buradan c_1 , c_2 ve c_3 köklerinde $A(t)$ fonksiyonu için yaklaşık değerleri

$$A_1 = hA\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}\right)h\right), A_2 = hA\left(\frac{1}{2}h\right), A_3 = hA\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}\right)h\right) \text{ şeklinde elde edilir.}$$

$I_1(t)$ integralinin çok değişkenli tümlevi için L fonksiyonu $L(A(\xi_1)) = A(\xi_1)$ ' dir.

Burada $s = 1$ ve $n = 3$ olup $C_s^n = C_1^3 = \{(1), (2), (3)\}$ ' dir. b_k ağırlıkları ise Denklem (3.23)' ten

$$b_{(1)} = \int_0^1 l_1(\xi_1) d\xi_1 = \frac{5}{18}, \quad b_{(2)} = \int_0^1 l_2(\xi_1) d\xi_1 = \frac{8}{18}, \quad b_{(3)} = \int_0^1 l_3(\xi_1) d\xi_1 = \frac{5}{18}$$

elde edilir. $I_1(t)$ integrali için Gauss–Legendre noktalarını kullanarak bulunan çok değişkenli tümlev, (3.24)' ten,

$$D_1(h) = b_{(1)}L(A_1) + b_{(2)}L(A_2) + b_{(3)}L(A_3) = \frac{1}{18}(5A_1 + 8A_2 + 5A_3) \quad (3.37)$$

bulunur. Benzer şekilde $I_2(t)$ integrali için Gauss–Legendre noktalarını kullanarak bulunan çok değişkenli tümlev, (3.24)' ten,

$$D_2(h) = \frac{\sqrt{15}}{54}(2[A_1, A_2] + [A_1, A_3] + 2[A_2, A_3]) \quad (3.38)$$

elde edilir. $I_3(t)$ ve $I_4(t)$ integrali için Gauss–Legendre noktalarını kullanarak çok değişkenli tümlev yukarıdakilere benzer olarak bulunabilir. Buradan 6. mertebeden Magnus seri açılımı $D_0 = A_2$, $D_1 = \frac{\sqrt{15}}{3}(A_3 - A_1)$, $D_2 = \frac{20}{3}(A_3 - 2A_2 + A_1)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Omega(t) = & D_0 + \frac{1}{24}D_2 + \frac{1}{12}[D_1, D_0] - \frac{1}{480}[D_2, D_1] \\ & + \frac{1}{240}[D_1, [D_1, D_0]] - \frac{1}{720}[D_0, [D_2, D_0]] - \frac{1}{720}[D_0, [D_0, [D_1, D_0]]] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak, $y(t_n) = y_n$ ve $h = t_{n+1} - t_n$ olmak üzere 6. mertebeden Magnus seri açılım yöntemini (MG6)

$$A_1 = A\left(t_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}\right)h\right)$$

$$A_2 = A\left(t_n + \frac{1}{2}h\right)$$

$$A_3 = A\left(t_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}\right)h\right)$$

$$D_0 = A_2, \quad D_1 = \frac{\sqrt{15}}{3}(A_3 - A_1), \quad D_2 = \frac{20}{3}(A_3 - 2A_2 + A_1) \quad (3.39)$$

$$\Omega_6 = h\left(D_0 + \frac{1}{24}D_2\right) + h^2\left(\frac{1}{12}[D_1, D_0] - \frac{1}{480}[D_2, D_1]\right)$$

$$+h^3\left(\frac{1}{240}[D_1, [D_1, D_0]] - \frac{1}{720}[D_0, [D_2, D_0]] - h^4 \frac{1}{720}[D_0, [D_0, [D_1, D_0]]]\right)$$

$$y_{n+1} = \exp(\Omega_6) y_n$$

şeklinde elde edilir [55].

3.1.4. Homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sistemleri için Magnus seri açılım yöntemi

Bu bölümde Blanes ve Ponsoda tarafından yapılan çalışmada homojen olmayan denklem sistemleri için verilen dönüşüm üzerinde durulacaktır [71].

$t \geq 0$, $y(t), h(t) \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, $M(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ olmak üzere,

$$y'(t) = M(t)y(t) + h(t) \quad (3.40)$$

denklem sistemi verilsin. (3.40) denklemini

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} M(t) & h(t) \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

şeklinde yeniden yazmak, problemin Magnus seri açılım yöntemiyle çözülebilmelerini kolaylaştırır. Burada $A(t)$

$$A(t) = \begin{bmatrix} M(t) & h(t) \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

dir. $A(t)$ matrisi Denklem (3.42)' deki gibi elde edildikten sonra bilinen Magnus seri açılım yöntemi yoluyla bu denklem sistemi çözülebilir.

3.1.5. Lineer olmayan diferansiyel denklem sistemleri için Magnus seri açılım yöntemi

Bu bölümde Casas ve Iserles tarafından lineer olmayan denklem sistemlerini çözmek için geliştirilen Magnus seri açılım yöntemi üzerinde durulacaktır [70]. Lineer olmayan Lie tipindeki denklem sistemlerinde Denklem (3.1)' deki $A(t)$ matrisinin yalnızca zamana bağlı olmadığı aynı zamanda Y fonksiyonuna da bağlı olduğu söylenebilir. Lineer olmayan Lie tipindeki bir diferansiyel denklem sistemi,

$$Y'(t) = A(t, Y)Y(t), \quad Y(0) = Y_0 \in \mathfrak{S} \quad (3.43)$$

şeklindedir. Burada \mathfrak{S} matris Lie grubu, $A(t, Y): \mathbb{R}^+ \times \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{g}$ ve \mathfrak{g} Lie cebiridir. (3.43) denklem sisteminin çözümü,

$$Y(t) = e^{\Omega(t)} Y_0 \quad (3.44)$$

olsun. Lineer diferansiyel denklem sistemleri için Magnus seri açılım yöntemine benzer olarak,

$$\Omega'(t) = dexp_{\Omega}^{-1}(A(t, Y)), \quad \Omega(0) = 0$$

elde edilir. Bu denklemde Y yerine (3.44) ifadesi yazılırsa,

$$\Omega'(t) = dexp_{\Omega}^{-1}(A(t, e^{\Omega(t)} y_0)), \quad \Omega(0) = 0 \quad (3.45)$$

elde edilir. (3.45) denkleminde Picard iterasyonu uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \Omega^{[0]}(t) &\equiv 0 \\ \Omega^{[m+1]}(t) &= \int_0^t dexp_{\Omega^{[m]}(s)}^{-1} A(s, e^{\Omega^{[m]}(s)} y_0) ds \\ &= \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} ad_{\Omega^{[m]}(s)}^k A(s, e^{\Omega^{[m]}(s)} y_0) ds, \quad m \geq 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

elde edilir. (3.46) açılımında $dexp^{-1}$ operatörünün uygun biçimde kesilmesiyle iterasyon formülü

$$\begin{aligned} \Omega^{[0]} &= 0 \\ \Omega^{[1]}(t) &= \int_0^t A(s, Y_0) ds \\ \Omega^{[m]} &= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{B_k}{k!} \int_0^t ad_{\Omega^{[m-1]}(s)}^k A(s, e^{\Omega^{[m-1]}(s)} Y_0) ds, \quad m \geq 2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

şeklinde elde edilir [70].

3.1.5.1. Dördüncü mertebeden lineer olmayan Magnus seri açılım yöntemi (NMG4)

Dördüncü mertebeden lineer olmayan Magnus seri açılım yöntemini elde etmek için Denklem (3.47)' de $m = 4$ değeri yerine yazılıp Simpson kuralı uygulanırsa NMG4 için algoritma

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0 \\
k_1 &= hA(t_n, Y_n) \\
Q_1 &= k_1 \\
u_2 &= \frac{1}{2}Q_1 \\
k_2 &= hA\left(t_n + \frac{h}{2}, e^{u_2}Y_0\right) \\
Q_2 &= k_2 - k_1 \\
u_3 &= \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{4}Q_2 \\
k_3 &= hA\left(t_n + \frac{h}{2}, e^{u_3}Y_0\right) \\
Q_3 &= k_3 - k_2 \\
u_4 &= Q_1 + Q_2 \\
k_4 &= hA(t_n + h, e^{u_4}Y_0) \\
Q_4 &= k_4 - 2k_2 + k_1 \\
u_5 &= \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{4}Q_2 + \frac{1}{3}Q_3 - \frac{1}{24}Q_4 - \frac{1}{48}[Q_1, Q_2] \\
k_5 &= hA\left(t_n + \frac{h}{2}, e^{u_5}Y_0\right) \\
Q_5 &= k_5 - k_2 \\
u_6 &= Q_1 + Q_2 + \frac{2}{3}Q_3 + \frac{1}{6}Q_4 - \frac{1}{6}[Q_1, Q_2] \\
k_6 &= hA(t_n + h, e^{u_6}Y_0) \\
Q_6 &= k_6 - 2k_2 + k_1 \\
v_4 &= Q_1 + Q_2 + \frac{2}{3}Q_5 + \frac{1}{6}Q_6 - \frac{1}{6}[Q_1, Q_2 - Q_3 + Q_5 + \frac{1}{2}Q_6] \\
Y_{n+1}(t) &= e^{v_4}Y_n
\end{aligned} \tag{3.48}$$

şeklinde elde edilir [70].

3.2. Düzeltilmiş (Modifiye Edilmiş) Magnus Seri Açılımı Yöntemi

$$y'(t) = A(t)y(t), \quad y(0) = y_0 \tag{3.49}$$

denklem sistemi verilsin. (3.49) diferansiyel denklem sisteminin çözümü,

$$y(t) = e^{(t-t_n)A(t_n+\frac{1}{2}h)}x(t-t_n), \quad t \geq t_n \tag{3.50}$$

olsun. $t_{\frac{1}{2}} = t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{1}{2}h$ olmak üzere $A(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(t - t_{1/2})^j$ dir. Burada

$$A_j = \frac{1}{j!} \cdot \left. \frac{d^j A(t)}{dt} \right|_{t=t_{1/2}} \quad (3.51)$$

dir [91]. $\tau = t - t_{1/2}$ olarak kabul edilirse $A(t)$ matrisinin seri açılımı,

$$A(t) = A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + \dots$$

şeklindedir. Denklem (3.51)' den $t = t_{1/2}$ olup $\tau = t - t_{1/2} = 0$ dir. Buradan,

$$A(t) = A\left(t_{1/2}\right) = A\left(t_n + \frac{1}{2}h\right) = A_0$$

olur. Aranılan çözüm $\widetilde{y}_0(t) = \exp\left((t - t_n)A\left(t_n + \frac{1}{2}h\right)\right)$ ve $\widetilde{y}_1(t) = x(t - t_n)$ olmak üzere $y(t) = \widetilde{y}_0(t)\widetilde{y}_1(t)$ olsun. Şimdi $\widetilde{y}_1'(t) = B(t)\widetilde{y}_1(t)$ olacak şekilde bir denklem sisteminin varlığı gösterilsin. $y(t) = \widetilde{y}_0(t)\widetilde{y}_1(t)$ denkleminde $\widetilde{y}_0(t)$ ve $\widetilde{y}_1(t)$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$y(t) = \widetilde{y}_0(t)\widetilde{y}_1(t) = \exp((t - t_n)A\left(t_n + \frac{1}{2}h\right)) x(t - t_n)$$

elde edilir. Bu eşitliğin (3.50) ifadesine eşit olduğu görülebilir. (3.50) eşitliğinin her iki tarafının t' ye göre türevi alınırsa,

$$y' = A\left(t_n + \frac{1}{2}h\right)e^{(t-t_n)A\left(t_n+\frac{1}{2}h\right)}x(t-t_n) + e^{(t-t_n)A\left(t_n+\frac{1}{2}h\right)}x'(t-t_n) \quad (3.52)$$

elde edilir. Denklem (3.49) ve Denklem (3.52)' den,

$$\begin{aligned} & A\left(t_n + \frac{1}{2}h\right)e^{(t-t_n)A\left(t_n+\frac{1}{2}h\right)}x(t-t_n) - A(t)e^{(t-t_n)A\left(t_n+\frac{1}{2}h\right)}x(t-t_n) \\ &= -e^{(t-t_n)A\left(t_n+\frac{1}{2}h\right)}x'(t-t_n) \end{aligned} \quad (3.53)$$

elde edilir. Buradan

$$x'(t - t_n) = e^{-(t-t_n)A\left(t_n+\frac{1}{2}h\right)}[A(t) - A\left(t_n + \frac{1}{2}h\right)]e^{(t-t_n)A\left(t_n+\frac{1}{2}h\right)}x(t - t_n)$$

olur. $t - t_n = \tau$ olarak kabul edilirse,

$$x'(\tau) = e^{-\tau A(t_n + \frac{1}{2}h)} [A(t_n + \tau) - A(t_n + \frac{1}{2}h)] e^{\tau A(t_n + \frac{1}{2}h)} x(\tau) \quad (3.54)$$

elde edilir. Denklem (3.54) ve Denklem (3.53)' ten

$$x'(\tau) = B(\tau)x(\tau), \quad x(0) = y_n \quad (3.55)$$

yazılabilir. Burada $B(\tau) = e^{-\tau A(t_n + \frac{1}{2}h)} [A(t_n + \tau) - A(t_n + \frac{1}{2}h)] e^{\tau A(t_n + \frac{1}{2}h)}$, dir.

Denklem (3.55)' in Magnus seri açılım yöntemiyle yaklaşık çözümü

$$x_n(\tau) = e^{\Omega_n(h)} y_n \quad (3.56)$$

şeklindedir. Dolayısıyla $y_{n+1} = e^{hA(t_n + \frac{1}{2}h)} x_n$ dir. $n \in \mathbb{Z}^+$ için x_n yerine yazılırsa,

$$y_{n+1} = e^{hA(t_n + \frac{1}{2}h)} e^{\Omega_n(h)} y_n$$

elde edilir. Eğer burada verilen (3.55) denklem sistemi MG4 yöntemi ile çözümlerse elde edilen yöntem 4. mertebeden düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi, MG6 yöntemi ile çözümlerse elde edilen yöntem 6. mertebeden düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi olur.

3.2.1. Dördüncü mertebeden düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi (MMG4)

İkinci dereceden ötelenmiş Legendre polinomlarının kökleri

$$c_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right), \quad c_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \quad (3.57)$$

olsun. Buradan,

$$A_0 = A\left(t_n + \frac{h}{2}\right) \quad (3.58)$$

$$A_1 = A(t_n + c_1 h) = A\left(t_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h\right) \quad (3.59)$$

$$A_2 = A(t_n + c_2 h) = A\left(t_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h\right) \quad (3.60)$$

matrisleri elde edilir. Eğer Denklem (3.55)' e standart Magnus seri açılım yöntemi uygulanırsa U_1 ve U_2 gibi iki matris elde edilir. Yani,

$$x'(t) = e^{-tA(t_n + \frac{1}{2}h)} \left[A(t_n + t) - A\left(t_n + \frac{1}{2}h\right) \right] e^{tA(t_n + \frac{1}{2}h)} x(t)$$

denkleminde $t = c_1 h$ alınır, $A(t_n + t) = A(t_n + c_1 h) = A_1$ dir. Buradan

$$x'(t) = e^{-c_1 h A_0} [A_1 - A_0] e^{c_1 h A_0} x(t)$$

elde edilir. Benzer şekilde $t = c_2 h$ alınır, $A(t_n + t) = A(t_n + c_2 h) = A_2$ olup

$$x'(t) = e^{-c_2 h A_0} [A_2 - A_0] e^{c_2 h A_0} x(t)$$

bulunur. Buradan U_1 ve U_2 matrisleri

$$U_1 = e^{-c_1 h A_0} [A_1 - A_0] e^{c_1 h A_0}, \quad U_2 = e^{-c_2 h A_0} [A_2 - A_0] e^{c_2 h A_0} \quad (3.61)$$

şeklinde elde edilir. U_1 ve U_2 matrisleri kullanılarak 4. mertebeden klasik Magnus seri açılımı yazılırsa,

$$\Omega_4 = \frac{h}{2} (U_1 + U_2) - \frac{\sqrt{3}}{12} h^2 (U_1 U_2 - U_2 U_1) \quad (3.62)$$

dir. Sonuç olarak iterasyon formülü,

$$y_{n+1} = e^{h A_0} e^{(\Omega_4)} y_n \quad (3.63)$$

şeklinde elde edilir. Bu yöntem dördüncü mertebeden düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi (MMG4) olarak bilinir [72].

3.2.2. Altıncı mertebeden düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi (MMG6)

Altıncı mertebeden düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi de MMG4 yöntemine benzer olarak aşağıdaki gibi verilir.

$$c_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10} \right), \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10} \right) \quad (3.64)$$

üçüncü dereceden ötelenmiş Legendre polinomlarının kökleri olmak üzere,

$$A_0 = A\left(t_n + \frac{h}{2}\right) \quad (3.65)$$

$$A_1 = A(t_n + c_1 h) = A\left(t_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}\right)h\right) \quad (3.66)$$

$$A_2 = A(t_n + c_2 h) = A\left(t_n + \frac{1}{2}h\right) \quad (3.67)$$

$$A_3 = A(t_n + c_3 h) = A\left(t_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}\right)h\right) \quad (3.68)$$

tür. Eğer Denklem (3.55)' e standart Magnus seri açılım yöntemi uygulanırsa U_1 , U_2 ve U_3 gibi üç matris elde edilir. Fakat burada $A_2 = A_0$ olduğundan U_2 hesaplanamaz. Yani,

$$x'(t) = e^{-tA(t_n + \frac{1}{2}h)} \left[A(t_n + t) - A\left(t_n + \frac{1}{2}h\right) \right] e^{tA(t_n + \frac{1}{2}h)} x(t)$$

denkleminde $t = c_1 h$ alınır, $A(t_n + t) = A(t_n + c_1 h) = A_1$ dir. Buradan

$$x'(t) = e^{-c_1 h A_0} [A_1 - A_0] e^{c_1 h A_0} x(t)$$

elde edilir. Benzer şekilde $t = c_2 h$ alınır, $A(t_n + t) = A(t_n + c_2 h) = A_2$ olup

$$x'(t) = e^{-c_2 h A_0} [A_2 - A_0] e^{c_2 h A_0} x(t)$$

bulunur. Fakat $A_2 = A_0$ olduğundan U_2 matrisinin değeri hesaplanamaz. $t = c_3 h$ alınır, $A(t_n + t) = A(t_n + c_3 h) = A_3$ olur. Buradan

$$x'(t) = e^{-c_3 h A_0} [A_3 - A_0] e^{c_3 h A_0} x(t)$$

elde edilir. Buradan U_1 , U_2 ve U_3 matrisleri

$$U_1 = e^{-c_1 h A_0} [A_1 - A_0] e^{c_1 h A_0}, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = e^{-c_3 h A_0} [A_3 - A_0] e^{c_3 h A_0} \quad (3.69)$$

şeklinde bulunur. U_1 , U_2 ve U_3 matrisleri kullanılarak 6. mertebeden klasik Magnus seri açılımı yazılırsa,

$$D_0 = U_2, \quad D_1 = \frac{\sqrt{15}}{3} (U_3 - U_1), \quad D_2 = \frac{20}{3} (U_3 - 2U_2 + U_1)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\Omega_6 = & h \left(D_0 + \frac{1}{24} D_2 \right) + h^2 \left(\frac{1}{12} [D_1, D_0] - \frac{1}{480} [D_2, D_1] \right) \\ & + h^3 \left(\frac{1}{240} [D_1, [D_1, D_0]] - \frac{1}{720} [D_0, [D_2, D_0]] - h^4 \frac{1}{720} [D_0, [D_0, [D_1, D_0]]] \right)\end{aligned}\quad (3.70)$$

dir. $U_2 = 0$ olduğundan $D_0 = 0$ olup Denklem (3.70)' te D_0, D_1 ve D_2 değerleri yerine yazılırsa,

$$\Omega_6 = \frac{5}{18} h(U_1 + U_3) - \frac{\sqrt{15}}{108} h^2(U_3 U_1 - U_1 U_3) \quad (3.71)$$

elde edilir. Sonuç olarak iterasyon formülü,

$$y_{n+1} = e^{hA_0} e^{(\Omega_6)} y_n \quad (3.72)$$

şeklindedir. Bu yöntem altıncı mertebeden düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi (MMG6) olarak bilinir [72].

3.3. Magnus Serilerinin Yakınsaklığı

Wilhelm Magnus dört katlı integrallerden oluşan terimleri daha da genişletmeyi başarmıştır fakat genel bir formül sunamamakla beraber yakınsaklığı da ispatlayamamıştır [92]. Magnus serilerinin yakınsaklığı konusu literatürde tam anlamıyla açıklanmış sayılmaz. Fakat bu konu üzerinde hala çalışmalar devam etmektedir. Bu bölümdeki asıl amaç yakınsaklık ile ilgili gerekli şartı vermektir.

Teorem 3.3.1: $A(t)$, gerçekte integrallenebilir bir matris ve $Y(t)$ ' de $Y' = A(t)Y$, $Y(0) = I$ denkleminin çözümü olsun. Eğer,

$$\int_0^t \|A(\tau)\|_2 d\tau < \pi$$

ise Denklem (3.13)' teki Magnus serileri yakınsaktır ve $\Omega(t)$ toplamı $e^{\Omega(t)} = Y(t)$ denklemini sağlar [68].

BÖLÜM 4

NÜMERİK ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, Magnus ve Düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi ile elde edilen bilgiler ışığında yapılan nümerik çalışmalar ve bunların sonuçları tablo ve grafikler halinde verilmiştir. Örnek 4.1 ve 4.2’ de lineer homojen stiff adi diferansiyel denklem sistemlerine, Örnek 4.3, 4.4 ve 4.5’ te lineer homojen olmayan stiff adi diferansiyel denklem sistemlerine, Örnek 4.6’ da lineer olmayan liénard diferansiyel denklem sistemine, Örnek 4.7’ de lineer olmayan izotermal gaz küre denklem sistemine, Örnek 4.8, 4.9 ve 4.10’ da periyodik başlangıç değer problemlerine ait örnekler verilmiştir.

İlk olarak, lineer homojen stiff adi diferansiyel denklem sistemleri üzerine Magnus seri açılım yönteminin etkisini inceleyen çalışmalar verilmiştir.

Örnek 4.1. $y_1(t)$, $y_2(t)$ birinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= y_2(t) \\y_2'(t) &= -0.9999y_1(t) - 100y_2(t) \\y_1(0) &= 1, y_2(0) = 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

başlangıç değer problemi verilsin. Başlangıç değer probleminin analitik çözümü,

$$\begin{aligned}y_1(t) &= -0.00010002000400080088e^{-99.99t} + 1.000100020004001e^{-0.009999999999999905t} \\y_2(t) &= 0.010001000200040078e^{-99.99t} - 0.010001000200040078e^{-0.009999999999999905t}\end{aligned}$$

dür [93].

Tablo 4.1’ de, (4.1) stiff adi diferansiyel denklem sistemine $h = 0.01$ adım aralığı için Magnus seri açılım yöntemi uygulandığında elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Tablo 4.1. Örnek 4.1' in Magnus seri açılım yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9991004153219216	0.9991004153219216	0
0.2	0.9981018188310272	0.9981018188310272	0
0.3	0.9971042158969984	0.9971042158969984	0
0.4	0.9961076100670728	0.9961076100670728	0
0.5	0.9951120003448295	0.9951120003448295	0
0.6	0.9941173857346696	0.9941173857346696	0
0.7	0.9931237652419852	0.9931237652419852	0
0.8	0.9921311378731562	0.9921311378731562	0
0.9	0.9911395026355332	0.9911395026355332	0
1.0	0.9901488585374958	0.9901488585374958	0

(4.1) denkleminde $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9999 & -100 \end{bmatrix}$ katsayılar matrisinin elemanları reel değerli olduğundan Lie operatörü (komütatör) işlemi göz ardı edilir. Bunun sonucu olarak Magnus seri açılım yönteminin bütün mertebeleri aynı sonucu verir. Dolayısıyla farklı h değerleri içinde sonuçlar aynı kalır. Sonuç olarak hata değerinin 0 çıkması bu yöntemin sabit katsayılı diferansiyel denklem sistemlerine uygulanamayacağını gösterir [74].

Aşağıdaki örnekte, denklem sisteminin katsayıları sabit olmadığından MG4 ve MG6 yöntemleri farklı h değerleri için kıyaslanabilir.

Örnek 4.2. $y_1(t), y_2(t)$ birinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar olmak üzere,

$$y_1'(t) = -1000 t y_1(t) + y_2(t)$$

$$y_2'(t) = -t y_2(t) \tag{4.2}$$

$$y_1(0) = -1, y_2(0) = 1$$

başlangıç değer problemi verilsin. Başlangıç değer probleminin analitik çözümü,

$$y_1(t) = \frac{1}{666} e^{-500t^2} \left(-666 + \sqrt{222\pi} \operatorname{Erfi} \left[3 \sqrt{\frac{111}{2}} t \right] \right),$$

$$y_2(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

dür. Burada

$$\operatorname{Erfi}\left[3\sqrt{\frac{111}{2}}t\right] = 3\sqrt{\frac{222}{\pi}}t + 999\sqrt{\frac{111}{2\pi}}t^3 + \frac{2994003}{20}\sqrt{\frac{111}{2\pi}}t^5 + \dots$$

dir [54].

(4.2) stiff diferansiyel denklem sisteminin katsayılar matrisi $A(t) = \begin{bmatrix} -1000t & 1 \\ 0 & -t \end{bmatrix}$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere, $h = 0.01$, $h = 0.001$, $h = 0.0001$ adım aralıkları için Denklem (3.32) göz önüne alındığında MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi sonucunda elde edilen verilerin ilk 3 adımı aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 4.2. $h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.01$	$t = 0.02$	$t = 0.03$
A_1	$\begin{bmatrix} -12.1132 & 1 \\ 0 & -0.0121132 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -22.1132 & 1 \\ 0 & -0.0221132 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -32.1132 & 1 \\ 0 & -0.0321132 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -17.8868 & 1 \\ 0 & -0.0178868 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -27.8868 & 1 \\ 0 & -0.0278868 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -37.8868 & 1 \\ 0 & -0.0378868 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} -0.15 & 0.00991675 \\ 0 & -0.00015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.25 & 0.00991675 \\ 0 & -0.00025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.35 & 0.00991675 \\ 0 & -0.00035 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_4)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_4)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_4)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_4)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} -0.941557 \\ 0.99995 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} -0.801198 \\ 0.9998 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} -0.615202 \\ 0.99955 \end{bmatrix}$

Tablo 4.3. $h = 0.001$ için Örnek 4.2' nin MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.001$	$t = 0.002$	$t = 0.003$
A_1	$\begin{bmatrix} -1.21132 & 1 \\ 0 & -0.00121132 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.21132 & 1 \\ 0 & -0.00221132 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.21132 & 1 \\ 0 & -0.00321132 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -1.78868 & 1 \\ 0 & -0.00178868 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.78868 & 1 \\ 0 & -0.00278868 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.78868 & 1 \\ 0 & -0.00378868 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} -0.0015 & 0.000999917 \\ 0 & -0.0000015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0025 & 0.000999917 \\ 0 & -0.0000025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0035 & 0.000999917 \\ 0 & -0.0000035 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_4)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_4)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_4)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_4)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} -0.9985 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} -0.996005 \\ 0.999998 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} -0.992519 \\ 0.999996 \end{bmatrix}$

Tablo 4.4. $h = 0.0001$ için Örnek 4.2' nin MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.0001$	$t = 0.0002$	$t = 0.0003$
A_1	$\begin{bmatrix} -0.121132 & 1 \\ 0 & -0.000121132 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.221132 & 1 \\ 0 & -0.000221132 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.321132 & 1 \\ 0 & -0.000321132 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -0.178868 & 1 \\ 0 & -0.000178868 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.278868 & 1 \\ 0 & -0.000278868 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.378868 & 1 \\ 0 & -0.000378868 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} -0.000015 & 0.0000999999 \\ 0 & -0.000000015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.000025 & 0.0000999999 \\ 0 & -0.000000025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.000035 & 0.0000999999 \\ 0 & -0.000000035 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_4) y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_4) y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_4) y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_4) y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} -0.99895 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} -0.99978 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} -0.999655 \\ 1 \end{bmatrix}$

$t \in [0,1]$ olmak üzere, $h = 0.01$, $h = 0.001$, $h = 0.0001$ adım aralıkları için Denklem (3.39) göz önüne alındığında MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi sonucunda elde edilen verilerin ilk 3 adımı aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 4.5. $h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.01$	$t = 0.02$	$t = 0.03$
A_1	$\begin{bmatrix} -11.127 & 1 \\ 0 & -0.011127 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -21.127 & 1 \\ 0 & -0.021127 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -31.127 & 1 \\ 0 & -0.031127 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -15 & 1 \\ 0 & -0.015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -25 & 1 \\ 0 & -0.025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -35 & 1 \\ 0 & -0.035 \end{bmatrix}$
A_3	$\begin{bmatrix} -18.873 & 1 \\ 0 & -0.018873 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -28.873 & 1 \\ 0 & -0.028873 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -38.873 & 1 \\ 0 & -0.038873 \end{bmatrix}$
D_0	$\begin{bmatrix} -15 & 1 \\ 0 & -0.015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -25 & 1 \\ 0 & -0.025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -35 & 1 \\ 0 & -0.035 \end{bmatrix}$
D_1	$\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix}$
D_2	$\begin{bmatrix} -1.18424 \times 10^{-14} & 0 \\ 0 & -2.31296 \times 10^{-17} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.36848 \times 10^{-14} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.18424 \times 10^{-13} & 0 \\ 0 & -4.62593 \times 10^{-17} \end{bmatrix}$
Ω_6	$\begin{bmatrix} -0.15 & 0.00991675 \\ 0 & -0.00015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.25 & 0.00991725 \\ 0 & -0.00025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.35 & 0.00991734 \\ 0 & -0.00035 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_6)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_6)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_6)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_6)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} -0.941556 \\ 0.99995 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} -0.801197 \\ 0.9998 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} -0.615201 \\ 0.99955 \end{bmatrix}$

Tablo 4.6. $h = 0.001$ için Örnek 4.2' nin MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.001$	$t = 0.002$	$t = 0.003$
A_1	$\begin{bmatrix} -1.1127 & 1 \\ 0 & -0.0011127 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.1127 & 1 \\ 0 & -0.0021127 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.1127 & 1 \\ 0 & -0.0031127 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0 & -0.0015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.5 & 1 \\ 0 & -0.0025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.5 & 1 \\ 0 & -0.0035 \end{bmatrix}$
A_3	$\begin{bmatrix} -1.8873 & 1 \\ 0 & -0.0018873 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.8873 & 1 \\ 0 & -0.0028873 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.8873 & 1 \\ 0 & -0.0038873 \end{bmatrix}$
D_0	$\begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 0 & -0.0015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.5 & 1 \\ 0 & -0.0025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.5 & 1 \\ 0 & -0.0035 \end{bmatrix}$
D_1	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.001 \end{bmatrix}$
D_2	$\begin{bmatrix} -1.4803 \times 10^{-15} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_6	$\begin{bmatrix} -0.0015 & 0.000999917 \\ 0 & -0.0000015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0025 & 0.000999917 \\ 0 & -0.0000025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0035 & 0.000999917 \\ 0 & -0.0000035 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_6)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_6)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_6)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_6)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} -0.9985 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} -0.996005 \\ 0.999998 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} -0.992519 \\ 0.999996 \end{bmatrix}$

Tablo 4.7. $h = 0.0001$ için Örnek 4.2' nin MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.0001$	$t = 0.0002$	$t = 0.0003$
A_1	$\begin{bmatrix} -0.11127 & 1 \\ 0 & -0.00011127 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.21127 & 1 \\ 0 & -0.00021127 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.31127 & 1 \\ 0 & -0.00031127 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -0.15 & 1 \\ 0 & -0.00015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.25 & 1 \\ 0 & -0.00025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.35 & 1 \\ 0 & -0.00035 \end{bmatrix}$
A_3	$\begin{bmatrix} -0.18873 & 1 \\ 0 & -0.00018873 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.28873 & 1 \\ 0 & -0.00028873 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.38873 & 1 \\ 0 & -0.00038873 \end{bmatrix}$
D_0	$\begin{bmatrix} -0.15 & 1 \\ 0 & -0.00015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.25 & 1 \\ 0 & -0.00025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.35 & 1 \\ 0 & -0.00035 \end{bmatrix}$
D_1	$\begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.0001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.0001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.0001 \end{bmatrix}$
D_2	$\begin{bmatrix} 2.77556 \times 10^{-16} & 0 \\ 0 & 9.03502 \times 10^{-20} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.70074 \times 10^{-16} & 0 \\ 0 & -1.807 \times 10^{-19} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3.61401 \times 10^{-19} \end{bmatrix}$
Ω_6	$\begin{bmatrix} -0.000015 & 0.0000999999 \\ 0 & -0.000000015 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.000025 & 0.0000999999 \\ 0 & -0.000000025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.000035 & 0.0000999999 \\ 0 & -0.000000035 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_6)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_6)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_6)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_6)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} -0.999895 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} -0.99978 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} -0.999655 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bu şekilde $t = 1$ ' e kadar devam edilirse, MG4 ve MG6 yöntemleri kullanılarak elde edilen gerçek çözüm, yaklaşık çözüm değerleri ile mutlak hata değerleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir [74]. Ayrıca dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi (RK4) ve altıncı mertebeden Runge-Kutta yöntemi (RK6) kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm değerleri ve mutlak hata değerleri de Tablo 4.14, 4.15, 4.16 ve 4.17' de verilmiştir.

Tablo 4.8. $h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	0.004788438856654205	0.004786780414370417	$1.6584422837875867 \times 10^{-6}$
0.2	0.005039304792290868	0.005036698696919041	$2.6060953718272384 \times 10^{-6}$
0.3	0.003226581691867235	0.0032232292695685526	$3.352422298682437 \times 10^{-6}$
0.4	0.002324833687128679	0.0023210594126784148	$3.7742744502643893 \times 10^{-6}$
0.5	0.0017739214071528352	0.001770011684693963	$3.909722458872314 \times 10^{-6}$
0.6	0.001397418047002593	0.0013935848714085597	$3.833175594033416 \times 10^{-6}$
0.7	0.0011215692753747594	0.0011179517261896757	$3.617549185083724 \times 10^{-6}$
0.8	0.0009100227126543259	0.0009067018069023954	$3.3209057519305047 \times 10^{-6}$
0.9	0.0007427473453034181	0.0007397623404288402	$2.9850048745779 \times 10^{-6}$
1.0	0.0006077473773139123	0.0006051092160958073	$2.6381612181049577 \times 10^{-6}$

Tablo 4.9. $h = 0.001$ için Örnek 4.2' nin MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	0.004788438856654205	0.004788438686822496	$1.698317085921385 \times 10^{-10}$
0.2	0.005039304792290868	0.005039304506867239	$2.854236291760514 \times 10^{-10}$
0.3	0.003226581691867235	0.003226581286266913	$4.056003219919668 \times 10^{-10}$
0.4	0.002324833687128679	0.0023248331708462643	$5.162824148231826 \times 10^{-10}$
0.5	0.0017739214071528352	0.0017739207942755724	$6.128772628288814 \times 10^{-10}$
0.6	0.001397418047002593	0.0013974173544071232	$6.925954699078113 \times 10^{-10}$
0.7	0.0011215692753747594	0.0011215685216204355	$7.537543239306138 \times 10^{-10}$
0.8	0.0009100227126543259	0.0009100219170289942	$7.956253316766804 \times 10^{-10}$
0.9	0.0007427473453034181	0.0007427465269526064	$8.183508117031238 \times 10^{-10}$
1.0	0.0006077473773139123	0.0006077465544652914	$8.228486208378127 \times 10^{-10}$

Tablo 4. 10. $h = 0.0001$ için Örnek 4.2' nin MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.004788438856654205	0.004788438856637138	$1.7067076918397817 \times 10^{-14}$
0.2	0.005039304792290868	0.005039304792262303	$2.8564824117172094 \times 10^{-14}$
0.3	0.003226581691867235	0.0032265816918266017	$4.063329533954274 \times 10^{-14}$
0.4	0.002324833687128679	0.002324833687076848	$5.183093537697303 \times 10^{-14}$
0.5	0.0017739214071528352	0.0017739214070911957	$6.163949559101489 \times 10^{-14}$
0.6	0.001397418047002593	0.0013974180469327792	$6.98139462906866 \times 10^{-14}$
0.7	0.0011215692753747594	0.0011215692752985864	$7.617300887274858 \times 10^{-14}$
0.8	0.0009100227126543259	0.0009100227125735789	$8.074693257781318 \times 10^{-14}$
0.9	0.0007427473453034181	0.00074274734522001	$8.340810681017885 \times 10^{-14}$
1.0	0.0006077473773139123	0.0006077473772296983	$8.421399428498733 \times 10^{-14}$

Tablo 4.11. $h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.004788438856654205	0.00478847186232619	$3.300567198542825 \times 10^{-8}$
0.2	0.005039304792290868	0.005039536215136678	$2.3142284581029182 \times 10^{-7}$
0.3	0.003226581691867235	0.0032272661441778506	$6.844523106155388 \times 10^{-7}$
0.4	0.002324833687128679	0.00232620840809544	$1.3747209667608513 \times 10^{-6}$
0.5	0.0017739214071528352	0.0017761400659024726	$2.218658749637316 \times 10^{-6}$
0.6	0.001397418047002593	0.0014005317854346511	$3.1137384320580226 \times 10^{-6}$
0.7	0.0011215692753747594	0.0011255386698003145	$3.969394425555085 \times 10^{-6}$
0.8	0.0009100227126543259	0.0009147416591928036	$4.7189465384777154 \times 10^{-6}$
0.9	0.0007427473453034181	0.0007480676671897068	$5.320321886288738 \times 10^{-6}$
1.0	0.0006077473773139123	0.0006134997470667265	$5.752369752814231 \times 10^{-6}$

Tablo 4.12. $h = 0.001$ için Örnek 4.2' nin MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.004788438856654205	0.004788438856688662	$3.445681240332732 \times 10^{-14}$
0.2	0.005039304792290868	0.005039304792549599	$2.587314043567268 \times 10^{-13}$
0.3	0.003226581691867235	0.003226581692715816	$8.485811879566096 \times 10^{-13}$
0.4	0.002324833687128679	0.002324833689066781	$1.938102022619459 \times 10^{-12}$
0.5	0.0017739214071528352	0.0017739214107631868	$3.6103516010133063 \times 10^{-12}$
0.6	0.001397418047002593	0.0013974180528911677	$5.8885745671949374 \times 10^{-12}$
0.7	0.0011215692753747594	0.001121569284108935	$8.734175492228213 \times 10^{-12}$
0.8	0.0009100227126543259	0.0009100227247051727	$1.2050846865535592 \times 10^{-11}$
0.9	0.0007427473453034181	0.00074274736099798	$1.5694561861061274 \times 10^{-11}$
1.0	0.0006077473773139123	0.0006077473968011909	$1.948727865273142 \times 10^{-11}$

Tablo 4.13. $h = 0.0001$ için Örnek 4.2' nin MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.004788438856654205	0.00478843885665412	$8.500145032286355 \times 10^{-17}$
0.2	0.005039304792290868	0.005039304792290874	$6.071532165918825 \times 10^{-18}$
0.3	0.003226581691867235	0.0032265816918672498	$1.474514954580286 \times 10^{-17}$
0.4	0.002324833687128679	0.0023248336871286774	$1.734723475976807 \times 10^{-18}$
0.5	0.0017739214071528352	0.00177392140715285	$1.474514954580286 \times 10^{-17}$
0.6	0.001397418047002593	0.001397418047002634	$4.098284211995207 \times 10^{-17}$
0.7	0.0011215692753747594	0.0011215692753748425	$8.304988641238964 \times 10^{-17}$
0.8	0.0009100227126543259	0.0009100227126543534	$2.753873518113181 \times 10^{-17}$
0.9	0.0007427473453034181	0.0007427473453034218	$3.686287386450715 \times 10^{-18}$
1.0	0.0006077473773139123	0.0006077473773139392	$2.688821387764051 \times 10^{-17}$

Tablo 4.14. $h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	0.004788438856654205	0.004607569427002661	0.00018086942965154368
0.2	0.005039304792290868	0.0050433088368217385	$4.004044530870471 \times 10^{-6}$
0.3	0.003226581691867235	0.0032458633513566004	0.00001928165948936536
0.4	0.002324833687128679	0.4592388410801891	0.45691400739306043
0.5	0.0017739214071528352	$8.380077769974068 \times 10^8$	$8.380077769956329 \times 10^8$
0.6	0.001397418047002593	$1.3228836828171 \times 10^{22}$	$1.3228836828171 \times 10^{22}$
0.7	0.0011215692753747594	$3.61796105555402 \times 10^{38}$	$3.61796105555402 \times 10^{38}$
0.8	0.0009100227126543259	$5.51880258894179 \times 10^{57}$	$5.51880258894179 \times 10^{57}$
0.9	0.0007427473453034181	$2.027433533750975 \times 10^{79}$	$2.027433533750975 \times 10^{79}$
1.0	0.0006077473773139123	$9.40212274426931 \times 10^{102}$	$9.40212274426931 \times 10^{102}$

Tablo 4.15. $h = 0.001$ için Örnek 4.2' nin RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	0.004788438856654205	0.00478842922848677	$9.62816743433486 \times 10^{-9}$
0.2	0.005039304792290868	0.0050393049367357	$1.444448423718047 \times 10^{-10}$
0.3	0.003226581691867235	0.003226581782972646	$9.11054114094422 \times 10^{-11}$
0.4	0.002324833687128679	0.002324833757967865	$7.08391865132662 \times 10^{-11}$
0.5	0.0017739214071528352	0.001773920794275572	$6.01407988080199 \times 10^{-11}$
0.6	0.001397418047002593	0.00139741810056963	$5.356704489700714 \times 10^{-11}$
0.7	0.0011215692753747594	0.00112156932446569	$4.90909346593376 \times 10^{-11}$
0.8	0.0009100227126543259	0.000910022758417987	$4.57636618487675 \times 10^{-11}$
0.9	0.0007427473453034181	0.00074274738838214	$4.30787309036589 \times 10^{-11}$
1.0	0.0006077473773139123	0.000607747418058827	$4.07449148205618 \times 10^{-11}$

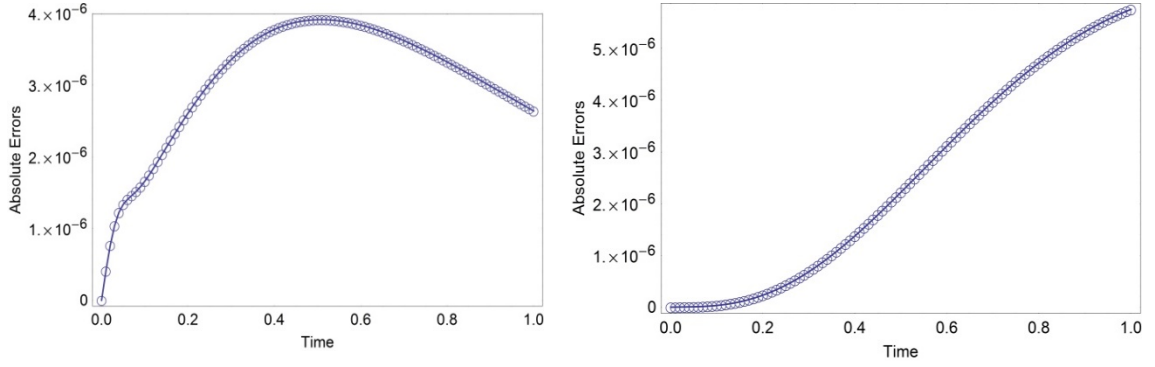
Tablo 4.16. $h = 0.0001$ için Örnek 4.2' nin RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	0.004788438856654205	0.0047884388557498	$9.044015536474603 \times 10^{-13}$
0.2	0.005039304792290868	0.00503930479230404	$1.3171755353091896 \times 10^{-14}$
0.3	0.003226581691867235	0.00322658169187521	$7.98146271296929 \times 10^{-15}$
0.4	0.002324833687128679	0.00232483368713461	$5.934922692185651 \times 10^{-15}$
0.5	0.0017739214071528352	0.001773921407157683	$4.8479015940516845 \times 10^{-15}$
0.6	0.001397418047002593	0.00139741804700677	$4.1772141301521515 \times 10^{-15}$
0.7	0.0011215692753747594	0.001121569275378472	$3.712741919459361 \times 10^{-15}$
0.8	0.0009100227126543259	0.000910022712657602	$3.2762421248166973 \times 10^{-15}$
0.9	0.0007427473453034181	0.00074274734530635	$2.9356942224390004 \times 10^{-15}$
1.0	0.0006077473773139123	0.000607747377316591	$2.678738307559936 \times 10^{-15}$

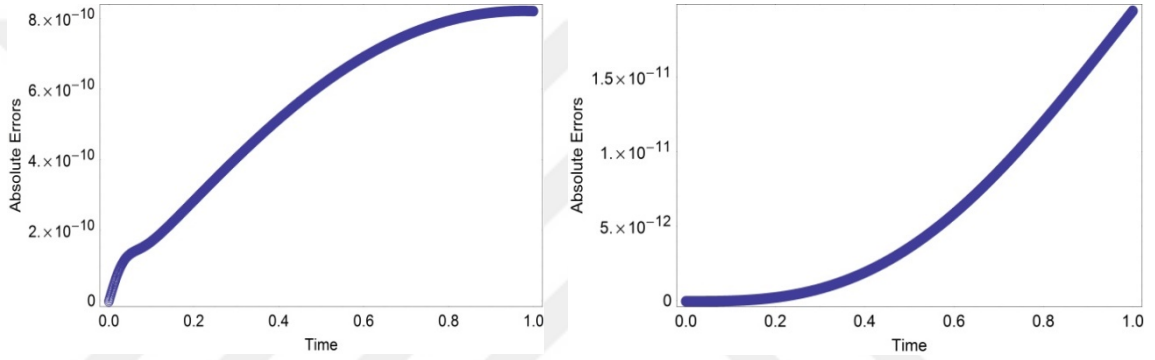
Tablo 4.17. $h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin RK6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	0.004788438856654205	0.004837717260123161	0.000049278403468955984
0.2	0.005039304792290868	0.005037781784523361	$1.523007767506926 \times 10^{-6}$
0.3	0.003226581691867235	0.003225814519644342	$7.671722228931067 \times 10^{-7}$
0.4	0.002324833687128679	0.0023245402564402466	$2.9343068843256867 \times 10^{-7}$
0.5	0.0017739214071528352	-656618.8723835432	656618.8741574646
0.6	0.001397418047002593	$-2.048760833405 \times 10^{24}$	$-2.048760833405 \times 10^{24}$
0.7	0.0011215692753747594	$-1.19995056073 \times 10^{47}$	$-1.19995056073 \times 10^{47}$
0.8	0.0009100227126543259	$-3.167904095235 \times 10^{73}$	$-3.167904095235 \times 10^{73}$
0.9	0.0007427473453034181	$-1.30292768836 \times 10^{103}$	$-1.30292768836 \times 10^{103}$
1.0	0.0006077473773139123	$-3.66849626678 \times 10^{135}$	$-3.66849626678 \times 10^{135}$

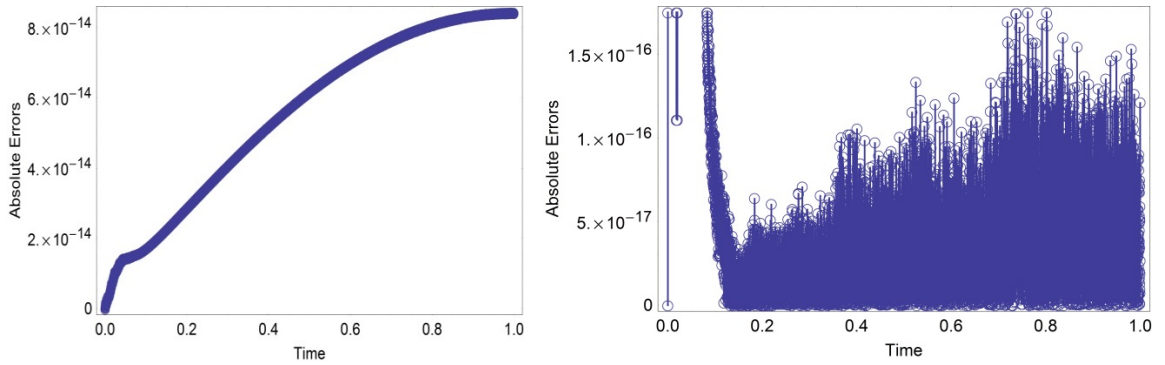
Aşağıda $t \in [0,1]$ için MG4 ve MG6 yöntemleri kullanılarak elde edilen hata grafikleri verilmiştir.



Şekil 4.1. $h = 0.01$ için Örnek 4.2' nin mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ)



Şekil 4.2. $h = 0.001$ için Örnek 4.2' nin mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ)



Şekil 4.3. $h = 0.0001$ için Örnek 4.2' nin mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ)

Bu örnekte görüldüğü gibi, tablolar dikkate alınırsa, MG6 yönteminin aynı zaman aralığında fakat daha küçük adım aralığı için MG4 yönteminden daha iyi sonuç verdiği görülür. Ayrıca daha yüksek adım aralıklarında MG6 yöntemi, RK4 ve RK6 yöntemlerinden daha iyi sonuçlar vermektedir. Sonuç olarak Magnus seri açılım yönteminin stiff adi diferansiyel denklem sistemleri için etkili bir yöntem olduğu görülür [74].

Şimdi, Magnus seri açılım yönteminin farklı mertebeleri arasındaki durumu incelemek için homojen olmayan stiff adi diferansiyel denklem sistemleri ele alınacaktır. Aşağıdaki örnekler homojen olmayan diferansiyel denklem sistemleri olup bu denklem sistemlerinin $A(t)$ matrisinin elemanları sabit değildir. Dolayısıyla Lie operatörü (komütatör) göz ardı edilmemelidir. Yani homojen olmayan stiff adi diferansiyel denklem sistemleri için Magnus seri açılımının dördüncü ve altıncı mertebeleri arasındaki fark kıyaslanabilir.

Örnek 4.3. $y_1(t)$, $y_2(t)$ birinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 9y_1(t) + 24y_2(t) + 5\cos t - \frac{1}{3}\sin t, \\ y_2'(t) &= -24y_1(t) - 51y_2(t) - 9\cos t + \frac{1}{3}\sin t, \\ y_1(0) &= \frac{4}{3}, \quad y_2(0) = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (4.3)$$

başlangıç değer problemi verilsin. Başlangıç değer probleminin analitik çözümü,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2e^{-3t} - e^{-39t} + \frac{1}{3}\cos t \\ y_2(t) &= -e^{-3t} + 2e^{-39t} - \frac{1}{3}\cos t \end{aligned}$$

dir [94].

Denklem (3.42)' den, $A(t) = \begin{bmatrix} 9 & 24 & 5\cos t - \frac{1}{3}\sin t \\ -24 & -51 & -9\cos t + \frac{1}{3}\sin t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $t \in [0,1]$ olmak

üzere, $h = 0.01$, $h = 0.001$, $h = 0.0001$ adım aralıkları için Denklem (3.32) göz önüne alındığında MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi sonucunda elde edilen verilerin ilk 3 adımı aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 4.18. $h = 0.01$ için Örnek 4.3' ün MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.01$	$t = 0.02$	$t = 0.03$
A_1	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.9956 \\ -24 & -51 & -8.9953 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99141 \\ -24 & -51 & -8.99043 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.98672 \\ -24 & -51 & -8.98466 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99324 \\ -24 & -51 & -8.9926 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.98876 \\ -24 & -51 & -8.98721 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.98379 \\ -24 & -51 & -8.98092 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} 0.09 & 0.24 & 0.0499435 \\ -0.24 & -0.51 & -0.0899383 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.09 & 0.24 & 0.0499001 \\ -0.24 & -0.51 & -0.0898867 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.09 & 0.24 & 0.0498516 \\ -0.24 & -0.51 & -0.0898261 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_4)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_4)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_4)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_4)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 1.59715 \\ 0.0503515 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 1.75839 \\ -0.358219 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 1.85068 \\ -0.626381 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tablo 4.19. $h = 0.001$ için Örnek 4.3' ün MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.001$	$t = 0.002$	$t = 0.003$
A_1	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99959 \\ -24 & -51 & -8.99959 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99925 \\ -24 & -51 & -8.99924 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.9989 \\ -24 & -51 & -8.9953 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.9994 \\ -24 & -51 & -8.99939 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99905 \\ -24 & -51 & -8.99904 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99324 \\ -24 & -51 & -8.999888 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} 0.009 & 0.024 & 0.00499949 \\ -0.024 & -0.051 & -0.00899949 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.009 & 0.024 & 0.00499915 \\ -0.024 & -0.051 & -0.00899914 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.009 & 0.024 & 0.0049988 \\ -0.024 & -0.051 & -0.00899878 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_4) y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_4) y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_4) y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_4) y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 1.36559 \\ 0.593164 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 1.3964 \\ 0.522578 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 1.42583 \\ 0.454798 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tablo 4.20. $h = 0.0001$ için Örnek 4.3' ün MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.0001$	$t = 0.0002$	$t = 0.0003$
A_1	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99996 \\ -24 & -51 & -8.99996 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99993 \\ -24 & -51 & -8.99993 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99989 \\ -24 & -51 & -8.99989 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99994 \\ -24 & -51 & -8.99994 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99991 \\ -24 & -51 & -8.99991 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99987 \\ -24 & -51 & -8.99987 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} 0.0009 & 0.0024 & 0.000499995 \\ -0.0024 & -0.0051 & -0.000899995 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0009 & 0.0024 & 0.000499992 \\ -0.0024 & -0.0051 & -0.000899992 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0009 & 0.0024 & 0.000499988 \\ -0.0024 & -0.0051 & -0.000899988 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_4) y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_4) y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_4) y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_4) y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 1.33663 \\ 0.65918 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 1.3399 \\ 0.651727 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 1.34317 \\ 0.644303 \\ 1 \end{bmatrix}$

$t \in [0,1]$ olmak üzere, $h = 0.01$, $h = 0.001$, $h = 0.0001$ adım aralıkları için Denklem (3.39) göz önüne alındığında MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi sonucunda elde edilen verilerin ilk 3 adımı aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 4.21. $h = 0.01$ için Örnek 4.3' ün MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.01$	$t = 0.02$	$t = 0.03$
A_1	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99598 \\ -24 & -51 & -8.99573 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99184 \\ -24 & -51 & -8.99095 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.9872 \\ -24 & -51 & -8.98527 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99444 \\ -24 & -51 & -8.99399 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99011 \\ -24 & -51 & -8.98886 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.98527 \\ -24 & -51 & -8.98282 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_3	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99282 \\ -24 & -51 & -8.99211 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.98829 \\ -24 & -51 & -8.98663 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.98327 \\ -24 & -51 & -8.98025 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00408292 \\ 0 & 0 & 0.0046829 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00458215 \\ 0 & 0 & 0.00558204 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00508092 \\ 0 & 0 & 0.00648063 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.000499443 \\ 0 & 0 & 0.000899398 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00049901 \\ 0 & 0 & 0.00089884 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.000498527 \\ 0 & 0 & 0.000898261 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_6	$\begin{bmatrix} 0.09 & 0.24 & 0.0499435 \\ -0.24 & -0.51 & -0.0899383 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.09 & 0.24 & 0.0499001 \\ -0.24 & -0.51 & -0.0898867 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.09 & 0.24 & 0.0498516 \\ -0.24 & -0.51 & -0.0898261 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_6)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_6)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_6)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_6)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 1.59715 \\ 0.0503515 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 1.75839 \\ -0.358219 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 1.85068 \\ -0.626381 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tablo 4.22. $h = 0.001$ için Örnek 4.3' ün MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.001$	$t = 0.002$	$t = 0.003$
A_1	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99963 \\ -24 & -51 & -8.99962 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99928 \\ -24 & -51 & -8.99928 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99894 \\ -24 & -51 & -8.99892 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99949 \\ -24 & -51 & -8.99949 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99915 \\ -24 & -51 & -8.99914 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.9988 \\ -24 & -51 & -8.99878 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_3	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99936 \\ -24 & -51 & -8.99935 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99902 \\ -24 & -51 & -8.999 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99867 \\ -24 & -51 & -8.99864 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_0	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99949 \\ -24 & -51 & -8.99949 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99915 \\ -24 & -51 & -8.99914 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.9988 \\ -24 & -51 & -8.99878 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.000340833 \\ 0 & 0 & 0.000346833 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.000345832 \\ 0 & 0 & 0.000355832 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.000350831 \\ 0 & 0 & 0.000364831 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00000499949 \\ 0 & 0 & 0.00000899949 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00000499915 \\ 0 & 0 & 0.00000899914 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0000049988 \\ 0 & 0 & 0.00000899878 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_6	$\begin{bmatrix} 0.009 & 0.024 & 0.00499949 \\ -0.024 & -0.051 & -0.00899949 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.009 & 0.024 & 0.00499915 \\ -0.024 & -0.051 & -0.00899914 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.009 & 0.024 & 0.0049988 \\ -0.024 & -0.051 & -0.00899878 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_6)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_6)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_6)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_6)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 1.36559 \\ 0.593164 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 1.3964 \\ 0.522578 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 1.42583 \\ -0.454798 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tablo 4.23. $h = 0.0001$ için Örnek 4.3' ün MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.0001$	$t = 0.0002$	$t = 0.0003$
A_1	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99996 \\ -24 & -51 & -8.99996 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99993 \\ -24 & -51 & -8.99993 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.9999 \\ -24 & -51 & -8.9999 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99995 \\ -24 & -51 & -8.99995 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99992 \\ -24 & -51 & -8.99992 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99988 \\ -24 & -51 & -8.99988 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_3	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99994 \\ -24 & -51 & -8.99994 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.9999 \\ -24 & -51 & -8.9999 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99987 \\ -24 & -51 & -8.99987 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_0	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99995 \\ -24 & -51 & -8.99995 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99992 \\ -24 & -51 & -8.99992 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 24 & 4.99988 \\ -24 & -51 & -8.99988 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0000334083 \\ 0 & 0 & 0.0000334683 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0000334583 \\ 0 & 0 & 0.0000335583 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0000335083 \\ 0 & 0 & 0.0000336483 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4.99995 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & 8.99995 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4.99992 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & 8.99992 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -4.99988 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & 8.99988 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_6	$\begin{bmatrix} 0.0009 & 0.0024 & 0.000499995 \\ -0.0024 & -0.0051 & -0.000899995 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0009 & 0.0024 & 0.000499992 \\ -0.0024 & -0.0051 & -0.000899992 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0009 & 0.0024 & 0.000499988 \\ -0.0024 & -0.0051 & -0.000899988 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_6)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_6)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_6)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_6)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 1.33663 \\ 0.659182 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 1.3399 \\ 0.651727 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 1.34317 \\ -0.644303 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bu şekilde $t = 1$ ' e kadar devam edilirse, MG4 ve MG6 yöntemleri kullanılarak elde edilen gerçek çözüm, yaklaşık çözüm değerleri ile mutlak hata değerleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir [75]. Ayrıca RK4 ve RK6 kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm değerleri ve mutlak hata değerleri de Tablo 4.30, 4.31, 4.32 ve 4.33' te verilmiştir.

Tablo 4.24. $h = 0.01$ için Örnek 4.3' ün MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	1.793062585010306	1.7930625782067209	$6.8035850286918276 \times 10^{-8}$
0.2	1.4239023964894861	1.423902380674598	$1.5814888065790456 \times 10^{-8}$
0.3	1.1315765220372391	1.1315764973215359	$2.4715703261790622 \times 10^{-8}$
0.4	0.9094085872759455	0.9094085539043321	$3.3371613472610306 \times 10^{-8}$
0.5	0.738787837528716	0.7387877958337838	$4.169493217354159 \times 10^{-8}$
0.6	0.6057096480109448	0.605709598408684	$4.960226085426456 \times 10^{-8}$
0.7	0.4998602522660672	0.49986019525163333	$5.701443384076299 \times 10^{-8}$
0.8	0.41367147636118484	0.41367141250391104	$6.385727380209261 \times 10^{-8}$
0.9	0.34161434823638664	0.34161427817406453	$7.006232211059782 \times 10^{-8}$
1.0	0.2796749053584411	0.2796748297909253	$7.5567515800401 \times 10^{-8}$

Tablo 4.25. $h = 0.001$ için Örnek 4.3' ün MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	1.793062585010306	1.7930625850095876	$7.183142969324763 \times 10^{-13}$
0.2	1.4239023964894861	1.4239023964878361	$1.6500134591979077 \times 10^{-12}$
0.3	1.1315765220372391	1.131576522034681	$2.5581758933412857 \times 10^{-12}$
0.4	0.9094085872759455	0.909408587272514	$3.4315883468138964 \times 10^{-12}$
0.5	0.738787837528716	0.7387878375244491	$4.266920150541864 \times 10^{-12}$
0.6	0.6057096480109448	0.6057096480058877	$5.0571768994700506 \times 10^{-12}$
0.7	0.4998602522660672	0.49986025226027	$5.797196056533949 \times 10^{-12}$
0.8	0.41367147636118484	0.41367147635470586	$6.478984015956257 \times 10^{-12}$
0.9	0.34161434823638664	0.34161434822929115	$7.095490861530607 \times 10^{-12}$
1.0	0.2796749053584411	0.2796749053507996	$7.641498545041259 \times 10^{-12}$

Tablo 4.26. $h = 0.0001$ için Örnek 4.3' ün MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	1.793062585010306	1.7930625850105464	$2.404743071338089 \times 10^{-13}$
0.2	1.4239023964894861	1.4239023964898885	$4.0234482412415673 \times 10^{-13}$
0.3	1.1315765220372391	1.1315765220377074	$4.68292071786891 \times 10^{-13}$
0.4	0.9094085872759455	0.9094085872764311	$4.856115509710435 \times 10^{-13}$
0.5	0.738787837528716	0.7387878375291873	$4.71289673953379 \times 10^{-13}$
0.6	0.6057096480109448	0.6057096480113842	$4.3931525084417444 \times 10^{-13}$
0.7	0.4998602522660672	0.4998602522664684	$4.0123460109953157 \times 10^{-13}$
0.8	0.41367147636118484	0.4136714763615437	$3.5887959271008185 \times 10^{-13}$
0.9	0.34161434823638664	0.3416143482367031	$3.1646907316940087 \times 10^{-13}$
1.0	0.2796749053584411	0.27967490535871603	$2.7494673204842 \times 10^{-13}$

Tablo 4.27. $h = 0.01$ için Örnek 4.3' ün MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	1.793062585010306	1.793062585034908	$2.460209813648362 \times 10^{-11}$
0.2	1.4239023964894861	1.4239023965466797	$5.719358320277479 \times 10^{-11}$
0.3	1.1315765220372391	1.13157652212662	$8.93809470881024 \times 10^{-11}$
0.4	0.9094085872759455	0.9094085873966254	$1.2067991050912497 \times 10^{-10}$
0.5	0.738787837528716	0.7387878376794886	$1.507726166138923 \times 10^{-10}$
0.6	0.6057096480109448	0.6057096481903044	$1.7935952723036053 \times 10^{-10}$
0.7	0.4998602522660672	0.49986025247222116	$2.0615398277357144 \times 10^{-10}$
0.8	0.41367147636118484	0.4136714765920734	$2.3088853051689284 \times 10^{-10}$
0.9	0.34161434823638664	0.34161434848970246	$2.5331581277043824 \times 10^{-10}$
1.0	0.2796749053584411	0.2796749056316528	$2.7321173101668705 \times 10^{-10}$

Tablo 4.28. $h = 0.001$ için Örnek 4.3' ün MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	1.793062585010306	1.793062585010273	$3.2862601528904634 \times 10^{-14}$
0.2	1.4239023964894861	1.4239023964894257	$6.039613253960852 \times 10^{-14}$
0.3	1.1315765220372391	1.1315765220371654	$7.37188088351104 \times 10^{-14}$
0.4	0.9094085872759455	0.9094085872758669	$7.860379014346108 \times 10^{-14}$
0.5	0.738787837528716	0.7387878375286369	$7.915890165577366 \times 10^{-14}$
0.6	0.6057096480109448	0.6057096480108688	$7.605027718682322 \times 10^{-14}$
0.7	0.4998602522660672	0.49986025226599434	$7.283063041541027 \times 10^{-14}$
0.8	0.41367147636118484	0.41367147636111745	$6.7390537594747 \times 10^{-14}$
0.9	0.34161434823638664	0.341614348236325	$6.161737786669619 \times 10^{-14}$
1.0	0.2796749053584411	0.2796749053583856	$5.551115123125783 \times 10^{-14}$

Tablo 4.29. $h = 0.0001$ için Örnek 4.3' ün MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	1.793062585010306	1.7930625850105466	$2.4069635173873394 \times 10^{-13}$
0.2	1.4239023964894861	1.4239023964898883	$4.021227795192317 \times 10^{-13}$
0.3	1.1315765220372391	1.1315765220377079	$4.687361609967411 \times 10^{-13}$
0.4	0.9094085872759455	0.909408587276432	$4.864997293907436 \times 10^{-13}$
0.5	0.738787837528716	0.7387878375291872	$4.711786516509164 \times 10^{-13}$
0.6	0.6057096480109448	0.6057096480113843	$4.3942627314663696 \times 10^{-13}$
0.7	0.4998602522660672	0.4998602522664691	$4.0190073491430667 \times 10^{-13}$
0.8	0.41367147636118484	0.4136714763615445	$3.5965674882731946 \times 10^{-13}$
0.9	0.34161434823638664	0.3416143482367027	$3.1608049511078207 \times 10^{-13}$
1.0	0.2796749053584411	0.2796749053587161	$2.750022431996513 \times 10^{-13}$

Tablo 4.30. $h = 0.01$ Örnek 4.3' ün RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	1.793062585010306	1.7930414623401851	0.000021122670120776732
0.2	1.4239023964894861	1.4239015251954412	$8.712940449129292 \times 10^{-7}$
0.3	1.1315765220372391	1.1315764805821242	$4.145511489639375 \times 10^{-8}$
0.4	0.9094085872759455	0.9094085716960022	$1.5579943335453095 \times 10^{-8}$
0.5	0.738787837528716	0.7387878231359544	$1.4392761649162367 \times 10^{-8}$
0.6	0.6057096480109448	0.60570963418923	$1.3821714883732739 \times 10^{-8}$
0.7	0.4998602522660672	0.4998602391363671	$1.3129700049407944 \times 10^{-8}$
0.8	0.41367147636118484	0.4136714641052963	$1.2255888526269132 \times 10^{-8}$
0.9	0.34161434823638664	0.3416143370524767	$1.1183909964795902 \times 10^{-8}$
1.0	0.2796749053584411	0.27967489544244406	$9.915997023490775 \times 10^{-9}$

Tablo 4.31. $h = 0.001$ için Örnek 4.3' ün RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	1.793062585010306	1.7930625834366276	$1.5736782987829656 \times 10^{-9}$
0.2	1.4239023964894861	1.4239023964245106	$6.497558047158236 \times 10^{-11}$
0.3	1.1315765220372391	1.1315765220340672	$3.1719071813540722 \times 10^{-12}$
0.4	0.9094085872759455	0.9094085872747049	$1.2406742300186124 \times 10^{-12}$
0.5	0.738787837528716	0.7387878375275637	$1.15230047725845 \times 10^{-12}$
0.6	0.6057096480109448	0.6057096480098338	$1.1110001807423942 \times 10^{-12}$
0.7	0.4998602522660672	0.4998602522650073	$1.0598744104584057 \times 10^{-12}$
0.8	0.41367147636118484	0.4136714763601927	$9.921508059562711 \times 10^{-13}$
0.9	0.34161434823638664	0.3416143482354787	$9.07940389538453 \times 10^{-13}$
1.0	0.2796749053584411	0.2796749053576344	$8.066880496926387 \times 10^{-13}$

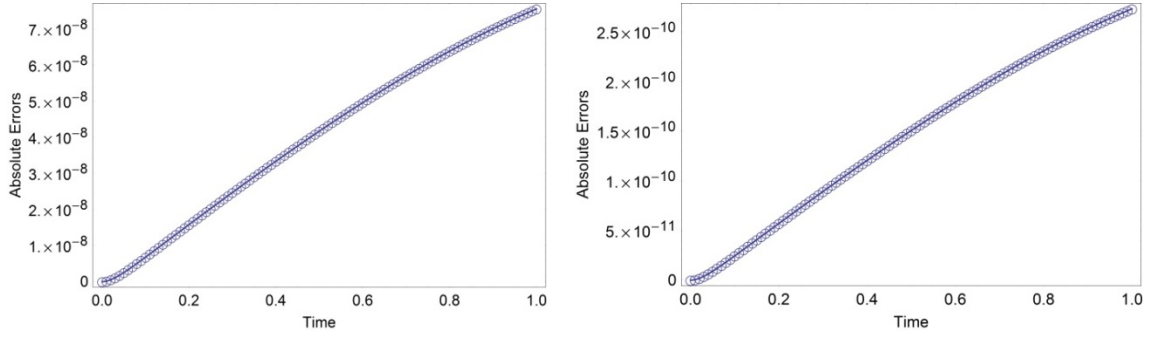
Tablo 4.32. $h = 0.0001$ için Örnek 4.3' ün RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	1.793062585010306	1.7930625850101582	$1.4765966227514582 \times 10^{-13}$
0.2	1.4239023964894861	1.4239023964894788	$7.327471962526033 \times 10^{-15}$
0.3	1.1315765220372391	1.1315765220372385	$6.661338147750939 \times 10^{-16}$
0.4	0.9094085872759455	0.9094085872759476	$2.1094237467877974 \times 10^{-15}$
0.5	0.738787837528716	0.7387878375287192	$3.219646771412954 \times 10^{-15}$
0.6	0.6057096480109448	0.6057096480109463	$1.4432899320127035 \times 10^{-15}$
0.7	0.4998602522660672	0.4998602522660685	$1.3322676295501878 \times 10^{-15}$
0.8	0.41367147636118484	0.41367147636118506	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$
0.9	0.34161434823638664	0.3416143482363867	$5.551115123125783 \times 10^{-17}$
1.0	0.2796749053584411	0.27967490535844186	$7.771561172376096 \times 10^{-16}$

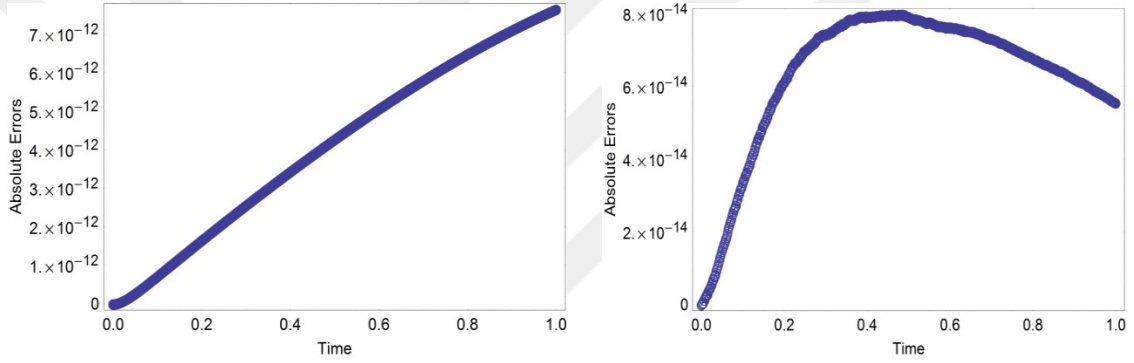
Tablo 4.33. $h = 0.01$ Örnek 4.3' ün RK6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	1.793062585010306	1.7930659182669237	$3.3332566178323475 \times 10^{-6}$
0.2	1.4239023964894861	1.4239025332049915	$1.3671550536109578 \times 10^{-7}$
0.3	1.1315765220372391	1.1315765279447954	$5.907556221984578 \times 10^{-9}$
0.4	0.9094085872759455	0.9094085891411984	$1.8652528410711966 \times 10^{-9}$
0.5	0.738787837528716	0.7387878392132065	$1.6844904360269197 \times 10^{-9}$
0.6	0.6057096480109448	0.6057096496039595	$1.5930146091136521 \times 10^{-9}$
0.7	0.4998602522660672	0.499860253754371	$1.488303813523828 \times 10^{-9}$
0.8	0.41367147636118484	0.41367147772938784	$1.3682029953443475 \times 10^{-9}$
0.9	0.34161434823638664	0.34161434946994307	$1.2335564236742869 \times 10^{-9}$
1.0	0.2796749053584411	0.2796749064440469	$1.085605827455538 \times 10^{-9}$

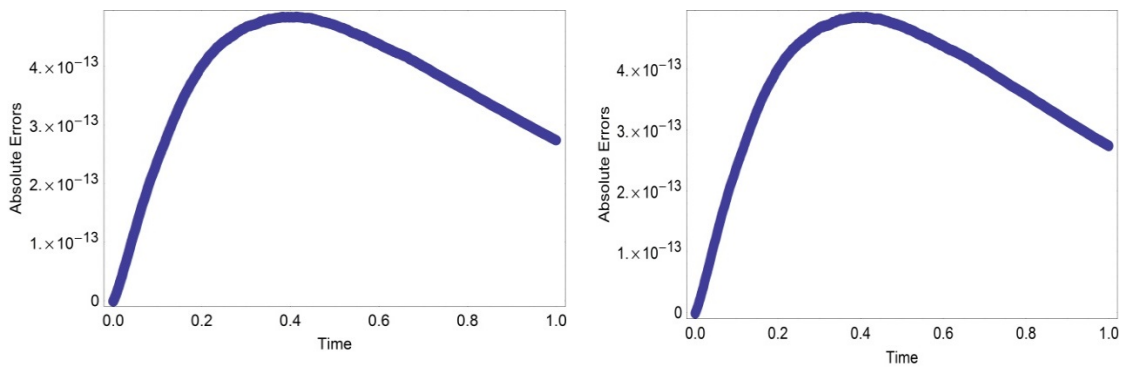
Aşağıda $t \in [0,1]$ için MG4 ve MG6 yöntemleri kullanılarak elde edilen hata grafikleri verilmiştir.



Şekil 4.4. $h = 0.01$ için Örnek 4.3' ün mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ)



Şekil 4.5. $h = 0.001$ için Örnek 4.3' ün mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ)



Şekil 4.6. $h = 0.0001$ için Örnek 4.3' ün mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ)

Örnek 4.4. $y_1(t)$, $y_2(t)$ birinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= -3y_1(t) + 2y_2(t) + 3\cos t - 3\sin t, \\y_2'(t) &= 2y_1(t) - 3y_2(t) - \cos t + 3\sin t, \\y_1(0) &= 1, \quad y_2(0) = 0\end{aligned}\tag{4.4}$$

başlangıç değer problemi verilsin. Başlangıç değer probleminin analitik çözümü,

$$y_1(t) = \cos t,$$

$$y_2(t) = \sin t$$

dür [32].

Denklem (3.42)' den, $A(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3\cos t - 3\sin t \\ 2 & -3 & -\cos t + 3\sin t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere,

$h = 0.01$, $h = 0.001$, $h = 0.0001$ adım aralıkları için Denklem (3.32) göz önüne alındığında MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi sonucunda elde edilen verilerin ilk 3 adımı aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 4.34. $h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.01$	$t = 0.02$	$t = 0.03$
A_1	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.96344 \\ 2 & -3 & -0.963588 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.93293 \\ 2 & -3 & -0.933421 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.90213 \\ 2 & -3 & -0.903161 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.94586 \\ 2 & -3 & -0.946183 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.91518 \\ 2 & -3 & -0.915962 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.88421 \\ 2 & -3 & -0.885649 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} -0.03 & 0.02 & 0.0295453 \\ 0.02 & -0.03 & -0.00954759 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.03 & 0.02 & 0.0292393 \\ 0.02 & -0.03 & -0.00924565 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.03 & 0.02 & 0.0289304 \\ 0.02 & -0.03 & -0.00894278 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_4)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_4)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_4)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_4)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 0.99995 \\ 0.00999983 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 0.9998 \\ 0.0199987 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 0.99955 \\ 0.0299955 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tablo 4.35. $h = 0.001$ için Örnek 4.4' ün MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.001$	$t = 0.002$	$t = 0.003$
A_1	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99636 \\ 2 & -3 & -0.996365 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99336 \\ 2 & -3 & -0.993364 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99035 \\ 2 & -3 & -0.990361 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99463 \\ 2 & -3 & -0.994632 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99162 \\ 2 & -3 & -0.99163 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.98861 \\ 2 & -3 & -0.988627 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} -0.003 & 0.002 & 0.0029955 \\ 0.002 & -0.003 & -0.000995498 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.003 & 0.002 & 0.00299249 \\ 0.002 & -0.003 & -0.000992496 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.003 & 0.002 & 0.00298948 \\ 0.002 & -0.003 & -0.000989493 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_4) y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_4) y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_4) y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_4) y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.001 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 0.999998 \\ 0.002 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 0.999996 \\ 0.003 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tablo 4.36. $h = 0.0001$ için Örnek 4.4' ün MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.0001$	$t = 0.0002$	$t = 0.0003$
A_1	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99964 \\ 2 & -3 & -0.999637 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99934 \\ 2 & -3 & -0.999337 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99904 \\ 2 & -3 & -0.999037 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99946 \\ 2 & -3 & -0.999463 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99916 \\ 2 & -3 & -0.999163 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99886 \\ 2 & -3 & -0.998863 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} -0.0003 & 0.0002 & 0.000299955 \\ 0.0002 & -0.0003 & -0.000099955 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0003 & 0.0002 & 0.000299925 \\ 0.0002 & -0.0003 & -0.000099925 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0003 & 0.0002 & 0.000299895 \\ 0.0002 & -0.0003 & -0.000099895 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_4) y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_4) y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_4) y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_4) y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0001 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0002 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0003 \\ 1 \end{bmatrix}$

$t \in [0,1]$ olmak üzere, $h = 0.01$, $h = 0.001$, $h = 0.0001$ adım aralıkları için Denklem (3.39) göz önüne alındığında MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi sonucunda elde edilen verilerin ilk 3 adımı aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 4.37. $h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.01$	$t = 0.02$	$t = 0.03$
A_1	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.96643 \\ 2 & -3 & -0.966558 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.93595 \\ 2 & -3 & -0.9364 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.90518 \\ 2 & -3 & -0.90615 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.95466 \\ 2 & -3 & -0.954889 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.92407 \\ 2 & -3 & -0.924695 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.89318 \\ 2 & -3 & -0.894409 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_3	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.94285 \\ 2 & -3 & -0.943206 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.91214 \\ 2 & -3 & -0.912976 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.88114 \\ 2 & -3 & -0.882655 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0304465 \\ 0 & 0 & 0.0301465 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0307405 \\ 0 & 0 & 0.0302405 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0310313 \\ 0 & 0 & 0.0303315 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.000295466 \\ 0 & 0 & 0.0000954888 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.000292407 \\ 0 & 0 & 0.0000924694 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0002893186 \\ 0 & 0 & 0.0000894408 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_6	$\begin{bmatrix} -0.03 & 0.02 & 0.0295453 \\ 0.02 & -0.03 & -0.00954759 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.03 & 0.02 & 0.0292393 \\ 0.02 & -0.03 & -0.00924565 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.03 & 0.02 & 0.0289304 \\ 0.02 & -0.03 & -0.00894278 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_6)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_6)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_6)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_6)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 0.99995 \\ 0.00999983 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 0.9998 \\ 0.0199987 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 0.99955 \\ 0.0299955 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tablo 4.38. $h = 0.001$ için Örnek 4.4' ün MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.001$	$t = 0.002$	$t = 0.003$
A_1	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99666 \\ 2 & -3 & -0.996661 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99366 \\ 2 & -3 & -0.99366 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99065 \\ 2 & -3 & -0.990657 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.9955 \\ 2 & -3 & -0.995499 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99249 \\ 2 & -3 & -0.992497 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.98948 \\ 2 & -3 & -0.989494 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_3	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99433 \\ 2 & -3 & -0.994336 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99133 \\ 2 & -3 & -0.991334 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.98832 \\ 2 & -3 & -0.988331 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_0	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.9955 \\ 2 & -3 & -0.995499 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99249 \\ 2 & -3 & -0.992497 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.98948 \\ 2 & -3 & -0.989494 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0030045 \\ 0 & 0 & 0.0030015 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00300749 \\ 0 & 0 & 0.00300249 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00301048 \\ 0 & 0 & 0.00300348 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.000002995 \\ 0 & 0 & 9.95499 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00000299249 \\ 0 & 0 & 9.92497 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00000298948 \\ 0 & 0 & 9.89494 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_6	$\begin{bmatrix} -0.003 & 0.002 & 0.0029955 \\ 0.002 & -0.003 & -0.000995498 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.003 & 0.002 & 0.00299249 \\ 0.002 & -0.003 & -0.000992496 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.003 & 0.002 & 0.00298948 \\ 0.002 & -0.003 & -0.000989493 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_6)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_6)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_6)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_6)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.001 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 0.999998 \\ 0.002 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 0.999996 \\ 0.003 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tablo 4.39. $h = 0.0001$ için Örnek 4.4' ün MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.0001$	$t = 0.0002$	$t = 0.0003$
A_1	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99967 \\ 2 & -3 & -0.999666 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99937 \\ 2 & -3 & -0.999366 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99907 \\ 2 & -3 & -0.999066 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99955 \\ 2 & -3 & -0.99955 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99925 \\ 2 & -3 & -0.99925 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99895 \\ 2 & -3 & -0.99895 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_3	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99943 \\ 2 & -3 & -0.999434 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99913 \\ 2 & -3 & -0.999134 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2.99883 \\ 2 & -3 & -0.998834 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.000300045 \\ 0 & 0 & 0.000300015 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.000300075 \\ 0 & 0 & 0.000300025 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.000300105 \\ 0 & 0 & 0.000300035 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.99955 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & 9.9955 \times 10^{-9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.99925 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & 9.9925 \times 10^{-9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.99895 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & 9.9895 \times 10^{-9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_6	$\begin{bmatrix} -0.0003 & 0.0002 & 0.000299955 \\ 0.0002 & -0.0003 & -0.000099955 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0003 & 0.0002 & 0.000299925 \\ 0.0002 & -0.0003 & -0.000099925 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0003 & 0.0002 & 0.000299895 \\ 0.0002 & -0.0003 & -0.000099895 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_6)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_6)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_6)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_6)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0001 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0002 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0003 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bu şekilde $t = 1$ ' e kadar devam edilirse, MG4 ve MG6 yöntemleri kullanılarak elde edilen gerçek çözüm, yaklaşık çözüm değerleri ve mutlak hata değerleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir [75]. Ayrıca RK4 ve RK6 yöntemleri kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm değerleri ve mutlak hata değerleri de Tablo 4.46, 4.47, 4.48 ve 4.49' da verilmiştir.

Tablo 4.40. $h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9950041652780258	0.9950041648936438	$3.84381970697234 \times 10^{-10}$
0.2	0.9800665778412416	0.9800665771916226	$6.496190252391898 \times 10^{-10}$
0.3	0.955336489125606	0.9553364882870825	$8.385234728791602 \times 10^{-10}$
0.4	0.9210609940028851	0.9210609930261116	$9.76773550931398 \times 10^{-10}$
0.5	0.8775825618903728	0.8775825608106744	$1.0796983307415076 \times 10^{-9}$
0.6	0.8253356149096783	0.8253356137532794	$1.1563989765761562 \times 10^{-9}$
0.7	0.7648421872844884	0.7648421860722431	$1.2122453041385484 \times 10^{-9}$
0.8	0.6967067093471654	0.6967067080967697	$1.2503956758891377 \times 10^{-9}$
0.9	0.6216099682706644	0.6216099669979467	$1.2727177089999486 \times 10^{-9}$
1.0	0.5403023058681398	0.5403023045877927	$1.2803470506028702 \times 10^{-9}$

Tablo 4.41. $h = 0.001$ için Örnek 4.4' ün MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9950041652780258	0.9950041652779738	$5.206945985491984 \times 10^{-14}$
0.2	0.9800665778412416	0.9800665778411536	$8.804068585277491 \times 10^{-14}$
0.3	0.955336489125606	0.955336489125491	$1.1501910535116622 \times 10^{-13}$
0.4	0.9210609940028851	0.9210609940027498	$1.3533618670180658 \times 10^{-13}$
0.5	0.8775825618903728	0.8775825618902209	$1.5187850976872141 \times 10^{-13}$
0.6	0.8253356149096783	0.825335614909514	$1.6431300764452317 \times 10^{-13}$
0.7	0.7648421872844884	0.764842187284314	$1.744160371686121 \times 10^{-13}$
0.8	0.6967067093471654	0.6967067093469831	$1.822986206434507 \times 10^{-13}$
0.9	0.6216099682706644	0.6216099682704775	$1.8685053504441385 \times 10^{-13}$
1.0	0.5403023058681398	0.5403023058679502	$1.8951507030351422 \times 10^{-13}$

Tablo 4.42. $h = 0.0001$ için Örnek 4.4' ün MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9950041652780258	0.9950041652778887	$1.3711254354120683 \times 10^{-13}$
0.2	0.9800665778412416	0.98006657784109	$1.5165646516379638 \times 10^{-13}$
0.3	0.955336489125606	0.9553364891254453	$1.6064927166326015 \times 10^{-13}$
0.4	0.9210609940028851	0.921060994002713	$1.7208456881689926 \times 10^{-13}$
0.5	0.8775825618903728	0.8775825618901901	$1.8263168755083825 \times 10^{-13}$
0.6	0.8253356149096783	0.8253356149094869	$1.91402449445377 \times 10^{-13}$
0.7	0.7648421872844884	0.7648421872842888	$1.9961809982760315 \times 10^{-13}$
0.8	0.6967067093471654	0.6967067093469571	$2.0827783941967937 \times 10^{-13}$
0.9	0.6216099682706644	0.6216099682704511	$2.1327384303049257 \times 10^{-13}$
1.0	0.5403023058681398	0.5403023058679219	$2.1782575743145571 \times 10^{-13}$

Tablo 4.43. $h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9950041652780258	0.9950041652780464	$2.0539125955565396 \times 10^{-14}$
0.2	0.9800665778412416	0.9800665778412767	$3.5083047578154947 \times 10^{-14}$
0.3	0.955336489125606	0.9553364891256515	$4.551914400963142 \times 10^{-14}$
0.4	0.9210609940028851	0.9210609940029385	$5.340172748447003 \times 10^{-14}$
0.5	0.8775825618903728	0.8775825618904324	$5.96189764223709 \times 10^{-14}$
0.6	0.8253356149096783	0.8253356149097423	$6.394884621840902 \times 10^{-14}$
0.7	0.7648421872844884	0.7648421872845552	$6.683542608243442 \times 10^{-14}$
0.8	0.6967067093471654	0.6967067093472343	$6.894484982922222 \times 10^{-14}$
0.9	0.6216099682706644	0.6216099682707338	$6.938893903907228 \times 10^{-14}$
1.0	0.5403023058681398	0.5403023058682087	$6.894484982922222 \times 10^{-14}$

Tablo 4.44. $h = 0.001$ için Örnek 4.4' ün MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9950041652780258	0.9950041652780135	$1.2323475573339238 \times 10^{-14}$
0.2	0.9800665778412416	0.9800665778412192	$2.2426505097428162 \times 10^{-14}$
0.3	0.955336489125606	0.9553364891255754	$3.0531133177191805 \times 10^{-14}$
0.4	0.9210609940028851	0.9210609940028475	$3.7636560534792807 \times 10^{-14}$
0.5	0.8775825618903728	0.8775825618903297	$4.3076653355456074 \times 10^{-14}$
0.6	0.8253356149096783	0.8253356149096305	$4.785061236134425 \times 10^{-14}$
0.7	0.7648421872844884	0.7648421872844372	$5.1181281435219717 \times 10^{-14}$
0.8	0.6967067093471654	0.6967067093471102	$5.517808432387028 \times 10^{-14}$
0.9	0.6216099682706644	0.6216099682706065	$5.784261958297066 \times 10^{-14}$
1.0	0.5403023058681398	0.5403023058680788	$6.09512440519211 \times 10^{-14}$

Tablo 4.45. $h = 0.0001$ için Örnek 4.4' ün MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9950041652780258	0.9950041652778887	$1.3711254354120683 \times 10^{-13}$
0.2	0.9800665778412416	0.98006657784109	$1.5165646516379638 \times 10^{-13}$
0.3	0.955336489125606	0.9553364891254453	$1.6064927166326015 \times 10^{-13}$
0.4	0.9210609940028851	0.921060994002713	$1.7208456881689926 \times 10^{-13}$
0.5	0.8775825618903728	0.8775825618901901	$1.8263168755083825 \times 10^{-13}$
0.6	0.8253356149096783	0.8253356149094869	$1.91402449445377 \times 10^{-13}$
0.7	0.7648421872844884	0.7648421872842888	$1.9961809982760315 \times 10^{-13}$
0.8	0.6967067093471654	0.6967067093469573	$2.0805579481475434 \times 10^{-13}$
0.9	0.6216099682706644	0.6216099682704513	$2.1305179842556754 \times 10^{-13}$
1.0	0.5403023058681398	0.540302305867922	$2.177147351289932 \times 10^{-13}$

Tablo 4.46. $h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	0.9950041652780258	0.9950041648144818	$4.635439809774766 \times 10^{-10}$
0.2	0.9800665778412416	0.9800665771548406	$6.864010471119286 \times 10^{-10}$
0.3	0.955336489125606	0.9553364883664646	$7.591414163954369 \times 10^{-10}$
0.4	0.9210609940028851	0.921060993265555	$7.373300858759535 \times 10^{-10}$
0.5	0.8775825618903728	0.8775825612350378	$6.553350084814724 \times 10^{-10}$
0.6	0.8253356149096783	0.8253356143749834	$5.346949549789315 \times 10^{-10}$
0.7	0.7648421872844884	0.7648421868953	$3.8918834821544124 \times 10^{-10}$
0.8	0.6967067093471654	0.696706709119265	$2.2790036524611423 \times 10^{-10}$
0.9	0.6216099682706644	0.6216099682135885	$5.707589956216452 \times 10^{-11}$
1.0	0.5403023058681398	0.5403023059869032	$1.1876344352401702 \times 10^{-10}$

Tablo 4.47. $h = 0.001$ için Örnek 4.4' ün RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	0.9950041652780258	0.9950041652779805	$4.529709940470639 \times 10^{-14}$
0.2	0.9800665778412416	0.9800665778411745	$6.716849298982197 \times 10^{-14}$
0.3	0.955336489125606	0.9553364891255325	$7.349676423018536 \times 10^{-14}$
0.4	0.9210609940028851	0.9210609940028136	$7.149836278586008 \times 10^{-14}$
0.5	0.8775825618903728	0.8775825618903093	$6.350475700855895 \times 10^{-14}$
0.6	0.8253356149096783	0.8253356149096267	$5.162537064506978 \times 10^{-14}$
0.7	0.7648421872844884	0.764842187284451	$3.7414515929867775 \times 10^{-14}$
0.8	0.6967067093471654	0.6967067093471437	$2.1649348980190553 \times 10^{-14}$
0.9	0.6216099682706644	0.62160996827066	$4.440892098500626 \times 10^{-15}$
1.0	0.5403023058681398	0.5403023058681519	$1.2101430968414206 \times 10^{-14}$

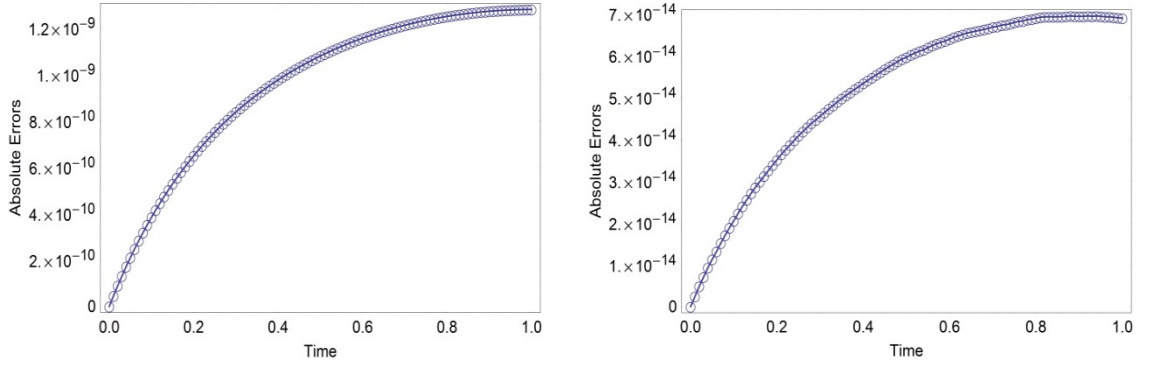
Tablo 4.48. $h = 0.0001$ için Örnek 4.4' ün RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	0.9950041652780258	0.995004165278025	$7.771561172376096 \times 10^{-16}$
0.2	0.9800665778412416	0.9800665778412408	$7.771561172376096 \times 10^{-16}$
0.3	0.955336489125606	0.9553364891256052	$7.771561172376096 \times 10^{-16}$
0.4	0.9210609940028851	0.9210609940028847	$4.440892098500626 \times 10^{-16}$
0.5	0.8775825618903728	0.8775825618903728	0
0.6	0.8253356149096783	0.8253356149096781	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$
0.7	0.7648421872844884	0.7648421872844875	$8.881784197001252 \times 10^{-16}$
0.8	0.6967067093471654	0.6967067093471654	0
0.9	0.6216099682706644	0.6216099682706654	$9.992007221626409 \times 10^{-16}$
1.0	0.5403023058681398	0.540302305868142	$2.220446049250313 \times 10^{-15}$

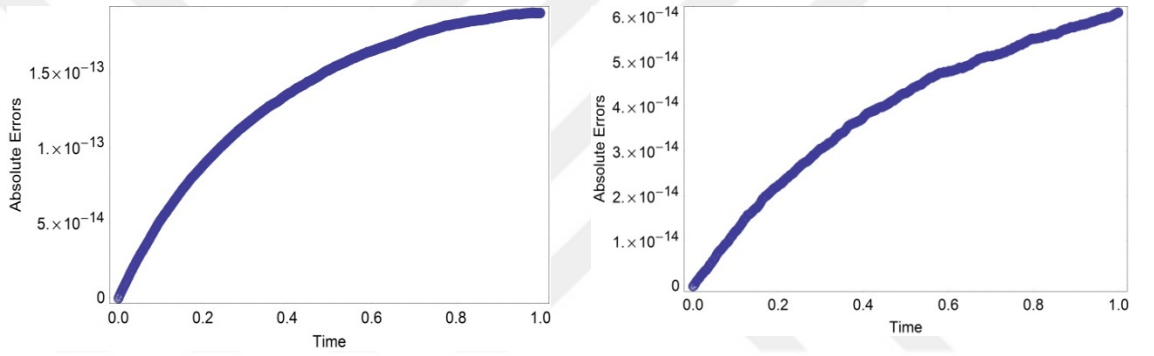
Tablo 4.49. $h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün RK6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	0.9950041652780258	0.9950041652840004	$5.9745541847178174 \times 10^{-12}$
0.2	0.9800665778412416	0.9800665778502373	$8.995693079327793 \times 10^{-12}$
0.3	0.955336489125606	0.9553364891357782	$1.0172196418523072 \times 10^{-11}$
0.4	0.9210609940028851	0.9210609940130678	$1.018274353725701 \times 10^{-11}$
0.5	0.8775825618903728	0.8775825618998189	$9.44611056041822 \times 10^{-12}$
0.6	0.8253356149096783	0.8253356149179021	$8.223755010305922 \times 10^{-12}$
0.7	0.7648421872844884	0.7648421872911705	$6.68209931831143 \times 10^{-12}$
0.8	0.6967067093471654	0.6967067093520952	$4.929834318545545 \times 10^{-12}$
0.9	0.6216099682706644	0.6216099682737057	$3.041344953658154 \times 10^{-12}$
1.0	0.5403023058681398	0.5403023058692095	$1.0696998842263383 \times 10^{-12}$

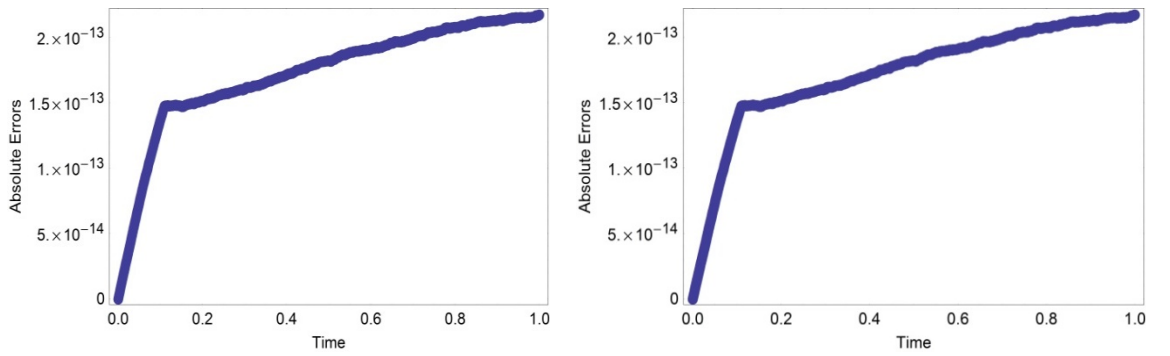
Aşağıda $t \in [0,1]$ için MG4 ve MG6 yöntemleri kullanılarak elde edilen hata grafikleri verilmiştir.



Şekil 4.7. $h = 0.01$ için Örnek 4.4' ün mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ)



Şekil 4.8. $h = 0.001$ için Örnek 4.4' ün mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ)



Şekil 4.9. $h = 0.0001$ için Örnek 4.4' ün mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ)

Örnek 4.5. $y_1(t)$, $y_2(t)$ birinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned}y'_1(t) &= -y_1(t) - 15y_2(t) + 15e^{-t}, \\y'_2(t) &= 15y_1(t) - y_2(t) - 15e^{-t}, \\y_1(0) &= 1, \quad y_2(0) = 1\end{aligned}\tag{4.5}$$

başlangıç değer problemi verilsin. Başlangıç değer probleminin analitik çözümü, $y_1(t) = e^{-t}$, $y_2(t) = e^{-t}$ dür [12].

Denklem (3.42)' den, $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & -15 & 15e^{-t} \\ 15 & -1 & -15e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere,

$h = 0.01$, $h = 0.001$, $h = 0.0001$ adım aralıkları için Denklem (3.32) göz önüne alındığında MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi sonucunda elde edilen verilerin ilk 3 adımını aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 4.50. $h = 0.01$ için Örnek 4.5' in MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.01$	$t = 0.02$	$t = 0.03$
A_1	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.8194 \\ 15 & -1 & -14.8194 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.6719 \\ 15 & -1 & -14.6719 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.526 \\ 15 & -1 & -14.526 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.7341 \\ 15 & -1 & -14.7341 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.5875 \\ 15 & -1 & -14.5875 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.4423 \\ 15 & -1 & -14.4423 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} -0.01 & -0.15 & 0.147785 \\ 0.15 & -0.01 & -0.147748 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.01 & -0.15 & 0.146314 \\ 0.15 & -0.01 & -0.146278 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.01 & -0.15 & 0.144858 \\ 0.15 & -0.01 & -0.144822 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_4)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_4)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_4)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_4)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 0.99005 \\ 0.99005 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 0.980199 \\ 0.980199 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 0.970446 \\ 0.970446 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tablo 4.51. $h = 0.001$ için Örnek 4.5' in MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.001$	$t = 0.002$	$t = 0.003$
A_1	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9818 \\ 15 & -1 & -14.9818 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9669 \\ 15 & -1 & -14.9669 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9519 \\ 15 & -1 & -14.9519 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9732 \\ 15 & -1 & -14.9732 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9582 \\ 15 & -1 & -14.9582 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9433 \\ 15 & -1 & -14.9433 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} -0.001 & -0.015 & 0.0149775 \\ 0.015 & -0.001 & -0.0149775 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.001 & -0.015 & 0.0149626 \\ 0.015 & -0.001 & -0.0149626 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.001 & -0.015 & 0.0149476 \\ 0.015 & -0.001 & -0.0149476 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_4) y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_4) y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_4) y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_4) y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 0.999 \\ 0.999 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 0.998002 \\ 0.998002 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 0.997004 \\ 0.997004 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tablo 4.52. $h = 0.0001$ için Örnek 4.5' in MG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.0001$	$t = 0.0002$	$t = 0.0003$
A_1	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9982 \\ 15 & -1 & -14.9982 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9967 \\ 15 & -1 & -14.9967 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9952 \\ 15 & -1 & -14.9952 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9973 \\ 15 & -1 & -14.9973 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9958 \\ 15 & -1 & -14.9958 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9943 \\ 15 & -1 & -14.9943 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} -0.0001 & -0.0015 & 0.00149978 \\ 0.0015 & -0.0001 & -0.00149977 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0001 & -0.0015 & 0.00149963 \\ 0.0015 & -0.0001 & -0.00149963 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0001 & -0.0015 & 0.00149948 \\ 0.0015 & -0.0001 & -0.00149948 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_4)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_4)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_4)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_4)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 0.9999 \\ 0.9999 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 0.9998 \\ 0.9998 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 0.9997 \\ 0.9997 \\ 1 \end{bmatrix}$

$t \in [0,1]$ olmak üzere, $h = 0.01$, $h = 0.001$, $h = 0.0001$ adım aralıkları için Denklem (3.39) göz önüne alındığında MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi sonucunda elde edilen verilerin ilk 3 adımı aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 4.53. $h = 0.01$ için Örnek 4.5' in MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.01$	$t = 0.02$	$t = 0.03$
A_1	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.834 \\ 15 & -1 & -14.834 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.6864 \\ 15 & -1 & -14.6864 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.5403 \\ 15 & -1 & -14.5403 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.7767 \\ 15 & -1 & -14.7767 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.6296 \\ 15 & -1 & -14.6296 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.4841 \\ 15 & -1 & -14.4841 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_3	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.7196 \\ 15 & -1 & -14.7196 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.5731 \\ 15 & -1 & -14.5731 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.4281 \\ 15 & -1 & -14.4281 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.147767 \\ 0 & 0 & 0.147767 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.146297 \\ 0 & 0 & 0.146297 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.144841 \\ 0 & 0 & 0.144841 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.00147767 \\ 0 & 0 & -0.00147767 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.00146297 \\ 0 & 0 & -0.00146297 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.00144841 \\ 0 & 0 & -0.00144841 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_6	$\begin{bmatrix} -0.01 & -0.15 & 0.147785 \\ 0.15 & -0.01 & -0.147748 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.01 & -0.15 & 0.146314 \\ 0.15 & -0.01 & -0.146278 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.01 & -0.15 & 0.144858 \\ 0.15 & -0.01 & -0.144822 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_6)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_6)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_6)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_6)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 0.99005 \\ 0.99005 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 0.980199 \\ 0.980199 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 0.970446 \\ 0.970446 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tablo 4.54. $h = 0.001$ için Örnek 4.5' in MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.001$	$t = 0.002$	$t = 0.003$
A_1	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9833 \\ 15 & -1 & -14.9833 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9683 \\ 15 & -1 & -14.9683 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9534 \\ 15 & -1 & -14.9534 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9775 \\ 15 & -1 & -14.9775 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9625 \\ 15 & -1 & -14.9625 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9476 \\ 15 & -1 & -14.9476 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_3	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9717 \\ 15 & -1 & -14.9717 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9568 \\ 15 & -1 & -14.9568 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9418 \\ 15 & -1 & -14.9418 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0149775 \\ 0 & 0 & 0.0149775 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0149625 \\ 0 & 0 & 0.0149625 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0149476 \\ 0 & 0 & 0.0149476 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0000149775 \\ 0 & 0 & -0.0000149775 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0000149625 \\ 0 & 0 & -0.0000149625 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0000149476 \\ 0 & 0 & -0.0000149476 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_6	$\begin{bmatrix} -0.001 & -0.015 & 0.0149775 \\ 0.015 & -0.001 & -0.0149775 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.001 & -0.015 & 0.0149626 \\ 0.015 & -0.001 & -0.0149625 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.001 & -0.015 & 0.0149476 \\ 0.015 & -0.001 & -0.0149476 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_6)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_6)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_6)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_6)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 0.999 \\ 0.999 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 0.998002 \\ 0.998002 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 0.997004 \\ 0.997004 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tablo 4.55. $h = 0.0001$ için Örnek 4.5' in MG6 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.0001$	$t = 0.0002$	$t = 0.0003$
A_1	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9983 \\ 15 & -1 & -14.9983 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9968 \\ 15 & -1 & -14.9968 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9953 \\ 15 & -1 & -14.9953 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9978 \\ 15 & -1 & -14.9978 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9963 \\ 15 & -1 & -14.9963 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9948 \\ 15 & -1 & -14.9948 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_3	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9972 \\ 15 & -1 & -14.9972 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9957 \\ 15 & -1 & -14.9957 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -15 & 14.9942 \\ 15 & -1 & -14.9942 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00149978 \\ 0 & 0 & 0.00149978 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00149963 \\ 0 & 0 & 0.00149963 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.00149948 \\ 0 & 0 & 0.00149948 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
D_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.49978 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & -1.4998 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.49963 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & -1.49963 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.49948 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & -1.49948 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_6	$\begin{bmatrix} -0.0001 & -0.0015 & 0.00149978 \\ 0.0015 & -0.0001 & -0.00149978 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0001 & -0.0015 & 0.00149963 \\ 0.0015 & -0.0001 & -0.00149963 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.001 & -0.015 & 0.00149948 \\ 0.015 & -0.001 & -0.00149948 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(\Omega_6)y_n$	$y_1 = \exp(\Omega_6)y_0$	$y_2 = \exp(\Omega_6)y_1$	$y_3 = \exp(\Omega_6)y_2$
y_{n+1}	$y_1 = \begin{bmatrix} 0.9999 \\ 0.9999 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 0.9998 \\ 0.9998 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 0.9997 \\ 0.9997 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bu şekilde $t = 1$ ' e kadar devam edilirse, MG4 ve MG6 yöntemleri kullanılarak elde edilen gerçek çözüm, yaklaşık çözüm değerleri ve mutlak hata değerleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir [75]. Ayrıca RK4 yöntemi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm değerleri ve mutlak hata değerleri de Tablo 4.62, 4.63 ve 4.64' te verilmiştir.

Tablo 4.56. $h = 0.01$ için Örnek 4.5' in MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9048374180359595	0.9048374369597412	$1.8923781652802063 \times 10^{-8}$
0.2	0.8187307530779818	0.8187308444870725	$9.140909063010128 \times 10^{-8}$
0.3	0.7408182206817179	0.7408182974080687	$7.672635082833779 \times 10^{-8}$
0.4	0.6703200460356393	0.6703200538741403	$7.838500959422845 \times 10^{-9}$
0.5	0.6065306597126334	0.6065306638207445	$4.10811107354192 \times 10^{-9}$
0.6	0.5488116360940265	0.5488116898518103	$5.375778378002849 \times 10^{-8}$
0.7	0.49658530379140947	0.4965853612826954	$5.7491285954114346 \times 10^{-8}$
0.8	0.44932896411722156	0.449328976300502	$1.2183280440059008 \times 10^{-8}$
0.9	0.4065696597405991	0.4065696584197628	$1.3208363291994374 \times 10^{-9}$
1.0	0.36787944117144233	0.3678794710118004	$2.984035807340746 \times 10^{-8}$

Tablo 4.57. $h = 0.001$ için Örnek 4.5' in MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9048374180359595	0.9048374180378442	$1.8847146066036657 \times 10^{-12}$
0.2	0.8187307530779818	0.8187307530871168	$9.13502606891825 \times 10^{-12}$
0.3	0.7408182206817179	0.7408182206893917	$7.673861546209082 \times 10^{-12}$
0.4	0.6703200460356393	0.6703200460364238	$7.844835892001356 \times 10^{-13}$
0.5	0.6065306597126334	0.6065306597130387	$4.0523140398818214 \times 10^{-13}$
0.6	0.5488116360940265	0.548811636099398	$5.371481037741432 \times 10^{-12}$
0.7	0.49658530379140947	0.4965853037971592	$5.749734022231223 \times 10^{-12}$
0.8	0.44932896411722156	0.44932896411844053	$1.2189693698871906 \times 10^{-12}$
0.9	0.4065696597405991	0.40656965974046344	$1.3566925360919413 \times 10^{-13}$
1.0	0.36787944117144233	0.367879441174423	$2.980671265362389 \times 10^{-12}$

Tablo 4.58. $h = 0.0001$ için Örnek 4.5' in MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9048374180359595	0.9048374180359566	$2.886579864025407 \times 10^{-15}$
0.2	0.8187307530779818	0.8187307530780347	$5.284661597215745 \times 10^{-14}$
0.3	0.7408182206817179	0.7408182206817704	$5.2513549064769904 \times 10^{-14}$
0.4	0.6703200460356393	0.6703200460356462	$6.8833827526759706 \times 10^{-15}$
0.5	0.6065306597126334	0.6065306597126248	$8.659739592076221 \times 10^{-15}$
0.6	0.5488116360940265	0.5488116360940533	$2.6756374893466273 \times 10^{-14}$
0.7	0.49658530379140947	0.4965853037914511	$4.163336342344337 \times 10^{-14}$
0.8	0.44932896411722156	0.4493289641172339	$1.2323475573339238 \times 10^{-14}$
0.9	0.4065696597405991	0.4065696597405927	$6.38378239159465 \times 10^{-15}$
1.0	0.36787944117144233	0.36787944117145477	$1.2434497875801753 \times 10^{-14}$

Tablo 4.59. $h = 0.01$ için Örnek 4.5' in MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9048374180359595	0.9048374180518104	$1.5850876167178285 \times 10^{-11}$
0.2	0.8187307530779818	0.818730753130921	$5.293920857241119 \times 10^{-11}$
0.3	0.7408182206817179	0.7408182207215819	$3.986400098909826 \times 10^{-11}$
0.4	0.6703200460356393	0.670320046039081	$3.4416913763379853 \times 10^{-12}$
0.5	0.6065306597126334	0.60653065971815	$5.51658718705994 \times 10^{-12}$
0.6	0.5488116360940265	0.5488116361260384	$3.201194864743684 \times 10^{-11}$
0.7	0.49658530379140947	0.49658530382186616	$3.045669272339069 \times 10^{-11}$
0.8	0.44932896411722156	0.4493289641228474	$5.625833132683056 \times 10^{-12}$
0.9	0.4065696597405991	0.40656965974166054	$1.061428722692881 \times 10^{-12}$
1.0	0.36787944117144233	0.36787944118984306	$1.8400725387834882 \times 10^{-11}$

Tablo 4.60. $h = 0.001$ için Örnek 4.5' in MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9048374180359595	0.9048374180359539	$5.662137425588298 \times 10^{-15}$
0.2	0.8187307530779818	0.8187307530779807	$1.1102230246251565 \times 10^{-15}$
0.3	0.7408182206817179	0.740818220681722	$4.107825191113079 \times 10^{-15}$
0.4	0.6703200460356393	0.6703200460356418	$2.4424906541753444 \times 10^{-15}$
0.5	0.6065306597126334	0.6065306597126295	$3.885780586188048 \times 10^{-15}$
0.6	0.5488116360940265	0.5488116360940224	$4.107825191113079 \times 10^{-15}$
0.7	0.49658530379140947	0.49658530379141214	$2.6645352591003757 \times 10^{-15}$
0.8	0.44932896411722156	0.4493289641172245	$2.942091015256665 \times 10^{-15}$
0.9	0.4065696597405991	0.4065696597405966	$2.4980018054066022 \times 10^{-15}$
1.0	0.36787944117144233	0.36787944117143984	$2.4980018054066022 \times 10^{-15}$

Tablo 4.61. $h = 0.0001$ için Örnek 4.5' in MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9048374180359595	0.9048374180359559	$3.6637359812630166 \times 10^{-15}$
0.2	0.8187307530779818	0.8187307530780348	$5.295763827461997 \times 10^{-14}$
0.3	0.7408182206817179	0.7408182206817706	$5.2735593669694936 \times 10^{-14}$
0.4	0.6703200460356393	0.6703200460356457	$6.328271240363392 \times 10^{-15}$
0.5	0.6065306597126334	0.606530659712624	$9.43689570931383 \times 10^{-15}$
0.6	0.5488116360940265	0.5488116360940531	$2.6645352591003757 \times 10^{-14}$
0.7	0.49658530379140947	0.496585303791451	$4.1522341120980855 \times 10^{-14}$
0.8	0.44932896411722156	0.44932896411723366	$1.2101430968414206 \times 10^{-14}$
0.9	0.4065696597405991	0.4065696597405926	$6.494804694057166 \times 10^{-15}$
1.0	0.36787944117144233	0.3678794411714549	$1.2545520178264269 \times 10^{-14}$

Tablo 4.62. $h = 0.01$ için Örnek 4.5' in RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	0.9048374180359595	0.9048373766681305	$4.136782905117542 \times 10^{-8}$
0.2	0.8187307530779818	0.8187307155139352	$3.756404665100632 \times 10^{-8}$
0.3	0.7408182206817179	0.7408182205445543	$1.371636138003396 \times 10^{-10}$
0.4	0.6703200460356393	0.6703200503541831	$4.3185437448300945 \times 10^{-9}$
0.5	0.6065306597126334	0.606530636473071	$2.3239562385590773 \times 10^{-8}$
0.6	0.5488116360940265	0.5488116079531974	$2.8140829111400478 \times 10^{-8}$
0.7	0.49658530379140947	0.496585299644192	$4.147217458339014 \times 10^{-9}$
0.8	0.44932896411722156	0.44932896891704277	$4.799821207157606 \times 10^{-9}$
0.9	0.4065696597405991	0.4065696477267264	$1.2013872729976782 \times 10^{-8}$
1.0	0.36787944117144233	0.36787942120466494	$1.9966777398128244 \times 10^{-8}$

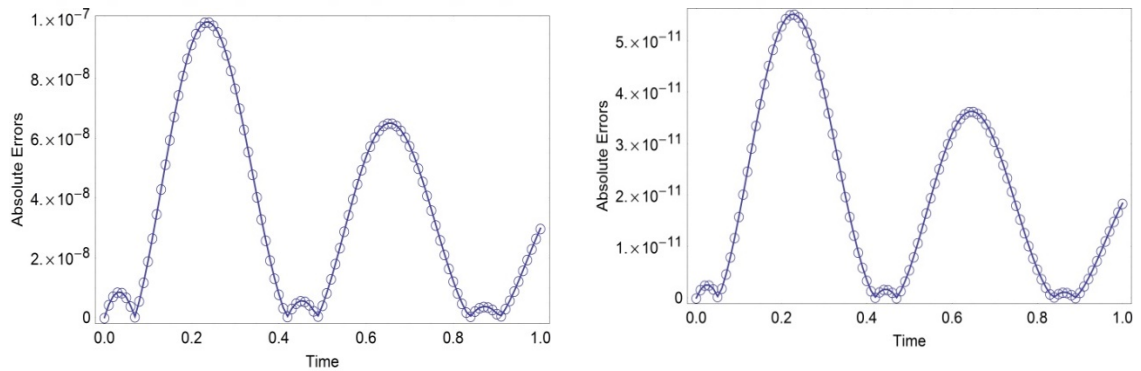
Tablo 4.63. $h = 0.001$ için Örnek 4.5' in RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	0.9048374180359595	0.9048374180318854	$4.0740744111644744 \times 10^{-12}$
0.2	0.8187307530779818	0.8187307530745331	$3.4486857813931238 \times 10^{-12}$
0.3	0.7408182206817179	0.7408182206819638	$2.4591439995447217 \times 10^{-13}$
0.4	0.6703200460356393	0.6703200460360977	$4.584110868677271 \times 10^{-13}$
0.5	0.6065306597126334	0.6065306597103233	$2.3101520696400257 \times 10^{-12}$
0.6	0.5488116360940265	0.548811636091393	$2.6334490144108713 \times 10^{-12}$
0.7	0.49658530379140947	0.49658530379118837	$2.2110091535409993 \times 10^{-13}$
0.8	0.44932896411722156	0.4493289641177425	$5.209166431541234 \times 10^{-13}$
0.9	0.4065696597405991	0.40656965973939335	$1.2057577158941513 \times 10^{-12}$
1.0	0.36787944117144233	0.36787944116954646	$1.8958723480011486 \times 10^{-12}$

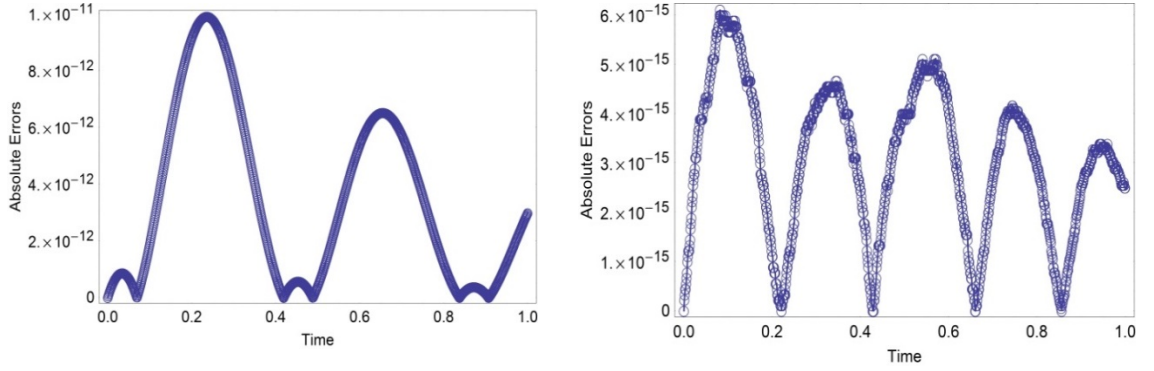
Tablo 4.64. $h = 0.0001$ için Örnek 4.5' in RK4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık çözüm)	Mutlak hata
0.1	0.9048374180359595	0.9048374180359586	$8.881784197001252 \times 10^{-16}$
0.2	0.8187307530779818	0.8187307530779819	$1.1102230246251565 \times 10^{-16}$
0.3	0.7408182206817179	0.740818220681718	$1.1102230246251565 \times 10^{-16}$
0.4	0.6703200460356393	0.6703200460356398	$4.440892098500626 \times 10^{-16}$
0.5	0.6065306597126334	0.6065306597126334	0
0.6	0.5488116360940265	0.5488116360940241	$2.4424906541753444 \times 10^{-15}$
0.7	0.49658530379140947	0.4965853037914107	$1.2212453270876722 \times 10^{-15}$
0.8	0.44932896411722156	0.4493289641172226	$1.0547118733938987 \times 10^{-15}$
0.9	0.4065696597405991	0.406569659740598	$1.1102230246251565 \times 10^{-15}$
1.0	0.36787944117144233	0.36787944117144117	$1.1657341758564144 \times 10^{-15}$

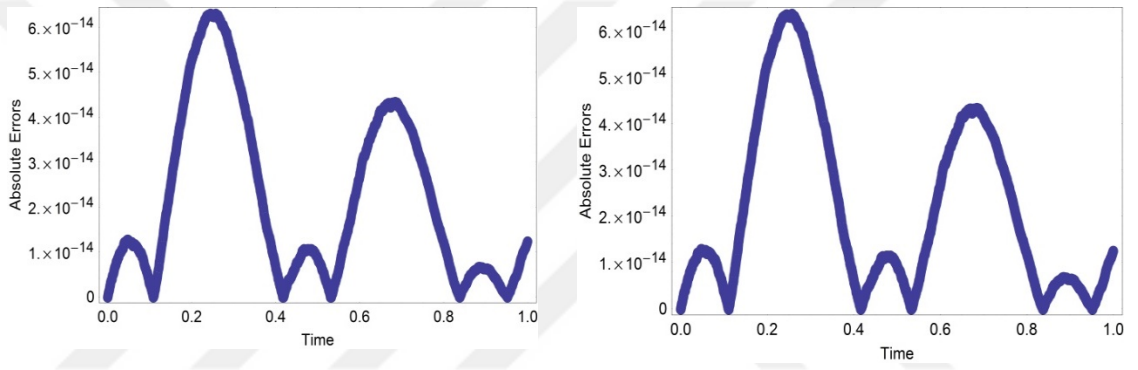
Aşağıda $t \in [0,1]$ için MG4 ve MG6 yöntemleri kullanılarak elde edilen hata grafikleri verilmiştir.



Şekil 4.10. $h = 0.01$ için Örnek 4.5' in mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ)



Şekil 4.11. $h = 0.001$ için Örnek 4.5' in mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ)



Şekil 4.12. $h = 0.0001$ için Örnek 4.5' in mutlak hata (absolute errors) grafikleri MG4 (sol) ve MG6 (sağ)

Örnek 4.3, 4.4 ve 4.5 homojen olmayan stiff adi diferansiyel denklem sistemleri olduğundan, Denklem (3.42) göz önüne alındığında $A(t)$ matrisi değişken içeren elemanlardan oluşmaktadır. Dolayısıyla, homojen olmayan stiff adi diferansiyel denklem sistemleri çözülürken Magnus seri açılım yönteminin farklı mertebelerinin aralarındaki farkın kıyaslanabileceği anlamına gelmektedir. Buradan, MG6 yönteminin aynı zaman aralığında fakat daha küçük adım aralığı için MG4 yönteminden daha iyi sonuç verdiği görülür [75]. Ayrıca daha yüksek adım aralıklarında MG6 yöntemi RK4 yönteminden daha iyi sonuçlar vermektedir. Sonuç olarak Magnus seri açılım yöntemi, homojen olmayan stiff adi diferansiyel denklem sistemleri için etkili bir yöntemdir.

Şimdi daha önce çözülmemiş olan bazı özel denklemler Magnus seri açılım yöntemiyle çözülecektir. Sırasıyla, Liénard diferansiyel denklem sistemi ve izotermal gaz küre

denklem sistemi üzerindeki lineer olmayan Magnus seri açılım yönteminin etkisi incelenecektir.

Örnek 4.6. $y(t)$ ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyon olmak üzere,

$$y''(t) + y(t)y'(t) + y(t) + y^2(t) = \cos^2(t) - \sin(t)\cos(t) \quad (4.6)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Liénard başlangıç değer probleminin analitik çözümü $y(t) = \cos(t)$ dir [95].

Denklem (4.6), diferansiyel denklem sistemine dönüştürülürse,

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -y_2 - y_1 - 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos^2(t) - \sin(t)\cos(t) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Denklem (3.42)' den $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -y_2 - y_1 - 1 & 0 & \cos^2(t) - \sin(t)\cos(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve

$t \in [0,0.5]$ olmak üzere, $h = 0.001$ adım aralığı için Denklem (3.48) göz önüne alındığında NMG4 yöntemine ait iterasyon işlemi sonucunda elde edilen verilerin ilk 2 adımı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.65. $h = 0.001$ için Örnek 4.6' nın NMG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.001$	$t = 0.002$
Q_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0.001 & 0 \\ -0.001999 & 0 & 0.000997996 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.001 & 0 \\ -0.001998 & 0 & 0.000996991 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Q_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5.00876 \times 10^{-7} & 0 & -5.02245 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1.50421 \times 10^{-6} & 0 & -5.03239 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Q_3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2.50843 \times 10^{-10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5.01988 \times 10^{-10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Q_4	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.00276 \times 10^{-6} & 0 & -4.97494 \times 10^{-10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2.0071 \times 10^{-6} & 0 & -4.96488 \times 10^{-10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Q_5	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2.92509 \times 10^{-10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5.85409 \times 10^{-10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Q_6	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.00259 \times 10^{-6} & 0 & -4.97494 \times 10^{-10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2.00676 \times 10^{-6} & 0 & -4.96488 \times 10^{-10} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
v_4	$\begin{bmatrix} -7.66937 \times 10^{-14} & 0.001 & 8.37489 \times 10^{-11} \\ -0.00199933 & 7.66937 \times 10^{-14} & 0.000997494 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8.34579 \times 10^{-11} & 0.001 & 8.39146 \times 10^{-11} \\ -0.00199916 & -8.34579 \times 10^{-11} & 0.000996488 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(v_4)y_n$	$y_1 = \exp(v_4)y_0$	$y_2 = \exp(v_4)y_1$
y_n	$y_1 = \begin{bmatrix} 0.999999 \\ -0.001001 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 0.999998 \\ -0.00200284 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bu şekilde $t = 0.5'$ e kadar devam edilirse, Liénard diferansiyel denklem sisteminin NMG4 yöntemi kullanılarak elde edilen gerçek çözüm, yaklaşık çözüm değerleri ve mutlak hata değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir [76].

Tablo 4.66. $h = 0.001$ için Örnek 4.6' nın NMG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
0.1	0.9950041652780258	0.994860075659013	1.4409×10^{-4}
0.2	0.9800665778412416	0.9789118152487274	1.15476×10^{-3}
0.3	0.955336489125606	0.9514346422581428	3.90185×10^{-3}
0.4	0.9210609940028851	0.9118477951509781	9.2132×10^{-3}
0.5	0.8775825618903728	0.8597626237202116	1.78199×10^{-2}

Örnek 4.7. $t \geq 0$ ve $y(t)$ ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyon olmak üzere, İzotermal gaz küre denklemi

$$y''(t) + \frac{2}{t}y'(t) + e^{y(t)} = 0, \quad (4.7)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

şeklindedir [58]. Bu denklemin yarı analitik çözümü,

$$y(t) \simeq -\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{5.4!}t^4 - \frac{8}{21.6!}t^6 + \frac{122}{81.8!}t^8 - \frac{61.67}{495.10!}t^{10}$$

şeklinde bulunmuştur [85].

Denklem (4.7), diferansiyel denklem sistemine dönüştürülürse,

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ty_1 & \frac{ty_2}{y_1} - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ty_1 & \frac{ty_2}{y_1} - 2 \end{bmatrix}$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere, $h = 0.001$ adım

aralığı için Denklem (3.48) göz önüne alındığında NMG4 yöntemine ait iterasyon işlemi sonucunda elde edilen verilerin ilk 2 adımı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.67. $h = 0.001$ için Örnek 4.7' nin NMG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.001$	$t = 0.002$
Q_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0.001 \\ -2 \times 10^{-6} & -0.002 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0.001 \\ -3 \times 10^{-6} & -0.002 \end{bmatrix}$
Q_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 \times 10^{-7} & 4.98585 \times 10^{-13} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 \times 10^{-7} & 6.73265 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$
Q_3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7.8099 \times 10^{-17} & -3.12344 \times 10^{-13} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.09338 \times 10^{-16} & -4.37281 \times 10^{-13} \end{bmatrix}$
Q_4	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3.83042 \times 10^{-15} & -5.49234 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.43592 \times 10^{-14} & -1.54713 \times 10^{-11} \end{bmatrix}$
Q_5	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5.20705 \times 10^{-17} & -3.12396 \times 10^{-13} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7.2899 \times 10^{-17} & -4.37354 \times 10^{-13} \end{bmatrix}$
Q_6	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3.58067 \times 10^{-15} & -5.49284 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.40262 \times 10^{-14} & -1.54719 \times 10^{-11} \end{bmatrix}$
v_4	$\begin{bmatrix} 8.33333 \times 10^{-11} & 0.001 \\ -2.50017 \times 10^{-6} & -0.002 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8.33333 \times 10^{-11} & 0.001 \\ -3.50017 \times 10^{-6} & -0.002 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = \exp(v_4)y_n$	$y_1 = \exp(v_4)y_0$	$y_2 = \exp(v_4)y_1$
y_n	$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.49867 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3.99334 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$

Bu şekilde $t = 1$ ' e kadar devam edilirse, İzotermal gaz küre denklem sisteminin NMG4 yöntemi kullanılarak elde edilen yarı analitik çözüm, yaklaşık çözüm değerleri ve mutlak hata değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir [76].

Tablo 4.68. $h = 0.001$ için Örnek 4.7' nin NMG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Yarı Analitik Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
0.2	0.9933687175402979	0.9987728129004231	5.4041×10^{-3}
0.4	0.9738914041322059	0.9911258298643896	1.72344×10^{-2}
0.6	0.9427594942946572	0.9727490268397473	2.99895×10^{-2}
0.8	0.9017788097837728	0.9411702372084342	3.93914×10^{-2}
1	0.85314363837003529	0.8955041241743008	4.23605×10^{-2}

Tablo 4.64 ve 4.65 dikkate alındığında, sırasıyla Liénard diferansiyel denklem sistemi ve İzotermal gaz küre denklem sistemi, NMG4 yöntemi kullanılarak elde edilen mutlak hata değerleri için bu yöntemin lineer olmayan diferansiyel denklemler üzerinde yeterince etkili bir yöntem olmadığı görülmüştür [76].

Son olarak periyodik başlangıç değer problemleri için düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi ile klasik Magnus seri açılım yöntemlerinin etkileri incelenecektir.

Örnek 4.8. $y(t)$ ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyon olmak üzere,

$$y''(t) = -y(t) + t, \quad (4.8)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2,$$

başlangıç değer probleminin analitik çözümü $y(t) = \sin(t) + \cos(t) + t$ dir [96].

Denklem (4.8), diferansiyel denklem sistemine dönüştürülürse,

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

elde edilir. Denklem (3.42)' den, $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $t \in [0,15\pi]$ olmak üzere,

$h = 0.005$ ile MG4 ve MG6 yöntemleri için gerekli olan iterasyon işlemleri Örnek 4.1- Örnek 4.5' teki yapılan işlemlere benzer olarak Denklem (3.32) ve Denklem (3.39) göz önüne alınarak bulunabilir.

Aşağıda MG4 ve MG6 yöntemleri kullanılarak elde edilen yaklaşık çözüm değerleri ve mutlak hata değerleri tablolar halinde verilmiştir.

Tablo 4.69. $h = 0.005$ için Örnek 4.8' in MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
5	4.324737910800088	4.324737910799219	$8.68638494466722 \times 10^{-13}$
10	8.616907360034178	8.61690736003369	$4.88498130835068 \times 10^{-13}$
15	14.890599927298295	14.89059992729888	$5.844214001626824 \times 10^{-13}$
20	21.32102731254102	21.3210273125418	$7.815970093361102 \times 10^{-13}$
25	25.8588510617657	25.858851061765627	$7.46069872548105 \times 10^{-14}$
30	29.166219825794723	29.166219825793924	$7.99360577730112 \times 10^{-13}$
35	33.668125125412345	33.668125125411926	$4.19220214098459 \times 10^{-13}$
40	40.07817509882709	40.07817509882776	$6.679101716144942 \times 10^{-13}$
45	46.37622551335185	46.37622551335278	$9.308109838457312 \times 10^{-13}$
47.12	46.12389735931519	46.123897359314945	$2.41584530158434 \times 10^{-13}$

Tablo 4.70. $h = 0.005$ için Örnek 4.8' in MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
5	4.324737910800088	4.32473791080005	$3.73034936274052 \times 10^{-14}$
10	8.616907360034178	8.616907360034162	$1.59872115546022 \times 10^{-14}$
15	14.890599927298295	14.890599927298336	$4.085620730620576 \times 10^{-14}$
20	21.32102731254102	21.321027312541002	$1.77635683940025 \times 10^{-14}$
25	25.8588510617657	25.858851061765616	$8.52651282912120 \times 10^{-14}$
30	29.166219825794723	29.166219825794755	$3.197442310920451 \times 10^{-14}$
35	33.668125125412345	33.66812512541235	$7.105427357601002 \times 10^{-15}$
40	40.07817509882709	40.078175098827096	$7.105427357601002 \times 10^{-15}$
45	46.37622551335185	46.37622551335195	$9.947598300641403 \times 10^{-14}$
47.12	46.12389735931519	46.12389735931509	$9.94759830064140 \times 10^{-14}$

Şimdi Örnek 4.8, $t \in [0, 15\pi]$ olmak üzere $h = 0.005$ adım aralığı için sırasıyla Denklem (3.62), Denklem (3.63) ve Denklem (3.71), Denklem (3.72) kullanılarak yapılan dördüncü mertebeden (MMG4) ve altıncı mertebeden düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemlerine (MMG6) ait iterasyon işlemlerinin ilk 3 adımları aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 4.71. $h = 0.005$ için Örnek 4.8' in MMG4 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.005$	$t = 0.01$	$t = 0.015$
A_0	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0075 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0125 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0175 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.00605662 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0110566 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0160566 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.00894338 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0139434 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0189434 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
U_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.52511 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & -0.00144337 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.52511 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & -0.00144337 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.52511 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & -0.00144337 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
U_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5.69176 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0.00144336 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5.69176 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0.00144336 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -5.69176 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0.00144336 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.04166 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & -2.60416 \times 10^{-11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.04166 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & -2.60416 \times 10^{-11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.04166 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & -2.60416 \times 10^{-11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = e^{hA_0} e^{(\Omega_4)} y_n$	$y_1 = e^{hA_0} e^{(\Omega_4)} y_0$	$y_2 = e^{hA_0} e^{(\Omega_4)} y_1$	$y_3 = e^{hA_0} e^{(\Omega_4)} y_2$
y_n	$y_1 = \begin{bmatrix} 1.00999 \\ 1.99499 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 1.01995 \\ 1.98995 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 1.02989 \\ 1.98489 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tablo 4.72. $h = 0.005$ için Örnek 4.8' in MMG6 yöntemine ait iterasyon işlemi

	$t = 0.005$	$t = 0.01$	$t = 0.015$
A_0	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0075 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0125 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0175 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.00556351 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0105635 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0155635 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0075 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0125 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0175 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
A_3	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.00943649 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0144365 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.0194365 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
U_1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.09123 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & -0.00193649 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.09123 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & -0.00193649 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.09123 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & -0.00193649 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
U_2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
U_3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -8.5912 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0.00193647 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -8.5912 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0.00193647 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -8.5912 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0.00193647 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Ω_4	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.04166 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & -2.60416 \times 10^{-11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.04166 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & -2.60416 \times 10^{-11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.04166 \times 10^{-8} \\ 0 & 0 & -2.60416 \times 10^{-11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$y_{n+1} = e^{hA_0} e^{(\Omega_6)} y_n$	$y_1 = e^{hA_0} e^{(\Omega_6)} y_0$	$y_2 = e^{hA_0} e^{(\Omega_6)} y_1$	$y_3 = e^{hA_0} e^{(\Omega_6)} y_2$
y_n	$y_1 = \begin{bmatrix} 1.00999 \\ 1.99499 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_2 = \begin{bmatrix} 1.01995 \\ 1.98995 \\ 1 \end{bmatrix}$	$y_3 = \begin{bmatrix} 1.02989 \\ 1.98489 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bu şekilde $t = 15\pi$ ' e kadar devam edilirse, MMG4 ve MMG6 yöntemleri için yaklaşık çözüm değerleri ve mutlak hata değerleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 4.73. $h = 0.005$ için Örnek 4.8' in MMG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
5	4.324737910800088	4.324737910800609	$5.213607323639735 \times 10^{-13}$
10	8.616907360034178	8.61690736003448	$3.019806626980426 \times 10^{-13}$
15	14.890599927298295	14.890599927297936	$3.58824081558850 \times 10^{-13}$
20	21.32102731254102	21.321027312540426	$5.93303184359683 \times 10^{-13}$
25	25.8588510617657	25.85885106176573	$2.842170943040401 \times 10^{-14}$
30	29.166219825794723	29.166219825795345	$6.217248937900877 \times 10^{-13}$
35	33.668125125412345	33.6681251254126	$2.557953848736360 \times 10^{-13}$
40	40.07817509882709	40.07817509882666	$4.26325641456060 \times 10^{-13}$
45	46.37622551335185	46.37622551335139	$4.54747350886464 \times 10^{-13}$
47.12	46.12389735931519	46.12389735931502	$1.63424829224823 \times 10^{-13}$

Tablo 4.74. $h = 0.005$ için Örnek 4.8' in MMG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
5	4.324737910800088	4.324737910800051	$3.64153152077051 \times 10^{-14}$
10	8.616907360034178	8.616907360034164	$1.42108547152020 \times 10^{-14}$
15	14.890599927298295	14.890599927298338	$4.263256414560601 \times 10^{-14}$
20	21.32102731254102	21.321027312540988	$3.19744231092045 \times 10^{-14}$
25	25.8588510617657	25.85885106176562	$8.17124146124115 \times 10^{-14}$
30	29.166219825794723	29.166219825794773	$4.973799150320701 \times 10^{-14}$
35	33.668125125412345	33.66812512541237	$2.131628207280300 \times 10^{-14}$
40	40.07817509882709	40.078175098827096	$7.105427357601002 \times 10^{-15}$
45	46.37622551335185	46.376225513351926	$7.815970093361102 \times 10^{-14}$
47.12	46.12389735931519	46.123897359315116	$7.10542735760100 \times 10^{-14}$

Örnek 4.9. $y_1(t)$, $y_2(t)$ ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 y_1''(t) &= -v^2 y_1(t) + v^2 f(t) + f''(t) \\
 y_1(0) &= a + f(0), \quad y_1'(0) = f'(0) \\
 y_2''(t) &= -v^2 y_2(t) + v^2 f(t) + f''(t) \\
 y_2(0) &= f(0), \quad y_2'(0) = va + f'(0)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

denklem sisteminin çözümleri $y_1(t) = a \cos(vt) + f(t)$, $y_2(t) = a \sin(vt) + f(t)$ dir. Burada $f(t) = e^{-0.05t}$, $v = 20$, $a = 0.1$ olarak kabul edilmektedir [97].

Şimdi sırasıyla MG4, MG6, MMG4 ve MMG6 yöntemleri için $t \in [0,20]$ ve $h = 0.0025$ değerlerindeki gerçek çözüm, yaklaşık çözüm değerleri ve mutlak hata değerleri tablolar halinde verilecektir.

Tablo 4.75. $h = 0.0025$ için Örnek 4.9' un MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
2.5	0.9789935054338068	0.978993505439488	$5.681233261611851 \times 10^{-12}$
5	0.8650326703001733	0.8650326703111543	$1.0980993891962498 \times 10^{-11}$
7.5	0.7572143594388098	0.7572143594543259	$1.55161439252538 \times 10^{-11}$
10	0.655249427213334	0.6552494272323044	$1.897038082177005 \times 10^{-11}$
12.5	0.5593602590475162	0.5593602590686146	$2.109845631537155 \times 10^{-11}$
15	0.4701568908131463	0.47015689083489876	$2.1752433188026998 \times 10^{-11}$
17.5	0.3884986917602917	0.3884986917811766	$2.088484940543367 \times 10^{-11}$
20	0.31534980730718876	0.3153498073257438	$1.855504638825778 \times 10^{-11}$

Tablo 4.76. $h = 0.0025$ için Örnek 4.9' un MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
2.5	0.9789935054338068	0.9789935054338027	$4.107825191113079 \times 10^{-15}$
5	0.8650326703001733	0.8650326703001733	$9.992007221626409 \times 10^{-16}$
7.5	0.7572143594388098	0.7572143594388138	$3.9968028886505635 \times 10^{-15}$
10	0.655249427213334	0.6552494272133399	$5.88418203051333 \times 10^{-15}$
12.5	0.5593602590475162	0.5593602590475217	$5.551115123125783 \times 10^{-15}$
15	0.4701568908131463	0.47015689081314915	$2.831068712794149 \times 10^{-15}$
17.5	0.3884986917602917	0.38849869176028934	$2.3869795029440866 \times 10^{-15}$
20	0.31534980730718876	0.3153498073071797	$9.048317650695026 \times 10^{-15}$

Tablo 4.77. $h = 0.0025$ için Örnek 4.9' un MMG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
2.5	0.9789935054338068	0.9789935054300054	$3.801403636316536 \times 10^{-12}$
5	0.8650326703001733	0.8650326702928429	$7.330358542390059 \times 10^{-12}$
7.5	0.7572143594388098	0.757214359428466	$1.0343725875827658 \times 10^{-11}$
10	0.655249427213334	0.6552494272007026	$1.2631451440370256 \times 10^{-11}$
12.5	0.5593602590475162	0.5593602590334805	$1.4035661521916154 \times 10^{-11}$
15	0.4701568908131463	0.4701568907986906	$1.4455714403283082 \times 10^{-11}$
17.5	0.3884986917602917	0.3884986917464272	$1.3864520642670186 \times 10^{-11}$
20	0.31534980730718876	0.31534980729488454	$1.2304213203861991 \times 10^{-11}$

Tablo 4.78. $h = 0.0025$ için Örnek 4.9' un MMG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
2.5	0.9789935054338068	0.9789935054338011	$5.662137425588298 \times 10^{-15}$
5	0.8650326703001733	0.8650326703001712	$2.1094237467877974 \times 10^{-15}$
7.5	0.7572143594388098	0.7572143594388143	$4.551914400963142 \times 10^{-15}$
10	0.655249427213334	0.6552494272133442	$1.021405182655144 \times 10^{-14}$
12.5	0.5593602590475162	0.5593602590475275	$1.1324274851176597 \times 10^{-14}$
15	0.4701568908131463	0.4701568908131552	$8.881784197001252 \times 10^{-15}$
17.5	0.3884986917602917	0.38849869176029694	$5.218048215738236 \times 10^{-15}$
20	0.31534980730718876	0.3153498073071876	$1.1657341758564144 \times 10^{-15}$

Örnek 4.10. (Hemen hemen periyodik yörünge problemi) $y_1(t)$, $y_2(t)$ ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 y_1''(t) + y_1(t) &= 0.001\cos(t) \\
 y_1(0) &= 1, \quad y_1'(0) = 0 \\
 y_2''(t) + y_2(t) &= 0.001\sin(t) \\
 y_2(0) &= 0, \quad y_2'(0) = 0.9995
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

denklem sisteminin çözümleri $y_1(t) = \cos(t) + 0.0005t\sin(t)$,
 $y_2(t) = \sin(t) - 0.0005t\cos(t)$ dir [98].

Şimdi sırasıyla MG4, MG6, MMG4 ve MMG6 yöntemleri için $t \in [0,1000]$ ve $h = 0.125$ değerlerindeki gerçek çözüm, yaklaşık çözüm değerleri ve mutlak hata değerleri tablolar halinde verilecektir.

Tablo 4.79. $h = 0.125$ için Örnek 4.10' un MG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
100	0.83700059023219	0.8370006031040	$1.287187401111111 \times 10^{-8}$
200	0.399857945285606	0.399857989684231	$4.439862510974279 \times 10^{-8}$
300	-0.1720599952638563	-0.1720599190221593	$7.62416970390145 \times 10^{-8}$
400	-0.695480210570371	-0.69548012404854	$8.65218263701450 \times 10^{-8}$
500	-1.00079222476209	-1.000792165308077	$5.945401926332749 \times 10^{-8}$
600	-0.985768744333343	-0.985768751072111	$6.73876743295664 \times 10^{-9}$
700	-0.64871464270356	-0.648714739498108	$9.6794547821410 \times 10^{-8}$
800	-0.0905396539386837	-0.0905398357371202	$1.81798436471591 \times 10^{-7}$
900	0.515258175693044	0.515257947414683	$2.28278360991929 \times 10^{-7}$
1000	0.975818846556704	0.975818636363106	$2.10193597527386 \times 10^{-7}$

Tablo 4.80. $h = 0.125$ için Örnek 4.10' un MG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
100	0.83700059023219	0.83700059023906	$6.87006007638046 \times 10^{-12}$
200	0.399857945285606	0.399857945309286	$2.367994689222996 \times 10^{-11}$
300	-0.1720599952638563	-0.1720599952232042	$4.06521205587040 \times 10^{-11}$
400	-0.695480210570371	-0.695480210524249	$4.61221061343053 \times 10^{-11}$
500	-1.00079222476209	-1.000792224730418	$3.167865969544436 \times 10^{-11}$
600	-0.985768744333343	-0.985768744336971	$3.62809782217254 \times 10^{-12}$
700	-0.64871464270356	-0.648714642755201	$5.16401366112972 \times 10^{-11}$
800	-0.0905396539386837	-0.0905396540356318	$9.69481162016450 \times 10^{-11}$
900	0.515258175693044	0.515258175571335	$1.21709309297557 \times 10^{-10}$
1000	0.975818846556704	0.975818846444665	$1.12038933686164 \times 10^{-10}$

Tablo 4.81. $h = 0.125$ için Örnek 4.10' un MMG4 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
100	0.83700059023219	0.83700058880158	$1.43060896462543 \times 10^{-9}$
200	0.399857945285606	0.39985794035102	$4.93458146566538 \times 10^{-9}$
300	-0.1720599952638563	-0.1720600037375748	$8.47371850465350 \times 10^{-9}$
400	-0.695480210570371	-0.695480220186669	$9.61629853524215 \times 10^{-9}$
500	-1.00079222476209	-1.000792231370019	$6.60792243145635 \times 10^{-9}$
600	-0.985768744333343	-0.98576874358441	$7.48924811055928 \times 10^{-10}$
700	-0.64871464270356	-0.648714631945578	$1.075798294891683 \times 10^{-8}$
800	-0.0905396539386837	-0.0905396337331096	$2.020557407500511 \times 10^{-8}$
900	0.515258175693044	0.515258201064559	$2.537151444492735 \times 10^{-8}$
1000	0.975818846556704	0.975818869918263	$2.33615597977632 \times 10^{-8}$

Tablo 4.82. $h = 0.125$ için Örnek 4.10' un MMG6 yönteminden elde edilen yaklaşık çözümleri ve mutlak hata değerleri

t	$y(t)$ (Gerçek Çözüm)	$y(t)$ (Yaklaşık Çözüm)	Mutlak Hata
100	0.83700059023219	0.837000590232250	$5.41788836017076 \times 10^{-14}$
200	0.399857945285606	0.399857945285780	$1.7374990335383 \times 10^{-13}$
300	-0.1720599952638563	-0.172059995263568	$2.874644966510686 \times 10^{-13}$
400	-0.695480210570371	-0.695480210570057	$3.13526982154144 \times 10^{-13}$
500	-1.00079222476209	-1.00079222476189	$1.980637875931279 \times 10^{-13}$
600	-0.985768744333343	-0.985768744333405	$6.20614670765462 \times 10^{-14}$
700	-0.64871464270356	-0.648714642703961	$4.0067948958721 \times 10^{-13}$
800	-0.0905396539386837	-0.0905396539393867	$7.02979341404841 \times 10^{-13}$
900	0.515258175693044	0.51525817569219	$8.46878123184069 \times 10^{-13}$
1000	0.975818846556704	0.975818846555965	$7.38631378283116 \times 10^{-13}$

Sonuç olarak yukarıda çözülen örneklerden elde edilen veriler neticesinde düzeltilmiş Magnus seri açılım yönteminin klasik Magnus seri açılım yönteminden daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Magnus seri açılım yönteminin ilk olarak lineer, homojen ve homojen olmayan stiff adi diferansiyel denklem sistemleri üzerindeki etkisi incelenmiş ve elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılıp, bu veriler tablolar ve hata grafikleri ile desteklenmiştir. Stiff adi diferansiyel denklem sistemleri için, aynı zaman aralığında adım aralığı küçültüldükçe daha küçük hatalar elde edildiği görülmüştür. Ayrıca MG6 yönteminin, MG4 yönteminden daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir. Bu nedenle, gözlemlenen sonuçlar altında lineer homojen ve homojen olmayan stiff adi diferansiyel denklem sistemleri için Magnus seri açılım yöntemlerinin RK4 ve RK6 yöntemlerinden daha etkili bir yöntem olduğu söylenebilir.

Stiff adi diferansiyel denklem sistemlerinden sonra bazı özel lineer olmayan denklem sistemleri için de Magnus seri açılım yönteminin etkisi üzerinde durulmuştur. Sırasıyla Liénard diferansiyel denklem sistemi ve İzotermal gaz küre denklem sistemi ele alınmıştır. Her iki denklem sistemi için de NMG4 yöntemi kullanılarak elde edilen hata değerleri incelendiğinde, yöntemin lineer olmayan diferansiyel denklem sistemleri üzerinde yeterince etkili bir yöntem olmadığı görülmüştür.

Son olarak Periyodik başlangıç değer problemleri üzerinde durulmuştur. Bu problemler için Magnus seri açılım yöntemi ile Düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi karşılaştırılmış ve elde edilen sonuçlar tablo ve grafikler halinde verilmiştir. Elde edilen veriler neticesinde MMG6 yönteminin MMG4 yönteminden daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Ayrıca, düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi de klasik Magnus seri açılım yönteminden daha küçük hatalar vermiştir.

Sonuç olarak Magnus ve Düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemlerinin etkili yöntemler olmalarının en önemli sebebi, Magnus serileri belli bir yerde kesilmesine rağmen gerçek çözümün geometrik özelliklerini korumaya devam etmesidir. Dolayısıyla bu yöntemler seçilen denklem sistemleri için etkili yöntemlerdir denilebilir.

5.2. Öneriler

Magnus ve düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemleri geliştirilebilir yöntemlerdir. Dolayısıyla bu yöntemlerin yakınsaklıkları üzerinde hala çalışmalar devam etmektedir. Bu bağlamda da yöntemlerin yakınsaklığı ile ilgili çalışmalar yapılması, literatürdeki boşluk göz önüne alındığında önerilebilir. Ayrıca bu çalışmada sadece adi diferansiyel denklem sistemleri üzerinde durulmuştur. Bu yöntemlerin kısmi diferansiyel denklem sistemleri üzerindeki etkisi ise incelemeye açık başka bir konudur. Ek olarak literatürde bulunan Magnus ve düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemleri açık yöntemlerdir. Yine bu yöntemlerin kapalı yöntemler olması halinde yöntemin etkinliğini oldukça arttıracakları öngörülmektedir. Bu nedenle kapalı Magnus ve düzeltilmiş Magnus seri açılım yöntemi hakkında da araştırmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Gerisch, A., Lang, J., Podhaisky, H., Weiner, R., “High-order linearly implicit two-step peer-finite element methods for time-dependent PDEs”, *Applied Numerical Mathematics*, 59(3), 624-638, 2009.
2. Kleefeld, B., Martín-Vaquero, J., “SERK2v3: Solving mildly stiff nonlinear partial differential equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 299, 194-206, 2016.
3. Cavaglieri, D., Bewley, T., “Low-storage implicit/explicit Runge–Kutta schemes for the simulation of stiff high-dimensional ODE systems”, *Journal of Computational Physics*, 286, 172-193, 2015.
4. Abdi, A., “Construction of high-order quadratically stable second-derivative general linear methods for the numerical integration of stiff ODEs”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 303, 218-228, 2016.
5. Javier, I. J., Vicente, H. R., Pedro, A., Enrique, A., “A piecewise-linearized algorithm based on the Krylov subspace for solving stiff ODEs”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(7), 1798-1804, 2011.
6. Jibunoh, C. C., “An exponential method for accurate and automatic integration of nonlinear (stiff and nonstiff) ODE systems”, *Journal of the Nigerian Mathematical Society*, 34(2), 143-159, 2015.
7. Rang J., “Improved traditional Rosenbrock–Wanner methods for stiff ODEs and DAEs”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 286, 128-144, 2015.
8. Abdi, A., Hojjati G., “Implementation of Nordsieck second derivative methods for stiff ODEs”, *Applied Numerical Mathematics*, 94, 241-253, 2015.
9. Guibert, D., Tromeur-Dervout, D., “Parallel adaptive time domain decomposition for stiff systems of ODEs/DAEs”, *Computers Structures*, 85, 553-562, 2007.
10. Butcher, J. C., Podhaisky, H., “On error estimation in general linear methods for stiff ODEs”, *Applied numerical mathematics*, 56(3), 345-357, 2006.
11. Beck, S., González-Pinto, S., Pérez-Rodríguez, S., Weiner, R., “A comparison of AMF and Krylov-methods in Matlab for large stiff ODE systems”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 262, 292-303, 2014.

12. Hojjati, G., Ardabili, M. R., Hosseini, S. M., "A-EBDF: an adaptive method for numerical solution of stiff systems of ODEs", *Mathematics and Computers in Simulation*, 66(1), 33-41, 2004.
13. Loffeld, J., Tokman, M., "Comparative performance of exponential, implicit, and explicit integrators for stiff systems of ODEs", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 241, 45-67, 2013.
14. Aminikhah, H., "The combined laplace transform and new homotopy perturbation methods for stiff systems of odes", *Applied Mathematical Modelling*, 36(8), 3638-3644, 2012.
15. Hosseini, S. M., Hojjati, G., "Matrix free MEBDF method for the solution of stiff systems of ODEs", *Mathematical and computer modelling*, 29(4), 67-77, 1999.
16. Celnik, M., Patterson, R., Kraft, M., Wagner, W., "A predictor–corrector algorithm for the coupling of stiff ODEs to a particle population balance", *Journal of Computational Physics*, 228(8), 2758-2769, 2009.
17. Savcenco, V., "Construction of a multirate RODAS method for stiff ODEs", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 225(2), 323-337, 2009.
18. Brugnano, L., Magherini, C., "Recent advances in linear analysis of convergence for splittings for solving ODE problems", *Applied Numerical Mathematics*, 59(3), 542-557, 2009.
19. Bataineh, A. S., Noorani, M. S. M., Hashim, I., "Solving systems of ODEs by homotopy analysis method", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(10), 2060-2070, 2008.
20. Hundsdorfer, W., Savcenco, V., "Analysis of a multirate theta-method for stiff ODEs", *Applied Numerical Mathematics*, 59(3), 693-706, 2009.
21. Ibrahim, Z. B., Othman, K. I., Suleiman, M., "Implicit r-point block backward differentiation formula for solving first-order stiff ODEs", *Applied Mathematics and Computation*, 186(1), 558-565, 2007.
22. Tokman, M., "Efficient integration of large stiff systems of ODEs with exponential propagation iterative (EPI) methods", *Journal of Computational Physics*, 213(2), 748-776, 2006.
23. Wu, B., White, R. E., "One implementation variant of the finite difference method

- for solving ODEs/DAEs”, *Computers chemical engineering*, 28(3), 303-309, 2004.
24. Ixaru, L. G., Berghe, G. V., De Meyer, H., “Exponentially fitted variable two-step BDF algorithm for first order ODEs”, *Computer physics communications*, 150(2), 116-128, 2003.
 25. Cash, J. R., “Modified extended backward differentiation formulae for the numerical solution of stiff initial value problems in ODEs and DAEs”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 125(1), 117-130, 2000.
 26. Chartier, P., “On diagonally iterated Runge-Kutta methods for dissipative ODEs”, *Journal of computational and applied mathematics*, 89(1), 73-85, 1998.
 27. Soleimani, B., Weiner, R., “A class of implicit peer methods for stiff systems”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2016.
 28. Biazar, J., Asadi, M. A., Salehi, F., “Rational Homotopy Perturbation Method for solving stiff systems of ordinary differential equations”, *Applied Mathematical Modelling*, 39(3), 1291-1299, 2015.
 29. Rahmanzadeh, M., Cai, L., White, R. E., “A new method for solving initial value problems”, *Computers Chemical Engineering*, 58, 33-39, 2013.
 30. Mazzia, F., Nagy, A. M., “A new mesh selection strategy with stiffness detection for explicit Runge–Kutta methods”, *Applied Mathematics and Computation*, 255, 125-134, 2015.
 31. Celaya, E. A., Aguirrezabala, J. A., Chatzipantelidis, P., “Implementation of an Adaptive BDF2 Formula and Comparison with the MATLAB Ode15s”, *Procedia Computer Science*, 29, 1014-1026, 2014.
 32. Aminikhah, H., Hemmatnezhad, M., “An effective modification of the homotopy perturbation method for stiff systems of ordinary differential equations”, *Applied Mathematics Letters*, 24(9), 1502-1508, 2011.
 33. Rahunanthan, A., Stanescu, D., “High-order W-methods”, *Journal of computational and applied mathematics*, 233(8), 1798-1811, 2010.
 34. Xie, D., “An improved approximate Newton method for implicit Runge–Kutta formulas”, *Journal of computational and applied mathematics*, 235(17), 5249-5258, 2011.

35. Ibáñez, J., Hernández, V., Arias, E., Ruiz, P. A., “Solving initial value problems for ordinary differential equations by two approaches: BDF and piecewise-linearized methods”, *Computer Physics Communications*, 180(5), 712-723, 2009.
36. Abelman, S., Patidar, K. C., “Comparison of some recent numerical methods for initial-value problems for stiff ordinary differential equations”, *Computers Mathematics with Applications*, 55(4), 733-744, 2008.
37. García-Alonso, F., Reyes, J. A., “A new method for exact integration of some perturbed stiff linear systems of oscillatory type”, *Applied Mathematics and Computation*, 215(7), 2649-2662, 2009.
38. Nguyen, H. S., Sidje, R. B., Cong, N. H., “Analysis of trigonometric implicit Runge–Kutta methods”, *Journal of computational and applied mathematics*, 198(1), 187-207, 2007.
39. Ferracina, L., Spijker, M. N., “Strong stability of singly-diagonally-implicit Runge–Kutta methods”, *Applied Numerical Mathematics*, 58(11), 1675-1686, 2008.
40. Álvarez, J., Rojo, J., “An improved class of generalized Runge–Kutta methods for stiff problems. Part I: The scalar case”, *Applied mathematics and computation*, 130(2), 537-560, 2002.
41. Álvarez, J., Rojo, J., “An improved class of generalized Runge–Kutta methods for stiff problems. Part II: The separated system case”, *Applied mathematics and computation*, 159(3), 717-758, 2004.
42. Hojjati, G., Ardabili, M. R., Hosseini, S. M., “New second derivative multistep methods for stiff systems”, *Applied Mathematical Modelling*, 30(5), 466-476, 2006.
43. Schmitt, B. A., Weiner, R., Erdmann, K., “Implicit parallel peer methods for stiff initial value problems”, *Applied numerical mathematics*, 53(2), 457-470, 2005.
44. Guibert, D., Tromeur-Dervout, D., “Parallel adaptive time domain decomposition for stiff systems of ODEs/DAEs”, *Computers structures*, 85(9), 553-562, 2007.
45. Sewerin, F., Rigopoulos, S., “A methodology for the integration of stiff chemical kinetics on GPUs”, *Combustion and Flame*, 162(4), 1375-1394, 2015.
46. Li, S., “Canonical Euler splitting method for nonlinear composite stiff evolution

- equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 289, 220-236, 2016.
47. Akinfenwa, O. A., Jator, S. N., Yao, N. M., “Continuous block backward differentiation formula for solving stiff ordinary differential equations”, *Computers Mathematics with Applications*, 65(7), 996-1005, 2013.
 48. Migoni, G., Bortolotto, M., Kofman, E., Cellier, F. E., “Linearly implicit quantization-based integration methods for stiff ordinary differential equations”, *Simulation Modelling Practice and Theory*, 35, 118-136, 2013.
 49. Ibragimov, N.H., “Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations”, *John Wiley*, New York, s.100, 1999.
 50. Hsiang, W.Y., ”Lecture on Lie Groups/Lie Groups and Lie Algebras”, *Series on University Mathematic-vol2*, *World Scientific*, 2000.
 51. Zanna, A., “Lie-Group Methods for Isospectral Flows”, *Numerical Analysis Reports, DAMTP 1997/NA02*, University of Cambridge, 1997.
 52. Magnus, W., “On the exponential solution of differential equations for a linear operator”, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 7, 639-673, 1954.
 53. Iserles, A., “Think globally, act locally: Solving highly-oscillatory ordinary differential equations”, *Applied Numerical Mathematics*, 43, 145-160, 2002.
 54. Iserles, A., Marthinsen, A., Nørsett, S.P., “On the Implementation of the Method of Magnus Series for Linear Differential Equations”, *BIT*, 39 (2), 281-304, 1999.
 55. Iserles, A., Norsett, S. P., “On the solution of linear differential equations in Lie groups”, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 357, 983-1019, 1999.
 56. Pechukas, P., Light, J. C., “On the exponential form of the timedisplacement operator in quantum mechanics”, *J. Chem. Phys.*, 7, 3897–3912, 1966.
 57. Karasev, M.V., Mosolova, M.V., “Infinite products and T-products of exponents”, *Theoret and Math. Phys.*, 28 (2), 721–729, 1977.
 58. Suzuki, M., “On the convergence of exponential operators the Zassenhaus formula, BCH formula and systematic approximants”, *Comm. Math. Phys.*, 57 (3), 193–200, 1977.
 59. Agrachev, A., Gamkrelidze, R., “Chronological algebras and nonstationary vector fields”, *J. Sov. Math.*, 17, 1650–1675, 1981.

60. Blanes, S., Casas, F., Oteo, J.A., Ros, J., “Magnus and Fer expansions for matrix differential equations: the convergence problem”, *J. Phys. A*, 31, 259–268, 1998.
61. Moan, P.C., “Efficient approximation of Sturm-Liouville problems using Lie-group methods”, *Technical Report 1998/NA11, DAMTP*, University of Cambridge, 1998.
62. Vela, P.A., “Averaging and control of nonlinear systems”, *California Institute of Technology, Phd Thesis*, 2003.
63. Chacon, R.V., Fomenko A.T., “Recursion formulas for the Lie integral”, *Adv. Math.*, 88, 200–257, 1991.
64. Strichartz, R.S., “The Campbell–Baker–Hausdorff–Dynkin formula and solution of differential equations”, *J. Funct. Anal.*, 72, 320–345, 1987.
65. Bialynicki-Birula, I., Mielnik, B., Plebański J., “Explicit solution of the continuous Baker Campbell–Hausdorff problem and a new expression for the phase operator”, *Annals of Phys.*, 51, 187–200, 1969.
66. Moan, P.C., Oteo, J.A., “Convergence of the exponential Lie series”, *J. Math. Phys.*, 42 (1), 501–507, 2001.
67. Moan, P.C., “On Backward Error Analysis and Nekhoroshev Stability in Numerical Analysis of Conservative ODEs”, *University of Cambridge, Phd Thesis*, 2002.
68. Moan, P.C., Niesen, J., “Convergence of the Magnus series”, *Found. Comput. Maths.*, 8, 291–301, 2008.
69. Casas, F., “Sufficient conditions for the convergence of the Magnus Expansion”, *J. Phys. A*, 40, 15001–15017, 2007.
70. Casas, F., Iserles, A., “Explicit Magnus expansions for nonlinear equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 39, 5445–5461, 2006.
71. Blanes, S., Ponsoda, E., “Time–averaging and exponential integrators for nonhomogeneous linear IVPs and BVPs”, *Applied Numerical Mathematics*, 62, 875–94, 2012.
72. Iserles, A., “On the global error of discretization methods for highly-oscillatory ordinary differential equations”, *BIT*, 42, 561–599, 2002.

73. Khanamiryan, M., “Quadrature methods for highly oscillatory linear and nonlinear systems of ordinary differential equations: Part II”, *BIT Numerical Mathematics*, 52(2), 383-405, 2011.
74. Atay, M.T., Eryılmaz, A., Köme, S., Köme, C., Piipponen, S., “Comparative numerical solutions of stiff ordinary differential equations using Magnus Series Expansion Method”, *New Trends in Mathematical Sciences*, 3(1), 35-45, 2015.
75. Atay, M.T., Eryılmaz A., Köme, S., “Magnus Series Expansion Method for solving nonhomogeneous stiff systems of ordinary differential equations”, *Kuwait Journal of Sciences*, 43.(1), 25-38, 2016.
76. Köme, S., Eryılmaz A., Atay, M.T., “A Numerical approximation to some specific nonlinear differential equations using Magnus Series Expansion Method”, *New Trends in Mathematical Sciences*, 4(1), 125-129 2016.
77. Hacısalihoğlu, H.H., “Diferansiyel Geometri 4. Basım”, *Hacısalihoğlu Yayınları*, 2004.
78. Iserles, A., Munthe-Kaas, H.Z., Norsett, S.P., Zanna, A., “Lie-group Methods”, *Acta Numerica*, 9, 215–365, 2000.
79. Munthe-Kaas, H.Z., “High order runge-kutta methods on manifolds”, *Appl. Numer. Math.*, 29, 115-127, 1999.
80. Marsden, J.E., Ratiu, T.S., “Introduction to mechanics and symmetry”, A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems, first edition, Texts in Applied Mathematics, *Springer-Verlag*, 17, New York, 1994.
81. Abramowitz, M., Stegun, I. A., “Handbook of Mathematical Functions”, *Dover*, New York, s. 810, 1970.
82. Bakioğlu, M., “Sayısal Analiz”, *Birsen Yayınevi*, İstanbul, 2011.
83. Burton, T. A., “Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations”, *Academic Press*, Orlando, 1985.
84. Liénard, A., “Etude des oscillations entretenues”, *Revue generale del'electricite*, 23, 946-954, 1928.
85. Davis, H. T., “Introduction to nonlinear differential and integral equations”, *Dover*, New York, 1962.

86. Wazwaz, A., "A new algorithm for solving differential equations of Lane-Emden type", *Appl. Math. Comput.*, 118, 287-310, 2001.
87. Simos, T.E., "Exponentially-fitted and trigonometrically-fitted symmetric linear multistep methods for the numerical integration of orbital problems", *Physics Letters A*, 315, 437-446, 2003.
88. Burden, R.L., Faires, J.D., "Numerical Analysis", fifth edition, *PWS Publishing Company*, Boston, 1993.
89. Butcher, J.C., "Numerical methods for ordinary differential equations second edition", *John Wiley Sons*, s. 215, West Sussex, 2008.
90. Köme, C., "Lineer Stiff Diferansiyel Denklem Ve Stiff Denklem Sistemlerinin Çözümlerinin Farklı Runge-kutta Metodları Kullanılarak Hesaplanması", *Ömer Halisdemir Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi*, 2013.
91. Blanes, S., Casas, F., Oteo, J.A., Ros, J., "The Magnus expansion and some of its applications", *Physics Reports*, 470, 151-238, 2008.
92. Iserles, A., Norsett, S.P., "On the Solution of Linear Differential Equations in Lie Groups", *Numerical Analysis Reports DAMTP 1997/NA3*, University of Cambridge, 1997.
93. Roşca, V.-O., "Some Techniques For Solving "Stiff" Equations, Tomul LI. (LV)", *Fasc.*,1-2,2005.
94. Lee, H.C., Chen, C.K., Hung, C.I., "A modified group-preserving scheme for solving the initial value problems of stiff ordinary differential equations", *Applied Mathematics and Computation*, 133, 445-459, 2002.
95. Gamez, D., Garralda Guillem, A.I., Ruiz Galan, M., "Nonlinear initial-value problems and Schauder bases", *Nonlinear Analysis*, 63, 97-105, 2005.
96. Allen, R.C., Jr., Wing, G.M., "An invariant imbedding algorithm for the solution of inhomogeneous linear two-point boundary value problems", *Journal of Computational Physics*, 14, 40-58, 1974.
97. Lambert, J.D., Watson, I.A., "Symmetric multistep methods for periodic initial-value problems", *Journal of Institute Mathematics and Applications*, 18, 189-202, 1976.

98. Stiefel, E., Bettis, D.G., "Stabilization of Cowell's methods", *Numerische Mathematik*, 13, 154-175, 1969.



ÖZGEÇMİŞ

Sure KÖME, 1988 yılında Adana’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Adana’da tamamladı. 2006 yılında kazandığı Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2010 yılında 1. olarak mezun oldu. 2010-2011 eğitim öğretim yılında Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2011-2012 eğitim öğretim yılında mezun oldu. 2012-2013 eğitim öğretim yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında doktora yapmaya hak kazandı. Yüksek lisans ve Doktora eğitimi sırasında TÜBİTAK tarafından burs desteği aldı.

BİLİMSEL FAALİYETLER

ULUSLARARASI HAKEMLİ DERGİLERDE YAYINLANAN MAKALELER

1. Mehmet Tarık Atay., Aytekin Eryılmaz and **Sure Köme**, "Magnus series expansion method for solving nonhomogeneous stiff systems of ordinary differential equations", *Kuwait Journal of Science* 43 (1), 25-38, 2016. (SCI-Expanded).
2. **Sure Köme**, Aytekin Eryılmaz and Mehmet Tarık Atay, "A numerical approximation to some specific nonlinear differential equations using Magnus series expansion method ", *New Trends in Mathematical Sciences*, 4 (1), 125-129, 2016.
3. Mehmet Tarık Atay, Aytekin Eryılmaz, **Sure Köme**, Cahit Köme and Samuli Piipponen, "Comparative numerical solutions of stiff ordinary differential equations using Magnus series expansion method", *New Trends in Mathematical Sciences*, 3 (1), 35-45, 2015.

ULUSLARARASI BİLİMSEL TOPLANTILARDA SUNULAN VE ÖZETİ BİLDİRİ KİTABINDA BASILAN BİLDİRİLER

1. **Sure Köme** and Aytekin Eryılmaz, "Numerical solutions of singularly perturbed turning point problems exhibiting an interior layer via Magnus series expansion method", *ICAA 2016*, pp:287, Kırşehir.

2. **Sure Köme**, Mehmet Tarık Atay, Aytekin Eryılmaz and Cahit Köme, “Magnus expansion method for solving singularly perturbed turning point problems having boundary layers”, *Proceedings of the International Conference On Numerical Analysis And Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014)*, 1648 (1), AIP Publishing, Rhodes, Greece, 2015.
3. Cahit Köme, Mehmet Tarık Atay, Aytekin Eryılmaz and **Sure Köme**, “Numerical solutions of linear and nonlinear Lane-Emden type equations by using Magnus expansion method”, *Proceedings of the International Conference On Numerical Analysis And Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014)*, 1648 (1), AIP Publishing, Rhodes, Greece, 2015.

BAŞARILAR / BURSLAR / DESTEKLER

- Ömer Halisdemir Üniversitesi Matematik Bölüm Birinciliği, 2010.
- TÜBİTAK 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı, 2010 – 2012.
- TÜBİTAK 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı, 2012 – 2016.
- TÜBİTAK 2224-A Yurt Dışı Bilimsel Etkinliklere Katılma Desteği, 2014/Eylül.

Adres: 2000 Evler Mahallesi 27. Sokak
Özler Sitesi Süeda Apartmanı 24/7
Nevşehir/Merkez
e-posta : surekome@gmail.com

