

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇİZGELERDE DIŞMERKEZLİLİK MATRİSİ VE
SPEKTRASI**

**Tezi Hazırlayan
Hakan KÜÇÜK**

**Tez Danışmanı
Prof. Dr. Sezer SORGUN**

**Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi**

**Ağustos 2022
NEVŞEHİR**

Prof. Dr. Sezer SORGUN danışmanlığında **Hakan KÜÇÜK** tarafından hazırlanan “**Çizgelerde Dışmerkezlilik Matrisi ve Spektrasi**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

..../..../2022

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Üye : Prof. Dr. Sezer SORGUN

Üye : Prof. Dr. Halis BİLGİL

Üye : Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

Üye : Doç. Dr. Hatice TOPCU

ONAY

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır

..../..../2022

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hakan KÜÇÜK



TEŞEKKÜR

Lisansüstü süreçte gerek akademik alanda gerekse sosyal alanda desteğini yanımda bulduğum, araştırmacı ve dinamik danışmanım Prof. Dr. Sezer SORGUN, alışma ve öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi beni destekleyen aileme, ayrıca kıymetli desteği ile bu süreçte yanımdan hiç ayrılmayan hayat arkadaşım Neslihan KARASU'ya teőekkürü bir borç bilirim.



ÇİZGELERDE DIŞMERKEZLİLİK MATRİSİ VE SPEKTRASI

(Doktora Tezi)

Hakan KÜÇÜK

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2022

ÖZET

Günümüzde *çizge kuramı*, hem teorik (kuramsal) hem de pratik düzeyde yalnızca muazzam büyüklükte değil, aynı zamanda olağanüstü zenginlik ve karmaşıklık ile karşımıza çıkar. Matematiksel Kimya alanında önemli katkıları bulunan Milan Randić, 2013 yılında ilginç bir makale kaleme almıştır. Bu makale ile kimyada moleküler tanımlayıcılar olarak isimlendirilen kavramların çizge değişmezleri ile ifade edilmelerine olanak sağlamıştır. Aslında tanımlanan matris dışmerkezlilik (zıt komşuluk) matrisidir. Bu bakış açısı ile birlikte komşuluk ve dışmerkezlilik matrisleri mesafe temelli çizge matris ailesi içerisinde uç bölgelerde yer alır (min-maks ilişkisi). Çizge matrisleri üzerine çalışma yapan her araştırmacının karşılaştığı komşuluk ve mesafe matrisleri spektral çizge kuramında geniş bir çalışma sahasına sahiptir.

Bu tez çalışmasında çizge kuramının çoklu disiplinler açısından önemi, dışmerkezlilik matrisinin çizge-mesafe sorunsalı, spektral çizge kuramı içerisindeki yeri ve spektral karakterizasyon çalışması yapılmıştır. 2, 3 ve 4. bölümlerde Çizge Kuramı ve Spektral Çizge Kuramı ile ilgili temel tanım ve kavramlar etimolojik olarak belli bir düzene göre geniş bir biçimde verilmiştir. 5. bölümde dışmerkezlilik matrisi ile ilgili spektral çalışmalar kronolojik olarak sıralanmıştır. Ayrıca tarafımızdan literatüre kazandırılan özgün sonuçlar alt bölümde detaylı olarak verilmiştir. 6. bölümde açık problemler, gözlemler ve yorumlara dair varsayımlar yer almaktadır.

Anahtar Kelimeler: *Çizge, Çizge Matrisleri, Spektral Karakterizasyon, Dışmerkezlilik*

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Sezer SORGUN

Sayfa Adedi: 185

THE ECCENTRICITY MATRIX OF GRAPHS AND ITS SPECTRA

(PhD Thesis)

Hakan KÜÇÜK

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2022

ABSTRACT

Graph theory today appears not only of enormous magnitude, but also of extraordinary richness and complexity, both on a theoretical and practical level. Milan Randić, who has made important contributions to the field of Mathematical Chemistry, has written an interesting article in 2013. With this article, it has enabled the concepts called molecular descriptors in chemistry to be expressed with graph invariants. Actually, the defined matrix is the eccentricity (anti-adjacency) matrix. With this point of view, adjacency and eccentricity matrices are located in the extreme regions of the distance-based graph matrix family (in terms of minimum and maximum). Adjacency and distance matrices encountered by every researcher working on graph matrices have a wide field of study in spectral graph theory.

In this thesis, the importance of graph theory in terms of multi-disciplines, the graph-distance problem of the eccentricity matrix, its place in spectral graph theory and spectral characterization studies have been presented. In chapters 2, 3 and 4, basic definitions and concepts related to Graph Theory and Spectral Graph Theory are given in a broad etymological order. In Chapter 5, spectral studies on the eccentricity matrix are listed chronologically. Also, the original results, which has been brought to the literature by us, are given in detail in the subsection. Chapter 6 contains open problems, observations and conjectures related to the eccentricity matrix.

Keywords: *Graph, Graph Matrices, Spectral Characterization, Eccentricity*

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Sezer SORGUN

Page Number: 185

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLolar LİSTESİ	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	xii
1 BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2 BÖLÜM	
ÇİZGE KURAMI / TARİHÇE	5
3 BÖLÜM	
ÇİZGE KURAMI	20
3.1 Ön Bilgiler	20
3.2 Derece Kavramı	26
3.3 Yürüyüş, Gezi ve Yol	28
3.4 Çizgelerde Uzaklık Kavramı	30
3.5 Yapısal Kavramlar	33
3.6 Çizge İşlemleri	38
3.7 Özel Çizge Aileleri	45

4	BÖLÜM	
	SPEKTRAL ÇİZGE KURAMI	56
4.1	Ön bilgiler	56
4.2	Çizge Matrisleri	74
5	BÖLÜM	
	DIŞMERKEZLİLİK MATRİSİ	88
5.1	Dışmerkezlilik Matrisinin Gelişimi ve Önemi	88
5.2	Dışmerkezlilik Matrisi ve Literatür	92
5.3	Bulgular, Gözlemler ve Yorumlar	137
6	BÖLÜM	
	SONUÇ, ÖNERİLER ve TARTIŞMA	164
	KAYNAKÇA	175
	TERİMLER SÖZLÜĞÜ	177
	ÖZGEÇMİŞ	184

TABLolar LİSTESİ

Tablo 2.1	Alkanların izomer sayısı	9
Tablo 3.1	Bazı düzenli çizge sayı dağılımı (bağlantılı)	54
Tablo 4.1	Bağlantılı çizgeler için eşspektrum çift sayısı	86
Tablo 5.1	M -eşspektrumlu çizgelerin oranları	126
Tablo 5.2	Eşspektrumlu çizgelerin (özmerkezli ve 2 çaplı) oranları	127
Tablo 5.3	Küçük noktalı özmerkezli çizge sayıları	128
Tablo 5.4	Mesafe matrisi ve dışmerkezlilik matrisi için enerji değişim tablosu.	134
Tablo 5.5	En büyük ikinci dışmerkezlilik özdeğerleri verilen bazı çizgeler . .	140
Tablo 5.6	G çizgesi ve G^e çizgeleri	156
Tablo 5.7	İndirgenabilir/indirgenemez çizge dağılımı	156
Tablo 5.8	Eşspektrumlu çifti olmayan bağlantılı çizgeler	158

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1	Leonhard Euler'in çizimi	5
Şekil 2.2	Rouse Ball'ın çizge soyutlaması	6
Şekil 2.3	Kirkman'nın bal peteği örneği	7
Şekil 2.4	Hamilton'nun icosian oyunu	7
Şekil 2.5	Cayley'in Dallanmış ağac yaklaşımı	8
Şekil 2.6	İki izomer: Bütan ve İzobütan	9
Şekil 2.7	Kadim bilgi: Beş düzgün çok yüzlü	10
Şekil 2.8	Kuratowski çizgeleri: Sırasıyla K_5 , $K_{3,3}$	11
Şekil 2.9	1913 tarihli <i>Strand</i> dergisinden alınan görsel	12
Şekil 2.10	Wernicke'in sunduğu kaçınılmaz kümeler	14
Şekil 2.11	Birkhoff Elması	14
Şekil 2.12	3-düzenli ve 3-renkli Petersen çizgesi	16
Şekil 2.13	Temsili sosyal ağ çizgesi	18
Şekil 2.14	Protein-protein etkileşim çizgesi	19
Şekil 3.1	Çizge örneği	21
Şekil 3.2	Yalın olmayan çizgeler	22
Şekil 3.3	Karışık çizge ve onun temel çizgesi	23
Şekil 3.4	Yalın çizge ve onun temel çizgesi	23
Şekil 3.5	Yönlü ve Ağırlıklı çizgeler	24
Şekil 3.6	Bir çizgeyi renklendirme.	25
Şekil 3.7	Komşuluk/Çakışım tablosu	26
Şekil 3.8	Derece dizisi	27
Şekil 3.9	Yönlü çizgenin derecesi	27
Şekil 3.10	Aynı derece dizisine sahip iki çizge	27
Şekil 3.11	Yürüyüş, Gezi ve Yol	30
Şekil 3.12	Euler ve Hamilton çizgeleri	31
Şekil 3.13	Uzaklık değişmezleri	33
Şekil 3.14	Alt çizge görseli	34
Şekil 3.15	Geren alt çizge görseli	34
Şekil 3.16	İndirgenmiş alt çizge görseli	35

Şekil 3.17	Klik ve bağımsızlık sayısı	36
Şekil 3.18	Nokta ve kenar bağlantısallığı	36
Şekil 3.19	Aynı çizgenin iki farklı çizimi	37
Şekil 3.20	Eşyapılı G ve H çizgeleri	37
Şekil 3.21	Bazı birincil çizge işlemleri	39
Şekil 3.22	G çizgesi ve tümleyeni	39
Şekil 3.23	G çizgesinin hat çizgesi	40
Şekil 3.24	G ve H çizgelerinin birleşimi	40
Şekil 3.25	Nokta ekleme işlemi	41
Şekil 3.26	Merkez çizge modeli	41
Şekil 3.27	İki çizgenin toplamı	42
Şekil 3.28	Temel çizge çarpımları	43
Şekil 3.29	Korona çarpım işlemi	44
Şekil 3.30	$S_4 = K_{1,4}$ çizgesi ve karma genişlemesi	44
Şekil 3.31	Sonsuz çizge örnekleri	45
Şekil 3.32	Tam, Yol, Döngü ve Boş çizgeler	46
Şekil 3.33	Köklü ağaç ve orman çizge örnekleri	48
Şekil 3.34	Lolipop ve Uçurtma çizgeleri	49
Şekil 3.35	Halter, Çift yıldız ve Tırtıl çizgeler	49
Şekil 3.36	Kokteyl parti çizge örneği	50
Şekil 3.37	n -hiperküp veya n -küp çizge temsili	50
Şekil 3.38	Rüzgar gülü çizge ailesi	51
Şekil 3.39	Eşik çizge gösterimi	52
Şekil 3.40	Parçalı çizge örnekleri	53
Şekil 3.41	Mesafe düzenli çizge örneği (Kübik çizge)	55
Şekil 4.1	2 boyut için Determinant ve Alan	62
Şekil 4.2	Özvektör ve matris ilişkisi	66
Şekil 4.3	Bir matrisin yönlü çizgesi	70
Şekil 4.4	Perron özvektörü	72
Şekil 4.5	Çakışım matris örneği	75
Şekil 4.6	Krizen molekülünün geometrik ve nümerik kekulé yapısı	76
Şekil 4.7	Krizen molekülünün çakışım matrisi	76

Şekil 4.8	Komşuluk matrisi ve kuvvet	78
Şekil 4.9	Eşspektrumlu çizge çifti	80
Şekil 4.10	Bir hat konfigürasyonu ve onun temsili çizge modeli.	83
Şekil 4.11	Mesafe eşspektrumlu iki çizge örneği.	85
Şekil 4.12	Temel mesafe matrisleri arasındaki ilişki.	87
Şekil 5.1	4-etil-2-metil-heptan	88
Şekil 5.2	D_{max} elemanları için ilk örnekler	89
Şekil 5.3	Teorem 5.2.12 için örnek gösterim	100
Şekil 5.4	$T_{n,d}^{a,b}$ ve $T_{n,d}^{a,b,c}$ ağaç çizge aileleri	105
Şekil 5.5	T ve \tilde{T} ağaç çizge aileleri	106
Şekil 5.6	Lemma 5.2.31 de kullanılan özel tanımlı ağaç çizge ailesi	118
Şekil 5.7	Lemma 5.2.32 de kullanılan T ve \tilde{T} ağaç çizge aileleri	119
Şekil 5.8	Lemma 5.2.33 de kullanılan T ve \tilde{T} ağaç çizge aileleri	119
Şekil 5.9	$H_{p,q}$ ağaç çizge ailesi	120
Şekil 5.10	Dışmerkezlilik eşenerjili çizge çifti	122
Şekil 5.11	Aşılama dönüşümü (graft transformation)	129
Şekil 5.12	Kenar silme ve enerji değişimi	134
Şekil 5.13	Enerji değişimi: Karşılaştırma	135
Şekil 5.14	Yıldız çizgesi için karma genişleme modeli	138
Şekil 5.15	Dışmerkezlilik çizgesi	154
Şekil 5.16	Özel çift yıldız çizge	155
Şekil 5.17	6,7 ve 8 noktalı indirgenebilir bazı özmerkezli çizgeler.	163
Şekil 6.1	G ve H indirgenmiş (nokta) alt çizge.	164

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$G = (V, E)$	Çizge
$V, V_G, V(G)$	Nokta kümesi
$E, E_G, E(G)$	Kenar kümesi
$u \sim v/u \not\sim v$	Komşu/komşu olmayan noktalar u, v
$N_G(v)$	v noktasının açık komşuluğu
$N_G[v]$	v noktasının kapalı komşuluğu
D_n	İki kutuplu çizge
B_n	Buket çizge
$head(e)$	Yönlü kenarın baş kısmı
$tail(e)$	Yönlü kenarın kuyruk kısmı
$\chi(G)$	G 'nin nokta renklendirme sayısı
$\chi'(G)$	G 'nin kenar renklendirme sayısı
$ G $	G 'nin nokta sayısı
$ V(G) $	G 'nin nokta sayısı
$ V_G $	G 'nin nokta sayısı
$n(G)$	G 'nin nokta sayısı
n	Çizgenin nokta sayısı
$\ G\ $	G 'nin kenar sayısı
$ E(G) $	G 'nin kenar sayısı
$ E_G $	G 'nin kenar sayısı
$m(G)$	G 'nin kenar sayısı
m	Çizgenin kenar sayısı
$deg(v)$	v noktasının derecesi
$\delta(G)_{min}$	G 'nin minimum derecesi
$\delta(G)_{max}$	G 'nin maksimum derecesi
δ_{min}	Çizgenin minimum derecesi
δ_{max}	Çizgenin maksimum derecesi
δ	Minimum derece
Δ	Maksimum derece

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ (Devam)

$d(s, t)$	s ve t noktaları arası mesafe
$\vec{d}(s, t)$	s ve t noktaları arası yönlü mesafe
$ecc(v)$	v noktasının dışmerkezliliği
$diam(G)$	G 'nin çapı
$rad(G)$	G 'nin yarıçapı
$center(G)$	G 'nin merkezi
$per(G)$	G 'nin çevresi
$girth(G)$	G 'nin kalınlığı
$circum(G)$	G 'nin çevre uzunluğu
$G[P]$	G 'nin P nokta alt kümesine göre indirgenmiş altçizgesi
$G[Q]$	G 'nin Q kenar alt kümesine göre indirgenmiş altçizgesi
$\omega(G)$	G 'nin klik sayısı
$\alpha(G)$	G 'nin bağımsızlık sayısı
$\kappa(G)$	G 'nin nokta bağlantısallığı
$\kappa'(G)$	G 'nin kenar bağlantısallığı
$G \cong H$	G ve H çizgeleri eşyapılıdır
\overline{G}	G nin tümleyeni (tümlemeler çizge)
G^c	G nin tümleyeni (tümlemeler çizge)
$\mathcal{L}(G)$	G 'nin hat çizgesi
$G \cup H$	G ve H çizgelerinin birleşimi
$G + H$	G ve H çizgelerinin ayrık birleşimi
$G \cap H$	G ve H çizgelerinin kesişimi
$G + v$	v noktasının G çizgesine eklenmesi
$G \vee H$	G ve H çizgelerinin toplanması
$G \square H$	G ve H çizgelerinin kartezyen çarpımı
$G \times H$	G ve H çizgelerinin direk çarpımı
$G \boxtimes H$	G ve H çizgelerinin güçlü çarpımı
$G \circ H$	G ve H çizgelerinin korona çarpımı
$\mathcal{M}\mathcal{E}_G[t_1, \dots, t_n]$	G çizgesinin karma genişleme işlemi

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ (Devam)

K_n	n noktalı tam çizge
$\overline{K_n}$	n noktalı boş çizge
K_0	Sıfır çizge
K_1	Aşık çizge
P_n	n noktalı yol çizge
C_n	n noktalı döngü çizge
T_n	n noktalı ağaç çizge
S_n	$n + 1$ noktalı yıldız çizge
$K_{1,n}$	$n + 1$ noktalı yıldız çizge
W_n	n noktalı tekerlek çizge
$U_{m,n}$	$m + n$ noktalı uçurtma çizge
$L_{m,n}$	$m + n$ noktalı lolipop çizge
$B_{n,n}$	$2n$ noktalı halter çizge
$S_{m,n}$	$m + n + 2$ noktalı çift yıldız çizge
\mathcal{T}	Tırtıl çizge
$CP(n)$	$2n$ noktalı kokteyl çizge
$AP(G)$	G çizgesinin zıt kutuplu çizgesi
$W_n^{(k)}$	$n(k - 1) + 1$ noktalı rüzgar gülü çizge
$K_{m,n}$	$m + n$ noktalı iki parçalı tam çizge
$M_{m \times n}$	m satır ve n sütuna sahip matris
$\overline{M_{m \times n}}$	$M_{m \times n}$ matrisinin eşleniği
$M_{m \times n}^*$	$M_{m \times n}$ matrisinin eşlenik devriği
$tr(M_n)$	M_n matrisinin izi
$I, I_n, I_{n \times n}$	Birim matris
$J, J_n, J_{n \times n}$	1 elemanından oluşan kare matris
$0, 0_n, 0_{n \times n}$	0 elemanından oluşan kare matris
$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$	Köşegen matris
M_n^{-1}	M_n matrisinin tersi
$P = p_{ij}$	Permütasyon matrisi

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ (Devam)

$M_{mn}[K, L]$	M matrisinin altmatrisi
$M[K]$	M matrisinin asıl altmatrisi
$rr(M_{mn})$	M matrisinin satır rankı
$cr(M_{mn})$	M matrisinin sütun rankı
$null(M_{mn})$	M matrisinin hiçliği
$\sigma(p)$	p permütasyonunun işareti
$\det(M_n)$	M matrisinin determinanı
$ M_n $	M matrisinin determinanı
$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$	Karakteristik polinom
$\sigma(A)$	A matrisinin spektrumu
s_k	Bir matrisin özdeğerlerine ait k. simetrik dönüşüm
$In(A)$	A matrisinin eylemsizliği
$A \equiv B$	A, B denk matrisler
$A \sim B$	A, B benzer matrisler
$\rho(A)$	A matrisinin spektral yarıçapı
$\Gamma(A)$	A matrisinin yönlü çizgesi
$P = P_1 \cup \dots \cup P_s$	Bir matrisin parçalanışı
$Q = (q_{ij})$	Bölüm matrisi
$Q(G)$	Çakışım matrisi (yönlü veya yönsüz)
$A(G)$	Komşuluk matrisi
$Spec_A(G)$	Komşuluk matrisinin spektrumu
$E_A(G)$	Komşuluk matrisinin enerjisi
D_G	G çizgesinin derece dizisine ait köşegen matris
$L(G)$	Laplasyan matrisi
$Q(G)$	işaretsiz Laplasyan matrisi
$Spec_L(G)$	Laplasyan matrisinin spektrumu
$E_L(G)$	Laplasyan matrisinin enerjisi
$S(G)$	Seidel matrisi
$\mathcal{D}(G)$	Mesafe matrisi

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ (Devam)

$Spec_{\mathcal{D}}(G)$	Mesafe matrisinin spektrumu
$E_{\mathcal{D}}(G)$	Mesafe matrisinin enerjisi
$W(G)$	Wiener indeksi
$t_G(v)$	G çizgesine ait v noktasının iletkenliği
$T(G)$	İletkenlik matrisi
$\mathcal{D}^L(G)$	Mesafe Laplasyan matrisi
$\mathcal{D}^Q(G)$	İşaretsiz mesafe Laplasyan matrisi
$\mathcal{D}^{\mathcal{L}}(G)$	Normalleştirilmiş mesafe Laplasyan matrisi
D_{max}	(max-min) Matrisi
$\mathcal{E}(G)$	Dışmerkezlilik matrisi
$Spec_{\mathcal{E}}(G)$	Dışmerkezlilik matrisinin spektrumu
E_{π}	Hükel enerji
$E_{\mathcal{E}}(G)$	Dışmerkezlilik matrisinin enerjisi
$W(G)_{\varepsilon}$	Wiener-dışmerkezlilik indeksi
$SAp(G)$	S zıtkutuplu çizge
G^e	G çizgesine ait dışmerkezlilik çizgesi
$\mathcal{E}(i)$	i noktasının dışmerkezlilik derece dizisi
$T_{\mathcal{E}}(i)$	i noktasının ikincil dışmerkezlilik derece dizisi

1. BÖLÜM

GİRİŞ

David Wells, *The Mathematical Intelligencer* dergisinin Güz 1988 sayısı için “Which Is the Most Beautiful?” isimli, içinde 24 teorem bulunan, ilginç bir makale kaleme almıştır. Wells, 0-10 aralıklı bir ölçek ile okuyucularından bu teoremlerin ne derece güzel (estetik) olduklarını değerlendirmelerini istemiş ve 2 yıl sonra Wells bulgularını (değerlendirme sonuçlarını) “Are These the Most Beautiful?” isimli başka bir makale ile okuyucularına aktarmıştır [1].

Estetik açıdan dereceye giren ilk 12 teorem;

1. $e^{\pi i} + 1 = 0$
2. $V - E + F = 2$
3. *Asal sayılar sonsuzdur.*
4. *Beş düzgün çokyüzlü vardır.*
5. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \cdots = \frac{\pi^2}{6}$
6. *Kapalı birim diskin kendi içine sürekli fonksiyonu sabit bir noktaya sahiptir.*
7. *Karesi 2 olan rasyonel sayı yoktur.*
8. π *aşkın (transcendental) bir sayıdır.*
9. *Her düzlemsel harita dört renkle renklendirilebilir (Dört Renk Teoremi).*
10. $4n + 1$ *formundaki her asal sayı, iki tamsayının karelerinin toplamı olarak tek tür yazılır.*
11. *Sonlu grup için her hangi bir alt grubunun mertebesi, grubun mertebesini böler.*
12. *Herhangi bir kare matris, karakteristik denklemini sağlar.*

Üç teorem ile (2, 4 ve 9. teoremler) listeye giren *çizge kuramı*, karşılaşılabileceğimiz bir durumu (problemi) görselleştirmemize, analiz etmemize, genelleştirmemize, çoğu zaman durumu (problemi) daha iyi anlamamıza ve muhtemelen bir çözüm bulmamıza

yardımcı olma gibi eşsiz bir özelliğe sahiptir [2]. Çizge kuramının tarihsel arka planı ve farklı disiplinlerle ilişkisi mümkün olan en geniş bakış açısı ile 2. bölüm başlığı altında sunulmuştur.

Çizge kuramının temelinde *nokta (vertex/node)* ve *kenar (edge/link)* olarak isimlendirilen soyut kavramları bir amaç doğrultusunda anlamlı modellere dönüştürme yatar. Çizge denilen bu yapılar matrisler ile temsil edilerek matris analizi sahasına aktarılır. Bu matrislerden bazıları; *Komşuluk matrisi (Adjacency matrix)*, *Laplasyan (Laplacian) matrisi*, *Çakışım matrisi (Incidence matrix)*, *Randić matrisi*, *Seidel matrisi*, *Mesafe matrisi (Distance matrix)*, *Dışmerkezlilik matrisi (Eccentricity matrix/Anti-adjacency matrix)* olarak isimlendirilir. Dahası literatürde çizgeler ile ilgili onlarca matris tanımlanmış ve yüzlerce makale kaleme alınmıştır. Çizgeyi Matris Analizi ile buluşturan bu matrisler genel manada M -matris olarak literatürde isimlendirilir. Bu matrisler doğal olarak bir M -karakteristik polinoma sahiptir. Bu polinomun köklerinden M -özdeğerlere, bu özdeğerlerin kümesinden ise M -spektrum kavramlarına geçiş yapılır. Bu kavramlar, Çizge kuramı ve matris analizi araştırmalarını birlikte ele alan, *Spektral Çizge Kuramı* alt alanının temellerini oluşturur. Spektral çizge kuramı ile ilgili daha detaylı bilgilere [3], [4], [5] ve [6] referans numaralı kaynaklardan ulaşılabilir. Spektral çizge kuramının ilgilendiği bazı önemli problemler;

- *Hangi çizgeler M -spektrum ile belirlidir?*
- *M -spektrum ile çizge değişmezleri (invariants) arasında nasıl bir ilişki vardır?*
- *Belirli özelliklere sahip çizge aileleri M -özdeğer baz alınarak sınıflandırılabilir mi?*

Bu ve benzeri problemler bu doktora tez çalışmasının temel motivasyonu oluşturmuştur. Dışmerkezlilik matrisi yapısı itibariyle diğer matrislerden ayrı bir özelliğe sahiptir. Literatürdeki çoğu matris *indirgenemez (irreducible)* matrislerdir oysa dışmerkezlilik matrisi bazı çizgeler için *indirgenebilir (reducible)* matris olarak diğer çizge matrislerinden ayrışır (Spektral çizge kuramı ve bu ayrışım tezin 3. ve 4. bölümlerinde daha detaylı ele alınmıştır). Bu farklılaşma beraberinde matrisi karakterize etmeyi zorlaştırır. Bu zorluklar ise spektral çizge kuramında sık başvurulan yaklaşımları kullanıp + geliştirmeyi, çizge kuramında var olan çizge işlemlerini deneyip + genişletmeyi, çizge değişmezleri ile oluşturulan mevcut sınırlandırmaları uyarlayıp + iyileştirmeyi ve

algoritma yazıp + verileri kontrol etmeyi gerektirmektedir. Bu gereklilikler, akademik platform açısından, hali hazırda sunulan doktora tez çalışmasının özgül ağırlığını arttıracaktır.

Mühendislik temelli araştırmalardan sosyolojik temelli araştırmalara kadar geniş bir yelpazede bilime hizmet eden çizge kuramı, bir çok modern çalışmalarda olduğu gibi, çeviri kaynaklı problemlerden ve çoklu-disipliner yapıya sahip olmasından sebep kavram karmaşasından nasibini almıştır. Bu tez çalışmasında olabildiğince Türkçe karşılıklar kullanılmaya çalışılmış ve ilgili bölümlerde notasyon farklılıklarından bahsedilmiştir. 1976 tarihli Çizge Kuramı eseri ile Yurdakul Ceyhun, Türkçe içerik açısından önemli bir ilke imza atmıştır [7]. Eser temelde mühendislik kökenli araştırmacılara ve öğrencilere hitap edecek şekilde hazırlanmış görünsede meraklı her insanımızın istifade etmesi mümkündür. İlerleyen yıllarda çizge kuramı mühendislik ve fen fakülteleri bünyesinde ders notları olarak hazırlanarak Türk araştırmacılara ilham kaynağı olmuştur. Yakın dönemde ise çizge kuramı ile ilgili kitaplar çeşitlenerek ([8], [9], [10], [11]) *Ayrık Matematik (Discrete Mathematics)* alt disiplini ile birlikte genç araştırmacılara aktarılmaya devam edilmiştir. Çizge kuramı mühendislik fakültelerinin yanısıra Matematik bölümlerinde, eğitim fakültelerinde ve bilgisayar bilimleri bölümlerinde gerek lisans gerekse lisans üstü seviyelerde okutulmaktadır. Bu bağlamda tez bölüm başlıkları ve bölüm içerikleri oluşturulurken, gerekli önbilgiler ilgili bölüm başlığı altında ayrı ayrı sunulmuştur.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde çizge kuramının tarihçesi geniş bir biçimde derlenerek tarihi arka plan etimolojik olarak ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde derece, yürüyüş, yol ve uzaklık gibi kavramlardan bahsedilerek çizge aileleri, çizge işlemleri ve yapısal özellikler aktarılmıştır. Dördüncü bölümde lineer cebir ve matris kuramından doğan spektral çizge kuramının temel tanımlarına, önemli teoremlerine ve bütünlüğünü korumak adına çizge örneklerine yer verilmiştir. Ayrıca Spektral Çizge kuramının kimyasal uygulamalar dahil pek çok disiplinlerde verimli bir şekilde kullanımına örnek teşkil edebilecek çalışmalar ifade edilmiştir. Tez çalışmasının nihai amacı olan *dışmerkezlilik matrisinin karakterizasyonu* beşinci bölümünde ele alınmıştır. Bu bölümde hedef matris ile ilgili önceki çalışmalara yer verilerek orjinal bulgular ifade edilmiştir. İlk önce bir tek pozitif dışmerkezlilik özdeğerine sahip olan çizgelerin karakterizasyonları yapılmıştır. Sonrasında literatürde “Hangi çizgeler dışmerkezlilik

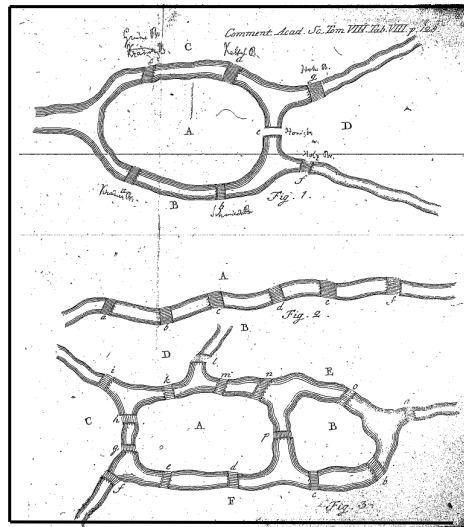
matrisine göre indirgenebilirdir veya indirgenemezdir?" probleminden yola çıkarak oluşturulan sonuçlar ifade edilmiştir. Son bölüm ise kısa bir değerlendirmeden, bulguların karşılaştırılmasından, açık problemlerin izahından, gözlemlerin ifade edilmesi ve yorumlara dair varsayımların aktarılmasından oluşmaktadır.



2. BÖLÜM

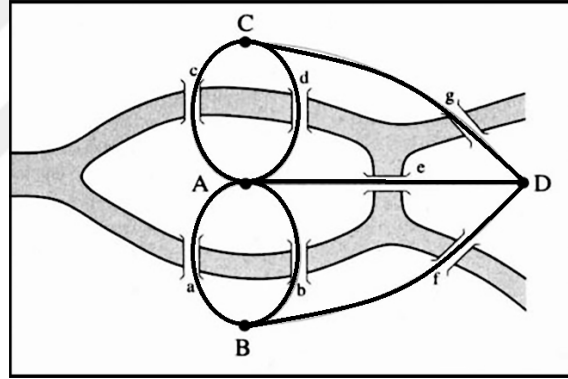
ÇİZGE KURAMI / TARİHÇE

İçinde bulunduğumuz evren muhtemelen anlaşılamayacak kadar karmaşık ve merak uyandırıcıdır. Her an bir çoğunu anlayamadığımız, çok azını algıladığımız, algılasak bile farkına varamadığımız, kimi zaman algılamaktan kaçındığımız, dahası algıladıklarımızı nasıl anlamlı hale getirebileceğimizi bilemediğimiz sayısız fenomen ile karşı karşıyayız [12]. Evrenimizdeki bu ilginç fenomenlere (problemlere) çözüm üretmedeki ilk adım, problemin soyut hale getirilmesidir. Bu soyutlamanın en yalın ve estetik yolu ise *çizgelerdir*. Bu sihirli kavramın ayak izlerini 1735 yılına kadar götürebiliriz. Her ne kadar kuramsal fikir olarak çizge kavramı 1878 yılına dayansa da, Leonhard Euler (1703-1783), akademik dünyada Königsberg köprüsü problemi olarak bilinen meşhur probleme getirdiği estetik yanıt ile, çizge soyutlamasını biz fanilerin zihin dünyasına armağan etmiştir. Etrafımızda tecrübe ettiğimiz veya deneyimleme olasılığına sahip olduğumuz, kafamızı meşgul edebilecek düzinelerce karmaşık yapılar (complex structures), ağlar (networks), kimyasal yapılar, topolojik soyutlamalar, harita reklendirme problemleri, akış problemleri, eş bulma problemleri, sosyal problemler, bulmacalar, akıl oyunları, vb. ilginçlikleri barındıran, farklı disiplinlerde kilit öneme sahip, çizge kavramları karşımıza çıkar. Eski Prusya'daki Königsberg (Rusya' da Kaliningrad adını almıştır)



Şekil 2.1. Leonhard Euler'in 1741 yılında yayınlandığı makalesinde bulunan model. Daha ayrıntılı bilgi için [13] referans numaralı makaleye bakılabilir. Çözümü 1736 yılında gerçekleştirilse de makale olarak ilk basım yılı 1741 olmuştur.

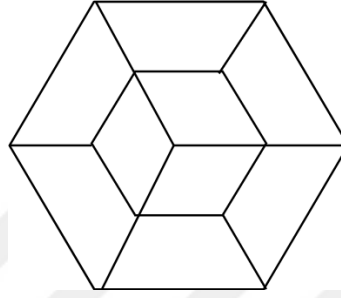
kentinin içinden geçen Pregel ırmağı şehri bir ada ile bir yarımada olacak şekilde doğal alanlara ayırır, adanın bir yanında iki kol halinde, öteki yanında tek kol halinde devam eder. Oluşan dört farklı bölgeden ulaşım, yedi köprü ile sağlanır. Belkide eğlenmek amacıyla oluşturulan bir soru, Leonhard Euler’de dahil bir çok seçkin insanın kafasını meşgul etmiş. *Bütün köprülerden bir ve yalnız bir defa geçmek koşulu ile bir yürüyüş yapılabilir mi?* bu ilginç soruya Euler’in cevabı Çizge Kuramının miladı kabul edilir [13]. 1736’da Euler’in çalışması böyle bir ulaşımın mümkün olmadığını kanıtlamış ve bu tür problemlerin çözümlerini mümkün kılacak modelin (çizgenin) hangi özelliklere sahip olması gerektiğini göstermiştir. Euler, problemin çözümü için bir diagram kullanmamış, bunun yerine problemi farklı bir yaklaşım ile ele almıştır. Königsberg köprü problemi ve *diagram-tracing puzzle* arasındaki ilişkiyi 19. yy da W. W. Rouse Ball ortaya koymuştur [14] ve çizge ile bu meşhur problemi modellemiştir. Königsberg köprü



Şekil 2.2. Rouse Ball’ın 1892 basımı kitabında yer alan Königsberg köprü problemi çizge soyutlaması.

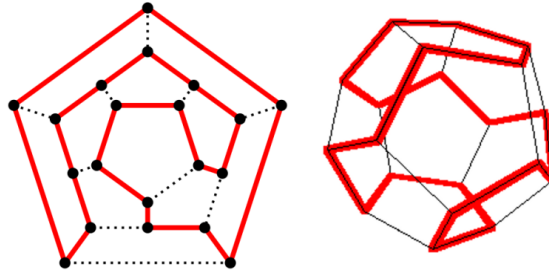
problemi ve bu probleme benzer başka problemlerin ortaya çıkışı ile birlikte Çizge Kuramının *geçilebilirlik (traversability)* kavramı ortaya çıkmıştır. Bu kavram yüzeysel olarak Euler problemine benzeyen başka problemlerin çözümü için oldukça kullanışlı hale gelmiştir. Örneğin; Hamilton problemleri, William Rowal Hamilton’un katkılarından dolayı isimlendirilen, çizge kuramının gelişmesinde büyük rol oynayarak hacimli bir birikime sahip olmuştur. Hamilton problemini basit olarak “*Verilen bir çizgenin her bir noktasından sadece bir kez geçen bir döngü bulabilirmiyiz?*” şeklinde ifade edebiliriz. Bu tarz problemlerin erken örneklerinden biri at dolaşım (hamle) problemidir (*knight’s tour problem*). Bu problemi satranç tahtası üzerindeki 64 karenin herbirini ziyaret ederek başlanılan noktaya geri gelmek olarak özetleyebiliriz. Bu problemin sistematik çözümleri

Euler [15], Vandermonde [16] ve diğer seçkin bilim insanları tarafından verilmiştir. 1856 yılında Kirkman tarafından kaleme alınan makalede çokyüzlü cisimler üzerinde her bir noktadan sadece bir kez geçmek koşulu ile Hamilton dolaşımına cevap aranmıştır [17]. Kirkman, çift sayıda yüze sahip ve noktaları tek olan her çokyüzlü için böyle bir dolaşımın olamayacağını ispatlamış ve bal peteği şeklinin ikiye ayrılmış halini temsil eden bir örnek ile düşüncesini özetlemiştir (Şekil 2.3). Değişmeli olmayan cebirsel yapılar üzerine yaptığı



Şekil 2.3. Kirkman'nın bal peteği örneği

çalışmalardan yola çıkan Hamilton, bir dodekahedronun, düzgün 12 adet yüzü olan şekil, tüm köşelerinden geçen döngüleri düşünerek, daha sonraları *icosian* adını alan, bir oyun icat etmiştir (Şekil 2.4). Bir çizgenin Hamilton çizgesi (Hamiltonun ortaya attığı koşulu

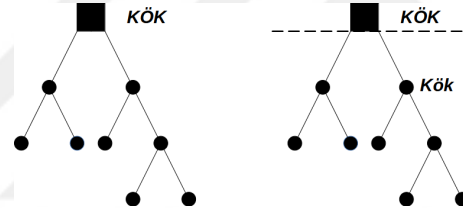


Şekil 2.4. Hamilton'nun icosian oyunu

sağlayan çizge) olup olmadığı meselesi akademik dünyada, G. A. Dirac, O. Ore, J. A. Bondy ve V. Chvatal gibi seçkin matematikçiler tarafından detaylı olarak incenmiştir [18]. Dahası A. Ghounila, H. Meyniel ve diğer araştırmacılar çizgeleri yönlendirerek yönlü Hamilton çizgeleri üzerinde gerek ve yeter koşulların belirlenmesi çalışmalarını sistematize ederek geliştirmişlerdir.

Dallanan-budaklanan çizge kuramının disiplinler arası ilişkisini ortaya çıkaran önemli bir kavramıda *ağaçlardır*. Bünyesinde döngü içermeyen bu çizgeler farklı disiplinlerin öncüsü kabul edilen elit matematikçiler tarafından geliştirilerek bir çok alanda etkin

bir şekilde kullanılmıştır. 1824-1887 yılları arasında yaşayan Gustav Kirchhoff, elektrik ağlarındaki akımın hesaplanmasında teorik olarak ağaç çizgeleri kullanması, daha sonra bu tarz çizgeler, Arthur Cayley (1821-1895), James Joseph Sylvester (1806-1897), Georg Pólya (1887-1985) ve diğer bilim insanları tarafından belirli kimyasal moleküllerin sayımında kullanılmıştır. Ağaçları içeren sayma teknikleri ilk olarak bir diferansiyel hesaplama problemi ile bağlantılı olarak ortaya çıkmış ancak kısa süre sonra kimyasal moleküllerin sayılmasında temel araç haline gelerek başlı başına büyüleyici bir çalışma alanına dönüşmüştür. Sylvester'in *Differential transformation and the reversion of series* isimli çalışmasından esinlenerek Cayley dallanmış ağaç sayımı araştırma sahasının öncüsü olmuştur [19]. Cayley'in yöntemi, dallanmış bir ağacın kökünü keserek daha küçük dallanmış ağaçlar elde etme fikrine dayanmaktadır. Yöntem Şekil 2.5 de basitçe okuyucuya ifade edilmiştir.



Şekil 2.5. Cayley'in Dallanmış ağaç yaklaşımı

A_n , n - tane dallanmaya sahip ağaçların sayısını gösterecek şekilde, Cayley

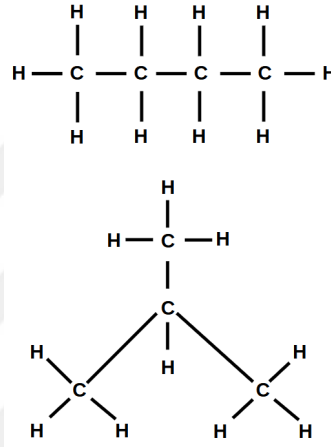
$$1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots$$

üreteç fonksiyonunun,

$$(1 - x)^{-1} \cdot (1 - x^2)^{-A_1} \cdot (1 - x^3)^{-A_2} \cdot \dots$$

çarpımına eşit olduğunu ispat etmiştir. Bu eşitliği kullanarak Cayley, A_n için ilk bir kaç değeri hesaplayarak literatürü zenginleştirmiştir. 1874 yılında, Cayley daha zor bir problemi çözmek için yöntem geliştirme çalışmalarını akademik platforma sunarak önemli katkılarda bulunmuştur [20]. Bu yöntem, devamında kimyasal moleküllerde uygulanacak, temelde ağacın (molekülün) merkez (center) veya merkezimsi (centroid) noktalarını referans kabul eden sayma esası üzerine kurulmuştur. Sonraki yıllarda A. Cayley, H. Prüfer, G. Pólya, J. H. Redfield, R. Otter, F. Harary, R. C. Read ve diğer matematikçiler tarafından ağaç çizgeleri üzerine çalışmalar geliştirilmiştir. 1850 lere

kadar kimyasal elementlerin sabit oranda birleştiği bilinen bir gerçektir. CH_4 (Metan) ve C_2H_5OH (Etanol) gibi kimyasal formüller biliniyordu ancak elementlerin nasıl birleştiği ve bu maddeleri oluşturulma mekanizması henüz anlaşılammıştı. Bu zaman zarfında, özellikle Alexander Crum Brown molekülleri temsil etmek için kimyasal modelleme fikrini sunduğunda kimyasal bağ derecesinin önemi ve molekülleri çizgelerle modelleme fikri hayat buldu. Crum Brown'un çizgesel modelleme yaklaşımı ilk kez izomer fenomeninin izahı gerçekleştirmiştir. Şekil 2.6 da kimyasal formu C_4H_{10} olan



Şekil 2.6. İki izomer: Bütan ve İzobütan

iki izomer resmedilmiştir. Cayley ağaç sayma metodunu kullanarak 11 karbon atomuna kadar alkanları saymıştır. Tablo 2.1 de $n = 1, \dots, 8$ için alkanların izomer sayısını göstermektedir. 1878 yılında Cayley'in önemli katkıları sağladığı konu üzerinde Sylvester

Tablo 2.1. Alkanların izomer sayısı

Formül	CH_4	C_2H_6	C_3H_8	C_4H_{10}	C_5H_{12}	C_6H_{14}	C_7H_{16}	C_8H_{18}
İzomer sayısı	1	1	1	2	3	5	9	18

kısa bir makale kaleme almıştır [21]. İlk kez bu makalede kuramsal olarak çizge ve kimyasal çizge kavramlarından bahsedilmiştir ki bu makale özellikle Kimyasal çizge çalışmaları için milad kabul edilebilir.

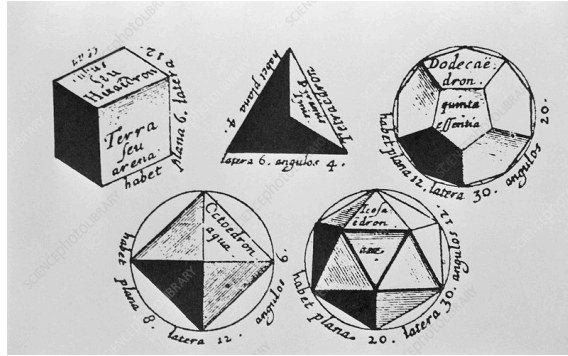
*“Every invariant and covariant thus becomes expressible by a **graph** precisely identical with a Kekulean diagram or **chemicograph**”*

1920 ve 1930 lu yıllara kadar izomerlerin hesaplanmasında küçük ilerlemeler kaydedildi. A. C. Lunn ve J. K. Senior, bu alan için permütasyon gruplarının önemini farkettiler ve Polya bir çok molekül ailesi için sayma problemini ciddi bir şekilde ele alarak çözüm yaklaşımları sunmuşlardır.

Euler'in çok yüzlüler formülü [22] Topolojik Çizge Kuramının miladı olarak kabul edilebilir. Ayrıca Euler'in ve diğer seçkin matematikçilerin çok yüzlüler ile ilgili çalışmaları *düzlemsel çizge* alt dalının gelişmesine öncülük etmiştir. Kadim Yunan düşünürleri 5 düzgün katı cisme (Şekil 2.7) aşınmadı fakat ayrıtları arasındaki ilişkileri formülize edemiyorlardı. V noktaların sayısı, E kenarların sayısı, F çok yüzlünün yüz sayısı olmak üzere,

$$V - E + F = 2$$

eşitliği matematik dünyasının en estetik ikinci denklemi olarak sınıflandırılır [2]. Ren'e Descartes 17. yüzyılda çok yüzlüleri incelemiş ve daha sonra Euler formülünün türetileceği sonuçları elde etmiştir. Ancak Descartes, *kenar* kavramını kullanmadığı için buna benzer bir formül çıkarımında bulunamamıştır. 1752 yılında Euler, bir yada daha



Şekil 2.7. Kadim bilgi: Beş düzgün çok yüzlü

fazla şekli parçalara ayıran ve parçaları başka bir şekil elde etmek için kullanılan yöntem (*dissection*) ile formülünü ispat etmek istedi ama bu yaklaşım yeterli olmadı. İlk geçerli ispat, küresel çokgenlerin metrik özelliklerin kullanılması vasıtası ile, M. Legendre tarafından 1794 yılında verildi [23]. 1813 yılında, A. L. Cauchy, çok yüzlüleri stereo-grafik olarak düzleme yansıtarak ve elde ettiği düzlemsel çizgenin üçgenleşmesini dikkate alarak Euler formülünün bir kanıtını verdi [24]. Aynı zamanda, S. A. J. Lhuiler, yalnız beş düzgün dışbükey çokyüzlü olduğuna dair topolojik bir kanıt verdi ve bunlardan dördünün karşıt

çiftlerden meydana geldiğini *duality* kavramıyla izah etti. Ayrıca Euler formülünün geçerli olmadığı üç tür çokyüzlü buldu. Lhuiler

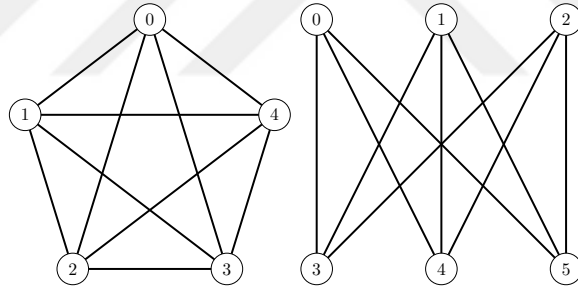
$$V - E + F = 2$$

formülünü başka bir şekilde elde ederek Euler'in formülünü aşağıdaki formla ifade ederek geliştirmiştir.

$$V - E + F = 2 - 2g$$

Burada g sayısı çokyüzlünün *yüzey türünü* göstermektedir. Geliştirilen formülde $2 - 2g$ ifadesine *Euler karakteristiği* denir. Çokyüzlüler üzerine J. B. Listing, H. Poincare, M. Dehn, P. Heegaard ve O. Veblen gibi üretken matematikçiler ileri seviyede katkı sunarak literatürü zenginleştirmişlerdir.

Düzlemsel çizgeler ile ilgili çalışmalar, *tam çizge* ve *iki parçalı tam çizge* (Şekil 2.8) içeren iki eğlenceli problemden kaynaklanmaktadır. Bu çizgeler daha sonra Kuratowski tarafından düzlemsellik kavramını zorunlu kılan çizgeler olarak bilindi. 1840'lı yıllarda



Şekil 2.8. Kuratowski çizgeleri: Sırasıyla K_5 , $K_{3,3}$

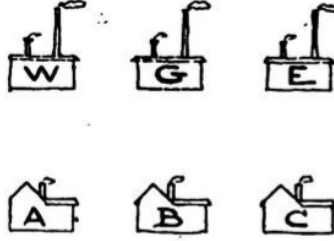
A. F. Möbius öğrencilere aşağıdaki bulmacayı sordu.

“ Bir zamanlar beş oğlu olan bir kral varmış. Vasiyetinde, ölümünden sonra oğulların krallığı beş bölgeye ayırmaları gerektiğini, böylece her bölgenin sınırının diğer dört bölgenin her biriyle ortak bir sınır çizgisine sahip olmasını gerekliliğini belirtti. Kralın vasiyeti yerine getirilebilir mi? ”

Bu soru, düzlemde birbirine komşu beş bölge çizilip çizilemeyeceği üzerinedir. (kısaca 5 noktalı tam çizge düzlemsel midir?) Sonrasında bu ve benzeri soruların çizge kuramı ile bağlantısı H. Tietze tarafından dahada geliştirildi. Anonim başka bir problem ise H. Dudeney tarafından 1913 tarihli *Strand* dergisinde altyapı (Doğal gaz-su-elektrik) hizmeti sunma bilmecesi olarak sunuldu (Şekil 2.9)

146.—WATER, GAS, AND ELECTRICITY.

THERE are some half-dozen puzzles, as old as the hills, that are perpetually cropping up, and there is hardly a month in the year that does not bring inquiries as to their solution. Occasionally one of



these, that one had hoped was an extinct volcano, bursts into eruption in a surprising manner. For some quite unknown reason I have lately received an extraordinary number of letters (four of them from the United States) respecting the ancient

puzzle that I have called "Water, Gas, and Electricity." It is much older than electric lighting, or even gas, but the new dress brings it up to date. The puzzle is to lay on water, gas, and electricity, from W, G, and E, to each of the three houses, A, B, and C, without any pipe crossing another. Take your pencil and draw lines showing how this should be done. You will soon find yourself landed in difficulties. My answer next month must serve as a reply to my many correspondents.

Şekil 2.9. 1913 tarihli *Strand* dergisinden alınan görsel

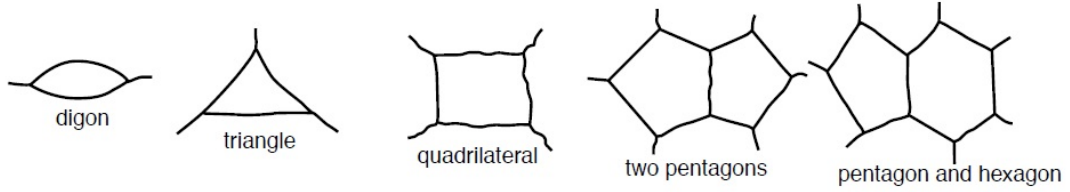
"Su, elektrik ve doğal gaz boru hattı, üç farklı A, B ve C evlerine borular birbirini kesmeyecek şekilde dōşenebilir mi?"

1930 yılında Kuratowski, ünlü bir makale yayınladı [25]. Makalede "her düzlemsel olmayan çizgenin K_5 ve $K_{3,3}$ çizgelerine homomorfik bir alt çizgeye sahip olması gerekliliğini" ispat etti. Bu sonuç bağımsız olarak O. Frink ve P. A. Smith tarafından da elde edildi. 1931'de H. Whitney, tamamen kombinatoryal ve düzlemsel çizgeler için dualitenin geometrik tanımıyla uyumlu olan soyut bir dualite tanımını keşfetti. Dualitenin bu genel tanımıyla, bir çizgenin ancak ve ancak soyut bir duali varsa düzlemsel olduğunu kanıtladı [26]. İlgili sonuçlar S. MacLane ve diğerleri tarafından elde edilerek düzlemsel çizgeler geliştirildi. 1935'te Whitney, çizgeler ve vektör uzaylarından hareketle bağımsızlık fikrini matroid kavramına genelleştirmiştir. Bir matroidin duali, düzlemsel çizgelerin dualitesini genişletmiş ve netleştirmiştir. Ayrıca Tutte, 1950'lerin sonlarında, matroidin bir çizgeden ortaya çıkması için Kuratowski tipi bir kriter elde etmek adına Whitney'in fikirlerini kullanmıştır [27].

Herhangi bir haritada bulunan ülkelerin renklendirilmesi sorunu ve ünlü dört renk problemi ile "çizgelerde renklendirme" fikrinin gelişimi çizge kuramında bambaşka bir alanın doğmasına sebep olmuştur. Dört renk problemi ilk olarak 1852 'de Francis Guthrie tarafından ortaya atılmış ve Alfred Bray Kempe tarafından ünlü (ve de yanlış

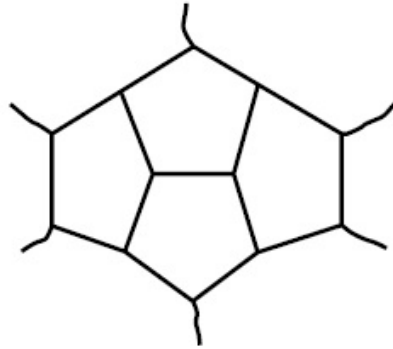
olan) bir kanıt 1879 'da sunulmuştur. Dört renk teoremi nihayet 1976 'da Kenneth Appel ve Wolfgang Haken tarafından Kempe'nin daha önceki çalışmalarına dayanarak kanıtlanmıştır. George Birkhoff, Heinrich Heesch ve diğer araştırmacılar kanıt üzerine yoğun çalışmalarda bulunarak geliştirme faaliyetlerini yürütmüştür. Sonraki yıllarda Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour ve Robin Thomas (1997) gibi seçkin matematikçiler tarafından daha basit bir kanıt akademik platforma kazandırılmıştır. Bu arada, dikkatler düzlemsel bir çizgenin ve genel olarak çizgelerin köşelerini renklendirme sorununa çevrilmiş oldu. Çizge kuramındaki birçok gelişme, haritaların renklendirilmesinde ünlü dört renk problemini çözme girişimlerine kadar uzanır. Dört renk probleminin bilinen en eski hali, A. De Morgan'ın Hamilton'a yazdığı 23 Ekim 1852 tarihli bir mektupta karşımıza çıkmaktadır. De Morgan, bir öğrencisinin kendisine "*Komşu ülkeler farklı reklere sahip olacak şekilde her haritanın sadece dört renkle boyanıp boyanamayacağı*" sorusunu yöneltti. Hamilton bu problemle ilgilenmemiştir. 13 Haziran 1878 'de Londra Matematik Derneği'nin bir toplantısında Cayley, sorunun çözülüp çözülmediğini meslektaşlarına sormuştur. Kısa bir süre sonra, zorluğun nerede yatabileceğini anlatan kısa bir not yayınlamış ve üç dereceli haritalara sınırlamanın yeterli olduğunu göstermiştir. 1879 'da Cayley' in eski bir öğrencisi olan Kempe (Cambridge), Sylvester tarafından yakın zamanda kurulmuş olan American Journal of Mathematics 'de dört renk teoreminin bir kanıtını! yayınlamıştır [28]. Kempe, her haritanın en fazla beş komşusu olan bir ülkeyi içermesi gerektiğini göstermiş ve haritanın geri kalanının herhangi bir renginin böyle bir ülkeyi kapsayacak şekilde nasıl genişletilebileceğini izah etmek istemiştir. Onun çözümü, haritanın iki renkli bir bölümündeki renklerin değiştirilmesi olarak özetlenebilen (günümüzde Kempe zinciri argümanı olarak bilinen) yeni bir tekniği içeriyordu. Kempe'nin bir digon, üçgen veya dörtgen içeren bir harita için kanıtı doğrudu, ancak iki eşzamanlı renk değişim argümanı beşgen için yanlış olarak ifade edilmişti. 1880 'de Tait, dört renk teoreminin "*geliştirilmiş kanıtlarını*" sundu [29], kanıtlar sorunlar içeriyordu. Daha sonraları dört renk sorunuyla ilgilenen diğer kişiler de oldu. Bu bilim insanlarından bazıları C. L. Dodgson (Lewis Carroll), F. Temple (Londra Piskoposu) ve Viktorya dönemi eğitimcisi J. M. Wilson idi. 1890'da Heawood, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics'te Kempe 'nin ispatındaki hatayı işaret eden ve problemi diğer yüzeyler için genelleştiren bir makale yayınladı [30]. Devam eden süreçlerde Heawood sorunla ilgili altı makale

daha yayınlamıştır. Kempe hatasını kabul etmiştir fakat hataları düzeltmemiştir. 20. yüzyılın ilk yarısında, her birinin kaynağı Kempe'nin makalesine dayanan iki fikir ortaya çıkmıştır. Birincisi *kaçınılmaz küme* (*unavoidable set*), herhangi bir haritada bu kümedeki elemanlardan en az birinin bulunması gerekliliği (Şekil 2.10), ikinci fikir ise



Şekil 2.10. Wernicke'in sunduğu kaçınılmaz kümeler

indirgenabilir düzenleme (*reducible configuration*), haritanın kalan kısımları herhangi bir renklendirme yapılarak genişletilebileceği özelliğine sahip bir ülke düzenlemesi, dört renk kuramının herhangi bir karşı örneğinde böyle bir düzenleme görülemez. Birkhoff, Şekil 2.11'deki (Birkhoff elması olarak bilinen) dört tane beşgenin düzenlenmesinin indirgenebilir bir düzenleme olduğunu göstermiştir [31]. 1912 'de Birkhoff verilen



Şekil 2.11. Birkhoff Elması

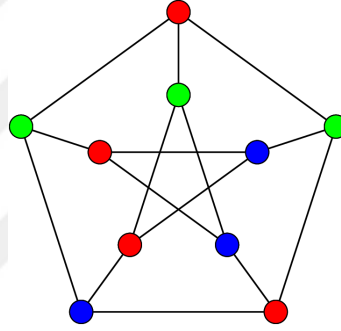
bir haritayı k -renk ile renklendirmenin yollarının sayısını araştırmıştır ve bunun her zaman k cinsinden bir polinom olduğunu göstermiştir [32]. Günümüzde bu kavrama haritanın renklendirme polinomu (chromatic polynomial) ismi verilmektedir. 1922 'de Franklin başka kaçınılmaz kümeler ve indirgenebilir düzenlemeler sunmuş ve dört renk probleminin 25 ülke içeren tüm haritalar için doğru olduğu sonucuna varmıştır [33]. Bu ülke sayısı daha sonra diğer matematikçiler tarafından geliştirilmiştir. 1950 lerde Heesch, 1976 da Appel ve Haken gibi elit bilim insanları kaçınılmaz kümeler ve

indirgenebilir düzenlemeler ile ilgili çalışmaları literatüre kazandırmışlardır [34], [35]. 1994 'de , Robertson, Sanders, Seymour ve Thomas daha sistematik bir kanıt üreterek ve bilgisayar avantajını kullanarak çözümün hem kaçınılmaz küme hem de indirgenebilir düzenlemeler içerebileceğini göstermişlerdir. Appel ve Haken yaklaşımı sistematize ederek 633 indirgenebilir düzenleme içeren kaçınılmaz küme elde etmişlerdir [36]. Dört renk problemi üzerinde yapılan çalışmalardan yola çıkarak kenarların veya köşelerin renklendirilmesini içeren diğer çizge problemlerinde önemli ilerlemeler sağlandı. Haritaların renklendirilmesiyle ilgili 1879 tarihli makalesinde Kempe [28] düzlemsel bir çizgenin köşelerini bitişik köşeler farklı renklendirilecek şekilde renklendirmenin ikili (duality) problemini özetlemiştir. Harita renklendirmeye yönelik bu ikili yaklaşım daha sonra H. Whitney tarafından 1932 'de yayınlanan temel bir makalede ve daha sonraki çoğu bilim insanı tarafından dört renk sorunu üzerine ele alınmıştır. 1880 'de Tait [29] dört renk teoreminin, her üç dereceli haritanın kenarlarının her bir renk, her noktada olacak şekilde üç renkle renklendirilebileceği ifadesine eşdeğer olduğunu kanıtlamıştır. 1916 'da D. König, maksimum d -dereceye sahip herhangi iki parçalı çizgenin kenarlarının d -renkle renklendirilebileceğini kanıtlamışlardır [37]. 1930 'larda, bir çizgenin noktalarını, komşu noktalar farklı renkte olacak şekilde, renklendirme problemi bu konuda doktora tezi yazan Whitney'in çalışmaları ile geliştirildiği düşünülebilir. 1941 'de L. Brooks [38], maksimum d -dereceye sahip herhangi yalın çizgeye ait renklendirme sayısının en fazla $d + 1$ olduğunu ve eşitliğin yalnızca tek sayıda noktaya sahip döngü çizgeleri ve tek sayıda noktaya sahip tam çizgeleri için geçerli olduğunu kanıtlamıştır. 1950 'lerde, kritik çizgeleri fikrini ortaya atan G. A. Dirac, nokta renklendirme kavramı ile ilgili önemli katkılar sunmuştur. 1964'te V. G. Vizing [39], maksimum d -dereceye sahip herhangi bir yalın çizgenin kenarlarını her zaman $d + 1$ renkle renklendirilebileceğini kanıtlamıştır. İlerleyen yıllarda, Vizing kenar renklendirme problemine önemli katkılar sunarak çalışmalarına devam etmiştir [40]. Bir çizgenin nokta-renklendirme sayısı ve kenar-renklendirme sayısı kavramları bazı bilim insanları tarafından genelleştirilerek günümüze ulaşmıştır. Örneğin M. Behzad ve meslektaşları, 1960 'larda toplam renklendirme kavramını literatür ile tanıştırmışlardır. Ayrıca P. Erdős ve diğer güçlü beyinler tarafından liste renklendirme kavramı geliştirilerek günümüz araştırmacıların ilgisine sunulmuştur.

Bir çizgede bulunan noktaların her biri k -dereceye sahipse çizge k -düzenlidir denir. Bu tür çizgeleri bazen her biri orjinal çizgeyle aynı nokta kümesine sahip düzenli alt

çizgelere bölünebilir. Bir çizgedeki k -faktör, orjinal çizgenin tüm noktalarını içeren k -düzenli alt çizgedir. Çizgelerdeki faktörler üzerine temel çalışmalar Julius Petersen (1839–1910) ve W. T. Tutte (1914–2002) tarafından yapılmıştır. 1891 'de Petersen, *değişmezler* teorisindeki bir problemine dayanan düzenli çizgelerin faktörize edilmesi ile ilgili temel bir makale yazmıştır [41]. 1898 'de Petersen [42], sonraları Petersen çizgesi olarak adlandırılan, yaprakları (1 dereceli nokta) olmayan üç dereceli bir çizge üretmiştir (Şekil 2.12). 1947 'de Tutte [43], 1-faktör içeren çizgelerin karakterizasyonunu oluşturmuş ve beş yıl sonra sonuçlarını herhangi bir k değeri için k -faktörü içeren çizgelerin karakterizasyonuna genişletmiştir.

Algoritma tabanlı çizge kuramının izleri , Fleury'nin bir Euler çizgesini incelemek için



Şekil 2.12. 3-düzenli ve 3-renkli Petersen çizgesi

sistematik bir yöntem verdiği ve G. Tarry'nin bir labirentten nasıl kaçılacağını gösterdiği 19. yüzyıla kadar götürülebilir. 20. yüzyıl, bazı tür sorunlara algoritmik çözümler getirme konusunda oldukça verimli olmuştur. Bu problemlerden bazıları; minimum bağlayıcı problem, en kısa ve en uzun yol problemi ve Çinli Postacı problemi. Bu problemlerin her birinde bize bir ağ (gerçek dünya uygulaması) verilir veya model çizgede her bir kenara (ve/veya noktasına) uzunluk, geçiş süresi gibi ağırlıklar verilerek *ağırlıklı çizgeler* yardımı ile problemlere cevap aranır. Noktalar arasındaki maliyeti (mesafe, süre veya masraf) en aza indirecek biçimde tüm noktaların yalnız bir kez dolaşılmasını amaçlayan kombinasyon temelli uygun hale getirme problemine *Gezgin Satıcı Problemi* 1831 'de yalın bir biçimde ortaya çıkmıştır. G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson ve S. M. Johnson tarafından 49 şehri kapsayan gezgin satıcı probleminin çözümünü içeren temel bir makale kaleme alınmıştır [44]. 1980 'lerde Padberg ve Rinaldi tarafından şehir sayısı 2392'e çıkartılarak problemin çözümü genişletilmiştir [45]. Ağırlıklı bir çizgede minimum uzunlukta geren

bir ağaç arayan minimum bağlayıcı problem yaklaşımı *Greedy algoritması* kavramını şekillendirmiştir. O. Boruvka bu konuda öncü bilim insanlarından ve daha sonra J. B. Kruskal tarafından bu algoritma yeniden keşfedilmiştir. Dahası, ilgili algoritma, 1957 yılında R. C. Prim tarafından yeniden kurgulanmıştır. Çizge algoritmaları çalışma sahasında maksimum akış problemine cevap bulmak için D. R. Fulkerson ve G. B. Dantzig ve çok terminalli ağlarda maksimum akışları belirlemek için R. E. Gomory ve T. C. Hu çeşitli yaklaşımlar geliştirmişlerdir. Aktif bir ağ için *en uzun yol bulma algoritması* (ABD Donanması için geliştirilen denizaltıların inşası sorunsalı) ve *kritik yolu bulma algoritması* (bir projenin toplam maliyetini en aza indirmek) 1940'lar ve 1950'ler de, askeri amaçların etkisiyle geliştirilmiştir. Belirli bir ağda en kısa yolu bulmak için bazı verimli algoritmalar vardır ve bunlardan en iyi bilineni ise E. W. Dijkstra tarafından geliştirilen *Dijkstra algoritmasıdır* [46]. *Çinli postacı problemi*, belirli bir ağırlıklı çizgenin her bir kenarını kapsayan en kısa rotayı bulmak için 1960 yılında Meigu Guan tarafından ortaya atılmıştır [47]. Eşleştirme ve atama problemlerinde, insanları kalifiye oldukları işlere mümkün olan en uygun şekilde atamak istenir. Bu araştırmalar, König'in çalışmasından ve daha sonra Philip Hall'un eşleştirme konusundaki ünlü bir sonucundan [48] esinlenilerek geliştirilmiştir [49]. Bu araştırmalar *çokyüzlülerde kombinatorik* kavramı ve yeni ortaya çıkan *doğrusal programlama (linear programming)* araştırmaları ile birleştirildi. 1960'ların sonunda, bazı algoritma tabanlı çizge problemlerin diğerlerinden daha zor olduğu anlaşıldı ve Edmonds [50], bir polinom-zaman algoritmasının mevcut olduğu fikrini tartışmıştır. Cook [51], Karp [52] ve diğerleri daha sonra *NP-tamlık* kavramını geliştirerek atama, taşıma ve minimum geren ağaç problemlerinin tümü polinom-zaman sınıfına *P* ait olduğunu, gezgin satıcı ve Hamilton döngü problemlerinin *NP-Hard* sınıfına dahil olduğunu ifade etmişlerdir. $P = NP$ olup olmadığı varsayımı hala en zor/prestijli araştırma konuları arasındadır.

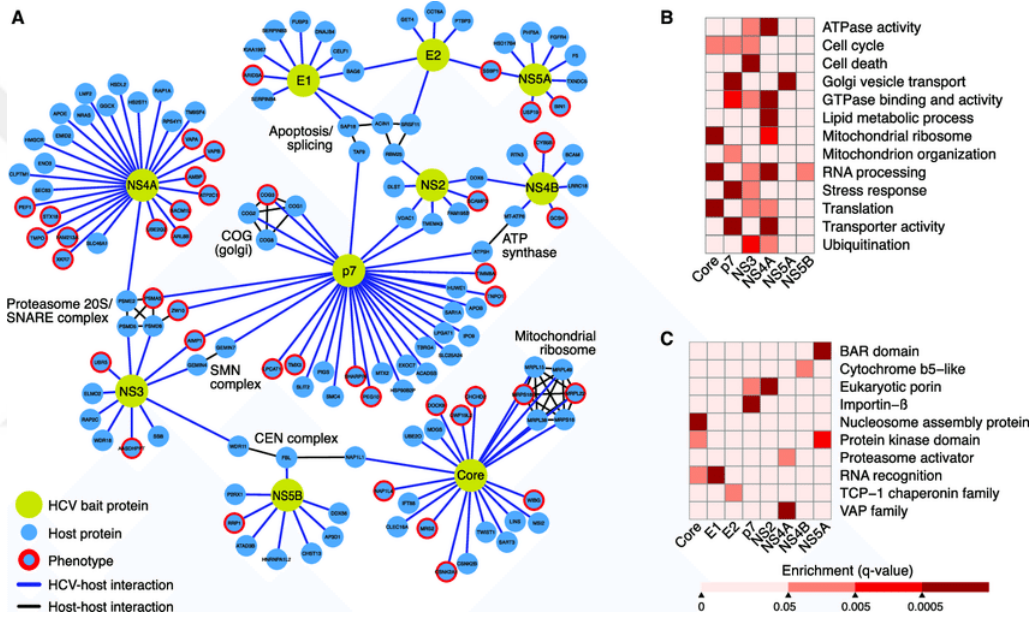
Karmaşık ağ analizi, gerçek dünya sorunsalında ortaya çıkan teknolojik, sosyal ve biyolojik olarak değişiklik gösteren yapıları kuramsal çizge altyapısının derin birikimini kullanan (analiz süreçlerini kontrol eden) modern çalışma sahasıdır. Yaygın olarak incelenen bazı ağ örnekleri; web sayfalarının bağlantıları, protein-protein etkileşim ağları ve Facebook-LinkedIn gibi çevrimiçi sosyal ağlardır. Günümüzde *çizge kuramı*, hem kuramsal hem de pratik düzeyde yalnızca muazzam büyüklükte değil, aynı zamanda olağanüstü zenginlik ve karmaşıklık ile karşımıza çıkar. Örneğin devasa



Şekil 2.13. Temsili sosyal ağ çizgesi

ağların temel yapıları nelerdir? Nasıl gelişirler? Davranışlarını belirleyen temel ilkeler nelerdir? Devasa ağlardaki alt çizgeler (gözlemlediğimiz) büyük (ve genellikle eksik) ana çizgelerle nasıl ilişkilidir? Bu kadar büyük çizgelerin sayısız özelliklerini analiz etmede kullanılacak *çizge değişmezleri* nelerdir? Bu sorularla başa çıkmak için son on yılda *birleşimsel*, *olasılıksal* ve *spektral* yöntemler geliştirilerek problem alanları için pek çok ilerleme kaydedilmiştir. *Web çizgeleri*, web sayfalarından ve aralarındaki bağlantılara karşılık gelen kenarlardan oluşan çizge modellemeleridir. Web çizgeleri, bağlama ve araştırma alanına bağlı olarak, yönlendirilmiş veya yönlendirilmemiş olarak modellenebilir. *İşbirliği çizgesi*, temel olarak, ortak yazarlar nokta ve birlikte makale yazan iki yazarı aralarındaki ilişkiyi kenar kabul eden çizge modellemesidir. Örneğin, Math Reviews veritabanına göre akademik çalışmalardan esinlenilerek oluşturulan işbirliği çizgesi 401.000 nokta ve 676.000 kenara sahiptir. Bu çizgenin ilginç özelliklerine Grossman'ın web sitesinden bakılabilir [53]. Facebook gibi *çevrimiçi sosyal ağlar* (Şekil 2.13), kullanıcılar nokta ve kullanıcılar arasındaki arkadaşlık ilişkisini kenar kabul eden çizgeler soyutlanabilir. Twitter ise, kullanıcıların birbirini takip ettiği yöne bağlı olarak yönlendirilmiş çizgeler kavramı etrafında modellenir. *Protein-protein etkileşim*

ağları (Şekil 2.14), canlı bir hücredeki proteinleri nokta ile temsil edilebilen ve iki protein arasında ki bazı biyokimyasal etkileşimleri kenar kabul eden çizgeler olarak düşünülebilir [54]. Karmaşık ağların diğer önemli örnekleri, *Yönlendirici çizgeler* (noktalar yönlendirici ile ve noktalar aralarındaki fiziksel bağlantılar kenarlar ile temsil edilen), *Çağrı çizgeleri* (noktalar telefon numaraları ile ve yönlendirilmiş kenarlar ise yapılan görüşmelere karşılık gelen), *Alıntı çizgeleri* (araştırmacılar noktaları ve atıf/kollektif yapılan makaleler yönlendirilmiş kenarları temsil eder). Bu ve benzeri *gerçek dünya ağ* örnekleri çoğaltılabilir. Çizge kuramının dirsek temasında olduğu çalışma



Şekil 2.14. Protein-protein etkileşim çizgesi

alanlarını arttırmak/aktarmak pekala mümkündür. Günümüz araştırmacılarının iştahını kabartan, veri madenciliği, yapay sinir ağları, doğal dil işleme bunlardan sadece bir kaçıdır. Yaklaşık üç asırlık bilgi birikimi ile günümüze ulaşan çizge kuramı, kuramsal alanda kendisini *Cebirsel Çizge Kuramı (Algebraic Graph Theory)* ile gösterir. Bu alt alan geometrik, kombinatorik (sayma temelli) veya algoritmik yaklaşımların aksine lineer cebir, grup teori ve çizge değişmezlerini kendisine çalışma alanı olarak belirler. Cebirsel çizge kuramının prestijli araştırma sahalarından biri de *spektral çizge kuramıdır*. Bu tez çalışmasının ana bölümlerinden biri olan spektral çizge kuramı 4. bölüm içerisinde detaylı olarak ele alınmıştır.

3. BÖLÜM

ÇİZGE KURAMI

3.1. Ön Bilgiler

Tezin bu bölümünde ifade edilen, çizge kuramı ile ilgili temel tanım, teorem, sonuç, vb. önbilgiler [18], [55], [56], [57], [58] referans numaralı kaynaklar kullanılarak oluşturulmuştur.

Tanım 3.1.1. V noktalardan, E kenarlardan (nokta çiftlerinden oluşan) iki küme olmak üzere en genel manada $G = (V, E)$ yapısına *çizge* denir.

Her kenar, uç noktalar (endpoints) olarak adlandırılan, kendisiyle ilişkilendirilmiş bir veya iki elemanlı nokta kümesine sahiptir. Cisimlerin veya yüzeylerin modellenmesinde, *kenar* (*edge*) kavramının yerine alternatif olarak *ayrıt* kelimesinin kullanımı daha kapsayıcı olacaktır.

Belirli bir çizgeden bahsedildiği durumda veya birden fazla çizge söz konusu olduğunda V_G ve E_G alt simge gösterimleri yaygın olarak kullanılır. Kullanım kolaylığı açısından V , $V(G)$ ve E , $E(G)$ farklı gösterimleri alternatif olarak literatürde yer alır.

Tanım 3.1.2. Herhangi bir $v \in V_G$ noktası bir $e \in E_G$ kenarının uç noktası ise bu durumda v ile e *çakışık* denir.

Tanım 3.1.3. Herhangi $u \in V_G$ ve $v \in V_G$ noktaları bir kenar oluşturuyorsa, bu noktalara *komşu* noktalar denir ve $u \sim v$ sembolü ile gösterilir.

Çeşitli İngilizce kaynaklarda *adjacency* (*bitişik*, *komşu*) kavramına yakın anlamlı *neighbour* kavramıda kullanılmaktadır.

Tanım 3.1.4. Herhangi $e \in E_G$ ve $f \in E_G$ kenarları ortak uç noktaya sahipse, bu kenarlara *komşu* kenarlar denir ve $e \sim f$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 3.1.5. Bir G çizgesinde bulunan v noktasının *açık komşuluğu*, v 'nin tüm komşularının kümesidir ve $N_G(v)$ notasyonu ile gösterilebilir. Ek olarak v noktasının *kapalı komşuluğu* $N_G(v) \cup \{v\}$ ile tanımlanır ve $N_G[v]$ notasyonu ile gösterilebilir.

Tanım 3.1.6. Çizgede iki farklı noktayı birleştiren kenara *uygun kenar* denir.

Tanım 3.1.7. Aynı uç noktalara sahip iki yada daha fazla kenara *katlı-kenar* denir.

Tanım 3.1.8. Noktalar arasında sadece bir kenar var ise bu duruma *yalın komşuluk* denir.

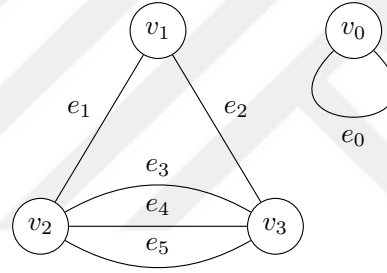
Tanım 3.1.9. Kenar kümesi yalın ve katlı kenarlardan oluşun (çoklu kenar kümesi) çizgeye *çoklu-çizge* denir.

Tanım 3.1.10. İki nokta arasındaki kenar sayısına *kenar-çokluğu* denir.

Tanım 3.1.11. Tek bir uç noktaya sahip kenara *ilmek* denir.

Tanım 3.1.12. Katlı kenar ve ilmek içermeyen çizgelere *yalın çizge* denir.

Çizgede bulunan u ve v noktaları yalın komşuluk oluşturuyorsa uv yan yana gösterimi de kenarlar için kullanılabilir. Genel çizge problemleri, yalın çizgelere indirgenebildiği için,



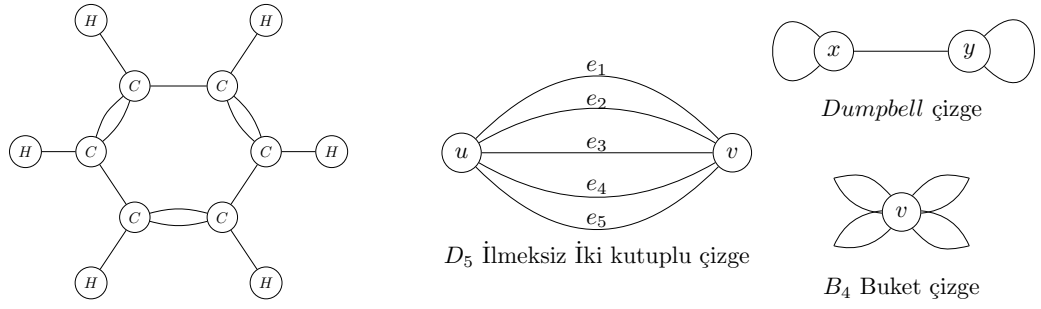
Şekil 3.1. $G = (V, E)$ çizgesi için nokta kümesi $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$, kenar çiftleri $e_0 = \{v_0, v_0\}$, $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_1, v_3\}$, $e_3 = \{v_2, v_3\}$, $e_4 = \{v_2, v_3\}$, $e_5 = \{v_2, v_3\}$ olmak üzere kenar kümesi $E = \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $e_0 = \{v_0, v_0\}$ kenarı uygun kenar değildir ve ilmek olarak isimlendirilir, $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$ nokta çiftleri yalın komşuluğa sahip iken $\{v_2, v_3\}$ nokta çifti katlı kenara sahiptir ve $\{v_2, v_3\}$ nokta çiftinin kenar-çokluğu 3 tür.

kuramsal çizge araştırmalarında genelde yalın çizgeler kullanılır. Birçok gerçek dünya uygulamalarında ise model olarak yalın olmayan çizgeler kullanılır.

Tanım 3.1.13. İlmek içermeyen (katlı kenar içerebilir) çizgelere *ilmeksiz çizge* denir.

Tanım 3.1.14. İki noktası ve bunları birleştiren n kenara sahip ilmeksiz çizgelere *iki kutuplu çizge* denir ve D_n ile gösterilir.

Tanım 3.1.15. Bir noktası ve bunları birleştiren n kenara sahip çizgelere *buket çizge* denir ve B_n ile gösterilir.



Şekil 3.2. C_6H_6 benzen molekülünün ilmeksiz çizge (çoklu-çizge) modeli ve yalnız olmayan çizge örnekleri

Çok çeşitli uygulamalarda, çizgelerin noktalarına ve kenarlarına ek özellikler atamak, çizgelerin matematiksel modeller olarak hizmet etmesine yol açar. En yaygın ek kenar özelliklerinden ikisi *yönlü kenar* ve *ağırlıklı kenardır*. Diğer yaygın atama özelliği nokta/kenar renklendirmesidir. İki nokta arasındaki bir kenar, tek yönlü bağlantı veya aynı anda zıt yönlü bağlantılar oluşturabilir. Bir yön atamak sezgisel olarak *ileri (geri)* gibi bir ayrışma götürür. Çizgeleri yönlendirmek, kısmen çizge algoritmalarının bilgisayar uygulamaları üzerindeki etkisiyle gelişmiştir. Ayrıca, matematiksel bir perspektiften, yönlendirilmiş çizgeleri ek özellik katılmış çizgeler olarak görmek, genel çizge sonuçlarının her iki (yönlü veya yönsüz) çizgeler için de geçerli olmasını kolaylaştıracaktır.

Tanım 3.1.16. *Yönlendirilmiş kenar (veya yay)*, uç noktalarından biri kuyruk, diğer uç noktası da baş olarak belirlenen (seçilen) kenardır ve $e \in E_G$ olmak üzere, sırasıyla yönler baş- $head(e)$ ve kuyruk- $tail(e)$ ile gösterilebilir.

Tanım 3.1.17. Aynı kuyruk ve aynı baş yönüne sahip iki veya daha fazla yay kümesine *çoklu-yay* denir.

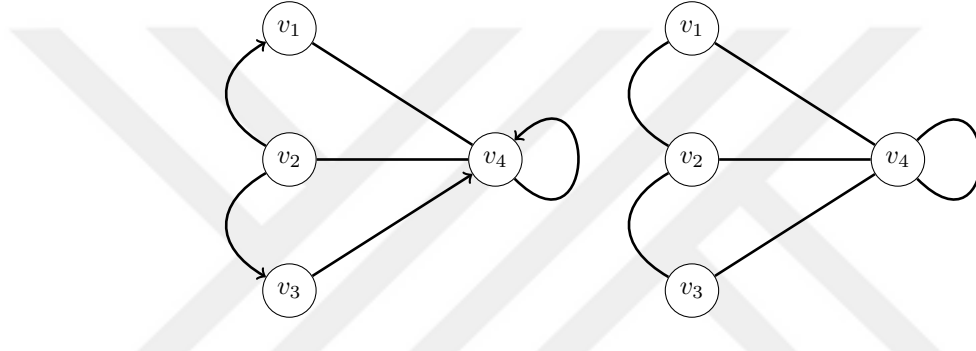
Tanım 3.1.18. Her bir kenarı yönlendirilmiş çizgeye *yönlü çizge (yönlendirilmiş çizge)* denir.

Tanım 3.1.19. İlmek veya çoklu-yay içermeyen yönlü çizgeye *yalın yönlü çizge* denir.

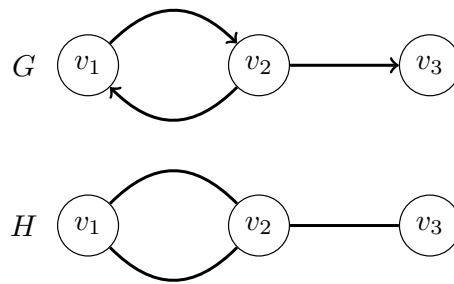
Tanım 3.1.20. Hem yönlü hem de yönsüz kenarları olan çizgelere *karışık çizge (kısmen yönlendirilmiş çizge)* denir. Karışık bir çizgede kenarın yönlü veya yönsüz olduğunun belirtilmesi karışıklıkların önüne geçecektir.

Tanım 3.1.21. Yönlü veya kısmen yönlü bir G çizgesinin *temel çizgesi*, çizgenin yönlendirilmiş kenarlarının baş ve kuyruk kısımlarının gözardı edilmesi ile elde edilen çizgedir.

Yönlü veya kısmen yönlü çizgelerde kenarları oluşturan nokta çiftleri gösterilirken sıralı çiftler notasyonunun kullanılması bilgisayar bilimleri için çok önemlidir. Yönlü veya kısmen yönlü çizgelerde uv ve vu gösterimleri hatalı olabilir. Yönlü kenarların ve yönsüz kenarların farklı objeler olarak değerlendirilmesi karmaşık algoritma çalışmalarında (obje tabanlı programlama dillerinde) çok önemli bir yere sahiptir. Gerçek dünya

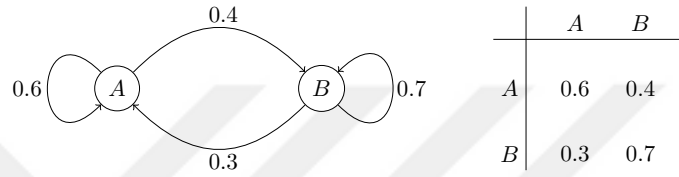
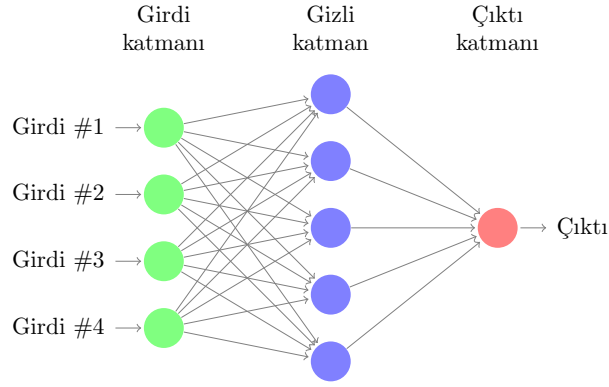


Şekil 3.3. Soldan sağa sırasıyla karışık çizge (kısmen yönlü çizge) ve bu çizgenin temel çizgesi, $\{(v_2, v_1), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_4)\}$ kenarları yönlü kenarlar ve $\{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}\}$ kenarları yönsüz kenar.



Şekil 3.4. G çizgesi yalnız yönlü bir çizgedir ama G çizgesinin temel çizgesi olan H çizgesi yalnız bir çizge değildir.

problemlerinin önemli bir kısmı ağırlıklı, yönlü veya hem ağırlıklı hem de yönlü çizge modelleri ile temsil edilir. Ağırlıklı ve yönlü çizge soyutlamasının yaygın olarak kullanıldığı iki uygulama sahası *Derin öğrenme (yapay sinir ağları)* ve *Karar alma süreci (Markov zinciri)* dir (Şekil 3.5). Bir çizgenin noktalar kümesi renklerle ayrılmış kümelerle



Şekil 3.5. Yapay sinir ağı modeli (yönlü-ağırlıklı çizge): Girdi katmanında ki bilgi, ağırlıklı kenar bağlantısı ile gizli katmana aktarılır, gizli katmanda işlenen bilgi çıktı katmanına ağırlıklı bağlantılar ile aktarılır.

Markov diagramı ve Geçiş matrisi: A'dan sonra A'nın olma olasılığı %60 , A'dan sonra B'nin olma olasılığı %40, B'den sonra B'nin olma olasılığı %70, B'den sonra A'nın olma olasılığı %30.

parçalanabilir. Çizge kuramı için çok önemli olan bu ayrışım *Çizge renklendirme* olarak bilinir.

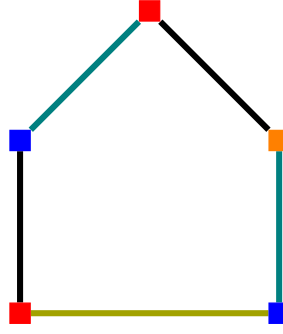
Tanım 3.1.22. Bir G çizgesi için, noktalar kümesini farklı renklerden oluşan bir C kümesine eşleştiren dönüşüme *nokta renklendirmesi* denir.

Tanım 3.1.23. İki komşu noktaya farklı renklerin atanması ile oluşan renklendirmeye *uygun renklendirme* denir.

Tanım 3.1.24. Bir çizge, c veya daha az renk kullanılarak renklendirilebiliyorsa (uygun renklendirme) c -renklendirilebilir denir.

Tanım 3.1.25. Bir G çizgesi c -renklendirilebilir olmak üzere minimum c sayısına çizgenin *renklendirme sayısı* denir ve $\chi(G)$ ile gösterilir.

Noktalar için tanımlanan renklendirme tanımları benzer şekilde kenarlar içinde tanımlanır. Bir G çizgesinin kenar renklendirme sayısı $\chi'(G)$ ile gösterilebilir.

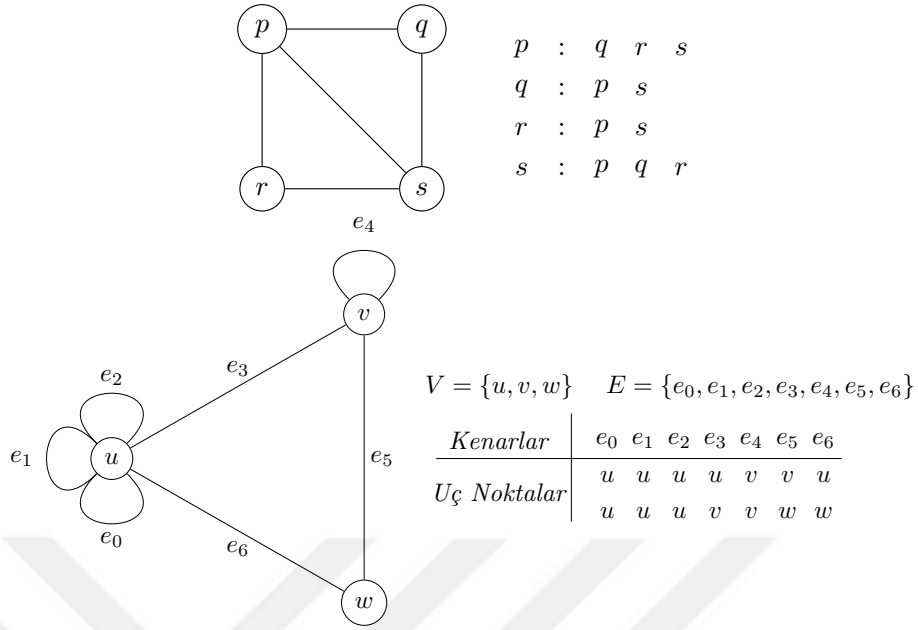


Şekil 3.6. G çizgesi için $\chi(G) = \chi'(G) = 3$ (kaynaklarda farklı gösterimlere rastlamak mümkündür).

Giriş bölümünde ifade edildiği gibi notasyon farklılıkları konusunda henüz bir uzlaşma sağlanamamıştır. Bu sebepten tez çalışmasında farklı gösterimler arasında kesin bir seçim yapılmamasına özen gösterilmiştir.

$G = (V, E)$ herhangi bir çizge olmak üzere, çizgeye ait noktalarının sayısı $|G|$, $|V(G)|$, $|V_G|$, $n(G)$ veya kısaca n gösterimlerinden biri kullanılarak ifade edilebilir. Benzer şekilde çizgenin kenar sayısı $\|G\|$, $|E(G)|$, $|E_G|$, $m(G)$ veya kısaca m gösterimlerinden biri ile ifade edilebilir. Literatürde yaygın olanların haricinde daha farklı gösterimlere rastlamak mümkündür. Bu konuda daha detaylı bilgi için [59] referans numaralı kaynağa bakılabilir. Bu notasyon farklılıkları, çizge kuramının farklı disiplinlerde etkin bir şekilde kullanılmasının doğal bir sonucudur. Ayrıca bilgisayar bilimlerinde, nokta sayısı için *mertebe (order)*, kenar sayısı için *ölçü (size)* kavramları kullanılarak temel çizge kodları için uygun zemin sağlanarak geliştirilebilir özellikler katılmıştır.

Nokta ve kenar sayısı az olan çizgeler dışındaki çizgeleri resmetmek oldukça zordur. Yüzlerce hatta binlerce objeden oluşan karmaşık çizgeleri (web ağları, ulaşım ağları, sosyal ağlar, v.b.) modellemek veya bu çizgeleri veri tabanı olarak işleyebilmek daha formal ve optimum gösterim yaklaşımlarını zorunlu hale getirir. Özellikle bilgisayar bilimlerinde oldukça işlevsel olan bu yaklaşımlardan en yaygın olanları *komşuluk* ve *çakışım* tablosudur (Şekil 3.7). Benzer şekilde çakışım tablosu, yönlü veya kısmen yönlü çizgeler için, baş ve kuyruk yönleri tabloda ayrı ayrı belirtilerek gösterilebilir.



Şekil 3.7. Yalın çizge ve komşuluk tablosu, Çoklu çizge ve çakışım tablosu

3.2. Derece Kavramı

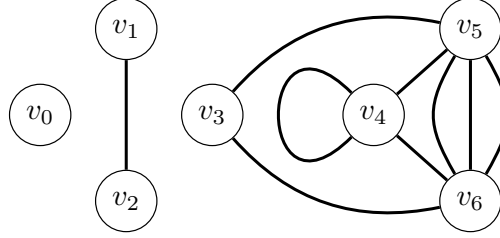
Tanım 3.2.1. G çizge ve $v \in V_G$ olmak üzere, v noktasına çakışık uygun kenarların sayısına v noktasının *derecesi* denir ve $deg(v)$ ile gösterilir. Eğer v noktası bir ilmek ise bu ilmeğin derecesi iki olarak değerlendirilir. Ek olarak bir çizgede derecesi 0 olan noktaya *izole nokta* denir. Benzer şekilde (tümleyen yaklaşımı ile) derecesi $n - 1$ olan noktaya *baskın nokta* (*dominating vertex*) denir.

Çizge kuramının prestijli çalışma alanlarından biri olan *kimyasal çizge kuramında* anlam-köken itibariyle *derece* (*degree*) yerine *bağdeğer* (*valence*) kavramı kullanılmıştır. Bir G çizgesindeki ek küçük dereceli nokta ve en büyük dereceli nokta $\delta(G)_{min}$ ve $\delta(G)_{max}$ notasyonlar ile gösterilebilir. Ayrıca genel bir çizgeden bahsediliyorsa, kullanım kolaylığı açısından δ_{min} ve δ_{max} notasyonları da kullanılabilir. Kimi araştırmacılar ise sembolleri daha da özelleştirerek δ (minimum derece) ve Δ (maksimum derece) olarak kullanmayı tercih etmektedir.

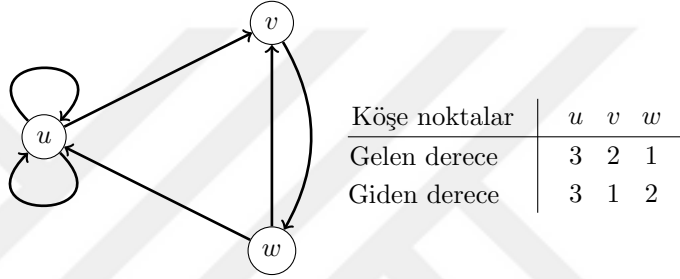
Tanım 3.2.2. Bir çizgenin *derece dizisi* derecelerinin azalmayan bir düzende sıralanması ile oluşturulan dizidir.

Tanım 3.2.3. Bir yönlü çizgede v noktasının *gelen derecesi*, v 'ye yönlendirilen yayların sayısıdır; benzer şekilde v noktasının *giden derecesi*, v 'den yönlendirilen yayların

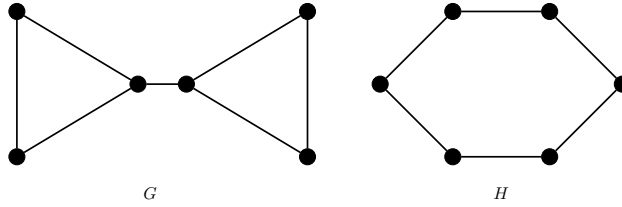
sayısıdır. Eğer v noktası ilmeğe sahip ise *gelen derece 1* ve *giden derece 1* kabul edilir.



Şekil 3.8. Derece dizisi $\langle 5, 5, 4, 2, 1, 1, 0 \rangle$



Şekil 3.9. Yönlü çizge ve derece dağılım tablosu



Şekil 3.10. Derece dizisi çizge için belirleyici bir gösterim şekli olsada aynı derece dizisine sahip $\langle 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2 \rangle$ iki farklı çizgede (G ve H) olabilir.

Önerme 3.2.1. [55] Yalın bir çizgede dereceleri eşit olan en az bir nokta çifti vardır.

İspat. Kabul edelim ki G , n -noktadan oluşan bir çizge olsun. Olası n farklı derece dağılımının $0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$ olduğunu kabul edelim. Derecesi $n - 1$ olan nokta, kendi hariç diğer noktalara bağlı olacağından ve bu durum 0 dereceli nokta olması ile çelişeceğinden çizgede derecesi 0 ve $n - 1$ olan iki nokta bulunamaz. Sonuç olarak, *Güvercin yuvası prensibinden* dereceleri eşit olan en az iki nokta vardır. \square

Teorem 3.2.1. [55] (El sıkışma) Bir çizgede derecelerin toplamı kenarların iki katına eşittir. Yani;

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

İspat. Çizgede bulunan her bir kenarın, iki uç noktaya sahip olmasından dolayı, derece toplamına katkısı iki olacaktır. \square

Literatürde Teorem 3.2.1; El sıkışma, *Euler'in derece toplamı* veya çizge kuramının ilk teoremi olarak bilinir.

Sonuç 3.2.1. [55] Bir çizgede tek dereceli çift sayıda nokta vardır.

İspat. Tek olan derecelerin toplamını ve çift olan derecelerin toplamını ayrı ayrı düşünelim. Teorem 3.2.1 de belirtildiği gibi bütün toplam çifttir. Ayrıca çift derecelerin toplamı çift olduğundan, tek derecelerin toplamı da çift olmalıdır. Bu nedenle, tek dereceli noktaların sayısı çift olmalıdır. \square

Sonuç 3.2.2. [55] Yönlü bir çizgede giden derecelerin toplamı ve gelen derecelerin toplamı kenar sayısına eşittir.

İspat. Çizgedeki her e yönlü kenar, $head(e)$ ile gelen dereceye, $tail(e)$ ile de giden dereceye katkı sağlar. \square

Bir çizgedeki derece dizisi, toplamı çift olan, negatif olmayan tam sayıların sonlu artmayan dizisidir. Tersine, toplamı çift olan herhangi bir azalmayan, negatif olmayan tamsayı dizisi, bazı çizgelerin derece dizisi olabilir, ancak yalnız bir çizgenin değil.

Teorem 3.2.2. [55] (Havel-Hakimi) Artmayan ve negatif olmayan $\langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ dizisinin *çizilebilir* olması için gerek ve yeter şart $\langle d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1}, d_{d_2+1}, \dots, d_n \rangle$ dizisinin de *çizilebilir* olmasıdır.

3.3. Yürüyüş, Gezi ve Yol

Birçok uygulama, geçiş-uzaklık temsil eden çizge modellerini ve bazı parametreleri gerektirir. Örneğin, bir e-posta mesajının göndericiden alıcıya giden yolda geçtiği köşe-nokta bağlantılarının sayısı çizge parametresidir. Fiziksel uzaklığın ötesinde, bir başka örnek, faaliyet çizelgeleme ağındaki bir dizi görevin, görevlerden herhangi birinde

meydana gelen gecikme sebebi ile genel projenin tamamlanmasını geciktireceğinden kritik bir yol belirleme durumunu doğurur.

Tanım 3.3.1. Bir G çizgesindeki *yürüyüş*, noktaların ve kenarların ardışık dizisidir. Yani, $i = 1, 2, \dots, n$ ve $v_{i-1}v_i = e_i \in E_G$ olmak üzere $W = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ dizisine yürüyüş denir. Dahası e_i kenarı v_{n-1} 'den v_n 'e yönlü bir kenar ise W dizisine *yönlü yürüyüş* denir.

- Yalın bir çizgede, yürüyüş $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ şeklinde gösterilebilir.
- Bir yürüyüş de *başlangıç nokta* v_0 , *bitiş köşe-nokta* v_n diğer köşe-noktalar ise *iç nokta* olarak isimlendirilebilir.
- Bir yürüyüşün *uzunluğu*, geçilen kenar sayısıdır.
- Bitiş noktası ile başlangıç noktası aynı olan yürüyüşe *kapalı yürüyüş*, farklı olan yürüyüşe *açık yürüyüş* denir.

Tanım 3.3.2. Kenar tekrarı yapılmadan (nokta tekrarı olabilir) gerçekleştirilen *açık yürüyüş* *gezi* denir.

Tanım 3.3.3. Kenar tekrarı yapılmadan (nokta tekrarı olabilir) gerçekleştirilen *kapalı yürüyüş* *tur* denir.

Tanım 3.3.4. Nokta ve kenar tekrarı yapılmadan gerçekleştirilen *açık yürüyüş* *yol* denir.

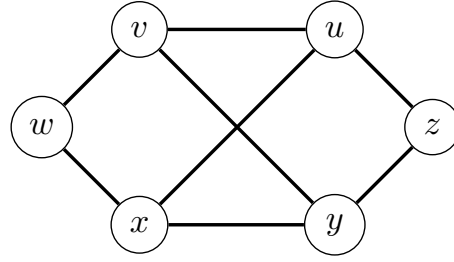
Tanım 3.3.5. Nokta (başlangıç ve bitiş hariç) ve kenar tekrarı yapılmadan gerçekleştirilen *kapalı yürüyüş* *döngü* denir.

Teorem 3.3.1. [60] Her $x - y$ yürüyüşü bir $x - y$ yolu içerir.

Tanım 3.3.6. G çizgesinde P_1 ve P_2 iki yol olsun, bu durumda;

- Ortak nokta ve kenar içermiyorsa P_1 ve P_2 yolları *ayrıktır* denir.
- Sadece uç noktaları paylaşan P_1 ve P_2 yolları *içten ayrıktır* denir.

Teorem 3.3.2. [60] G çizgesinde bulunan noktaların derecesi en az 2 ise G bir döngü içerir.



Şekil 3.11. Uzunluğu 7 olan $u - v$ yürüyüş u, z, y, v, u, x, y, v , uzunluğu 5 olan $x - y$ gezi x, w, v, u, x, y , uzunluğu 6 olan $y - y$ tur y, x, w, v, u, x, y , uzunluğu 3 olan $u - v$ yol u, x, y, v ve uzunluğu 4 olan $x - x$ döngü x, u, z, y, x .

Tanım 3.3.7. Her nokta çifti arasında en az bir yol bulunan çizgeye *bağlantılı çizge*, diğer durumda çizgeye *bağlantısız çizge* denir.

Tanım 3.3.8. Temel çizge hali bağlantılı olan yönlü çizgelere *zayıf bağlantılı çizge* denir.

Tanım 3.3.9. Her bir noktadan diğer noktalara tanımlı yönlü yol bulunan çizgeye *güçlü bağlantılı yönlü çizge* denir.

Tanım 3.3.10. Bağlantılı bir çizgede her kenar üzerinden geçen yola *Euler yolu*, her kenar üzerinden geçen tura *Euler turu* ve euler turu içeren çizgeye *Euler çizgesi* denir.

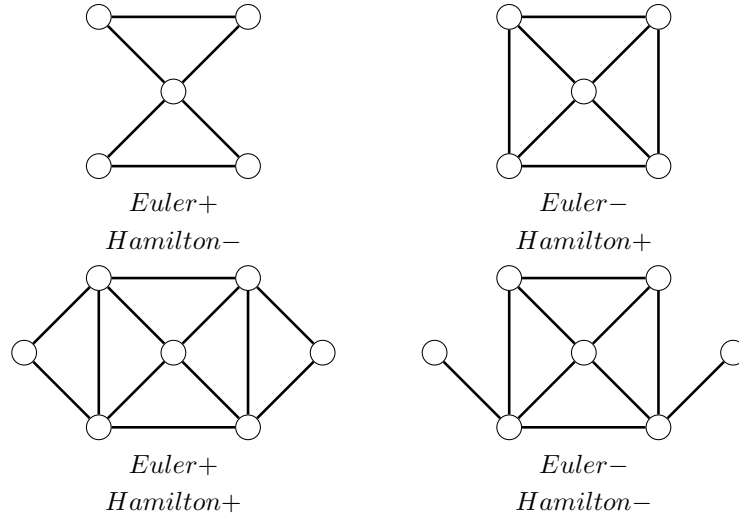
Tanım 3.3.11. Bağlantılı bir çizgede her nokta üzerinden geçen yola *Hamilton yolu*, her nokta üzerinden geçen döngüye *Hamilton döngüsü* ve Hamilton döngüsü içeren çizgeye *Hamilton çizgesi* denir.

3.4. Çizgelerde Uzaklık Kavramı

Tanım 3.4.1. Çizgede s ve t iki nokta olsun. Bu durumda aralarındaki en kısa yol uzunluğuna *mesafe* denir ve $d(s, t)$ ile gösterilebilir. Ayrıca s ve t noktaları arasında tanımlı bir yol yoksa $d(s, t) = \infty$ olarak kabul edilir. Çizgenin yönlü olma durumunda tanım benzer şekilde yapılır ve $\vec{d}(s, t)$ notasyonu ile yön belirtilir (s =source=kaynak noktasından t =target=hedef noktasına).

Çizgelerde ki mesafe tanımı metrik özellikleri korur.

- Her $u, v \in V_G$ için $d(u, v) \geq 0$
- Her $u, v \in V_G$ için $d(u, v) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $u = v$



Şekil 3.12. Çizgelerin Euler ve Hamilton koşullarına göre olası durumları

- Her $u, v \in V_G$ için $d(u, v) = d(v, u)$
- Her $u, v, w \in V_G$ için $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

Tanım 3.4.2. G bağlantılı bir çizge olmak üzere, bir $v \in V_G$ noktasının en uzak mesafesine, v noktasının *dışmerkezliliği* denir ve $ecc(v)$ ile gösterilebilir. Yani;

$$ecc(v) = \max_{x \in V_G} \{d(v, x)\}$$

Tanım 3.4.3. G bağlantılı bir çizge olmak üzere, dışmerkezliliklerin en büyük olanına *çap* denir ve $diam(G)$ ile gösterilebilir (karışıklık olmadığı durumlarda kısaca d ile de gösterilebilir). Yani;

$$diam(G) = \max_{v \in V_G} \{ecc(v)\}$$

Tanım 3.4.4. G bağlantılı bir çizge olmak üzere, dışmerkezliliklerin ek küçük olanına *yarıçap* denir ve $rad(G)$ ile gösterilebilir. Yani;

$$rad(G) = \min_{v \in V_G} \{ecc(v)\}$$

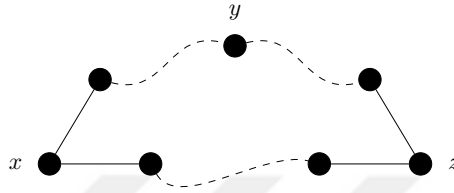
Teorem 3.4.1. [60] G yalın bir çizge olmak üzere;

$$rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. G çizgesinin yarıçapı r ise, çizgede $ecc(v) = r$ olan bir $v \in V_G$ nokta vardır. Dışmerkezlilik tanımından, v noktasından diğer bütün noktalara, uzunluğu r den kısa bir yol bulunamaz. Böylece $rad(G) \leq diam(G)$ eşitsizliği sağlanır.

Eşitsizliğin sağ tarafı için, kabul edelim ki x, y, z noktaları G çizgesine ait olsun. Bu durumda x 'ten z 'ye giden en kısa yol, x 'ten y 'ye ve sonra y 'den z 'ye en kısa yollar boyunca gidebilir veya x 'ten z 'ye y noktasına uğramadan gidebilir.



Her iki durumda da biliyoruz ki, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ eşitsizliği geçerlidir. Kabul edelim ki $d(x, z) = diam(G)$ ve $ecc(y) = rad(G) = r$ olsun. Bu durumda $d(x, y) \leq r$ ve $d(y, z) \leq r$ olur. Böylece $d(x, z) \leq r + r$ ve $diam(G) \leq 2rad(G)$ olur. \square

Tanım 3.4.5. G bağlantılı bir çizge olmak üzere, dışmerkezliliği yarıçapına eşit olan noktaya *merkez nokta* denir. Bu noktaların oluşturduğu kümeye G çizgesinin *merkezi* denir ve $center(G)$ ile gösterilebilir. Yani;

$$center(G) = \{v \in G \mid ecc(v) = rad(G)\}$$

Tanım 3.4.6. Merkezi, nokta kümesine eşit olan G çizgesine *özmerkezli çizge* denir. Yani;

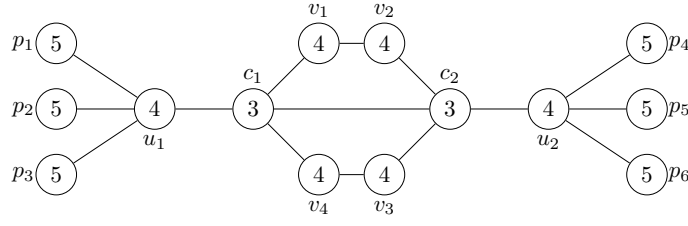
$$center(G) = V_G$$

Tanım 3.4.7. G bağlantılı bir çizge olmak üzere, dışmerkezliliği çapına eşit olan noktaya *sınır nokta* denir. Bu noktaların oluşturduğu kümeye G çizgesinin *sınırı* denir ve $per(G)$ ile gösterilebilir. Yani;

$$per(G) = \{v \in G \mid ecc(v) = diam(G)\}$$

Tanım 3.4.8. Bütün noktaları sınır nokta olan çizgelere *sınır çizge (peripheral graph)* denir.

Tanım 3.4.9. Verilen bir G çizgesinde, minimum döngü uzunluğuna *kalınlık (girth)* ve maksimum döngü uzunluğuna *çevre (circumference)* denir.



Şekil 3.13. Dışmerkezlilik temel alınara etiketlenen G çizgesi için;

$$rad(G) = 3$$

$$diam(G) = 5$$

$$center(G) = \{c_1, c_2\}$$

$$per(G) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$$

$$girth(G) = 4 \quad c_1, v_1, v_2, c_2, c_1$$

$$circum(G) = 6 \quad c_1, v_1, v_2, c_2, v_3, v_4, c_1$$

Teorem 3.4.2. [60] Eğer G çizgesi en az bir döngü içeriyorsa $girth(G) \leq 2diam(G) + 1$ eşitsizliği geçerlidir.

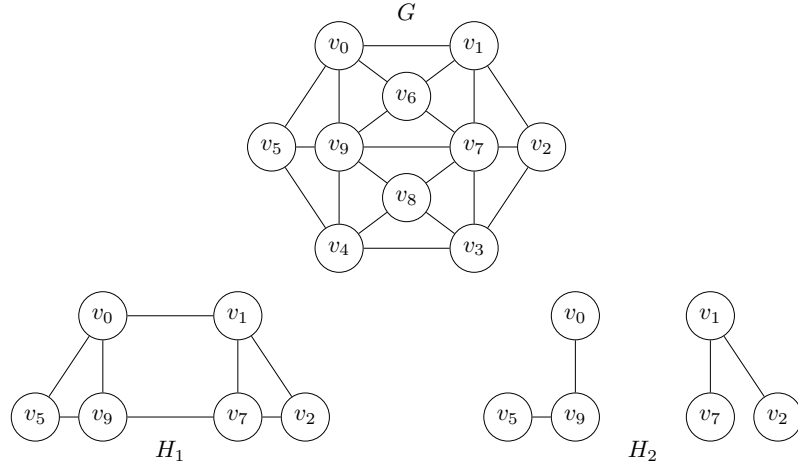
Tanım 3.4.10. Bağlantılı G çizgesinde bulunan bir v noktası $diam(G) = ecc_G(v)$ eşitliğini sağlıyorsa bu noktaya *çapsal (diametrical)* nokta denir.

Tanım 3.4.11. Bağlantılı bir G çizgesinden her $u \in V(G)$ için $d(u, \bar{u}) = diam(G)$ olacak şekilde yalnız bir $\bar{u} \in V(G)$ noktası var ise çizgeye *çapsal çizge (diametrical graph)* denir. Ayrıca literatürde çapsal çizge için *çift çizge veya özmerkezli yegane dışmerkezlilik noktalı çizge* denir.

3.5. Yapısal Kavramlar

Çizgelerin olası gösterimleri (çizim yapma, komşuluk tablosu, v.b.) çizgenin yapısı hakkında kısıtlı bilgi verir. Çizge parametrelerini ve değişmezlerini analiz etmek büyük yapılı çizgeler için oldukça güçtür. Yapı ile ilgili karakterizasyonlar için soyutlamalardan bağımsız kavramlara ihtiyaç duyulur. Bu alt bölümde bazı yapısal çizge ön bilgileri ifade edilmiştir.

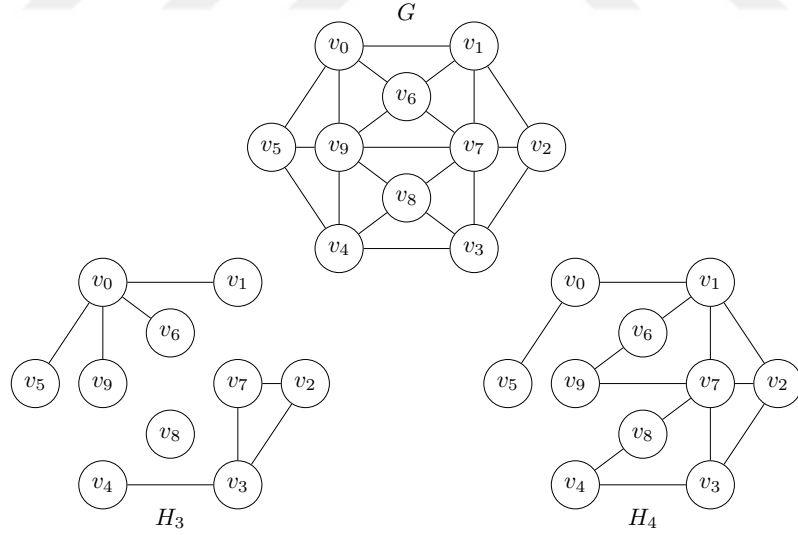
Tanım 3.5.1. G bir çizge olmak üzere, G 'nin bazı noktalarından ve kenarlarından oluşan H çizgesine G 'nin *alt çizgesi* denir ve $H \subseteq G$ ile gösterilebilir. Yani; $V_H \subseteq V_G$ ve $E_H \subseteq E_G$ olacak şekilde ki H çizgesi alt çizgedir.



Şekil 3.14. G çizgesinin H_1 bağlantılı alt çizgesi ve H_2 bağlantısız alt çizgesi

Tanım 3.5.2. G çizgesinin bağlantılı olma özelliğine göre maksimal olan alt çizgelere G 'nin *bileşenleri* denir.

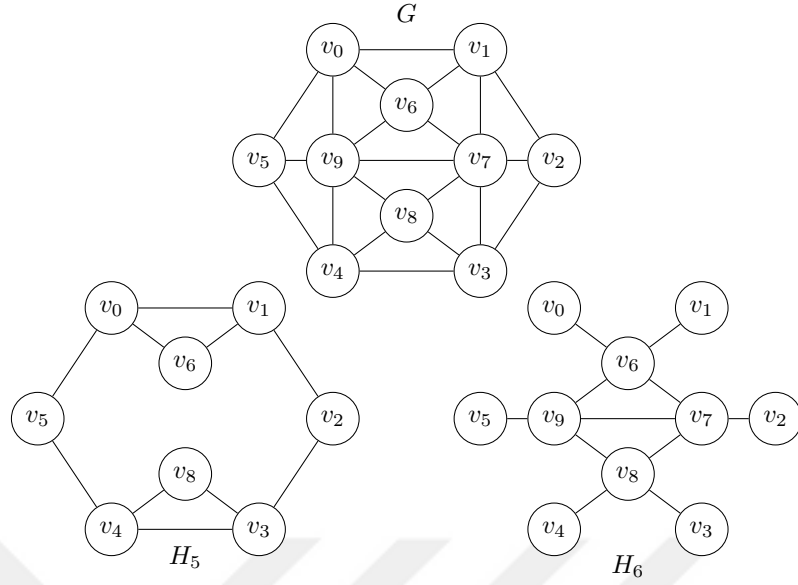
Tanım 3.5.3. G çizgesinin tüm noktalarından ve bazı kenarlarından oluşan H çizgesine G 'nin *geren alt çizgesi* denir. Yani; $V_H = V_G$ ve $E_H \subseteq E_G$.



Şekil 3.15. G çizgesinin H_3 bağlantısız geren alt çizgesi ve H_4 bağlantılı geren alt çizgesi

Tanım 3.5.4. $P \subseteq V_G$ olacak şekilde bir S nokta kümesi tarafından belirlenen alt çizge ye G çizgesinin *indirgenmiş (nokta tarafından) alt çizgesi* denir ve $G[P]$ ile gösterilebilir.

Tanım 3.5.5. $Q \subseteq E_G$ olacak şekilde bir Q kenar kümesi tarafından belirlenen alt çizge ye G çizgesinin *indirgenmiş (kenar tarafından) alt çizgesi* denir ve $G[Q]$ ile gösterilebilir.



Şekil 3.16. G çizgesinin P nokta kümesi tarafından indirgenen alt çizgesi H_5 ve Q kenar kümesi tarafından indirgenen alt çizgesi H_6 .

$$P = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8\}$$

$$Q = \{\{v_0, v_6\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_8\}, \{v_4, v_8\}, \{v_5, v_9\}, \{v_6, v_7\}, \{v_6, v_9\}, \{v_7, v_8\}, \{v_7, v_9\}, \{v_8, v_9\}\}$$

Tanım 3.5.6. G bir çizge olmak üzere, W alt çizgesinde ($W \subseteq G$) bulunan bütün nokta çiftleri bağlantılı ise W alt çizgesine *klik* denir. En fazla nokta içeren kliğin nokta sayısına G çizgesinin *klik sayısı* denir ve $\omega(G)$ ile gösterilebilir.

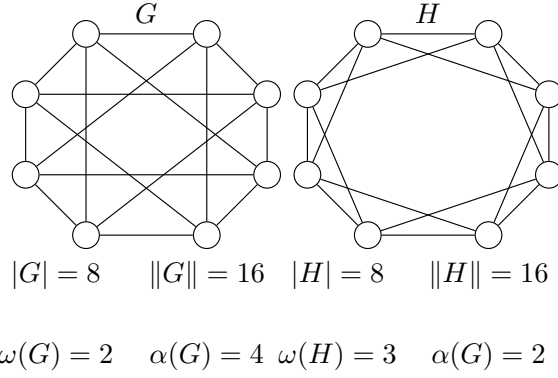
Tanım 3.5.7. G bir çizge olmak üzere, G de kenar oluşturmayan nokta kümesine *bağımsız küme* denir. En fazla nokta içeren bağımsız kümenin eleman sayısına G çizgesinin *bağımsızlık sayısı* denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilebilir.

Tanım 3.5.8. Bağlantılı bir G çizgesini en az iki farklı bileşene ayıran $P \subseteq V_G$ kümesine *kesen-nokta kümesi* denir.

Tanım 3.5.9. Bağlantılı bir G çizgesi için $\{v\}$ kümesi kesen küme ise v 'ye *eklem noktası* veya *kesen-nokta* denir.

Tanım 3.5.10. Bağlantılı bir G çizgesini en az iki farklı bileşene ayıran $Q \subseteq E_G$ kümesine *kesen-kenar kümesi* denir.

Tanım 3.5.11. Bağlantılı bir G çizgesi için $\{e\}$ kümesi kesen küme ise e kenarına *köprü* veya *kesen-kenar* denir.



Şekil 3.17. Nokta sayıları, kenar sayıları ve derece dizileri aynı olan G ve H çizgeleri için klik sayısı ve bağımsızlık sayısı karşılaştırması.

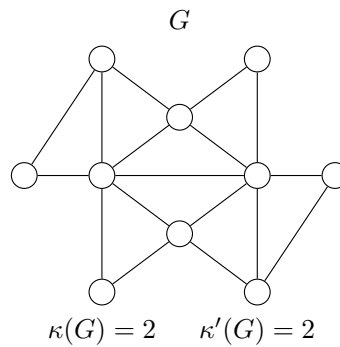
Tanım 3.5.12. G çizgesini bağlantısız yapan minimum nokta sayısına G nin *nokta bağlantısallığı* denir ve $\kappa(G)$ ile gösterilebilir.

Tanım 3.5.13. G çizgesini bağlantısız yapan minimum kenar sayısına *kenar bağlantısallığı* denir ve $\kappa'(G)$ ile gösterilebilir.

Teorem 3.5.1. [60] (Whitney teoremi) G çizgesi için,

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$$

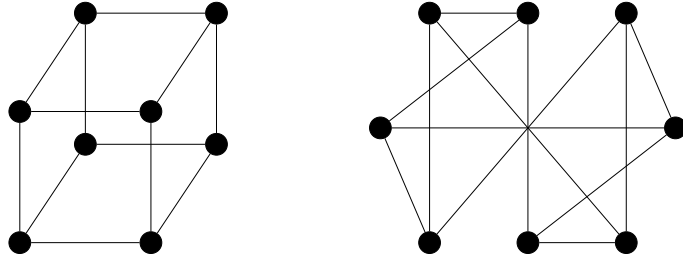
eşitsizliği sağlanır.



Şekil 3.18. Nokta ve kenar bağlantısallığı

Teorem 3.5.2. [60] Bir $e \in E_G$ kenarının köprü olması için gerek ve yeter şart e kenarının döngü üzerinde bulunmamasıdır.

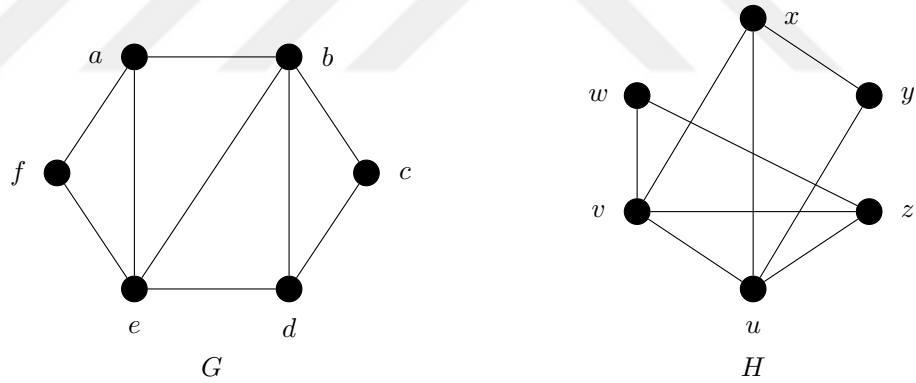
Bir kenarın şekli, uzunluğu ve uzaydaki konumu sonsuz şekilde belirlenebileceğinden çizgeleri karakterize etmek ve sınıflandırmak oldukça zor olacaktır (Şekil 3.19).



Şekil 3.19. Aynı çizgenin iki farklı çizimi

Tanım 3.5.14. G ve H çizgeleri için aşağıda ki koşulları sağlayan birebir ve örten bir f dönüşümü var ise G ve H çizgelerine *eşyapılı* çizgeler denir ve $G \cong H$ notasyonu ile gösterilebilir. Bazı çizgelerde nokta etiketleme önemsiz olabilir. Bu durumda notasyon kısaca $G = H$ olarak verilebilir.

- $f : V_G \rightarrow V_H$
- $\forall xy \in E_G \iff f(x)f(y) \in E_H$



$V_G \leftrightarrow V_H$	$E_G \leftrightarrow E_H$
$a \leftrightarrow x$	$ab \leftrightarrow xv$
$b \leftrightarrow v$	$ae \leftrightarrow xu$
$c \leftrightarrow w$	$af \leftrightarrow xy$
$d \leftrightarrow z$	$bc \leftrightarrow vw$
$e \leftrightarrow u$	$bd \leftrightarrow vz$
$f \leftrightarrow y$	$be \leftrightarrow vu$
	$cd \leftrightarrow wz$
	$de \leftrightarrow zu$
	$ef \leftrightarrow uy$

Şekil 3.20. Eşyapılı G ve H çizgeleri

Eşyapılı çizgeler ile ilgili ilk gözlem; nokta sayıları, kenar sayıları, döngü sayıları ve derece dizileri eşittir. Daha genel manada, G ve H çizgeleri eşyapılı çizgeler olmak üzere, aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- G bağlantılı ise H da bağlantılıdır.
- Aynı sayıda nokta kümesine sahiptirler. Yani $|G| = |H|$
- Aynı sayıda kenar kümesine sahiptirler. Yani $\|G\| = \|H\|$
- G çizgesinde derecesi k olan p nokta var ise H çizgesinde de derecesi k olan p nokta vardır.
- G çizgesi uzunluğu d olan bir döngü içeriyor ise H çizgesi de uzunluğu d olan bir döngü içerir.
- G çizgesi bir Euler turuna sahipse ise H çizgesi de bir Euler turuna sahiptir.
- G çizgesi bir Hamilton döngüsüne sahip ise H çizgesi de bir döngüsüne sahiptir.

İki çizgenin eşyapılı olduğu bilindiğinde bunların aynı eşyapı sınıfına ait olduğu söylenir. Bu gerçekten hareketle çizgelerde etiketleme (köşeleri isimlendirme) çok önemli bir yere sahiptir.

3.6. Çizge İşlemleri

Bir çizgede nokta ekleme veya kenar silme işlemi ikincil işlemler olarak adlandırılabilir. Diğer çizge işlemlerin temeli oldukları için birincil (temel) çizge işlemleri olarak kabul edilir.

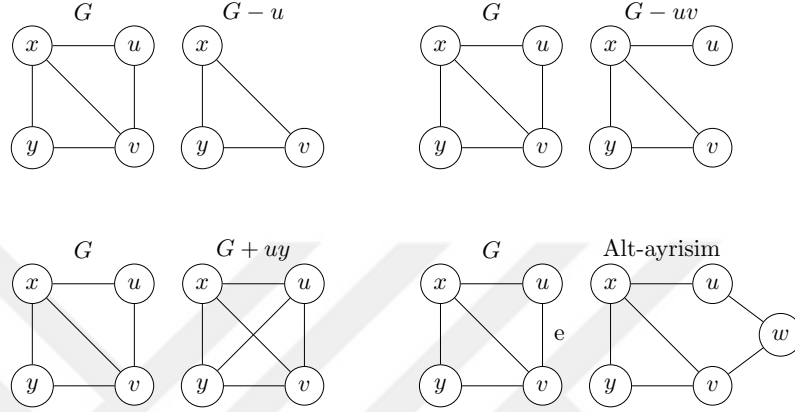
Tanım 3.6.1. Bir $G = (V, E)$ çizgesine v nokta eklenmesi, nokta kümesi $V \cup \{v\}$ ve kenar kümesi E olan yeni bir çizge oluşturur. Kısaca $G \cup \{v\}$ ile gösterilebilir.

Tanım 3.6.2. Bir $G = (V, E)$ çizgesinden $v \in V$ nokta silinmesi, sadece v 'yi silmek değil aynı zamanda uç noktası v olan kenarlarında silinmesi ile oluşan çizgedir. Kısaca $G - v$ ile gösterilebilir.

Tanım 3.6.3. Bir $G = (V, E)$ çizgesi için uv kenar eklenmesi, kenar kümesi $E \cup \{uv\}$ ve nokta kümesi V olan yeni bir çizge oluşturur. Kısaca $G \cup \{uv\}$ ile gösterilebilir.

Tanım 3.6.4. Bir $G = (V, E)$ çizgesi için $uv \in E$ kenar silinmesi, sadece u ve v arasındaki kenarın silinmesi ile oluşan çizgedir. Kısaca $G - uv$ ile gösterilebilir.

Tanım 3.6.5. Bir G çizgesinin kenar alt-ayrışımı (subdivision) $uv \in E_G$ kenarının silinmesi ve yeni bir w nokta ile uw, vw kenarlarının oluşturulması işlemidir.

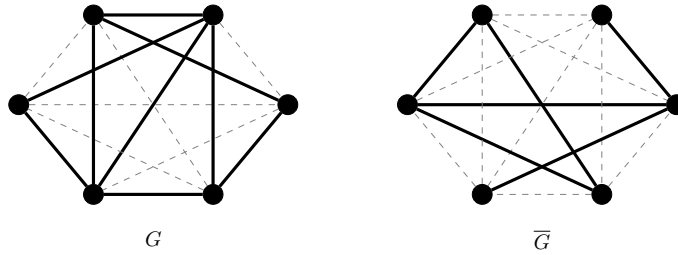


Şekil 3.21. Bazı birincil çizge işlemleri

Tanım 3.6.6. Bir G çizgesinin nokta kümesi V_G ile aynı olan ve G de kenar oluşturmayan nokta çiftlerinin kenar oluşturduğu çizgeye G 'nin tümleyeni denir. \overline{G} veya G^c ile gösterilebilir. Yani;

$\overline{E} = \{e \mid e \notin E\}$ olmak üzere $\overline{G} = (V, \overline{E})$ çizgesi G 'nin tümleyenidir.

Kolayca görülebilir ki $\overline{\overline{G}} = G$ eşitliği geçerlidir.



Şekil 3.22. G çizgesi ve tümleyeni. Olası kenarlar kesikli çizgilerle gösterilmiştir.

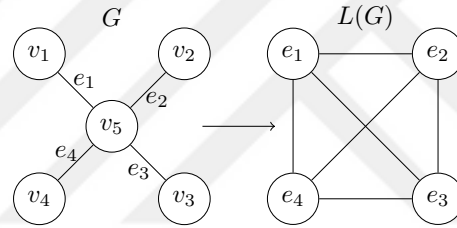
Teorem 3.6.1. [60] Eğer G çizgesi bağlantısız ise \overline{G} çizgesi bağlantılıdır ve $rad(\overline{G}) \leq 2$ dir.

İspat. G çizgesi bağlantısız olsun. \overline{G} çizgesinin bağlantılı olması için gerek ve yeter şart her x, y nokta çifti arasında bir $x - y$ yolunun olmasıdır. Eğer x ve y noktaları G de

komşu değilse $xy \in E(\overline{G})$ olur. Böylece xy kenarının kendisi bir yol olur. Diğer durum $xy \in E(G)$ olması, bu ise x ve y noktaların G de aynı bileşenlerde bulunma gerçeğini ifade eder. G çizgesi bağlantısız olduğu için farklı bir bileşende bulunan öyle bir z noktası bulunabilir ki $x \approx z$ ve $y \approx z$ olan. Böylece $xz \in E(\overline{G})$ ve $yz \in E(\overline{G})$ kenarlarının varlığından söz edilebilir. Açık ki bu kenarlar \overline{G} çizgesinde x, z, y yolunu ifade eder. Dikkat edilecek olursa her iki durum için $d(x, y) \leq 2$ eşitsizliği geçerlidir. Sonuç olarak \overline{G} çizgesi bağlantılı ve $rad(\overline{G}) \leq 2$ dir. \square

Teorem 3.6.2. [60] Yalın bir G çizgesi için, eğer $rad(G) \geq 3$ ise $rad(\overline{G}) \leq 2$ olur.

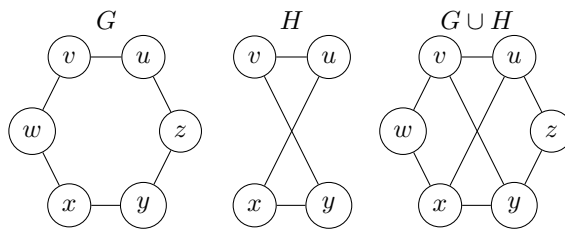
Tanım 3.6.7. Bir G çizgesinin $\mathcal{L}(G)$ hat çizgesi noktaları G nin kenarları olan ve G nin kenar komşuluğunu nokta komşuluğu kabul eden çizgedir.



Şekil 3.23. G ve $\mathcal{L}(G)$ çizgeleri

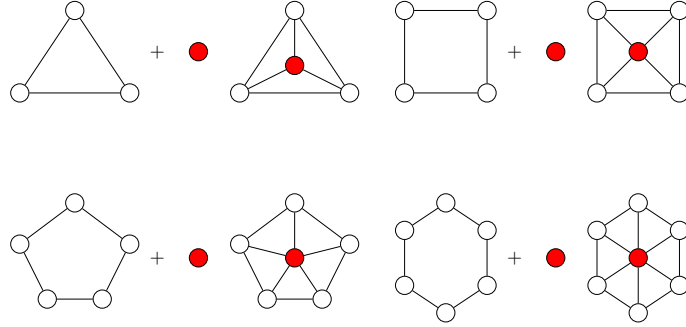
Tanım 3.6.8. $G = (V_G, E_G)$ ve $H = (V_H, E_H)$ iki çizge olmak üzere, $G \cup H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$ çizgesine G ve H çizgelerinin *birleşim (union)* denir. Ayrıca nokta kümeleri ayrık ise ($V_G \cap V_H = \emptyset$) *ayrık birleşim (disjoint union)* olarak tanımlanır ve $G + H$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 3.6.9. $G = (V_G, E_G)$ ve $H = (V_H, E_H)$ iki çizge olmak üzere, $G \cap H = (V_G \cap V_H, E_G \cap E_H)$ çizgesine G ve H çizgelerinin *kesişimi (intersection)* denir.



Şekil 3.24. G ve H çizgelerinin birleşimi

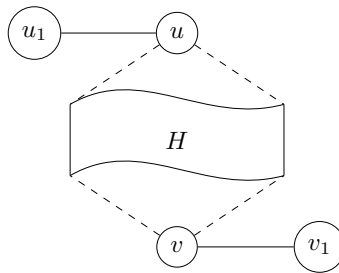
Tanım 3.6.10. G çizgesinin her noktasına yeni bir v noktası bağlanması durumuna v 'nin G ye eklenmesi (*join*) denir ve $G + v$ ile gösterilebilir.



Şekil 3.25. Nokta ekleme çizge aileleri oluşturmada çok önemli bir işlemdir.

Önerme 3.6.1. [55] H bir çizge olsun. H 'yi merkez çizge kabul eden ve yarıçapı 2 olan G çizgesi vardır.

İspat. Öncelikle H çizgesini kapsayan bir $\check{H} = ((H + u) + v)$ çizgesini inşa edelim. Oluşan yeni \check{H} çizgesine uu_1 ve vv_1 kenarlarını ekleyelim ve bu çizgeye G diyelim. Yani $G = \check{H} \cup \{u_1, v_1\} + uu_1 + vv_1$ dir. Kolayca söylenebilir ki G çizgesinin alt çizgesi olan H 'nin bütün noktalarının dışmerkezlilik değeri 2, $ecc(u) = 3, ecc(v) = 3$ ve $ecc(u_1) = 4, ecc(v_1) = 4$ dir. Böylece H alt çizgesi G 'nin merkezi olur. \square



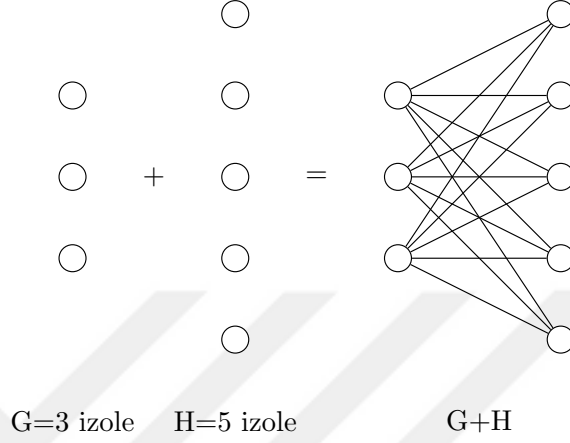
Şekil 3.26. $G = ((H + u) + v) \cup \{u_1, v_1\} + uu_1 + vv_1$

Tanım 3.6.11. G ve H iki çizge olmak üzere,

$$G \vee H = G + H + \{uv \mid u \in V_G, v \in V_H\}$$

eşitliği ile verilen çizgeye G ve H çizgelerinin *toplamı* (*join*) denir.

Bazı kaynaklarda iki çizgenin toplamını $G + H = G \cup H + \{uv \mid u \in V_G, v \in V_H\}$ olarak tanımlamaktadır (Şekil 3.27). Notasyon farklılıkları karmaşık görünsede kullanım amacı gözetilerek ve gerekli ön tanım verilerek farklı kullanımların açtığı karmaşa önlenmektedir.



Şekil 3.27. İki çizgenin toplamı $G + H$

Tanım 3.6.12. G ve H çizgelerin *kartezyen çarpımı* aşağıdaki nokta ve kenar kümelerine sahip bir çizgedir ve $G \square H$ notasyonu ile gösterilebilir.

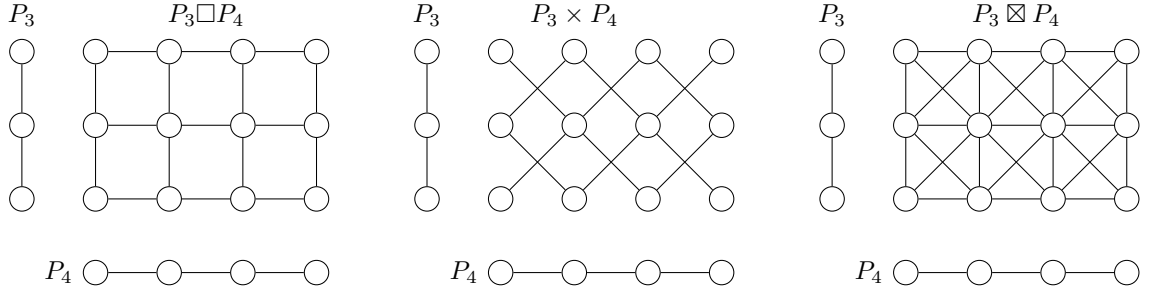
- $V(G \square H) = \{(g, h) \mid g \in V(G) \text{ ve } h \in V(H)\}$
- $E(G \square H) = \{(g, h)(g', h') \mid g = g', hh' \in E(H) \text{ yada } gg' \in E(G), h = h'\}$

Tanım 3.6.13. G ve H çizgelerin *direk çarpımı* aşağıdaki nokta ve kenar kümelerine sahip bir çizgedir ve $G \times H$ notasyonu ile gösterilebilir.

- $V(G \times H) = \{(g, h) \mid g \in V(G) \text{ ve } h \in V(H)\}$
- $E(G \times H) = \{(g, h)(g', h') \mid gg' \in E(G) \text{ ve } hh' \in E(H)\}$

Tanım 3.6.14. G ve H çizgelerin *güçlü çarpımı* aşağıdaki nokta ve kenar kümelerine sahip bir çizgedir ve $G \boxtimes H$ notasyonu ile gösterilebilir.

- $V(G \boxtimes H) = \{(g, h) \mid g \in V(G) \text{ ve } h \in V(H)\}$
- $E(G \boxtimes H) = E(G \square H) \cup E(G \times H)$



Şekil 3.28. Sırasıyla kartezyen çarpım, direk çarpım ve güçlü çarpım

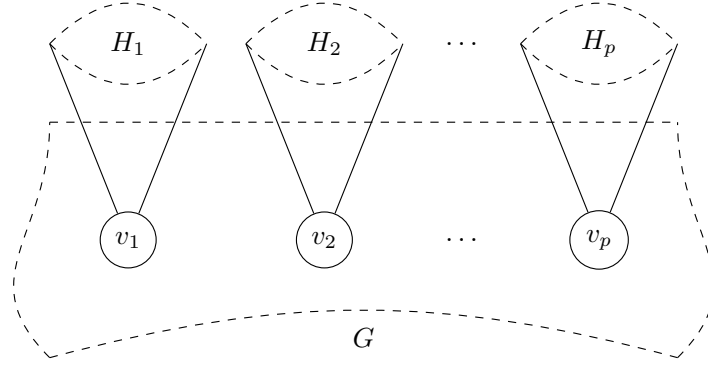
Tanım ve notasyon uyumsuzluğunun en bariz olduğu alanlardan biride çizge işlemleridir. Farklı kaynaklar özellikle notasyon konusunda henüz hemfikir olamamış gözükmemektedir. Genelde çizge işlemleri, özelde *korona çarpım* işlemi, eşyapılı alt çizgelerin ayrışımı çalışmalarında çok önemli bir role sahiptir.

Tanım 3.6.15. G nokta sayısı $|G| = p$ ve kenar sayısı $\|G\| = q$ olan bir çizge ve de H nokta sayısı $|H| = r$ ve kenar sayısı $\|H\| = s$ olan iki çizge olmak üzere, $G \circ H$ notasyonu ile gösterilen çizge işlemine G ve H çizgelerinin *korona çarpımı* denir ve aşağıdaki yordam (prosedür) ile tanımlanabilir.

- G çizgesini v_1, v_2, \dots, v_p olacak şekilde etiketle.
- G çizgesinden bir kopya ve H_1, H_2, \dots, H_p olacak şekilde H çizgesinden $|G| = p$ kopya al.
- G çizgesinin i . noktasına H çizgesinin i . kopyasında bulunan bütün noktaları komşu yap.

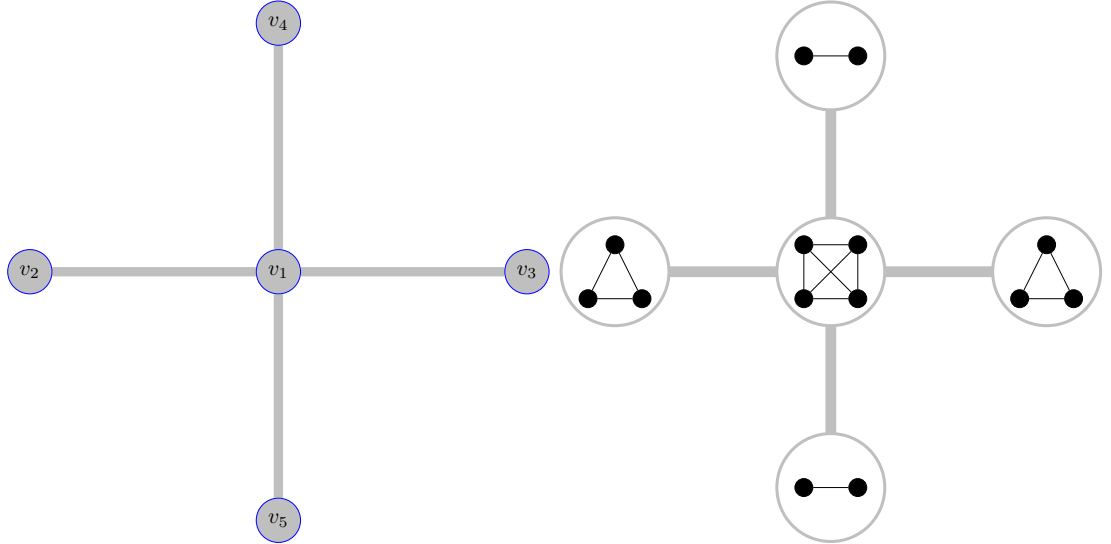
Kolayca görülebilir ki oluşan yeni çizgenin nokta sayısı $|G \circ H| = p + pr$ ve kenar sayısı $\|G \circ H\| = q + ps + pr$ olur.

Tanım 3.6.16. Nokta kümesi $\{1, \dots, n\}$ olan G çizgesini ele alalım. Kabul edelim ki V_1, \dots, V_n boş olmayan ve ayrık sonlu kümeler olsun. Nokta kümesi V_1, \dots, V_n olan bir H çizgesi tanımlayalım. H çizgesinde her $i \in [1, \dots, n]$ için V_i nin noktaları kendi içerisinde ya komşu (eğer böyle ise V_i klik) yada komşu olmasın (eğer böyle ise V_i koklik). H çizgesinde ki komşuluk oluşumu şu şekildedir; $i \neq j$ koşulu ile $i \in V_i$ noktasının $j \in V_j$ noktasına komşu olması için gerek ve yeter şart i ve j noktalarının G çizgesinde komşu olmasıdır. Bu koşullar altında oluşturulan H çizgesine



Şekil 3.29. $G \circ H$, G ve H çizgelerinin korona çarpımı

G çizgesinin karma genişlemesi (*mixed extension*) denir. Karma genişleme işleminin genel gösterimini (t_1, \dots, t_n) şeklinde n uzunluklu dizge olarak göstermek kullanım kolaylığı sağlayacaktır. Ayrıca herhangi bir G çizgesi için karma genişleme vurgulanması söz konusu ise $\mathcal{M}\mathcal{E}_G[t_1, \dots, t_n]$ gösterimi tercih edilebilir ki bu tarz gösterimler baz alınan çizgenin topolojik yapısıyla birlikte farklılaşabilir (döngü, yol ve yıldız çizge gibi). Örneğin yol çizgesi ve döngü çizgesi baz alınarak oluşturulan karma genişleme modelleri nüanslar barındırabilir (tabiki V_i klik ise $|V_i| = +t_i$, V_i koklik ise $|V_i| = -t_i$).



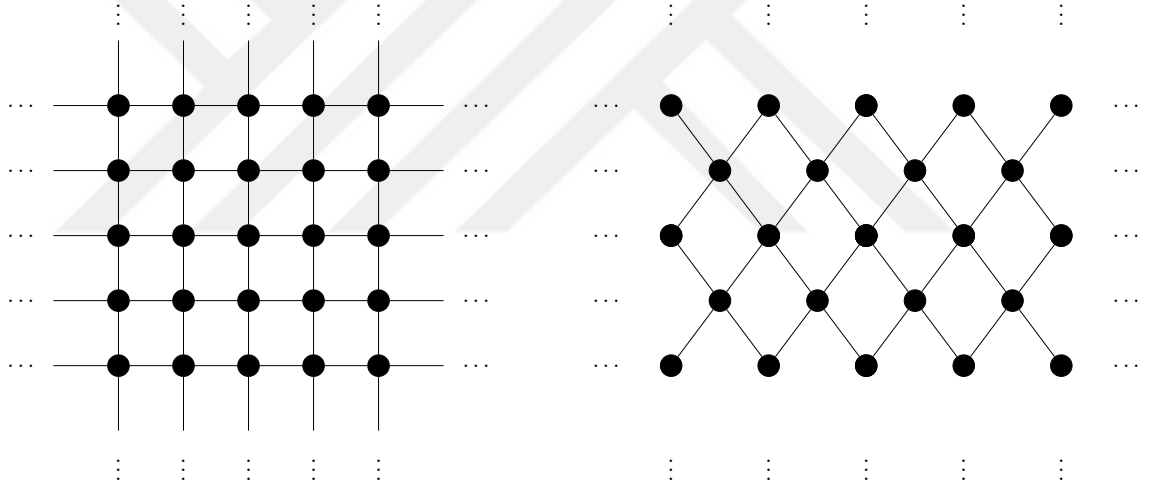
Şekil 3.30. $S_4 = K_{1,4}$ çizgesinin $(|V_1| = +4, |V_2| = +3, |V_3| = +3, |V_4| = +2, |V_5| = +2)$ dizisi altındaki karma genişleme çizge modeli $\mathcal{M}\mathcal{E}_{S_4}[+4, +3, +3, +2, +2]$. Gri renk kullanımı komşuluk korunumunu ifade etmektedir.

3.7. Özel Çizge Aileleri

Çizge kuramında ele alınan bazı yapıların genel kabul görmüş isimleri vardır. Bazen çizgenin topolojisinden esinlenerek ve bazen de onları keşfeden bilim insanlarının isimlerinden esinlenilerek (örneğin Petersen çizgesi) bu soyut yapılar isimlendirilmiştir. Tezin bu alt bölümünde çizge kuramında yaygın olarak atıfta bulunulan çizge ailelerinden ve bazı isimli çizgelerden bahsedilmiştir.

Tanım 3.7.1. Nokta kümesi ve kenar kümesi sonlu olan çizgeye *sonlu çizge* denir. Aksi takdirde, *sonsuz çizge* olarak adlandırılır.

Çalışmaların çoğu sonlu yapılar üzerine olduğu için genellikle çizgelerden bahsedilirken sonlu vurgusu yapılmaz.



Şekil 3.31. Sonsuz çizge örnekleri

Tanım 3.7.2. G çizgesi bütün nokta çiftlerini birleştiren kenar kümesine sahip ise *tam çizge* olarak isimlendirilir ve $|G| = n$ olmak üzere K_n ile gösterilir.

Tanım 3.7.3. Sadece n noktadan oluşan çizgeye *boş çizge* denir ve $\overline{K_n}$ ile gösterilir.

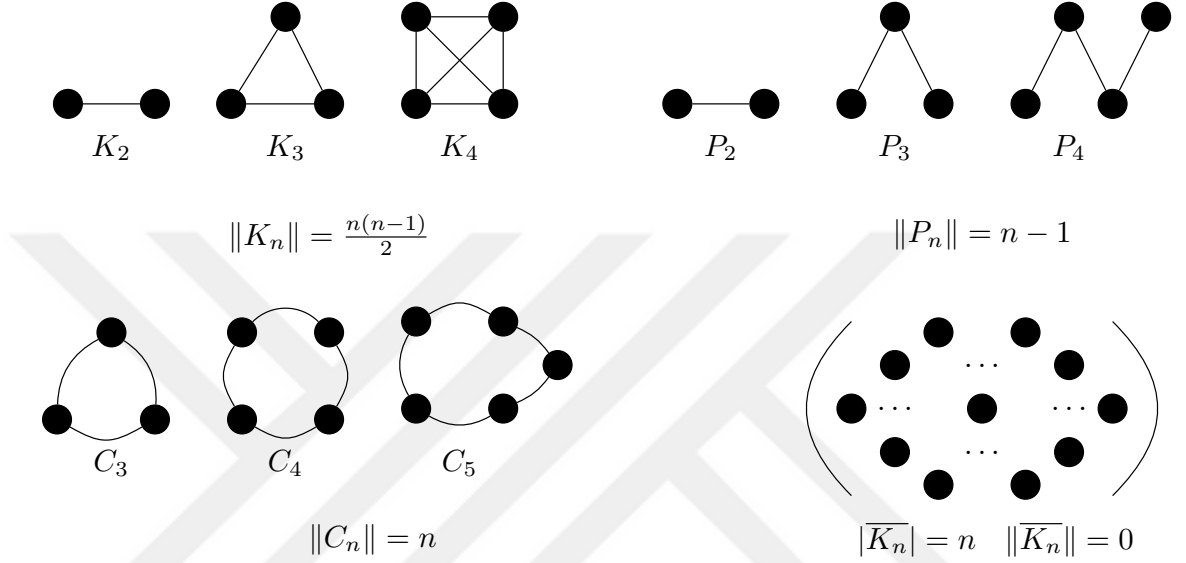
Tanım 3.7.4. Nokta ve kenar kümesi boş olan çizgeye *sıfır çizge* denir ve K_0 ile gösterilir.

Tanım 3.7.5. Sadece bir noktadan oluşan çizgeye *aşık çizge* denir ve K_1 ile gösterilir.

Sıfır çizge ve boş çizge tanımları anlamsız hissedilsede özellikle bilgisayar bilimlerinde bu dört tanımın farklı sınıflar olarak tanımlanması elzemdir. Yönlü çizgeler için de benzer tanımlar yapılabilir tabiki kenarların çift taraflı yönlendirmeleri var ise.

Tanım 3.7.6. Sadece bir tek yoldan oluşan çizgeye *yol çizge* denir ve $|G| = n \geq 2$ olmak üzere P_n ile gösterilir.

Tanım 3.7.7. Sadece bir tek döngü üzerinde bulunan çizgeye *döngü çizge* denir ve $|G| = n \geq 3$ olmak üzere C_n ile gösterilir.



Şekil 3.32. Sırasıyla tam çizge, yol çizge, döngü çizge ve boş çizge

Tanım 3.7.8. Bir G çizgesi,

- Eğer döngü veya dolaşım (tur) içermiyorsa *çevrimsiz (acyclic)*
- Eğer hem bağlantılı hemde çevrimsiz ise *ağaç (tree)*
- Eğer çevrimsiz ise *orman (forest)*

denir. Ayrıca derecesi bir olan noktaya *yaprak (leaf)* denir ve n noktalı bir ağacın toplam derecesi $2n - 2$ dir. Her aşık ağaç (en az iki noktalı) en az iki yaprak içermelidir. Farklı kaynaklarda yaprak kavramı için *sarkık (pendant) nokta* ve bu noktaya bağlı kenara *sarkık (pendant) kenar* denir. Dikkat edelim ki bileşenleri ağaç olan yalın çizgeye orman denir. Ağaç çizgesi olasılık, kimya (kimyasal çizgeler) ve bilgisayar (minimum geren ağaç teorisi) bilimi dahil bir çok farklı alanda önemli bir yere sahiptir. Özellikle gerçek hayat problemlerinde soyut yapının (çizgenin) *bağlantılı* olup olmaması çok önemli ise ağaç kavramına başvurulur.

Teorem 3.7.1. [60] T çizgesi n noktalı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- T bir ağaçtır.
- T her kenarı köprüdür.
- T döngü içermez ve $n - 1$ kenarlıdır.
- T bağlantılıdır ve $n - 1$ kenarlıdır.
- T bağlantılıdır ve her kenar kesim kenarıdır (cut-edge).
- T de bulunan her hangi iki nokta arasında kesin olarak bir yol vardır.
- T döngü içermez ve herhangi yeni bir e kenarı için $T + e$ çizgesi kesin olarak bir döngü içerir.

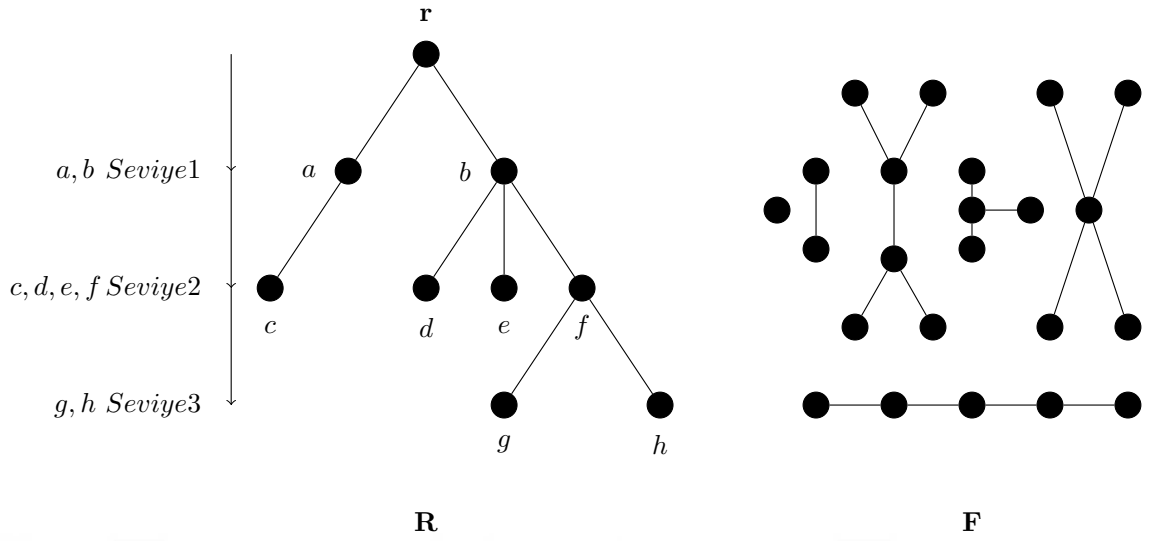
Tanım 3.7.9. Özel bir r noktasına göre dizayn edilmiş T ağacına *köklü ağaç (rooted tree)* denir. Kök r noktasıdır ve diğer noktaların *seviyesi (level)* en kısa yol uzunluğuna göre guruplandırılır. Literatür zenginliği adına güzel bir başka örnek ise seviye kavramı için *derinlik (depth)* denmesidir. Ayrıca T köklü ağaçta bulunan en büyük seviyeye T nin *yüksekliği (height)* denir.

Tanım 3.7.10. $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ nokta kümesi ve $\langle n, 1, \dots, 1 \rangle$ derece dizisine (etiket sırası ile) sahip çizgeye *yıldız çizge* denir ve S_n veya $K_{1,n}$ ile gösterilebilir. Dikkat edilirse $|S_n| = n + 1$ ve $||S_n|| = n$ dir.

Tanım 3.7.11. C_n döngü çizgesi ile K_1 aşık çizgesinin toplanması (çizge işlemi altında) ile oluşan çizgeye *tekerlek çizge* denir ve $n \geq 4$ olmak üzere W_n ile gösterilir. Yani $W_n = C_{n-1} + K_1$ çizgesi için nokta ve kenar kümesi $|W_n| = n$ ve $||W_n|| = 2(n - 1)$ dir (Şekil 3.25).

Yukarıdaki tanımda olduğu gibi, temel çizge tanımlarını ve çizge işlemleri kullanarak oldukça kullanışlı özel çizge aileleri üretilebilir.

Tanım 3.7.12. K_m tam çizgesine P_n yol çizgesinin bir kenar (köprü) ile bağlanması sonucu oluşan çizgeye *uçurtma (kite) çizge* denir ve $U_{m,n}$ ile gösterilebilir. Açıktır ki nokta ve kenar kümeleri $|U_{m,n}| = m + n$ ve $||U_{m,n}|| = \frac{m(m-1)}{2} + n$ dir.



Şekil 3.33. R ağaç çizgesi r köklü ve 3 yüksekliğe sahip köklü ağaçtır. Ayrıca a ve b noktalarına oğul (child) ve r noktasına bu noktaların atası (parent) denir. Benzer şekilde diğer noktalar içinde ata-oğul ilişkisi kurulabilir. F yapısı ise ağaçlardan oluşan ormandır.

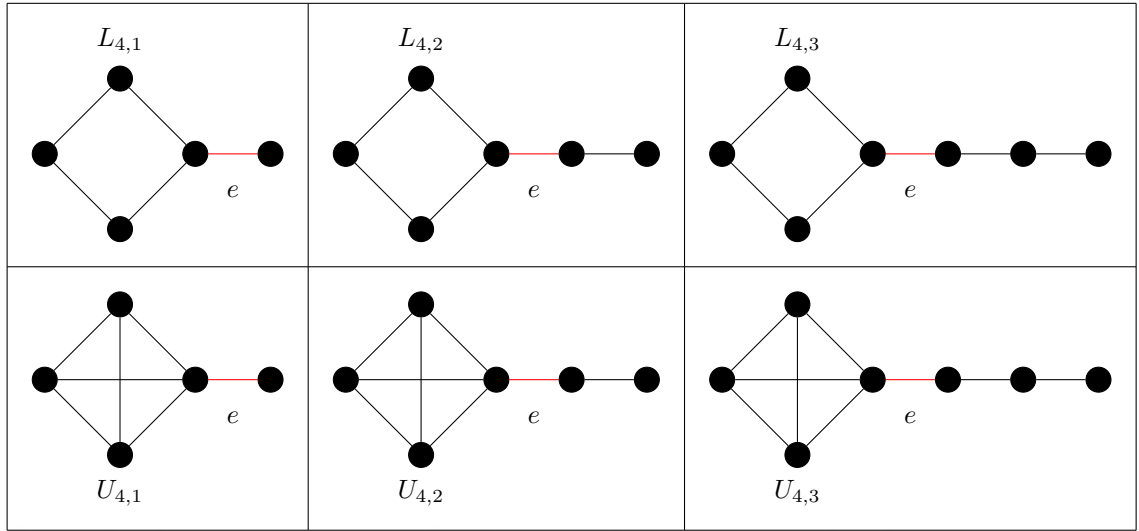
Tanım 3.7.13. C_m tam çizgesine P_n yol çizgesinin bir kenar (köprü) ile bağlanması sonucu oluşan çizgeye *lolipop (lollipop) çizge* denir ve $L_{m,n}$ ile gösterilebilir. Açık ki nokta ve kenar kümeleri $|L_{m,n}| = m + n$ ve $\|L_{m,n}\| = m + n$ dir.

Kavram farklılaşmasının en bariz örneklerini çizge ailelerinin tanımlarında görürüz. Bazı yazarlar lolipop çizgesi için uçurtma çizgesinin birbirinin yerine kullanırken, kimi yazarlar ise uçurtma çizgesi için iribaş (tadpole) çizgesi olarak isimlendirmektedir. Kavram zenginliğinin bir sonucu olarak tanımlar çeşitlenebilir. Ayrıca bazı çizge ailelerinin *kısa* türleride tanımlanabilir. Örneğin $L_{m,1}$ kısa lolipop (veya m -pan) ve $U_{m,1}$ kısa uçurtma (short kite) gibi.

Tanım 3.7.14. K_n tam çizgesi ile kendisinin bir kenar (köprü) ile bağlanması sonucu oluşan çizgeye *halter çizge* denir ve $B_{n,n}$ ile gösterilebilir. Nokta ve kenar kümeleri $|B_{n,n}| = 2n$ ve $\|B_{n,n}\| = n(n - 1) + 1$ şeklinde ifade edilebilir.

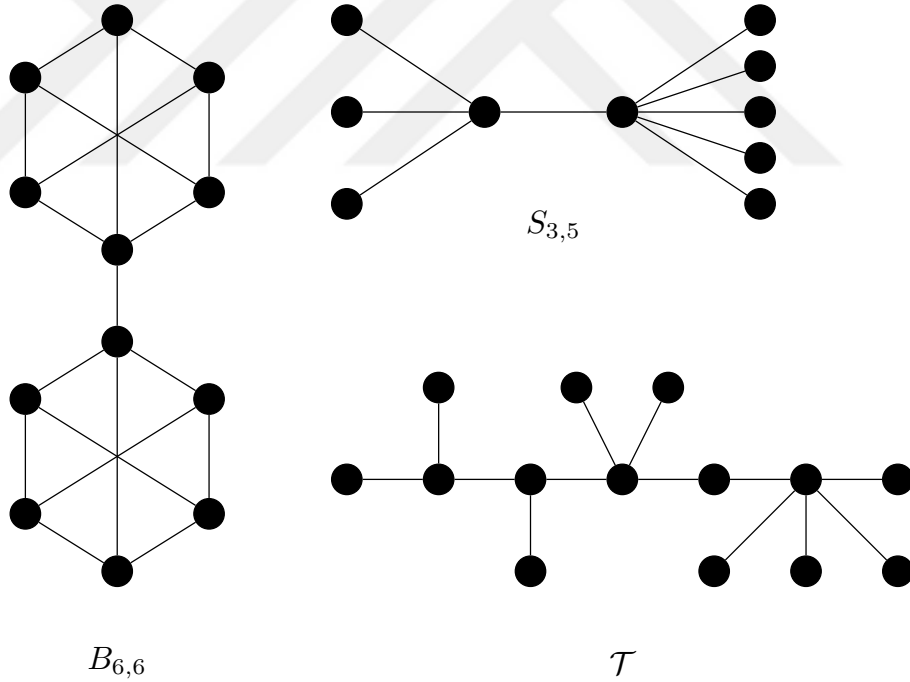
Tanım 3.7.15. Tam olarak iki sarkık (pendant) olmayan nokta içeren ağaç çizgesine çift yıldız (double star) denir. Yani derece dizisi $\langle m + 1, n + 1, 1, 1, \dots, 1 \rangle$ olan ağaçtır ve $S_{m,n}$ ile gösterilebilir. Açık ki $|S_{m,n}| = m + n + 2$ ve $\|S_{m,n}\| = m + n + 1$

Tanım 3.7.16. Sadece bir yol içeren ve yol üzerinde olmayan noktaları direk olarak kenar



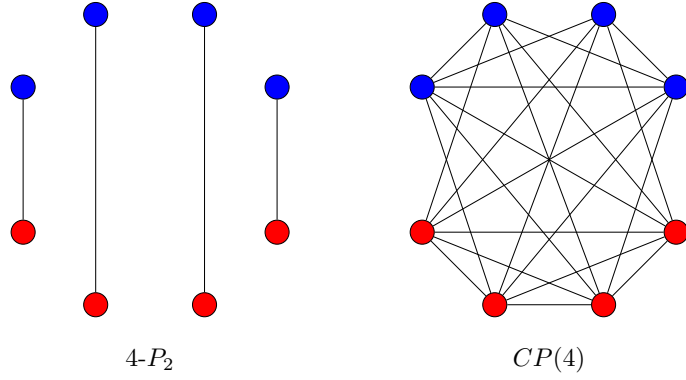
Şekil 3.34. Yukarıdan aşağı lolipop ve uçurtma çizge örnekleri

kabul eden ağaç çizgesine *tırtıl (caterpillar)* denir.



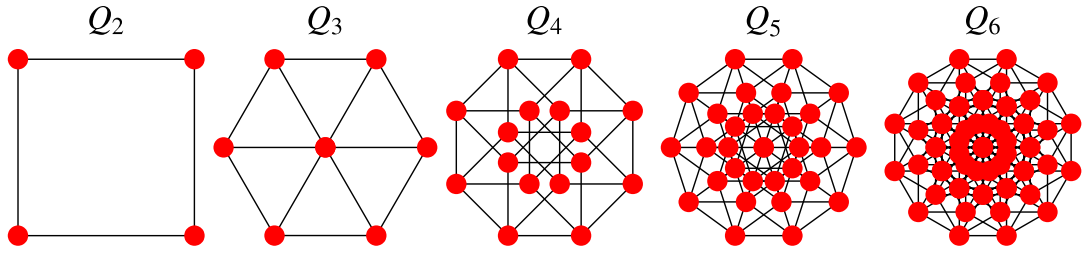
Şekil 3.35. $B_{6,6}$ halter çizge, $S_{3,5}$ çift çizge ve \mathcal{T} tırtıl çizge örnekleri

Tanım 3.7.17. n noktalı kokteyl parti çizgesi, eşleştirilmiş olanlar dışındaki tüm noktaların bir kenar ile bağlandığı iki sıra eşleştirilmiş nokta kümesinden oluşan çizgedir ve $CP(n)$ ile gösterilebilir. Ayrıca kokteyl parti çizgesi n tane P_2 yol çizgesinin tümleyeni olarak da tanımlanır. Nokta ve kenar kümeleri $|CP(n)| = 2n$ ve $\|CP(n)\| = 2n(n - 1)$ şeklinde ifade edilebilir.



Şekil 3.36. $P_2 \cup P_2 \cup P_2 \cup P_2$ çizgesinin tümler çizgesi kokteyl parti çizge $CP(4)$ dir.

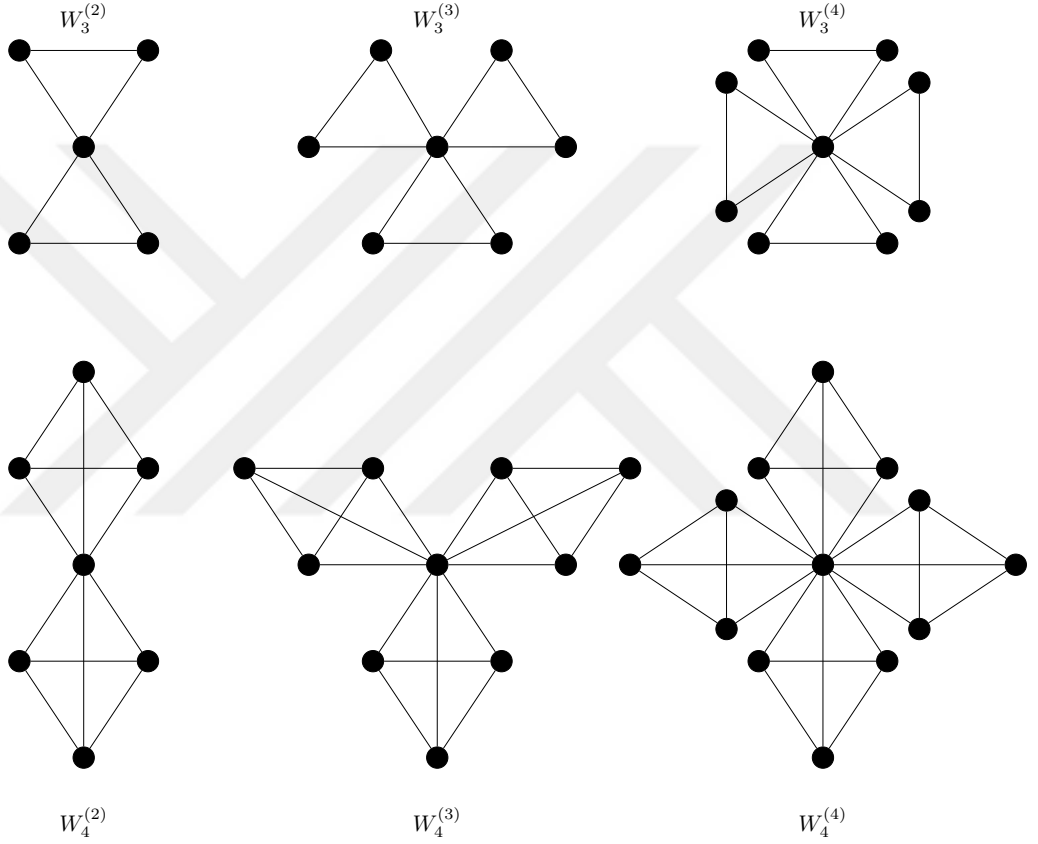
Tanım 3.7.18. n -hiperküp veya kısaca n -küp çizge, etiketleri $[00 \dots 0], \dots, [11 \dots 1]$ olacak şekilde farklı n -bit ile etiketli 2^n noktadan oluşan bir çizgedir ve Q_n ile gösterilebilir. Bu çizgede iki noktanın etiketi sadece 1 bit pozisyonunda farklıysa kenar oluşturur. n -hiperküp çizge $2^{n-1}n$ kenar sayısına sahiptir.



Şekil 3.37. n -hiperküp veya n -küp çizge örnekleri, boyut farklılıkları dikkate alınarak temsiller izdüşüm perspektifinden yapılmıştır.

Tanım 3.7.19. G , çapı d olan ($diam(G) = d$) bağlantılı çizge olmak üzere, herhangi bir $v \in V(G)$ noktası için, $d(v, u) = d$ olacak şekilde sadece bir $u \in V(G)$ noktası var ise G çizgesine zıtkutuplu (antipodal) çizge denir. Diğer bir yaklaşımla tanım şu şekilde de ifade edilebilir. G çizgesi nokta kümesi farklı nokta sınıflarının parçalanışına, ki o sınıflarda bulunan nokta çiftlerinin mesafeleri çapı verir, eşit ise G çizgesine zıtkutuplu çizge denir. Ayrıca bu sınıfların eleman sayıları sabit (r) ise G çizgesine r -zıtkutuplu çizge denir. K_{n_1, n_2, \dots, n_k} k parçalı tam çizge, K_n , $K_{a, a, \dots, a}$ düzenli tam çizge, C_{2k} döngü çizge, P_{2k} yol çizge, Q_n hiper küp çizge, $K_{n \times 2}$ kokteyl parti çizge zıtkutuplu çizgelere örnek verilebilir.

Tanım 3.7.20. Rüzgar gülü çizgesi (windmill), k tane tam çizgenin (K_n) bir ortak noktayı paylaşması ile oluşan çizgedir. Literatürde farklı gösterimlere sahip olmasına karşın $W_n^{(k)}$ notasyonu yaygın olarak kullanılmaktadır. Oldukça basit ve anlaşılır tanımının yanı sıra spektral karakterizasyonda sıkça karşılaşılan bir çizge ailesidir. Eğer $n = 3$ alınırsa çizge ailesi dahada özelleşerek Hollanda rüzgar gülü (Dutch windmill) çizge ailesine dönüşür. Nokta sayısı $|W_n^{(k)}| = n(k - 1) + 1$ ve kenar sayısı $||W_n^{(k)}|| = nk(k - 1)/2$ şeklindedir.



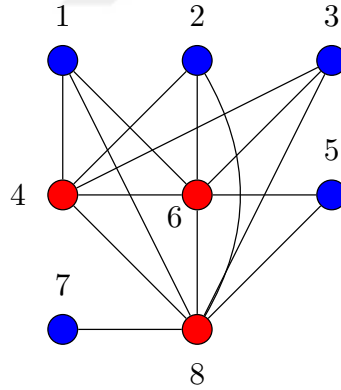
Şekil 3.38. Rüzgar gülü çizge ailesi

Eşik çizge tanımı (Threshold graph) ilk olarak 1977 de Chvátal ve Hammer [61] ve de Henderson ve Zalcstein [62] isimli bilim insanları tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu çizge sınıfı bilgisayar bilimleri ve psikoloji alanları başta olmak üzere bir çok disiplinde yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Çok fonksiyonlu tanımı sebebi ile akademik platformda sıkça topolojik ve spektral özelliklerine atıfta bulunmaktadır.

Tanım 3.7.21. [63] Aşağıda tanım verilen özellikler eşdeğerdir ve eşik çizgelerin sınıfını tanımlar.

- w_i gerçel sayılı ağırlıklar ve t eşik değer olsun. Çizgede bulunan i noktasından j noktasına kenar oluşması için gerek ve yeter koşul $w_i + w_j \geq t$ olmasıdır.
- G çizgesi yinelemeli olarak izole ve/veya baskın nokta ekleme yordamı ile oluşsun.
- $2K_2$, P_4 ve C_4 çizgelerini indirgenmiş alt çizge olarak içermesin.

Anlaşılır ve açıktır ki eşik çizgelerin noktaları ya izole yada baskın noktalardan oluşur. Bu sebepten eşik çizgeler *ikili diziler* olarak ifade edilebilir. Yani $\{0:\text{izole}, 1:\text{baskın}\}$ ikilik sistem yardımı ile $(b_0 = 0, b_1, b_2, \dots, b_n)$ şeklinde çizge temsil ve tarif edilir. Başlangıç noktası izole kabul edildiği için $b_0 = 0$ olmalıdır. Eğer v_i izole ise $b_i = 0$, v_i baskın ise $b_i = 1$ olarak ağırlıklandırılır. Böyle bir gösterime oluşum dizisi denir. G çizgesinin bağlantılı olması ile $b_n = 1$ olması eşdeğerdir. Çizgenin noktalarını $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ şekilde etiketlersek v_i gösterimi i . adımda eklenen noktayı temsil eder. Daha genel tarif/gösterim ile eşik çizge, $1 \leq i \leq m$ için $s_i \geq 1$ ayrık noktalar ve $t_i \geq 1$ baskın noktaları göstermek üzere $(0^{s_1}, 1^{t_1}, \dots, 0^{s_m}, 1^{t_m})$ yegane ikili dizgeye sahip çizgeye denir. Özel durumlara sahip gerçek dünya problemleri için uygun model , çizge yapısının



Şekil 3.39. $(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$ ikili dizgeye sahip eşik çizge gösterimi. Çizgeye ait 4, 6 ve 8 noktaları baskın, diğer noktalar izoledir [63].

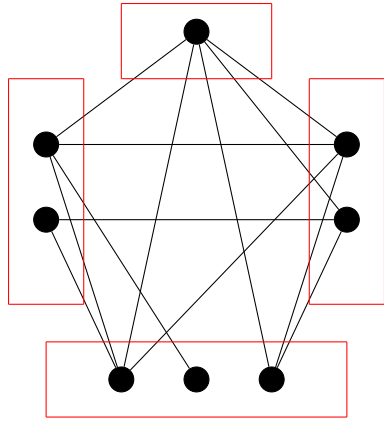
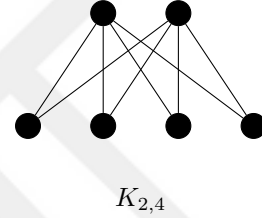
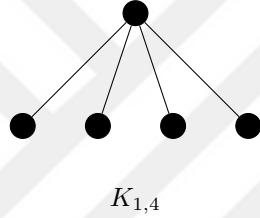
veya soyutlamanın özelliklerini ifade eden, tasarlanarak sorulan soruya yanıt verebilmesi arzu edilir. Farklı nesne türleri arasındaki ilişki ağını göstermek istiyorsak literatürde çok önemli bir bölüm oluşturan (müstakil kitap olacak şekilde) bir kavrama ihtiyacımız vardır. Bu kavram ise *parçalı çizgeler* kavramıdır.

Tanım 3.7.22. Nokta kümesi X ve Y şeklinde parçalanabilen ve her kenarın uç noktası farklı parçalarda bulunan çizgeye *iki parçalı (bipartite) çizge* denir. Yani G çizgesi her

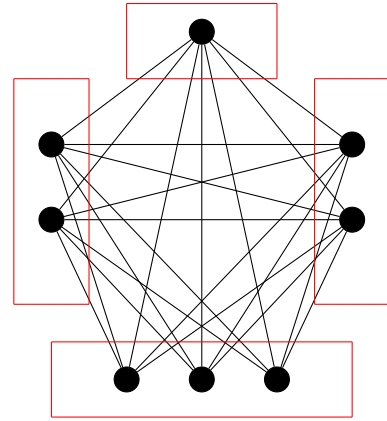
$e = xy \in E(G)$ için $x \in X$ ($X \subseteq V(G)$) ve $y \in Y$ ($Y \subseteq V(G)$) koşulunu sağlıyorsa G çizgesi iki parçalıdır.

Tanım 3.7.23. $|X| = m$ ve $|Y| = n$ iki parçalı $K_{m,n}$ çizgesi için eğer her $x \in X$ noktası her $y \in Y$ noktası ile komşu ise $K_{m,n}$ çizgesine *iki parçalı tam (complete bipartite)* çizge denir.

Tanım 3.7.24. Nokta kümesi X_1, X_2, \dots, X_k olarak k parçalanışa sahip ve her $e = x_i x_j$ kenarı için $x_i \in X_i, x_j \in X_j$ ($1 \leq i \neq j \leq k$) koşulunu sağlayan çizgeye *k-parçalı çizge* denir. Eğer parçalanışların her birinde bulunan noktalar arasında kenar var ise bu çizgeye *k-parçalı tam (complete multipartite)* çizge denir.



4 – Parçalı



$K_{1,2,2,3}$

Şekil 3.40. $K_{1,4} = S_5$, $K_{2,4}$ iki parçalı tam çizge ve $K_{1,2,3}$ 3-parçalı tam çizge

Son yıllarda çizge kuramındaki hızlı değişim ve gelişimin etkisiyle bazı özel çizge sınıfları daha detaylı incelenir hale getirmiştir. *Düzlemsel (planar) çizgeler, işaretli (signed) çizgeler, hiper çizgeler, düzenli (regular) çizgeler, rasgele düzenli (random regular) çizgeler vb.* bu sınıflara örnek verilebilir. Bu tarz çalışmalar beraberinde büyük çaplı

akademik birikimi getirmektedir. Geline bu noktada bu çizge sınıfları müstakil kitap haline gelerek araştırmacıların çalışmalarına yardımcı olmaktadır (detaylı bilgi için [64], [65], [66] ve [67] referans numaralı kaynaklara bakılabilir). Ayrıca mesafe ile ilgili çizge kavramları uygulamalı bilimlerde kilit bir rol oynamaktadır örneğin *mesafe düzenli çizgeler* (*distance-regular graphs*).

Tanım 3.7.25. Noktalarını derecesi aynı olan çizgelere *düzenli* (*regular*) çizgeler denir. Genel olarak $\langle k, k, \dots, k \rangle$ derece dizisi olsun bu durumda çizge k -düzenli olarak isimlendirilebilir. Platonik çizgeler, Petersen çizgesi, O_2 (Oksijen molekülü) çizge modeli, kübik çizgeler (3-düzenli), tam çizgeler, kokteyl parti çizgeleri, r -boyutlu küp çizgeler ve döngü çizgeler özel düzenli çizgeler içinde yer alır.

Tablo 3.1. Bazı bağlantılı düzenli çizge sayı dağılımı [68]

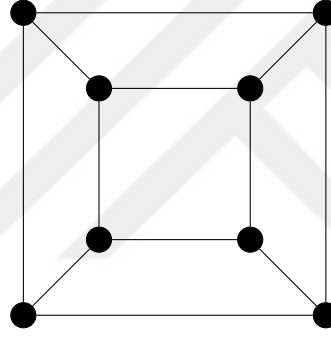
	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$
$n = 4$	1	0	0	0	0
$n = 5$	0	1	0	0	0
$n = 6$	2	1	1	0	0
$n = 7$	0	2	0	1	0
$n = 8$	5	6	3	1	1
$n = 9$	0	16	0	4	0
$n = 10$	19	59	60	21	5
$n = 11$	0	265	0	266	0
$n = 12$	85	1544	7848	7849	1547
$n = 13$	0	10778	0	367860	0

Tanım 3.7.26. G çizgesi n noktalı ve k -düzenli olsun. Her noktası k komşuluğa sahip, komşu olan her nokta çifti λ ortak komşuluklu ve komşu olmayan her nokta çifti μ ortak komşuluğa sahip G çizgesine *güçlü düzenli* (*strongly regular*) çizge denir ve (n, k, λ, μ) parametre dördlüsü ile gösterilebilir. Örneğin Petersen $(10,3,0,1)$ parametrelerine sahip güçlü düzenli çizgedir. Eğer bir çizge güçlü düzenli değil ise *zayıf düzenli* (*weakly regular*) çizge denir.

Tanım 3.7.27. G , k -düzenli ve d çaplı bir çizge olmak üzere; sıfırdan farklı elemanlardan oluşan ve aşağıdaki koşulları sağlayan $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d\}$ kesişim dizisine sahip G çizgesi *mesafe düzenli çizge* denir.

$d(u, v) = r$ mesafe koşulunu sağlayan her u, v nokta çifti için,

- $b_0 = k$ ve $c_1 = 1$ dir.
- u noktasına komşu olan ve v noktası ile uzaklığı $r - 1$ olan nokta sayısı c_r dir ($1 \leq r \leq d$).
- u noktasına komşu olan ve v noktası ile uzaklığı $r + 1$ olan nokta sayısı b_r dir ($0 \leq r \leq d - 1$).



Şekil 3.41. Mesafe düzenli çizge örneği. Kübik çizgede $k = 3$, $r = 3$ ve kesişim dizisi $\{3, 3, 3; 1, 2, 3\}$ dir.

Tanım 3.7.28. Noktalarını dışmerkezliliği aynı olan çizgelere *düzenli (dışmerkezliliğe göre)* çizgeler denir. Yani her $v \in G$ için $ecc_G(v) = k$ olacak şekilde bir k sabiti var ise G çizgesine dışmerkezliliğe göre düzenlidir denir. Aşık örnek olarak K_n ve C_n çizgeleri dışmerkezlilik dizisine göre düzenlidir.

4. BÖLÜM

SPEKTRAL ÇİZGE KURAMI

Tezin bu bölümünde kullanılan tarihi altyapı, tanımlar, gösterimler, teoremler vb. bilgiler [3], [69], [70], [71], [72] ve [73] referans numaralı kaynaklardan faydalanılarak oluşturulmuştur. Özel olarak atıfta bulunulması gereken bilgiler için kaynak ek olarak alıntılanacaktır.

4.1. Ön bilgiler

Matris kavramının literatüre tanıtılması ve geliştirilmesi, lineer denklem sistemlerine ait katsayılarının incelenmesi ile ortaya çıkan ve determinant gelişimi ile devam eden matematiğin en önemli kavramıdır. Analizin kurucusundan biri olan Leibnitz ilk olarak 1693 'de determinant kavramını kullandı. 1750 'de Cramer lineer denklem sistemlerini (günümüzde Cramer kuralı olarak bilinen) çözmek için determinant tabanlı formülünü literatüre tanıttı. Matris kavramının dolaylı kullanımı aslında daha eskilere dayanmaktadır. Kavramın ayak izleri 1700 'lere kadar gitmektedir. Lagrange'ın bilineer formlar üzerindeki çalışmalarında matris kavramı örtülü bir şekilde karşımıza çıkmaktadır. Lagrange çok değişkenli fonksiyonların maksimum ve minimumlarını karakterize etmemenin arzusu ile çalışmalarına devam etti. Bunu gerçekleştirmek için önce birinci mertebeden kısmi türevlerin sıfır olmasını ve ayrıca ikinci mertebeden kısmi türevlerin matrisindeki koşulun geçerli olmasını amaçladı. Lagrange'ın yöntemi bugün Lagrange çarpanları yöntemi olarak bilinmektedir. Lagrange, matrisleri açıkça kullanmasa da, bugün onun hedefinde bulunan koşullara pozitif veya negatif tanımlılık denilmektedir. Gauss 1800 'lerde, günümüzde Gauss eleme olarak bilinen, yöntemini geliştirdi ve bu yöntemi gökyüzü ile ilgili hesaplamalarda (en küçük kareler problemlerini çözmek için) kullandı. Daha sonra ise Gauss yerkürenin yüzey ölçümlerini içeren çalışmalarında eleme yöntemini geliştirdi (dünyanın şeklini ölçmek veya dünya yüzeyindeki noktaları tam olarak belirlemekle ilgilenen uygulamalı matematiğin dalına jeodezi denir). Gauss'un adı bu teknikle ilişkilendirilse de değişkenleri sistemden art arda yok ederek elde etme yaklaşımı Gauss'un zamanından öncesine dayanmaktadır (Çin el yazmalarında eleme yöntemi ile üç bilinmeyenli üç denklem sisteminin nasıl çözüleceği incelenmiştir). Yıllarca Gauss yok etme yöntemi, matematik biliminden çok, jeodezi bilim gelişiminin

bir parçası olarak kabul edilmiştir. Gauss-Jordan yok etme yönteminin basılı olarak ilk ifadesi Wilhelm Jordan tarafından yazılan jeodezi kitabında yer almıştır [71].

Matris cebirinin verimli bir şekilde gelişimi hem uygun gösterimlere hem de matris üzerindeki işlemlere bağlı olarak ilerlemiştir. Her iki gelişim yaklaşık olarak aynı zamanda ve aynı yerde başlamıştır. J. J. Sylvester 1848 yılında ilk olarak *matrix* kavramını kullanmıştır. Latince’de rahim anlamına gelen *matrix* terimi, sayı dizisinin ismi olarak, üretkenliği vurgulaması bakımından çok önemli bir kavramdır. Matris cebiri 1855’de Arthur Cayley’nin çalışmalarından beslenerek seçkin araştırmacıların ilgisini çekmiş ve bağımsız çalışma alanı olma yolunda ciddi adımlar atmıştır. Cayley lineer dönüşümlerin bileşimlerini incelemiş ve matris çarpımını tanımlamıştır. Yine Cayley matris tersleri de dahil olmak üzere bu bileşenlerin cebirini incelemeye devam etmiştir. Bir kare matrisin karakteristik polinomu ve bu polinomun kökü ile ilgili ünlü Cayley-Hamilton teoremi Cayley tarafından 1858 ’de literatüre kazandırılmıştır (*Memoir on the Theory of Matrices* [74]). Bir matrisi temsil etmek için tek bir A harfinin kullanılması yine bu dönemlerde gerçekleşmiştir. Matris cebiri ve determinant arasındaki ilişkiyi ortaya koyan ilk eşitlik $det(AB) = det(A)det(B)$ alan gelişiminin ilk dönemlerine rastlamaktadır. Matris kuramının geleceğine dönük müthiş bir öngörü Cayley tarafından kaleme alınmıştır **“There would be many things to say about this theory of matrices which should, it seems to me, precede the theory of determinants”** (Bana göre determinant kuramından önce gelmesi gereken matrisler kuramı hakkında söylenecek çok şey olabilirdi).

Matris kuramı doğrusal dönüşümlerle yakından ilişkili olarak gelişimine devam etmiştir. 1900 yılına gelindiğinde matrisler ortaya çıkan lineer dönüşümler teorisinin yalnızca sonlu boyutlu bir alt durumundan ibaretti. Vektör uzayının modern tanımı Peano tarafından 1888 yılında yapılmıştır. Kısa bir süre sonra bu gelişime elemanları fonksiyon olan soyut vektör uzayları eklendi. İkinci Dünya Savaşından sonra modern dijital bilgisayarların gelişmesiyle birlikte matrislere özellikle de matrislerin sayısal analizine olan ilgi yeniden canlandı. Günümüzde , bilgisayar tabanlı çalışmalarda, matris kuramı disiplinler arası çalışmalarda çok kullanışlı bir araç haline gelmiştir [71].

Lineer denklem sistemlerinin varlığına dair bilinen en eski kaynak *Chiu-chang Suan-shu, Jiu Zhang Suan Shu (Aritmetik üzerine Dokuz bölüm veya Matematiksel Sanatın Dokuz Bölümü)* isimli Çince kitaptır. Tahmini olarak M.Ö. 202-186 yılları arasında yazıldığı düşünülmektedir.

“ İyi bir mahsulden üç demet, vasat bir mahsulden iki demet ve bir demet kötü mahsul 39 dou’ya satılıyor. İki demet iyi, üç vasat ve bir kötü 34 dou’ya satılıyor. ve bir iyi, iki vasat ve üç kötü 26 dou’ya satılıyor. İyi mahsulün her demeti, vasat mahsulün her demeti ve kötü mahsulün her demeti için alınan fiyat nedir?” Dou: Antik Çin’de tahıl için kullanılan bir ölçü birimi.

Kitabın VIII. bölümü, *Fang Cheng (dikdörtgensel dizi/diziliş)*, yukarıdaki problemle başlamaktadır. Detaylı bilgilere [75] referans numaralı çalışma veya makalenin kaynaklarından erişilebilir. Bu kadim problemi günümüz bilgisi ile aşağıdaki formda ($x =$ iyi, $y =$ orta ve $z =$ kötü mahsul) ifade edebiliriz.

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

Denklemlerdeki katsayıların önemini farkederek Çinli bilim insanları bu problemin (sistemin) katsayılarını (renkli bambu çubuklarla temsil edilen) bir “sayma tahtası” üzerinde kare bir diziye yerleştirdiler. Böylelikle matris gösterimi, lineer denklem sistemlerinin katsayıları olarak, literatürde derin bir iz bırakmıştır. Genel olarak n bilinmeyenli m lineer denklem sistemi,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$\vdots = \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, Ax = b$$

şeklinde gösterilir. Denklem sisteminde bulunan katsayıların oluşturduğu dikdörtgenel dizilişe matris denir. Gösterim kolaylığı sağlama adına genel olarak bir matrisi

$$M_{m \times n} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix}$$

ile göstereceğiz. Matris gösterimi yazarların seçimleri doğrultusunda farklılık gösterse de ortak kabuller içerisinde köşeli parantez gösterimide sıkça karşılaşılabilen bir gösterim şeklidir. Kullanım kolaylığı açısından M_{mn} notasyonu işlevseldir. Eğer $m = n$ ise kare matris olur ve kısaca M_n ile gösterilir. Matrisin elemanlarının (indisleri ile birlikte) vurgulanması durumunda kısaca $M_{m \times n} = (m_{ij})_{m \times n} = [m_{ij}]_{m \times n}$. Boyutların vurgulanmasına gerek yok ise $M_{m \times n} = (m_{ij}) = [m_{ij}]$ gösterimi daha uygun olacaktır. Matrisin elemanlarının ait olduğu küme farklılıklarına göre matris gösterimi \mathbb{F} cismi üzerinde tanımlı $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{F})$ olacak şekilde ifade edilir.

Tanım 4.1.1. $M_{m \times n}$ matrisinin devrik matrisi (transpose),

$$M_{m \times n}^T = (m_{ij})_{m \times n}^T = (m_{ji})_{n \times m}$$

biçimindedir.

Tanım 4.1.2. $M_{m \times n}$ matrisinin eşlenik matrisi (conjugate),

$$\overline{M_{m \times n}} = (\overline{m_{ij}})_{m \times n}$$

biçimindedir.

Tanım 4.1.3. $M_{m \times n}$ matrisinin eşlenik devriği (conjugate transpose),

$$M_{m \times n}^* = (\overline{m_{ij}})_{m \times n}^T$$

biçimindedir.

Tanım 4.1.4. M_n kare matrisin köşegen (esas) elemanlarının toplamına o matrisin *izi* (trace) denir ve $tr(M_n)$ ile gösterilebilir. Yani,

$$tr(M_n) = m_{11} + m_{22} + \dots + m_{nn} = \sum_{i=1}^n m_{ii}$$

Tanım 4.1.5. Köşegen elemanları 1 ve diğer elemanları 0 olan kare matris *birim matris* denir. Kısaca $I_{n \times n}$, I_n veya kısaca I ile gösterilir.

Tanım 4.1.6. Bütün elemanları 1 den oluşan kare matris *J matris* denir. Kısaca $J_{n \times n}$, J_n veya kısaca J ile gösterilir.

Tanım 4.1.7. Bütün elemanları 0 dan oluşan kare matris *sıfır matris* denir. Kısaca $0_{n \times n}$ veya 0_n ile gösterilebilir.

Tanım 4.1.8. Köşegen elemanları d_1, d_2, \dots, d_n ve diğer elemanları 0 olan matris *köşegen matris* denir. Yani kısaca $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ile gösterilir.

Eğer $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d$ ise $D = dI_n$ matrisine *skaler matris* denir.

Tanım 4.1.9. M_n kare matrisi için,

- $i > j$ için eğer $m_{ij} = 0$ ise *üst üçgensel (upper triangle)*
- $i < j$ için eğer $m_{ij} = 0$ ise *alt üçgensel (lower triangle)*
- $M_n^T = M_n$ ise *simetrik*
- $M_n^T = -M_n$ ise *ters-simetrik*
- $M_n^* = M_n$ ise *hermityen*
- $M_n^* = -M_n$ ise *ters-hermityen*
- $M_n^* M_n = M_n M_n^*$ ise *normal*
- $M_n^* M_n = M_n M_n^* = I_n$ ise *birimsel (unitary)*
- $M_n^T M_n = M_n M_n^T = I_n$ ise *dikey (orthogonal)*

matrisleri ifade edilir.

Tanım 4.1.10. M_n kare matrisi için aşağıdaki koşulu sağlayan (matris çarpımı altında) N_n matrisine M_n matrisinin tersi denir ve $N_n = M_n^{-1}$ ile gösterilir.

- $M_n N_n = I_n$ ve $N_n M_n = I_n$

Kare matrislerin tamamı için tersinirdir denemez. Tersi olan veya tersinir matrislere *tekil olmayan (nonsingular)* matris denir ve tersi olmayan matrislere *tekil (singular)* matris denir.

Tanım 4.1.11. Her bir satır ve sütununda sadece bir tane 1 olan ve diğer elemanları 0 olan kare matrise *permütasyon matrisi* denir ve $P = (p_{ij})$ ile gösterilebilir. Matematiksel tanımı ise $\{1, 2, \dots, m\}$ kümesinin $\sigma = k_1 k_2 \dots k_m$ permütasyonu için matris,

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{Eğer } j = k_i \text{ ise} \\ 0 & , \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinindedir. Permütasyon matrisi ile çizge matrisinin çarpımı, çizgenin farklı etiketlenmesi ile oluşabilecek matris anlamına gelir ki önemli bir araçtır.

Örneğin $\sigma = 3124$ permütasyonu için,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

permütasyon matrisini oluşturabiliriz.

Tanım 4.1.12. M , m satır ve n sütundan oluşan bir matris olsun. $K \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ olmak üzere k tane elemandan oluşan $K = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ kümesi ve $L \subseteq \{1, 2, \dots, l\}$ olmak üzere l tane elemandan oluşan $L = \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ kümesi için, M matrisinin satır-sütun indisleri K ve L kümeleri ile kısıtlanan matrise M matrisinin *alt matrisi (submatrix)* denir. Yani,

$$M_{mn}[K, L] = \begin{pmatrix} m_{i_1 j_1} & m_{i_1 j_2} & \dots & m_{i_1 j_l} \\ m_{i_2 j_1} & m_{i_2 j_2} & \dots & m_{i_2 j_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i_k j_1} & m_{i_k j_2} & \dots & m_{i_k j_l} \end{pmatrix}$$

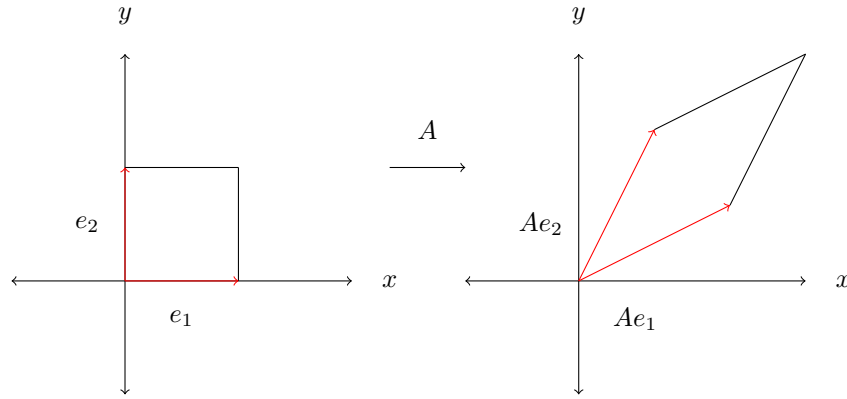
dir. Eğer $K = L$ ise oluşan alt matrise *asıl alt matris (principal submatrix)* denir ve kısaca $M[K]$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.13. M , m satır ve n sütundan oluşan bir matris olsun. Matrisin satır uzayının boyutuna (lineer bağımsız satır sayısına) matrisin *satır rankı* denir ve $rr(M_{mn})$ ile gösterilebilir. Benzer şekilde matrisin sütun uzayının boyutuna (lineer bağımsız sütun sayısına) matrisin *sütun rankı* denir ve $cr(M_{mn})$ ile gösterilebilir.

Teorem 4.1.1. [76] Bir matrisin satır rankı ile sütun rankı birbirine eşittir. Yani $rr(M_{mn}) = cr(M_{mn})$ eşitliği her matris için geçerlidir.

Tanım 4.1.14. Bir M_{mn} matrisinin *sıfır uzayı*, $M_{mn}x = 0$ denkleminin çözümü olan n boyutlu x sütun vektörlerinin kümesine denir ve kısaca $N(M_{mn})$ ile gösterilebilir. $N(M_{mn})$ sıfır uzayı, \mathbb{R}^n vektör uzayının bir alt uzayıdır. $N(M_{mn})$ sıfır uzayının boyutuna M_{mn} matrisinin *hiçliği* (*nullity*) denir ve $null(M_{mn})$ ile gösterilebilir.

Matris kuramının en önemli kavramlarından biri *determinant* dır. İlk izlenim ile determinant kabaca matrisin ne kadar “büyük!” olduğunun ölçülmesi olarak düşünülebilir. Her kare matrisin bir lineer dönüşüm olması gerçeğinden hareketle diyebiliriz ki lineer dönüşüm, eksenleri e_1, e_2, \dots, e_n olan birim kare (küp, hiperküp) cismini eksenleri Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n olan paralelkenar (paralel yüzlü, hiper paralel yüzlü) cisme dönüştürür.



Şekil 4.1. 2×2 boyutlu bir A matrisi eksenleri e_1, e_2 olan birim kareyi yine eksenleri Ae_1, Ae_2 olan paralelkenara dönüştürmesi (temsili). A matrisinin determinanı bu paralelkenarın alanıdır.

Açıklama 4.1.1. Bir A matrisi için determinant değişen birim karenin (küpün, hiperküpün, ...) boyuta bağlı olarak alanına (hacmine, hiperhacmine, ...) eşittir. Diğer bir ifade ile determinant A matrisinin lineer dönüşüm esnasında uzayı ne kadar genişlettiğinin ölçümüdür (determinantın literatürde birden fazla tanımı vardır).

Tanım 4.1.15. Bir p permütasyonun işareti, doğal düzen $(1, 2, \dots, n)$ olmak üzere

$$\sigma(p) = \begin{cases} +1 & ; p \text{ çift sayıda düzenleme ile doğal düzene dönüşür} \\ -1 & ; p \text{ tek sayıda düzenleme ile doğal düzene dönüşür} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 4.1.16. Bir M_n kare matrisinin determinanı aşağıdaki form ile tanımlanabilir.

$$\det(M_n) = \sum_p \sigma(p) m_{1p_1} m_{2p_2} \dots m_{np_n}$$

Eşitlikte $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin $n!$ farklı $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ permütasyonları üzerinden toplam alınmıştır. Determinant gösterimi metnin uygunluğu çerçevesinde $|M_n|$ gösterimi ile de gösterilebilir.

- $\det(M^T) = \det(M)$ ve $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$.
- N matrisi, M matrisinin i ve j satırlarının yerleri değişmiş hali ise
$$\det(N) = -\det(M)$$
- N matrisi, M matrisinin i . satırının $\alpha \neq 0$ katı ile çarpılmış hali ise
$$\det(N) = \alpha \det(M)$$
- N matrisi, M matrisinin i . satırına α katının eklenmiş hali ise
$$\det(N) = \det(M)$$
- M_n matrisinin tekil olması için gerek ve yeter şart $\det(M_n) = 0$ olmasıdır.
- M_n matrisinin sıfır olmayan en büyük minörünün boyutuna M_n matrisinin rankı denir.
- $\det(MN) = \det(M)\det(N)$
- Eğer M ve N kare matris ise,

$$\det \begin{pmatrix} M & X \\ 0 & N \end{pmatrix} = \det(M)\det(N)$$

Örnek 4.1.1. A matrisinin determinantını, tanım kullanarak hesaplayalım.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

permütasyonların ve işaretlerinin bulunduğu tablo,

$p = (p_1, p_2, p_3)$	$\sigma(p)$	$a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$
(1, 2, 3)	+	$1 \times 5 \times 9 = 45$
(1, 3, 2)	-	$1 \times 6 \times 8 = 48$
(2, 1, 3)	-	$2 \times 4 \times 9 = 72$
(2, 3, 1)	+	$2 \times 6 \times 7 = 84$
(3, 1, 2)	+	$3 \times 4 \times 8 = 96$
(3, 2, 1)	-	$3 \times 5 \times 7 = 105$

$$\det(A) = \sum_p \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} = 45 - 48 - 72 + 84 + 96 - 105 = 0$$

Ayrıca determinantın uygulamalarından biride diferansiyel denklem çözümlerinde karşımıza çıkar örneğin, birinci mertebeden $du_1/dt = 7u_1 - 4u_2$ ve $du_2/dt = 5u_1 - 2u_2$ lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerini inceleyelim. Bu diferansiyel denklemlerin matris gösterimleri,

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

şekindedir veya denk bir şekilde lineer diferansiyel denklemleri $u' = Au$ ile gösterebiliriz. Son eşitlik için

$$u' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ ve } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

dir. Tek bir $u' = \lambda u$ denkleminin çözümleri $u = \alpha e^{\lambda t}$ biçiminde olduğu için u vektöründeki ifadeler $u_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}$ ve $u_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}$ çözüm formları ile sağlanır. Bu iki ifadeyi düzenleyerek ve (4.1) eşitliğinde yerine koyarak aşağıdaki eşitlik geçişleri yazılabilir.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \lambda e^{\lambda t} &= 7\alpha_1 e^{\lambda t} - 4\alpha_2 e^{\lambda t} & \Rightarrow & \alpha_1 \lambda = 7\alpha_1 - 4\alpha_2 \\ \alpha_2 \lambda e^{\lambda t} &= 5\alpha_1 e^{\lambda t} - 2\alpha_2 e^{\lambda t} & \Rightarrow & \alpha_2 \lambda = 5\alpha_1 - 2\alpha_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Gelinen aşamada λ ifadesi için çözüm sağlanmış olur ve $Ax = \lambda x$ matris eşitliği,

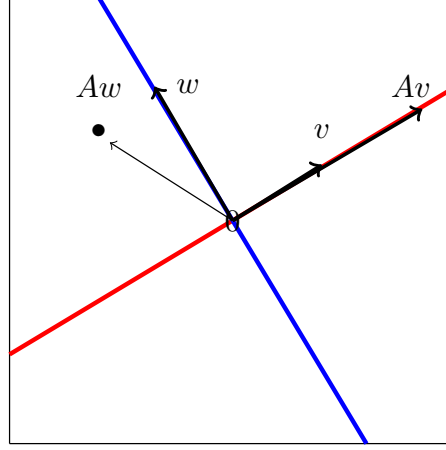
$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde bir x vektörü ile doğrulanabilir. Açıktır ki $x = 0$ aşık bir çözümdür. Ama bu çözüm matris eşitlikleri için gerekli olan bilgiyi doğrulamaz. İhtiyacımız olan şey $Ax = \lambda x$ ifadesini sağlayan skaler λ ve sıfır olmayan x vektörleridir. Arzu edilen çözümler $Ax = \lambda x$ eşitliğinin $(A - \lambda I) = 0$ haline dönüştürülmesi ile elde edilebilir. Sıfır olmayan çözümlerin bulunabilmesi için $A - \lambda I$ ifadesinin tekil olması gerekmektedir ki bu durum $\det(A - \lambda I) = 0$ olmasına ile eşdeğerdir.

Tanım 4.1.17. $n \times n$ tipinde A matrisi, λ skaleri ve $x_{n \times 1} \neq 0$ vektörü için $Ax = \lambda x$ matris-skaler-vektör eşitliğini sağlayan λ skalerlerine *özdeğer* ve x vektörlerine *özvektör* denir. Ayrıca (λ, x) ikilisine A matrisine ait *özçift* ve farklı özdeğerlerin oluşturduğu kümeye ise *spektrum* denir. Genellikle bir A matrisin spektrumları $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Özdeğer ve özvektör kelimeleri, sahip olunan veya ona özgü anlamına gelen Almanca *eigen* kelimesinden türetilmiştir. Özdeğerler ve özvektörler bazen karakteristik değerler ve karakteristik vektörler, uygun değerler ve uygun vektörler veya gizli (örtük) değerler ve gizli (örtük) vektörler olarak adlandırılır. Latince de spektrum “hayalet” anlamını da içeren “görüntü” veya “görünüm (belli belirsiz)” anlamına gelir. “scope” kelimesi ile de ortak kökene sahip olan spektrum derin etimolojik kökeni ile birlikte bir matrisin görünmeyen değeri veya matrisin özünde yer alan “tin (ruh)” olarak da metaforlaştırılabilir. Geometrik manada özdeğer ve özvektör oldukça derin anlamlar barındırır. λ özdeğeri, A tarafından dönüştürülen x özvektörünün maruz kaldığı “uzama” veya “büzülme” miktarıdır.

Tanım 4.1.18. $A_{n \times n}$ matrisinin *karakteristik polinomu* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ dir. $p(\lambda)$ polinomunun derecesi n ve ilk terimi $(-1)^n \lambda^n$ dir. Ayrıca $A_{n \times n}$ matrisi için *karakteristik denklem* $p(\lambda) = 0$ olarak ifade edilir. $A_{n \times n}$ 'nin özdeğerleri, karakteristik denklemin çözümleri olarak veya eşdeğer ifade ile, karakteristik polinomun kökleri olarak tanımlanır. $A_{n \times n}$ matrisinin elemanları reel sayı olsa bile özdeğerleri karmaşık sayı olabilir ayrıca özdeğerler farklı olmak zorunda değildir. Eğer $A_{n \times n}$ matrisinin tüm elemanları reel sayı ise matrisin karmaşık sayı özdeğerleri eşlenik çiftler halinde bulunur.



Şekil 4.2. $Av = \lambda v$ eşitliği geometrik olarak bize v ve Av vektörlerinin orjine göre eşdoğrusal olduğunu ifade eder. Açıktır ki v vektörü A matrisi için bir özvektördür ama w özvektör değildir.

Tanım 4.1.19. $A_{n \times n}$ matrisinin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ artmayan özdeğer dizisine $A_{n \times n}$ matrisinin *spektrumu* denir ve $\sigma(A)$ veya kısaca $Spec(A)$ ile gösterilir. Dahası bir $A_{n \times n}$ matrisine ait özdeğerlerinin mutlak değerce büyük olanına $A_{n \times n}$ matrisinin *spektral yarıçapı* denir ve kısaca $\rho(A)$ ile gösterilir. Yani spektral yarıçap,

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|\}, (1 \leq i \leq n)$$

ile ifade edilir.

Teorem 4.1.2. [71] $A_{n \times n}$ matrisinin i . satır elemanlarının toplamı,

$$r_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, (1 \leq j \leq n)$$

olmak üzere $\rho(A) \leq \max\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 4.1.3. [71] (Cayley–Hamilton) A matrisi kendi karakteristik polinomunu sağlar. Yani,

$$A^n + c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \dots + c_{n-1} A + c_n I_n = 0$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 4.1.20. Bir matrise ait özdeğerlerin k . simetrik dönüşümü, k lı özdeğerlerin çarpımlarının toplamına eşittir. Yani,

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$$

dir. Örneğin $n = 4$ için,

$$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$$

$$s_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4$$

$$s_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4$$

$$s_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$$

Açıklama 4.1.2. $A_{n \times n}$ kare matrisinin karakteristik polinomu $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$ ve $A_{n \times n}$ matrisine ait $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerlerin k . simetrik fonksiyonu s_k olsun. Bu durumda,

- $c_k = (-1)^k \sum (k \times k \text{ tipindeki asıl minörler})$
- $s_k = \sum (k \times k \text{ tipindeki asıl minörler})$
- $\text{tr}(A_{n \times n}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -c_1$
- $\det(A_{n \times n}) = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n c_n$

Tanım 4.1.21. A matrisi λ özdeğerine sahip kare matris olsun. A matrisine ait karakteristik polinomunda özdeğere karşılık gelen kökün katına λ özdeğerinin *cebirsal katı* denir. Eğer λ özdeğerinin cebirsal katı 1 ise λ özdeğerine *yalın özdeğer* denir. Ayrıca λ özdeğerine karşılık gelen özuzayın boyutuna λ 'nın *geometrik katı* denir.

Tanım 4.1.22. Bir A matrisinin pozitif, negatif ve sıfır özdeğerlerin cebirsal katlarından oluşan üçlü diziye matrisin *eylemsizliği (inertia)* denir ve $In(A)$ ile gösterilebilir. Yani, n_+ , n_- ve n_0 sırasıyla pozitif, negatif ve sıfır özdeğer sayılarını gösterebilir. Bu durumda eylemsizlik $In(A) = (n_+, n_-, n_0)$ şeklinde gösterilebilir.

Tanım 4.1.23. A ve B matrisleri $n \times n$ boyutlu iki matris olsun. Eğer $P^T AP = B$ olacak şekilde tekil olmayan (tersinir) bir P matrisi var ise A ve B matrislerine *denk (congruence)* matrisler denir ve $A \equiv B$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.24. Kabul edelim A ve B matrisleri $n \times n$ boyutlu iki matris olsun. Eğer $P^{-1}AP = B$ olacak şekilde tekil olmayan (tersinir) bir P matrisi var ise A ve B matrislerine *benzerdir* denir ve $A \sim B$ ile gösterilebilir. Ayrıca $P^{-1}AP$ çarpımına A matrisinin *benzerlik dönüşümü* denir. Verilen herhangi bir kare matrisi benzerlik

dönüşümü ile mümkün olan en basit forma indirgemek literatürde *Temel Problem* olarak adlandırılır. Matrisler için benzerlik, denklik bağıntısı olma koşullarını sağlar.

Tanım 4.1.25. Eğer A kare matrisi, köşegen bir matrise benzer ise A matrisine *köşegenleştirilebilir* matris denir.

Teorem 4.1.4. [76] Bir A matrisinin köşegenleştirilmesi için gerek ve yeter şart A matrisinin n lineer bağımsız özvektör kümesine sahip olmasıdır. Dahası $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ olması için gerek ve yeter şart P 'nin kolonlarının lineer bağımsız özvektörlerden oluşmasıdır.

Teorem 4.1.5. [76] Bir $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin herbir λ özdeğerlerine ait geometrik kat cebirsel kattan küçük veya eşittir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart A matrisinin köşegenleştirilebilir matris olmasıdır.

Teorem 4.1.6. [76] Eğer $A_{n \times n}$ matrisi n farklı özdeğere sahip ise A matrisi köşegenleştirilebilir bir matristir. Dahası farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler daima lineer bağımsızdır. Dikkat edilmeli ki teoremin tersi doğru değildir.

Teorem 4.1.7. [76] Benzer matrisler aynı karakteristik polinoma sahiptir. Dolayısıyla aynı cebirsel katlı özdeğerler matrislerin özdeğerleri olur. Ama benzer matrisler aynı özvektöre sahip olmak zorunda değildir.

Teorem 4.1.8. [76] A ve B matrisleri benzer matris olsun. Bu durumda $\det(A) = \det(B)$ ve $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ eşitlikleri sağlanır.

Teorem 4.1.9. [76] Her kare matris bir üst üçgensel matrise benzerdir. Yani $A_{n \times n}$, birimsel matris U ve üst üçgensel matris T olmak üzere $U^*AU = T$ benzer matris eşitliği sağlanır. Dahası T 'nin köşegen elemanları A matrisinin özdeğerleridir.

Teorem 4.1.10. [76] Reel/Hermityen simetrik matrisinin özdeğerleri reeldir. A matrisinin reel simetrik bir matris olması için gerek ve yeter şart A matrisinin reel köşegen D matrisine ortogonal olarak benzer olmasıdır. Yani bazı ortogonal P matrisi için $P^TAP = D$ olmasıdır. Dahası reel ters-simetrik matris ve ters-Hermityen matrisinin özdeğerleri saf imajinerdir.

Teorem 4.1.11. [76] $A_{n \times n}$ hermityen matris olsun. Bu durumda özdeğerler reeldir ve $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n$ olacak şekilde sıralanır. Dahası en büyük ve en küçük özdeğerler için,

$$\lambda_1 = \max_{\|x\|_2=1} x^*Ax \text{ ve } \lambda_n = \min_{\|x\|_2=1} x^*Ax$$

eşitlikleri geçerlidir.

Teorem 4.1.12. [76] (Rayleigh oranı) Genel manada bütün $x \neq 0$ vektörleri için $\lambda_1 \geq \frac{x^*Ax}{x^*x} \geq \lambda_n$ eşitsizliği sağlanır. Eşitsizlikte bulunan $\frac{x^*Ax}{x^*x}$ oranına *Rayleigh oranı* denir.

Teorem 4.1.13. [76] (Courant–Fischer) $A_{n \times n}$ hermityen matrisin $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n$ özdeğerleri için,

$$\lambda_i = \max_{\dim \mathcal{V}=i} \min_{\substack{x \in \mathcal{V} \\ \|x\|_2=1}} x^*Ax$$

$$\lambda_i = \min_{\dim \mathcal{V}=n-i+1} \max_{\substack{x \in \mathcal{V} \\ \|x\|_2=1}} x^*Ax$$

Teorem 4.1.14. [76] (Cauchy arada olma) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrik ve bazı i değerleri için A matrisinden hem i . satır hemde i . sütunun silinmesi ile oluşan $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ($m < n$) matrisi A matrisinin asıl alt matris olsun. A matrisinin özdeğerleri $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$ ve B matrisinin özdeğerleri $\beta_1 \leq \dots \leq \beta_m$ ise $\lambda_k \leq \beta_k \leq \lambda_{k+n-m}$ ($k = 1, \dots, m$) eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.1.15. [71] (Sylvester teoremi) A ve B reel simetrik matrisleri için A matrisinin B matrisine denk olması için gerek ve yeter şart A ve B matrislerinin aynı eylemsizliğe sahip olmasıdır. Yani,

$$A \equiv B \iff In(A) = In(B)$$

dir. Ayrıca teorem literatürde *Sylvester'in eylemsizlik kanunu* olarak bilinir.

Tanım 4.1.26. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisinin her elemanı için $a_{ij} \geq 0$ eşitsizliği var ise A matrisine *negatif olmayan* matris denir ve $A \geq 0$ ile gösterilir. Benzer şekilde bir A matrisi için pozitif matris tanımı yapılabilir ve $A > 0$ olarak gösterilebilir.

Teorem 4.1.16. [76] (Perron teoremi) Eğer $A_{n \times n} > 0$ matris ve $\rho(A) = r$ ise aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- $r > 0$.
- $r \in \sigma(A)$, r özdeğerine *Perron kökü* denir.
- r 'nin cebirsel katı 1 dir.
- $Ax = rx$ olacak şekilde bileşenleri pozitif olan x özvektörü vardır.
- $Ap = rp$, bileşenleri pozitif olan ve $\|p\| = 1$ olacak şekilde yegane p vektörü vardır ve p 'ye *Perron vektörü* denir.

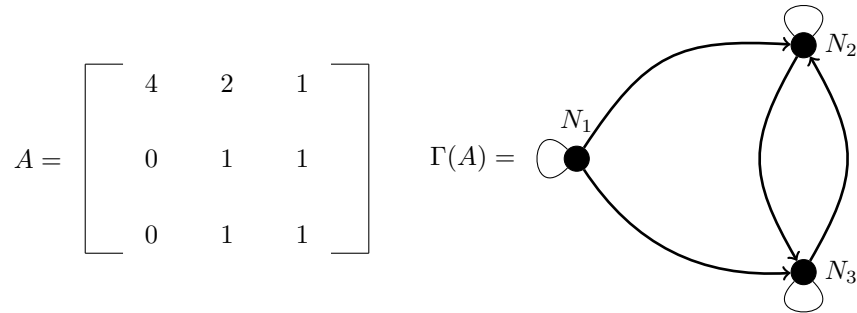
Tanım 4.1.27. A matrisine *indirgenbilir* matris denir öyle ki,

$$P^T A P = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

eşitliğini sağlayan bir P permütasyon matrisi vardır (X ve Z blokları kare matristir). Aksi durumda A matrisine *indirgenemez* matris denir. Ayrıca $P^T A P$ ifadesine A 'nın *simetrik permütasyonu* denilebilir.

Tanım 4.1.28. A matrisinin *yönlü çizgesi*, aşağıda bulunan nokta ve kenar kümeleri ile oluşan çizgedir ve $\Gamma(A)$ ile gösterilebilir. $\Gamma(P^T A P) = \Gamma(A)$ eşitliğinde P permütasyon matrisinin etkisi basit olarak çizgenin tekrar etiketlenmesi olarak yorumlanabilir.

- $V(\Gamma(A)) = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$
- $E(\Gamma(A)) = \{\overrightarrow{N_i N_j} : a_{ij} \neq 0\}, (1 \leq i, j \leq n)$



Şekil 4.3. A matrisinin yönlü çizgesi $\Gamma(A)$

Tanım 4.1.29. $\Gamma(A)$ çizgesindeki her bir nokta çifti (N_i, N_j) için eğer N_i den N_j ye yönlü kenarlar var ise $\Gamma(A)$ çizgesine *güçlü bağlantılı* çizge denir.

Daha önce verdiğimiz tanımla aynı olmasına rağmen bir matrisin yönlü çizgesi tanım bütünlüğü ve aşağıdaki teoremin önemi açısından tekrardan tanım verilmiştir.

Teorem 4.1.17. [73] A matrisinin indirgenemez matris olması için gerek ve yeter şart $\Gamma(A)$ çizgesinin güçlü bağlantılı olmasıdır.

Teorem 4.1.18. [73] Eğer $A_{n \times n} \geq 0$ matrisi indirgenemez bir matris ise $(I + A)^{n-1} > 0$ eşitsizliği geçerlidir.

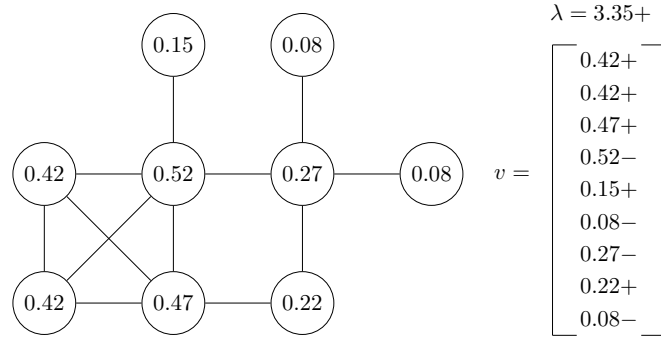
Teorem 4.1.19. [73] (Perron–Frobenius) Eğer $A_{n \times n} \geq 0$ matris indirgenemez bir matris ise aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- $r = \rho(A) \in \sigma(A)$ ve $r > 0$.
- r 'nin cebirsel katı 1 dir.
- $Ax = rx$ olacak şekilde bileşenleri pozitif olan x özvektörü vardır.
- $Ap = rp$, bileşenleri pozitif olan ve $\|p\| = 1$ olacak şekilde yegane bir p vektörü vardır ve p 'ye *Perron* vektörü denir.

Yukarıdaki teoremden hareketle, A matrisinin spektral yarıçapı aynı zamanda A matrisinin özdeğeridir yani A 'nın tüm özdeğerlerinin mutlak değerinden büyük veya eşit olacak şekilde bir pozitif özdeğer vardır. Bu pozitif özdeğere *Perron* özdeğeri denir. Dahası Perron özdeğerinin cebirsel ve geometrik katı 1 dir (Bu özdeğer A matrisine ait karakteristik polinomun yalın köküdür). A matrisi Perron vektörünün pozitif katları dışında negatif olmayan hiç bir özvektöre sahip değildir. Aslında Perron özvektörü oldukça kullanışlı bir araçtır.

Örneğin insan etkileşim ağında, önemli kişilerin birçok bağlantısı vardır. Gözlemci en yüksek dereceli kişileri (noktaları) seçip onları en önemli olarak adlandırmak ister ama bu sadece kişilere ait (noktaların) komşu sayısı değildir. Önemli insanların diğer birçok önemli insanlarla bağlantıları olabilir. Böyle bir durumda *Perron özvektörü* bize çok önemli bilgiler verebilir. Bir gözlemci bunu modelleyebilir ve kişinin önemini çizgedeki önemlerinin toplamı olduğunu ifade edebilir. Bu durumda her noktanın önemini Perron özdeğerine karşılık gelen Perron özvektörü ile hesaplayabilir (Şekil 4.4).

Teorem 4.1.20. [73] Eğer A' , A matrisinin asıl alt matrisi ise $\rho(A') \leq \rho(A)$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu $A' = A$ ile sağlanır.



Şekil 4.4. $\lambda = 3.35+$ özdeğerine karşılık gelen v Perron özvektörü. Ayrıca $\lambda = 3.35+$ komşuluk özdeğeri çizgenin spektral yarıçapıdır. Her noktaya atanan etiket aslında Perron özvektörünün bileşenleridir.

(Basamaklardaki $+$ ve $-$ gösterimleri binde birler basamağının yönünü ifade etmektedir).

Teorem 4.1.21. [73] Eğer B matrisi $B \leq A$ olacak şekilde (A ve B matrislerinin eleman-eleman karşılaştırılması) negatif olmayan bir matris ise $\rho(B) \leq \rho(A)$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu $B = A$ ile sağlanır.

Teorem 4.1.22. [73] $A_{n \times n}$ indirgenemez matrisinin i . satır elemanlarının toplamı,

$$r_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, (1 \leq i \leq n)$$

olmak üzere $\min\{r_1, r_2, \dots, r_n\} \leq \rho(A) \leq \max\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu sol tarafın sağ tarafa eşit olması ve $r_1 = \dots = r_n$ olması ile sağlanır.

Tanım 4.1.30. Satır ve sütunları $P = \{1, \dots, n\}$ ile etiketlenmiş M matrisi reel ve simetrik olsun ve $P = P_1 \cup \dots \cup P_s$ parçalanışı dikkate alınarak M matrisi M_{ij} blok alt matrislere ayrılınsın (P_i deki satırlar ve P_j deki sütunlar ile oluşan M_{ij} matrisi). Yani M matrisi,

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{s1} & \dots & M_{ss} \end{pmatrix}$$

şekindedir. Kabul edelim ki q_{ij} , M_{ij} matrisinin ortalama satır toplamını gösterecek. Bu durumda $Q = (q_{ij})$ matrisine *bölüm (quotient) matrisi* denir. Eğer M_{ij} matrisine ait her bir bloğun satır toplamı sabit bir sayı ise bu durumda P parçalanışa *adil (equitable) parçalanış* denir.

Teorem 4.1.23. [76] Q matrisi, herhangi bir A kare matrisinin adil parçalanışına karşılık gelen bölüm matrisi olsun. Bu durumda A nin özdeğerleri Q nin özdeğerlerini içerir.

Teorem 4.1.24. [77] (Vieta teorem) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinomunun reel kökleri x_1, x_2, \dots, x_n olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n x_i x_j &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots &= \vdots \\ \prod_{i=1}^n x_i &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

4.2. Çizge Matrisleri

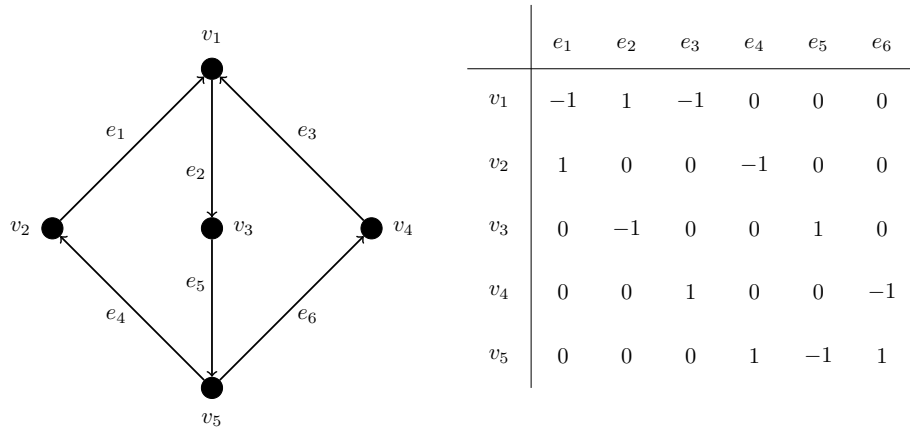
Spektral çizge kuramı özdeğerlerin, özvektörlerin ve diğer cebirsel niceliklerin bize nasıl faydalı bilgiler verebileceğini (çizge hakkında) inceleyen bir alt alandır. Örneğin çizge ne derecede bağlantısallığa sahiptir, yapının (çizgenin) noktalarını etkili bir şekilde hangi yollarla öbekleriz veya renklendirebiliriz ve rastgele yürüyüşler ne derece hızlı bir sınır dağılımına yakınsar? Spektral çizge kuramının lineer sistemleri çözmede, rastgele algoritmaları deterministik algoritmalara dönüştürmede, Markov Zinciri, Monte Carlo yoluyla örnekleme, sayma, web araması ve maksimum akışa kadar değişen uygulamalarla teorik bilgisayar biliminde son derece yararlı ve kullanışlı bir araçtır. Çizgeler ve matrisler karşılıklı olarak fayda sağlayan ilişkiler ağına sahiptir. Çizgeler ve çizge matrisleri aynı fikrin farklı bakış açılarını ve kavramsallaştırmalarını ifade eder. Çizge matrisleri ve ilişkili lineer cebir, çizge kuramında bilinen en önemli (bazende tek) araçtır (Örneğin *cebirsel bağlantısallık*). Öte yandan çizgeler, matris yapısını anlamamanın ve bunlardan yararlanmanın yollarını gösterir (örneğin *indirgenabilirlik*).

Tanım 4.2.1 (Yönsüz). $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nokta ve $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenar kümesine sahip G çizgesini ele alalım. Aşağıdaki yordam ile üretilen matrise G nin (*nokta-kenar*) *çakışım* matrisi denir ve $Q(G)$ ile gösterilebilir ($0 - 1$ incidence matrix).

- Satırları $V(G)$ nokta kümesiyle ve sütunları $E(G)$ kenar kümesiyle etiketle
- v_i noktası ile e_j kenarı çakışık değilse $Q(G)$ matrisinin (i, j) . elemanı 0
- v_i noktası ile e_j kenarı çakışık ise $Q(G)$ matrisinin (i, j) . elemanı 1

Tanım 4.2.2 (Yönlü). $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nokta ve $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenar kümesine sahip G çizgesini ele alalım. G nin her bir kenarına rastgele fakat sabit bir yön atandığını varsayalım. Aşağıdaki yordam ile üretilen matrise G nin (*yönlü*) *çakışım* matrisi denir ve $Q(G)$ ile gösterilebilir.

- Satırları $V(G)$ nokta kümesiyle ve sütunları $E(G)$ kenar kümesiyle etiketle
- v_i noktası ile e_j kenarı çakışık değilse $Q(G)$ matrisinin (i, j) . elemanı 0
- v_i noktası e_j kenarının baş-noktası ise $Q(G)$ matrisinin (i, j) . elemanı -1
- v_i noktası e_j kenarının kuyruk-noktası ise $Q(G)$ matrisinin (i, j) . elemanı 1



Şekil 4.5. Yönlü bir G çizgesi ve onun $\mathcal{Q}(G)$ çakışım matrisi

Çakışım matrisinin çizgelerle ilgili bir çok özelliği anlamamıza yardım eder (Sadece birkaç özelliğe dikkat çektik). Herhangi bir G çizgesi için $\mathcal{Q}(G)$ matrisinin kolon toplamı sifıra eşittir ve böylece satırları lineer bağımlıdır.

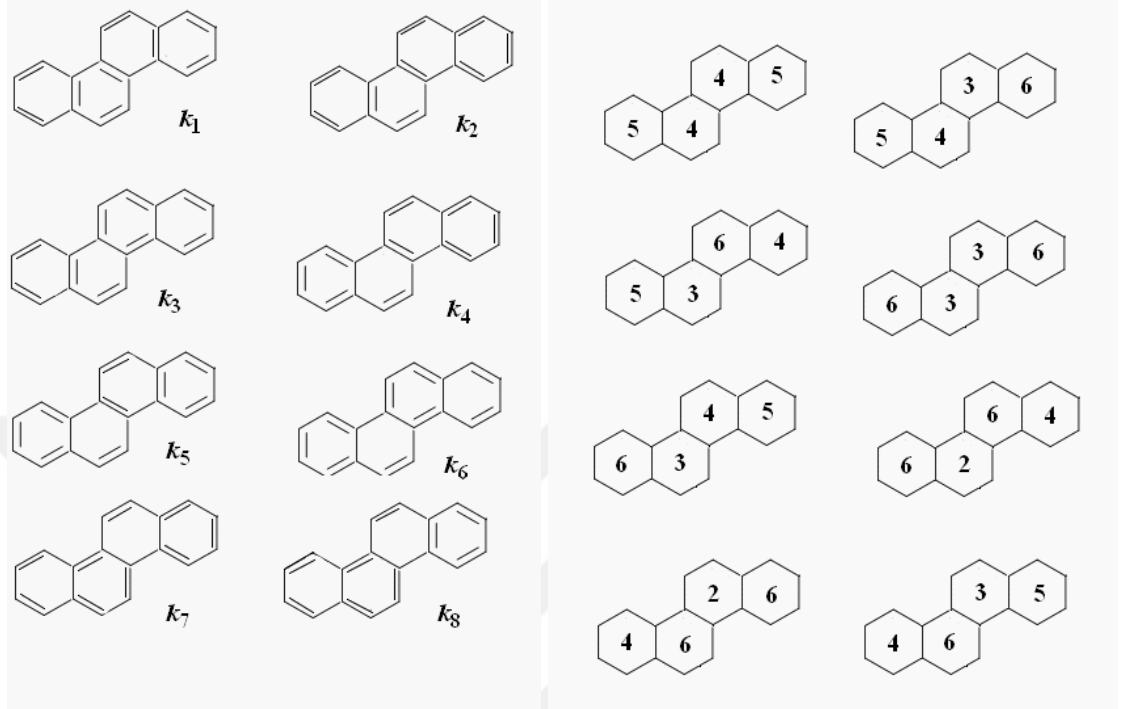
Lemma 4.2.1. [69] Eğer G çizgesi n noktalı ve bağlantılı bir çizge ise $rank(\mathcal{Q}(G)) = n - 1$ dir.

Teorem 4.2.1. [69] Eğer G n noktalı ve k -bağlantılı bileşene sahip bir çizge ise $rank(\mathcal{Q}(G)) = n - k$ dir.

Lemma 4.2.2. [69] C_n çizgesi $n \geq 3$ noktalı döngü çizge olsun. Eğer n çift sayı ise $rank(\mathcal{Q}(C_n)) = 0$ ve n tek sayı ise $rank(\mathcal{Q}(C_n)) = 2$ dir.

Lemma 4.2.3. [69] G çizgesi n noktalı bağlantılı çizge olsun. Eğer G iki parçalı ise $rank(\mathcal{Q}(G)) = n - 1$ ve diğer durumda $rank(\mathcal{Q}(G)) = n$ dir.

Çakışım matrisinden türetilen çizge matrisleri özellikle kimyasal çizge kuramında derin uygulamalara sahiptir. Çakışım temelli matrislere örnek olarak *kenar-nokta*, *kenar-döngü*, *döngü-kenar*, *nokta-yol* ve *ağırlıklı-altıgen-Kekulé matrisleri* verilebilir [78]. Milan Randić benzoidlerin Kekulé yapıları ile ilgili yeni bir iddia ileri sürmüştür [79] (Kekulé yapısının standart formuna *geometrik Kekulé* ağırlıklı haline *nümerik Kekulé*). Çalışmasında, geometrik Kekulé yapısında çift bağa sahip her bir kenar için ağırlığı 2 (eğer çift bağa sahip kenarlar ortak ise ağırlığı 1) olarak tanımlamıştır (Şekil 4.6). Krizen aromatik hidrokarbon molekülü için çakışım matrisi Şekil 4.7 de verilmiştir. Çizge matrisleri içerisinde güçlü bir yere sahip olan matris *komşuluk* matrisidir. Komşu



Şekil 4.6. Krizen aromatik hidrokarbon molekülünün geometrik Kekulé yapısı ve ağırlıklı altıgen nümerik Kekulé yapısı.

<i>Etiketleme</i>	<i>Matris</i>								
		k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
<i>a</i>		5	5	5	6	6	6	4	4
<i>b</i>		4	4	3	3	3	2	6	6
<i>c</i>		4	3	6	3	4	6	2	3
<i>d</i>		5	6	4	6	5	4	6	5

Şekil 4.7. Krizen aromatik hidrokarbon molekülünün ağırlıklı-Kekulé- çakışım matrisi

olma kavramının derin anlamının doğal bir sonucu olarak literatürde komşuluk temelli bir çok matris tanımı yapılmıştır. Bunlardan bazıları *atom-bağlantısallık matrisi*, *arttırılmış (augmented)-komşuluk matrisi*, *nokta-ağırlıklı komşuluk matrisi*, *kenar-ağırlıklı komşuluk matrisi*, *Hükel matrisi*, *zıt-komşuluk matrisi*, *Seidel-komşuluk matrisi*. Tanımlamalar kaynaklara bağlı kalarak arttırılabilir ama özünde iki nokta (iki nesne) arasındaki *varlık-yokluk* ilişkisidir.

Tanım 4.2.3. G bir çizge ve nokta kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun. Bu durumda *komşuluk matrisi (adjacency matrix)* elemanları

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & , v_i \sim v_j \text{ ise} \\ 0 & , \text{Diğer durumda} \end{cases}$$

biçiminde olan $A(G) = (a_{i,j})$ dir.

Komşuluk matrisi tanımını çizgenin türüne (çoklu çizge, genel çizge, yönlü çizge, ağırlıklı çizge vb.) göre uyarlama oldukça kolay ve verimlidir. Eğer çizge katlı kenara sahip ise komşu olan noktalar arasındaki kenar sayısı, çizge yönlü ise $a_{ij} \neq a_{ji}$ ve çizge kenar-ağırlıklı ise komşu kenarlar için $a_{ij} = w_{ij}$ alınarak komşuluk matrisine evrilebilir. En yalın haliyle (ilmek ve katlı kenar içermiyorsa) A matrisi köşegenleri sıfırlardan oluşan $(0 - 1)$ simetrik matristir. $A(G)$ nin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ şeklinde sıralansın ve matrisin farklı özdeğerleri $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k$ ($k \leq n$) olsun. Bu durumda $A(G)$ nin spektrumu

$$Spec_A(G) = \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ m_1 & m_2 & \dots & m_k \end{array} \right\}$$

ile gösterilebilir.

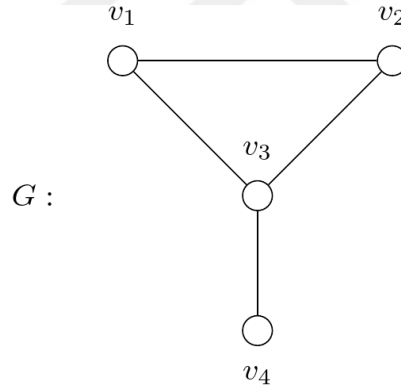
Teorem 4.2.2. [80] (A -Cauchy arada olma) G çizgesi n noktalı bir çizge ve $A(G)$ nin özdeğerleri $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$ biçiminde sıralansın. H çizgesi n' noktalı ve G nin indirgenmiş alt çizgesi olsun. $A(H)$ nin özdeğerleri $\lambda_1(H) \geq \lambda_2(H) \geq \dots \geq \lambda'_n(H)$ ise

$$\lambda_{n-n'+i}(G) \leq \lambda_i(H) \leq \lambda_i(G), (1 \leq i \leq n')$$

eşitsizliği geçerlidir.

Komşuluk matrisinin özdeğerleri son derece ilginçtir ve kullanışlı özelliklere sahiptir. Örneğin bilgisayar ağları üzerinde tanımlanan yapı için en büyük özdeğer λ_1 virüs saldırıları veya yapının dayanıklılığı ile doğrudan ilişkilidir. Karmaşık bilgisayar ağına ait λ_1 özdeğeri ne kadar küçülürse ağın dayanıklılığı o kadar artar. Özellikle sosyal ağlarda ilişkili nesleneleri renklendirme çok önemli bir yere sahiptir (örneğin eşleştirme problemlerinde). Bir çizge (veya ağ) iki parçalı ise komşuluk matrisinin özdeğerleri orjine (0 noktası) göre simetriktir bu ise yapının 2-renklendirilebilir olduğu anlamına gelir. Diğer bir örnek ise kimyasal çizgeler için *En Yüksek Boş Moleküler Yörünge (HOMO)* ve *En Düşük Dolu Moleküler Yörünge (LUMO)* enerji değerleri komşuluk matrisine ait özdeğerlerin ortancalarına eşittir. Yani HOMO değeri $\lambda_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$ ve LUMO değeri $\lambda_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ dir.

Teorem 4.2.3. [81] G bir çizge ve nokta kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun. k pozitif tamsayısı için A^k matrisinin (i, j) . elemanı, v_i noktasından v_j noktasına uzunluğu k olan yürüyüş sayısına eşittir.



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2(G) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3(G) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Şekil 4.8. Örneğin G çizgesi ve $A(G), A^2(G), A^3(G)$ matrisleri için v_1 noktasından v_3 noktasına 3 uzunluklu yürüyüş sayısı 4 dür. W_1, W_2, W_3, W_4 yürüyüşleri göstermek üzere,

$$W_1 = (v_1, v_3, v_1, v_3), \quad W_2 = (v_1, v_2, v_1, v_3),$$

$$W_3 = (v_1, v_3, v_2, v_3), \quad W_4 = (v_1, v_3, v_4, v_3)$$

Komşuluk matrisine ait bazı temel özellikleri ve yukarıdaki teoremin ilginç sonuçlarını

şöyle özetleyebiliriz.

- $A(G)$ matrisinin özdeğerleri reeldir.
- $tr(A^2) = \sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2|E(G)|$.
- $tr(A^3) = 6 \times (G \text{ çizgesinde bulunan üçgen sayısı})$.
- Genel olarak $tr(A^k) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^k$.
- Bir çizge komşuluk matrisinden hareketle çizilebilir.
- G çizgesinin tümleyeni G^c olmak üzere $A(G^c) = J - I - A(G)$ eşitliği sağlanır.
- $A(G)$ matrisi köşegenleştirilebilir matristir.
- Tam, döngü, yol ve düzenli iki parçalı tam çizgelerin komşuluk spektrumları belirlidir.

Komşuluk matrisi ile ilgili özellik, sonuç, çıkarım veya uygulama literatürde önemli bir yere sahiptir. Bu konuda [69], [81], [18] ve [55] referans numaralı kaynaklara bakılabilir. Son olarak temel çizge matrisi olan komşuluk ile ilgili önemli bir yordamı ifade edelim.

Coulson Sachs Yordamı [82]: G çizgesi n noktalı keyfi bir çizge olmak üzere karakteristik polinom,

$$P_A(G, \lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^{n-k} = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + a_3 \lambda^{n-3} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

olsun. Bütün çizgeler için,

- $a_0 = 1$
- $a_1 = 0$
- $a_2 = -||G||, ||G||$ çizgenin kenar sayısı
- $a_3 = -2C_3, C_3$ çizgedeki 3 uzunluklu yol sayısı

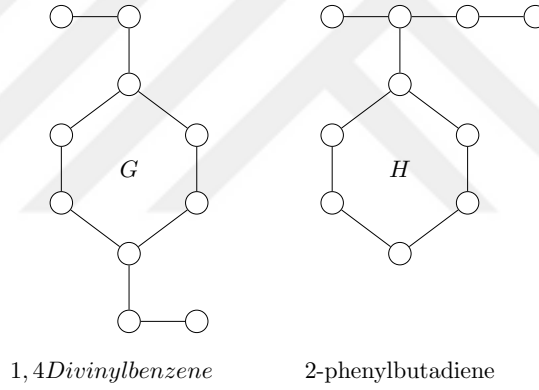
katsayı eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 4.2.4. Eşyapılı olmayan G ve H çizgeleri için eğer $Spec_A(G) = Spec_A(H)$ ise çizgeler eşspektrumludur (komşuluk matrisine göre) denir.

Coulson Sachs Yordamını ve benzer spektral teknikler (Randić kriteri gibi) kuramsal çizge kuramında çok önemli bir yere sahiptir [82]. Özgül ağırlığı yüksek akademik çalışmaların kalbinde yatan temel felsefe karmaşık yapıların özelliklerini formüle edebilmektir. Örneğin tek uzunluklu döngü içeren çizge çift uzunluk içeren çizge ile eşspektrumlu olamaz.

Genel olarak eğer G ve H çizgeleri eşspektrumlu ise,

- Karakteristik polinomları eşittir.
- Nokta sayıları aynıdır (n .dereceden polinom).
- Kenar sayıları aynıdır (a_2).
- 3 uzunluklu yürüyüş sayıları aynıdır (a_3).



$$Spec_A(G) = Spec_A(H) = \{\pm 2.21, \pm 1.67, \pm 1^{(2)}, \pm 0.53\}$$

Şekil 4.9. Simetrik özdeğere sahip eşspektrumlu iki çizge (molekül) örneği

Tanım 4.2.5. G çizgesinin nokta kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve derece dizisi $\langle deg(v_1), deg(v_2), \dots, deg(v_n) \rangle$ olsun. $D_G = diag(deg(v_1), deg(v_2), \dots, deg(v_n))$ matrisine G nin köşegen (derece) matrisi denir.

Tanım 4.2.6. G yalın bir çizge $A(G)$ komşuluk matrisi ve D_G çizgenin köşegen matrisi olmak üzere, $L(G) = D_G - A(G)$ matrisine G nin *Laplasyan* matrisi denir. Diğer bir gösterim ile $L(G) = (l_{i,j})$ Laplasyan matrisinin elemanları

$$l_{i,j} = \begin{cases} deg(v_i) & , i = j \text{ ise} \\ -1 & , i \neq j \text{ ve } v_i \sim v_j \text{ ise} \\ 0 & , \text{Diğer durumda} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca Laplasyan matrisi literatürde *admittance matrix* olarak bilinir. Laplasyan matrisinin diğer bir tanımı ise çakışım matrisi yoluyla verilebilir. Kabul edelim G çizgesinin bütün kenarları keyfi olarak yönlendirilsin. Bu durumda $L(G) = Q(G)Q^T(G)$ eşitliği geçerlidir. $L(G)$ nin özdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$ şeklinde sıralansın ve matrisin farklı özdeğerleri $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_k$ ($k \leq n$) olsun bu durumda $L(G)$ nin spektrumu;

$$Spec_L(G) = \left\{ \begin{array}{cccc} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_k \\ m_1 & m_2 & \dots & m_k \end{array} \right\}$$

ile gösterilebilir. Laplasyan matrisinin en küçük ikinci özdeğerine (μ_{n-1}) karşılık gelen özvektöre *Fiedler* özvektörü denir ve μ_{n-1} özdeğerine özel olarak *cebirsal bağlantısallık* (*algebraic connectivity*) denir. Ayrıca $|L(G)| = Q(G) = D_G + A(G)$ matrisine ise *işaretsiz Laplasyan* (*signless Laplacian*) denir. Çizge matrislerin verimliliğine vurgu yapan bir başka kavram ise *normalleştirilmiş* (*normalized*) *matris* kavramıdır.

Tanım 4.2.7. G bir çizge ve D_G çizgenin köşegen matrisi olmak üzere $D_G^{-1/2}A(G)D_G^{-1/2}$ matrisine *normalleştirilmiş komşuluk matrisi* (*normalized adjacency matrix*) denir.

Tanım 4.2.8. G bir çizge ve $L(G)$ çizgenin Laplasyan matrisi olmak üzere $D_G^{-1/2}L(G)D_G^{-1/2}$ matrisine *normalleştirilmiş Laplasyan matrisi* (*normalized Laplacian matrix*) denir. Yani $I - D_G^{-1/2}A(G)D_G^{-1/2}$ matrisi olarak komşuluk matrisi ile birlikte tanımlanabilir.

G bir çizge (izole nokta içermeyen) ve $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nokta kümesi olmak üzere tanımlarda verilen $D_G^{-1/2}$ köşegen matrisi,

$$D_G^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\deg(v_1)}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\deg(v_2)}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\deg(v_n)}} \end{pmatrix}$$

şeklinindedir. Tabiki Laplasyan matrisinden hareketle literatürde çok çeşitli matrisler tanımlanmıştır. Örneğin *simetrik olarak normalleştirilmiş Laplasyan matrisi* (*symmetrically normalized Laplacian*), *rastgele yürüyüş normalleştirilmiş Laplasyan matrisi* (*random walk normalized Laplacian*), vb.

Teorem 4.2.4. [80] G çizgesinin Laplasyan matrisi $L(G)$ ve matrisin özdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n = 0$ olsun. Bu durumda G^c çizgesine ait Laplasyan matrisi $L(G^c)$ nin özdeğerleri $n - \mu_{n-1} \geq n - \mu_{n-2} \geq \dots \geq n - \mu_1 \geq 0$ şeklinde sıralanır.

Lemma 4.2.4. [69] G çizgesi n noktalı ve m kenarlı olsun. Bu durumda,

- i. $L(G)$ simetrik ve pozitif yarı tanımlı matristir.
- ii. k bağlantılı bileşen sayısı olmak üzere $\text{rank}(L(G)) = n - k$ dir.
- iii. Herhangi bir x vektörü için,

$$x^T L(G)x = \sum_{i \sim j} (x_i - x_j)^2.$$

- iv. $L(G)$ matrisinin satır ve sütun toplamları 0 dir.
- v. $L(G)$ nin herhangi iki elemanın kofaktörü eşittir.

Teorem 4.2.5. [80] Bir G çizgesine ait Laplasyan matrisi için: Sıfır özdeğerinin katı G çizgesinin bileşen sayısına eşittir. Özel olarak bir çizgenin en küçük ikinci özdeğeri $\mu_{n-1} = 0$ ise çizge bağlantısızdır.

Teorem 4.2.6. [80] (L -Cauchy arada olma) G çizgesi n noktalı bir çizge ve $L(G)$ nin özdeğerleri $\mu_1(G) \geq \mu_2(G) \geq \dots \geq \mu_n(G)$ şeklinde sıralansın. H çizgesi n noktalı ve G den k ($k \leq n$) kenarın silinmesi ile oluşan alt çizge olsun. $L(H)$ nin özdeğerleri $\mu_1(H) \geq \mu_2(H) \geq \dots \geq \mu_n(H)$ ise,

$$\mu_i(G) \geq \mu_i(H) \geq \mu_{i+k}(G), (1 \leq i \leq n - k)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 4.2.7. [80] Bir G çizgesi bağlantılıdır ancak ve ancak $Q(G)$ işaretli Laplasyan matrisinin spektral yarıçapı yalın bir özdeğerdir. Yalın özdeğere karşılık gelen özvektörün bileşenleri sıfırdan farklıdır (aynı işaretli).

Teorem 4.2.8. [80] G nin Q -spektrumuna ait sıfır özdeğerinin katı iki parçalı bileşen sayısına eşittir.

Teorem 4.2.9. [80] İki parçalı G çizgesi için $\text{Spec}_L(G) = \text{Spec}_Q(G)$ eşitliği geçerlidir.

Teorem 4.2.10. [80] (*Q*-Cauch arada olma) G çizgesi n noktalı bir çizge ve $Q(G)$ nin özdeğerleri $\kappa_1(G) \geq \kappa_2(G) \geq \dots \geq \kappa_n(G)$ şeklinde sıralansın. H çizgesi n noktalı ve G den k ($k \leq n$) kenarın silinmesi ile oluşan alt çizge olsun. $Q(H)$ nin özdeğerleri $\kappa_1(H) \geq \kappa_2(H) \geq \dots \geq \kappa_n(H)$ ise,

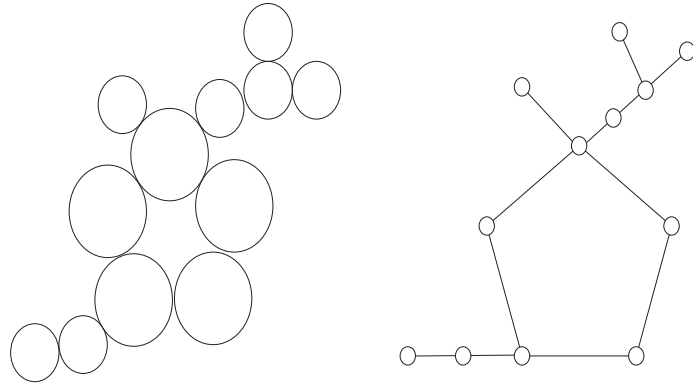
$$\kappa_i(G) \geq \kappa_i(H) \geq \kappa_{i+k}(G), (1 \leq i \leq n - k)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Başlı başına büyük bir çalışma alanı olan *Seidel* matrisi (Seidel-Adjacency matrix) literatürde önemli bir yere sahiptir. Tezin ana amacı mesafe ile ilgili matrisler olduğu için Seidel matrisinin temel tanımını vermek ile yetineceğiz. Detaylı bilgi için [83] referans numaralı makaleye bakılabilir.

Tanım 4.2.9. G , n noktalı bir çizge olmak üzere, $J - I - 2A(G)$ matrisine *Seidel matrisi* denir ve $S(G)$ ile gösterilebilir. Orjinal ismi ise $(-1, 1, 0)$ -komşuluk matrisidir.

Mesafe matrisi (*Distance matrix*) Graham ve Pollack tarafından 1971 de literatüre kazandırıldı [84]. 70'lerde telefon hatları arasında kullanılan dolaşım modellerinin bilgisayarlar arasında gerçekleşen bilgi transferleri için uygun olmadığını fark eden Graham ve Pollack *loop-switching* modelini geliştirerek yeni bir iletişim şema modeli oluşturmuşlardır. Model temelde mesajın (bilginin) önceden ayarlanmış bir rotası olmayacağı ancak her bir kavşakta (dönüm noktasında) dolaşımın değiştirilip değiştirilmeyeceğini karar verileceği üzerine kurulmuştur. Mevcut adres ile hedef adres



Şekil 4.10. Bir döngü (hat) konfigürasyonu ve onun temsili çizge modeli.

arasındaki *uyuşmazlığı* azaltarak geçiş yapmanın ve mesajın kaynağından hedefe verimli

bir şekilde hareket etmesini sağlayan yeni bir adresleme şeması araştırmacılar tarafından önerildi. Yazarlar, veri iletişim sistemlerinde mesafe matrisinin negatif özdeğer sayısı ile adresleme sorunu arasında bir ilişki kurmuşlardır [85]. Bir çizgeye ait mesafe matrisinin başlıca iki versiyonu vardır. Bunlardan biri çizge-teorik versiyon ve diğeri ise geometrik versiyon. Bağlantılı bir çizge için, çizge-teorik versiyon durumunda mesafe matrisi, komşuluk matrisinden ayrışır ve komşuluk kavramının doğal bir genellemesidir. İki nokta arasındaki mesafe noktaların arasındaki en kısa yolun uzunluğu (kenar sayısı) olarak tanımlanır. Geometrik versiyon söz konusu olduğunda uzaklık kavramı bir düzlemdeki noktalar ve bu noktalar arasındaki Öklid mesafesi dikkate alınır (metrik uzay). Ayrıca bazı kaynaklar çizgede (soyutlamada) bulunan iki nesne arasındaki en kısa mesafeyi jeodezik mesafe olarak isimlendirmektedir.

Tanım 4.2.10. G nokta kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olan bir çizge ve herhangi $v_i, v_j \in V(G)$ noktası için $d(v_i, v_j)$ en kısa yol olmak üzere *mesafe matrisi (distance matrix)* $\mathcal{D}(G) = (d_{i,j})$ ile gösterilir ve elemanları

$$d_{i,j} = \begin{cases} 0 & , v_i = v_j \text{ ise} \\ d(v_i, v_j) & , v_i \text{ ve } v_j \text{ arasında yol var ise} \\ \infty & , \text{Diğer durumda} \end{cases}$$

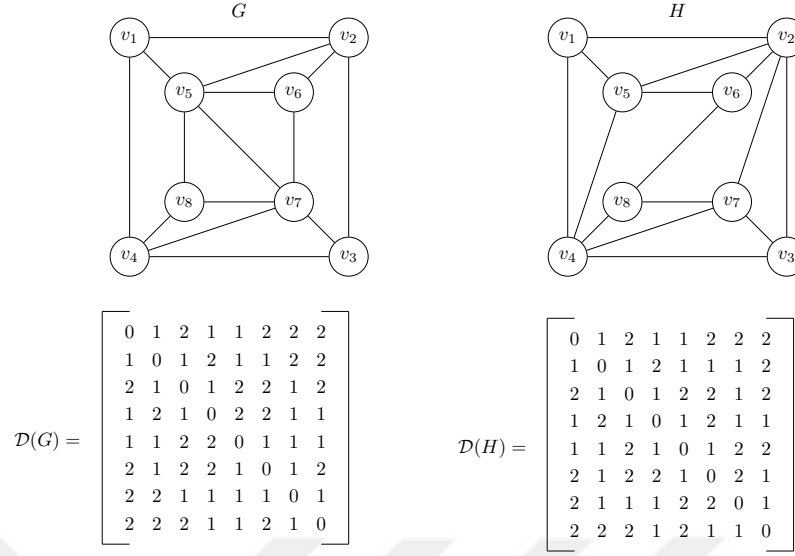
şeklindedir. Eğer çizge bağlantılı ise mesafe matrisinde bulunan tüm elemanlar (köşegen hariç) sıfırdan farklıdır.

$\mathcal{D}(G)$ nin özdeğerleri $\partial_1 \geq \partial_2 \geq \dots \geq \partial_n$ şeklinde sıralansın ve matrisin farklı özdeğerleri $\partial_1 > \partial_2 > \dots > \partial_k$ ($k \leq n$) olsun bu durumda $\mathcal{D}(G)$ nin spektrumu;

$$\text{Spec}_{\mathcal{D}}(G) = \left\{ \begin{array}{cccc} \partial_1 & \partial_2 & \dots & \partial_k \\ m_1 & m_2 & \dots & m_k \end{array} \right\}$$

ile gösterilebilir. \mathcal{D} matrisi *indirgenemez, negatif olmayan, reel ve simetrik* matris olduğu için ∂_1 yalın özdeğerdir. Yani $i = 2, 3, \dots, n$ için $\partial_1 \geq |\partial_i|$ eşitsizliği geçerlidir ve ∂_1 özdeğerine karşılık gelen özvektör pozitifdir. Doğal olarak ∂_1 özdeğerine spektral yarıçap (mesafe matrisinin) veya mesafe indeksi (*distance index*) denir. Distance matrisinin önemini belkide en iyi ifade eden kavram *Wiener* indeksidir. Bağlantılı bir G çizgesi için Wiener indeksi mesafe matrisindeki eleman toplamının yarısına eşittir. Yani,

$$W(G) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_{i,j}$$



Şekil 4.11. G ve H eşyapılı olmayan çizgeler ve mesafe matrisleri. Aynı mesafe özdeğerlerine sahiptir. Yani her iki çizge için mesafe matrisinin spektrumu: $\{10.32, 0.30, 0.01, -0.81, -1.26, -2.48, -2.80, -3.36\}$ biçimindedir.

biçimindedir. Bağlantılı olan G çizgesine ait v noktasının *iletkenliği* (*transmission*) v nin diğer noktalara olan uzaklıkları toplamıdır ve $t_G(v)$ ile gösterilebilir. Kısaca,

$$t_G(v) = \sum_{v \neq u \in V(G)} d(v, u)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bir çizgede (bağlantılı) bulunan tüm v_i ($1 \leq i \leq n$) noktaları için $t_G(v_i) = k$ ise çizgeye *k-iletken düzenli* (*k-transmission regular*) denir. Köşegen elemanları $t_G(v_i)$ olan köşegen matrise *iletkenlik matrisi* denir ve $T(G)$ ile gösterilebilir. Yani $T(G) = (t_{ij})$ ve elemanları,

$$t_{ij} = \begin{cases} t_G(v_i) & , i = j \text{ ise} \\ 0 & , \text{Diğer durumda} \end{cases}$$

biçimindedir. Bağlantılı G çizgesi için *mesafe Laplasyan matrisi* $D^L(G) = T(G) - D(G)$ ve *işaretsiz mesafe Laplasyan matrisi* $D^Q(G) = T(G) + D(G)$ biçiminde tanımlanır.

Tanım 4.2.11. Bağlantılı bir G çizgesine ait *normalleştirilmiş mesafe Laplasyan matrisi* (normalized distance Laplacian)

$$D^{\mathcal{L}}(G) = T(G)^{-1/2} D^L(G) T(G)^{-1/2}$$

biçiminde tanımlanır. Yani, matrisin elemanları

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{t_G(v_i)t_G(v_j)}} & , i \neq j \text{ ise} \\ 1 & , i = j \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Mesafe matrisi ve türevlerinin spektral karakterizasyonu üzerine yapılmış önemli bir çalışma [86] referans numaralı makaledir. Mesafe üzerine daha detaylı bilgi için (yönlü çizgeler ve ağırlıklı çizgeler dahil) bu makale (survey) incelenebilir. Dahası özel çizge ailelerine ait mesafe ile ilgili spektrum analizleri ve mesafe matrisleri üzerine tanımlanan çizge enerji çalışmalarında makalenin öneminin arttırmaktadır. Bir başka elit çalışma ise [85] referans numaralı çalışmadır. Mesafe matrisi ve ilişkili çizge matrisleri için eşspektrum çiftine sahip bağlantılı çizgeler Tablo 4.1 de verilmiştir. Doktora tezi için mesafe üzerine yapılan özgün çalışmalar motive kaynağı olmuştur. Spektral karakterizasyon ve çizge sayım (graph enumeration) çalışmaları sonraki araştırmalar için de ayrıca önemli bir yere sahiptir. Önceki mesafe matrisler kadar olmasada yine ilginç özelliklere sahip bir diğer çizge matrisi ise *maksimum yol (detour)* matrisidir. Tanımı itibariyle iki nokta arasındaki maksimum yol uzunluğu olarak özetlenebilir. Bu kadar farklı özelliklere ve çeşitli kullanım alanlarına sahip çizge matrislerini çizge

Tablo 4.1. \mathcal{D} , \mathcal{D}^Q , \mathcal{D}^L , $\mathcal{D}^{\mathcal{L}}$ matrislerinin eşspektrum çift sayısı (3-10 noktalı)

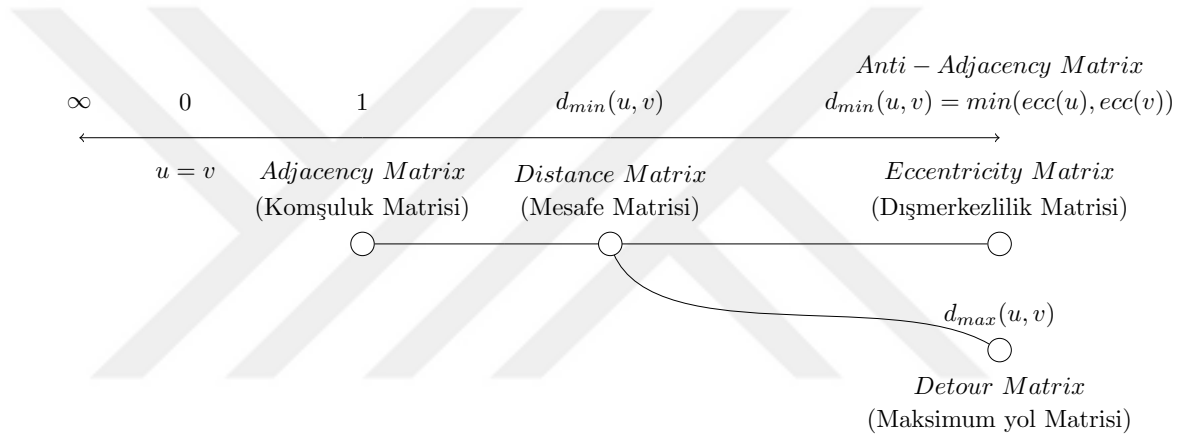
n	Bağlantılı çizge sayısı	\mathcal{D}	\mathcal{D}^Q	\mathcal{D}^L	$\mathcal{D}^{\mathcal{L}}$
3	2	0	0	0	0
4	6	0	0	0	0
5	21	0	2	0	0
6	112	0	6	0	0
7	853	22	38	43	0
8	11117	658	453	745	2
9	261080	25058	8168	19778	8
10	11716571	1389984	319324	787851	7538

değişmezleri (derece, komşuluk, dışmerkezlilik, mesafe, vb.) kullanılarak tanımlamak bütünlük açısından çok önemli olacaktır.

$\mathcal{F}(i, j) = g[(\mathcal{P}_0 = 0) \vee (\mathcal{P}_1 = 1) \vee (\mathcal{P}_2 = -1) \vee (\mathcal{P}_d = d(i)) \vee (\mathcal{P}_\varepsilon = ecc(i)) \vee (\mathcal{P}_{distance} = d(i, j)) \vee \dots]$ değişmez özellik dönüşümü ile olası bütün matrisler ifade edilebilir. Örneğin Laplasyan matrisinin elemanları,

$$\begin{cases} \mathcal{P}_d & , i = j \text{ ise} \\ \mathcal{P}_2 & , i \sim j \text{ ise} \\ \mathcal{P}_0 & , i \not\sim j \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir. *Komşuluk matrisi* ve sonraki bölümde izah edilecek *dışmerkezlilik matrisi* mesafe anlamında spektral çizge kuramı içerisinde uç bölgelerde yer alır.



Şekil 4.12. Temel mesafe matrisleri. A, D, \mathcal{E} ve *Detour matrisleri* arasındaki ilişkiler konunun önemi açısından şekildeki gibi özetlenebilir.

5. BÖLÜM

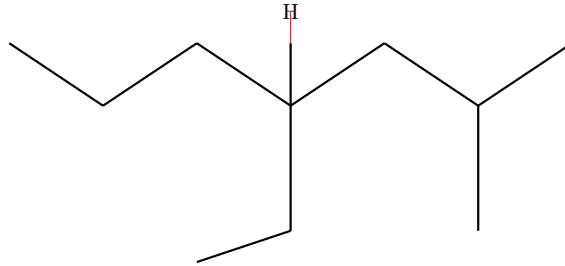
DIŞMERKEZLİLİK MATRİSİ

5.1. Dışmerkezlilik Matrisinin Gelişimi ve Önemi

Matematiksel kimya alanında önemli katkıları bulunan Milan Randić, 2013 yılında *D_{max}-Matrix of Dominant Distances in a Graph* isimli ilginç bir makale kaleme aldı [87]. Bu makale ile kimyada moleküler tanımlayıcılar (molecular descriptors) olarak isimlendirilen kavramların çizge değişmezleri (çizge parametreleri, çizge matrisleri, çizge indeksleri, v.b.) ile ifade edilmelerinin önemine vurgu yapan Randić, çizgelerde (özellikle ağaçlarda) dallanma duyarlılığına sahip yeni bir matris tanımladı. Bu matrisin diğer matrislere (özellikle mesafe ve detour matrisi) göre fark/benzerlik ilişkisi oldukça ilginçtir. Randić'in notasyonu ile D_{max} matrisi;

$$(D_{max})_{ij} = \begin{cases} (D)_{ij} & , (D)_{ij} \geq \min\{R_i, C_j\} \text{ ise} \\ 0 & , (D)_{ij} < \min\{R_i, C_j\} \text{ ise} \end{cases}$$

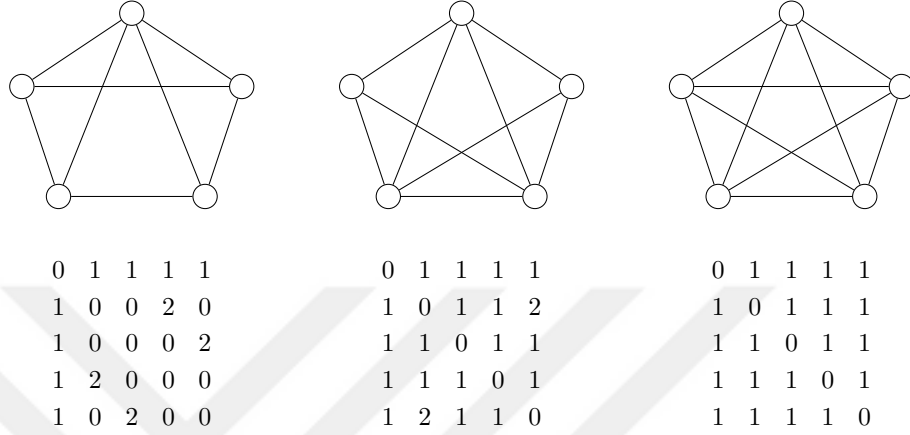
biçiminde ifade edilmiştir. Matris tanımında Randić, D ile mesafe matrisini, R_i ile mesafe matrisinin i . satırında bulunan en büyük elemanı ve C_j ile mesafe matrisinin j . sütununda bulunan en büyük elemanı göstermiştir. Makalede vurgulanan ilginç başka bir yaklaşım ise D_{max} matrisindeki *en büyük eleman* koşulunu *sıfır olmayan en küçük eleman* ile değiştirilirse *komşuluk matrisi* elde edileceğidir. Bu yaklaşımdan hareketle Randić, D_{max} matrisi için *karşıt-komşuluk matrisi* denilebileceğini ifade etmiştir. Randić,



Şekil 5.1. 4-etil-2-metil-heptan molekülünün 2-D gösterimi

D_{max} matrisini ve önemini anlatmaya Şekil 5.1' de verilen molekülün mesafe matrisi ile başlamıştır. Devamında ise yeni matris ile mesafe matrisi arasındaki ilişkiyi ortaya koymuştur. Ayrıca, n -alkanlar, yıldız çizge, tam çizge, iki parçalı tam çizge, heptan izomerleri ve küçük yapılu alkanlar için D_{max} matrisi ile ilgili sonuçları karşılaştırmalı

bir biçimde ifade etmiştir. Randić, D_{max} matrisinin elemanlarını belirlerken iki nokta arasındaki en kısa yollar içerisinde bulunan en uzun olanların alınması koşulunun çizgeleri karakterize etmede mesafe matrisinin detour matrisinde ayrışabileceğini ifade etmiştir. Şekil 5.2’ de detour matrisleri eşit olan üç farklı çizgenin D_{max} matrisi gösterilmiştir.



Şekil 5.2. Randić’in makalesinde kullandığı ilk çizge örnekleri ve bu çizgelere ait D_{max} matris elemanları.

Randić’ in dikkat çeken bir başka yorumu ise; izomerler söz konusu olduğunda D_{max} matrisinin (bu tez çalışmasının merkezinde yer alan *dışmerkezlilik matrisi*) moleküler çizgelerin dallanma modelinde çok hassas olduğudur. Sonuç olarak yazar, D_{max} matrisinin moleküler çizgeleri karakterize etmede önemli olabileceğini vurgulamış ve çizge eşyapılılık testlerinde D_{max} değişmezlerinin etkin bir şekilde kullanımının olası olduğunu ifade etmiştir. Sonraki akademik çalışmalarda D_{max} matrisi *dışmerkezlilik* değişmezine atfen *dışmerkezlilik matrisi* olarak tekrardan isimlendirilmiştir.

Nokta kümesi $V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olacak şekilde etiketlenmiş bağlantılı $G = (V_G, E_G)$ çizgesi için $\mathcal{E}(G)$ dışmerkezlilik matrisinin elemanları,

$$\epsilon_{i,j} = \begin{cases} d(v_i, v_j) & , d(v_i, v_j) = \min\{ecc(v_i), ecc(v_j)\} \text{ ise} \\ 0 & , \text{Diğer durumda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır ve $\mathcal{E}(G)$ ’nin özdeğerleri $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \dots \geq \epsilon_n$ artmayan bir dizi olarak sıralanabilir ($\mathcal{E}(G)$ simetrik bir matris olduğundan özdeğerler reel sayıdır). Ayrıca matrisin farklı özdeğerleri $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_k$ olmak üzere $\mathcal{E}(G)$ ’nin spektrumu

$$Spec_{\epsilon}(G) = \left\{ \begin{array}{cccc} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_k \\ m_1 & m_2 & \dots & m_k \end{array} \right\}$$

notasyonu ile gösterilebilir. Burada $k \leq n$ için m_i gösterimi özdeğerlerin katlarını ifade eder. Dışmerkezlilik matrisi reel ve simetrik matristir. Ayrıca özdeğerlerin toplamı sıfıra eşittir. Yani,

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0$$

Ayrıca dışmerkezlilik matrisinin tanımından,

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varepsilon_{i,j}^2$$

eşitliğini kolayca gözlemleyebiliriz.

Ivan Gutman 1978 senesinde çizge enerjisi kavramını literatüre kazandırmıştır [88]. Bu tanım, Hückel moleküler orbital toplam π -elektron enerjisi için daha önce bilinen sonuçlar desteklenmiştir. Gutman bu makalesinde, matematik dünyası tarafından enerji kavramının öneminin anlaşılacağını, gelecekteki araştırmaları tetikleyeceği ve çok sayıda yeni sonuçların keşfedilmesine yol açacağını arzularak çizge enerjisi tanımını literatüre kazandırmıştır. Enerji kavramını popülerleştirmeye yönelik girişimine rağmen, çizge enerji kavramına ilgi başlangıçta oldukça az olmuştur. Dahası sonraki yirmi yıldan fazla bir sürede, çizge enerjisi kavramı diğer matematikçiler tarafından neredeyse tamamen göz ardı edilmiştir. Bu durum 2000'li yıllarda hızla değişmeye başlamıştır [89]. G keyfi bir çizge ve n nokta sayısı olmak üzere, çizgenin komşuluk matrisine ait özdeğerler $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ biçiminde olsun. Bu özdeğerlerin artmayan bir sırayla etiklendiğini varsayalım. Hückel moleküler yörünge teorisi içinde, doymamış bir konjuge hidrokarbonun π -elektronlarının toplam enerjisi şu şekilde ifade edilir.

$$E_\pi = \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^{n/2} \lambda_i & , \text{Eğer } n \text{ çift ise} \\ 2 \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \lambda_i + \lambda_{(n+1)/2} & , \text{Eğer } n \text{ tek ise} \end{cases}$$

Yukarıdaki enerji tanımı moleküler çizgeler için tanımlanması beraberinde bazı kısıtlamaları getirmiştir. Örneğin, çizgenin bağlantılı olması ve maksimum derecenin en fazla 3 olması gibi. Enerji kavramının uzun yıllar ilgi görmemesinin bir sebebi de bu kısıtlamalar olabilir. Öte yandan n çift ise $\lambda_{n/2} \geq 0 \geq \lambda_{n/2+1}$ ve n tek ise $\lambda_{(n+1)/2} = 0$ olacak şekilde koşulların düzenlenmesi durumunda kolayca ifade edilebilir ki enerji tanımı,

$$E_G = E_\pi = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

haline getirilebilir. Kimyasal Çizge Kuramında çizge enerjisinin önemli bir kimyasal indeks olduğu iyi bilinmektedir [90]. Genel olarak n -boyutlu bir matrisin enerjisi

$$E_M = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\lambda_i(M) - \text{tr}(M)}{n} \right|$$

biçimindedir. Komşuluk ve mesafe matrisi için tanımlanan enerji tarifine benzer olarak bağlantılı G çizgesinin dışmerkezlilik matrisine ait enerji,

$$E_{\mathcal{E}}(G) = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|$$

şeklinde tanımlanabilir ve \mathcal{E} -enerji kısaltması ile de gösterilebilir.

5.2. Dışmerkezlilik Matrisi ve Literatür

Dışmerkezlilik matrisi, her satır ve sütun için yalnızca komşu noktalara karşılık gelen en küçük mesafeler (komşu noktalar 1 uzunluklu mesafeye sahiptir) seçilerek oluşturulan, komşuluk matrisinin tersi olarak metaforlaştırılabileceğimiz bir matristir. Bu bakış açısı ile birlikte komşuluk ve dışmerkezlilik matrisleri mesafe temelli çizge matris ailesi içerisinde uç bölgelerde yer alır (min-maks ilişkisi). Çizge matrisleri üzerine çalışma yapan her araştırmacının sık sık karşılaştığı komşuluk ve mesafe matrisleri spektral çizge kuramında geniş bir çalışma sahasına sahiptir. Bağlantılı çizgelere ait komşuluk ve mesafe matrislerinin bilinen en önemli özelliği indirgenemez olduklarıdır ama dışmerkezlilik matrisi için bu söylenemez. Örneğin K_n tam çizgesinin $\mathcal{E}(K_n)$ matrisi indirgenemez iken $K_{a,b}$ iki parçalı tam çizgesine ait $\mathcal{E}(K_{a,b})$ matrisi indirgenebilir. Öte yandan çizge matrisleri ve spektrumlar arasındaki ilişkilerin araştırılması spektral çizge kuramı sahası içerisinde önemli bir yere sahiptir. “ $L(G)$ ve $Q(G)$ matrislerine ait özdeğerlerin aynı olması için gerek ve yeter şart G çizgesinin iki parçalı olmasıdır” ifadesi motivasyon açısından çok değerlidir. Çizge matrisleri adına oldukça ilginç başka bir ilişki ise şudur: “Eğer iki çizge Q eşspektrumlu ise bu çizgelerden oluşturulan hat çizgeler A eşspektrumludur”. Bu ve benzer çalışmalar bizlere çizge matrislerinin oldukça ilginç ve verimli olduklarını ifade eder. 21.yüzyılda kompleks yapı modelleri ve bu yapılardan elde edilecek verilerin yorumlanmasına dönük önemli ilerlemelerin ivmelendiği bir dönemdir. Ayrıca nesnelere arasında ki mesafe ilişkisi hala önemini korumaktadır. Bu bağlamda modeller (çizgeler) üzerine tanımlanan mesafe matrislerinin araştırılması elzem olmuştur. (Başta komşuluk matrisi, mesafe matrisi ve dışmerkezlilik matrisi gibi). Doktora tezinin bu bölümünde akademik alan için oldukça yeni olan dışmerkezlilik matrisi ile ilgili derin literatür bilgisine yer verilmiş ve orijinal sonuçlar gerekli atıflar ile birlikte sunulmuştur. Sorulabilecek ilk soru *bağlantılı çizge aileleri içerisinde dışmerkezlilik matrisine göre indirgenebilir veya indirgenemez olan çizgeler hangileridir?* Bu ve benzeri problemlere ilk olarak Wang ve çalışma arkadaşları tarafından cevap aranmıştır [91].

Teorem 5.2.1. [91] T nokta sayısı n olan bir ağaç ise $\mathcal{E}(T)$ matrisi indirgenemezdir.

Wang ve diğerleri, ağaçlar için ispatladıkları bu önemli teoremin devamında aşağıdaki sonucu literatüre kazandırmışlardır.

Sonuç 5.2.1. [91] T , $diam(T) \leq 3$ olacak şekilde bir ağaç olmak üzere, k tane sarkık nokta kümesi 0 özdeğerinin cebirsel katını $k - 1$ artırırken, sarkık olmayan noktalarına sarkık noktalar eklenmesi $\mathcal{E}(T)$ matrisinin spektral yarıçapını artırır.

Yazarlar çizgeler dünyasında sık sık atıfda bulunan döngü çizgelerine ait spektrum eşitliğini ifade ve ispat etmişlerdir.

Teorem 5.2.2. [91] C_n nokta sayısı n olan döngü çizge olmak üzere,

1. Eğer $n = 2k$ ise,

$$Spec_{\mathcal{E}}(C_{2k}) = \begin{Bmatrix} k & -k \\ k & k \end{Bmatrix}$$

2. Eğer $n = 2k + 1$ ise C_{2k+1} 'in özdeğerleri,

$$\varepsilon_i(C_{2k+1}) = 2k \cos \frac{2\pi i}{2k+1}, (i = 1, 2, \dots, 2k+1)$$

İlk eşitlik için matris bloklaması ikinci eşitlik için ise aşağıdaki lemma kullanmıştır.

Lemma 5.2.1. [91] G çizgesi $diam(G) = 2$ olan bir çizge ve \overline{G} tümler çizgeyi göstermek üzere, $\mathcal{E}(G) = 2A(\overline{G})$ eşitliği geçerlidir.

Hemen hemen tüm çizgeler bağlantılıdır ve iki çapa sahiptir [92]. Bu bilgidен hareketle denilebilir ki $diam(G) = 2$ olan bağlantılı çizgeler üzerine yapılan karakterizasyonlar literatürde özgül ağırlığı yüksek çalışmalar olacaktır. Doktora tez çalışmasının ana araştırma alanlarından biri de bu tarz çizgelerin spektral analizini yapmak ve mümkün olan en geniş çizge aile/ailelerini sınıflandırmaktır.

Tanım 5.2.1. [91] $G_1 \cup G_2$, iki çizgenin ayrık birleşimini göstermek üzere, G_1 'in her noktasını G_2 'nin her noktasına komşu yapan ve $G_1 \cup G_2$ 'den türetilen çizge işlemine tam çarpım (complete product) işlemi denir ve $G_1 \vee G_2$ ile gösterilir (Çizge işlemleri alt bölümünde ifade ettiğimiz çizge toplamı ile eş değer bir tanımdır. Akademik atıf hassasiyetine binaen araştırmacıların sembol seçimlerini aynen aktarmayı uygun bulduk).

Lemma 5.2.2. [91] G çizgesi $diam(G) = 2$ olan r -düzenli çizge ve G çizgesinin komşuluk özdeğerleri $\{r = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ olmak üzere,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G \vee K_1) = \begin{Bmatrix} (n-r-1) \pm \sqrt{(n-r-1)^2 + n} & -2(\lambda_2 + 1) & \dots & -2(\lambda_n + 1) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{Bmatrix}$$

Wang ve diğerleri çizge işlemlerinden ve Lemma 5.2.1'den yararlanarak A -özdeğerleri ve \mathcal{E} -özdeğerleri arasında ki ilişkiyi kısıtlı bir aile ile ifade etmişlerdir.

Teorem 5.2.3. [91] G , $diam(G) = 2$ olan ve r -düzenli çizge olmak üzere, G çizgesinin A -özdeğerleri $r = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G \vee K_m) = \left\{ \begin{array}{cccccc} \frac{X+Y}{2} & -1 & -2(\lambda_2 + 1) & \dots & -2(\lambda_n + 1) \\ 1 & m-1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right\}$$

Burada $X = 2n - 2r + m - 3$ ve

$$Y = \sqrt{(2n - 2r + m - 3)^2 - 4(m - 1)(n - 2r - 2) + 4n}$$

dir.

Spektral çizge kuramı araştırmalarında en çok karşılaşılan problemlerden biride *farklı M -özdeğere sahip çizgeler nasıl sınıflandırılır?* Wang ve diğerleri makalelerinde bu konuya değinerek, çapı 2 olan ve (n, k, λ, μ) parametrelili G çizgesinin 3 farklı A -özdeğerine sahip olduğunu ve de $G \vee K_m$ çizgesinin 5 farklı \mathcal{E} -özdeğerine sahip olduğunu belirtmişlerdir.

Lemma 5.2.3. [91] G , $diam(G) = 2$ olan ve r -düzenli çizge ayrıca $G \square P_2$ çizgesi $diam(G \square P_2) = 3$ olan $(r + 1)$ -düzenli çizge olmak üzere G ve K_2 çizgelerinin kartezyen çarpımı ile oluşan çizgenin dışmerkezlilik matrisi,

$$\mathcal{E}(G \square P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 3A(\overline{G}) \\ 3A(\overline{G}) & 0 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

Önerme 5.2.1. [91] G , $diam(G) = 2$ olan ve r -düzenli çizge olmak üzere; G çizgesinin A -özdeğerleri $r = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise, $\mathcal{E}(G \square P_2)$ matrisinin özdeğerleri,

$$\pm 3(n - r - 1), \dots, \pm 3(\lambda_n + 1)$$

formundadır.

Lemma 5.2.4. [91] G çizgesi, $diam(G) = 2$ olan r -düzenli çizge ve $diam(G \vee G) = 2$ olsun bu durumda dışmerkezlilik matrisi,

$$\mathcal{E}(G \vee G) = \begin{pmatrix} 2A(\overline{G}) & 0 \\ 0 & 2A(\overline{G}) \end{pmatrix}$$

formundadır.

Önerme 5.2.2. [91] G , $diam(G) = 2$ olan ve r -düzenli çizge olmak üzere, G çizgesinin A -özdeğerleri $r = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise $\mathcal{E}(G \vee G)$ matrisinin özdeğerleri,

$$\pm 2(n - r - 1), \dots, \pm 2(\lambda_n + 1)$$

formundadır.

Dışmerkezlilik matrisi Kimyasal çizge kuramı araştırmalarından beslendiği için matrislerden elde edilen değişmezler ile kimyasal çizgelerin fizikokimyasal özellikleri arasında kurulabilecek ilişkiler ilgi çekici olacaktır. Genelde bu tarz ilişkiler, matris değişmezleri ve moleküler tanımlayıcılar kullanılarak, *çoklu regresyon analizi* ile gerçekleştirilir. Wang ve diğerleri 18 oktan (C_8H_{18}) izomerinin *ortalama* \mathcal{E} -matris değerini hesaplamışlardır.

$$\text{ortalama}(\mathcal{E}(\text{izomer})) = \frac{\text{Esas köşegen üzerinde bulunan elemanların toplamı}}{\text{Esas köşegen üzerinde bulunan elemanların} (\neq 0) \text{ sayısı}}$$

2 uzunluklu yolların artışı ile ortalama matris değer azalması arasında düzenli bir ilişki olduğu, 3 uzunluğundaki yolların sayısındaki artış ile matris elemanları arasında düzenli bir azalma olduğu, vb. sonuçlar Wang ve meslektaşları tarafından tablolar, şekiller ve gözlemler vasıtasıyla izah edilmiştir.

Mesafe ve dışmerkezlilik matrisleri her ne kadar tanım itibariyle benzeşelerde, spektral özellikler bakımından ayrışırlar. Örneğin ağaçlar içerisinde P_n çizgesi, mesafe matrisi açısından, maksimum spektral yarıçapa sahip çizge ailesidir ama dışmerkezlilik matrisi için bu söylenemez. Bu bağlamda, çizge matrisleri üzerine yapılan *uç değer karakterizasyon* çalışmaları nitelikli olarak değerlendirilecektir. Wang ve diğerleri aşağıdaki varsayımlar üzerinden, uç değer karakterizasyon çalışmalarını dışmerkezlilik matrisine uyarlamışlardır.

Varsayım 5.2.1. [91] n noktalı ağaçlar arasında, $n - 2$ dereceli noktaya sahip ağaç, minimum \mathcal{E} -spektral yarıçapa sahiptir.

Varsayım 5.2.2. [91] $T \neq P_2$ çizgesi n noktalı bir ağaç ve $\varepsilon_n \mathcal{E}(T)$ matrisinin minimum özdeğerini göstermek üzere,

$$\varepsilon_n \leq -2$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu sağlanması için gerek ve yeter şart $T \cong S_n$ olmasıdır.

Wang ve diğeri çalışmalarına devam ederek 2019 yılında \mathcal{E} -enerji üzerine bir makale kaleme almışlardır [93]. Makale ilginç ve dikkat çekici bir önerme ile enerji çalışmalarının önemini vurgulamıştır. Yazarlar ilk olarak yol çizge ve döngü çizge için spektrum eşitliklerini vererek, enerjisi ile ilgili sonuçları vermişlerdir.

Lemma 5.2.5. [93] P_n gösterimi n noktalı yol çizgesini gösterebilir. Bu durumda,

i Eğer $n = 1, 2, 3$ ise,

$$Spec_{\mathcal{E}}(P_1) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, Spec_{\mathcal{E}}(P_2) = \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$Spec_{\mathcal{E}}(P_3) = \begin{Bmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$$

ii Eğer $n = 2k$ ($k \geq 2$) ise,

$$Spec_{\mathcal{E}}(P_{2k}) = \begin{Bmatrix} \frac{(6k-3)+\sqrt{a}}{6} & \frac{(6k-3)-\sqrt{a}}{6} & \frac{-(6k-3)+\sqrt{a}}{6} & \frac{-(6k-3)-\sqrt{a}}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2k-4 \end{Bmatrix}$$

Eşitlikte $a = (6k-3)(14k^2 - 20k + 9)$ dir.

iii Eğer $n = 2k + 1$ ($k \geq 2$) ise,

$$Spec_{\mathcal{E}}(P_{2k+1}) = \begin{Bmatrix} \frac{6k+\sqrt{b}}{6} & \frac{6k-\sqrt{b}}{6} & \frac{-6k+\sqrt{c}}{6} & \frac{-6k-\sqrt{c}}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2k-3 \end{Bmatrix}$$

Eşitlikte $b = 6k(14k^2 + 3k + 1)$ ve $c = 6k(14k^2 - 9k + 1)$ dir.

Teorem 5.2.4. [93] P_n gösterimi n noktalı yol çizgesini gösterebilir. Bu durumda,

i $E_{\mathcal{E}}(P_1) = 0, E_{\mathcal{E}}(P_2) = 2, E_{\mathcal{E}}(P_3) = 2 + 2\sqrt{3}$

ii $E_{\mathcal{E}}(P_{2k}) = (2/3)\sqrt{(6k-3)(14k^2 - 20k + 9)}, k \geq 2$

iii $E_{\mathcal{E}}(P_{2k+1}) = (1/3)(\sqrt{6k(14k^2 + 3k + 1)} + \sqrt{6k(14k^2 - 9k + 1)}), k \geq 2$

Teorem 5.2.5. [93] C_n , nokta sayısı n olan döngü çizge olmak üzere,

i Eğer $n = 2k$ ise $E_{\mathcal{E}}(C_{2k}) = 2k^2$

ii Eğer $n = 2k + 1$ ise

$$E_{\mathcal{E}}(C_{2k}) = \frac{k}{\sin \frac{\pi}{2k+1}} \left(\sin \frac{4k+3}{2k+1} \pi - \sin \frac{1}{2k+1} \pi \right)$$

Matris kuramında yaygın olarak kullanılan iki kavram; *bölüm matrisi* ve *adil parçalanış* dır. Wang ve diğerleri bu iki kavramı etkin bir şekilde kullanarak çift yıldız çizgesinin spektrumunu ve enerjisini ifade/ispat etmişlerdir.

Lemma 5.2.6. [93] $S_{a,b}$ çift yıldız çizge ve $a, b \geq 1$ olmak üzere,

$$Spec_{\mathcal{E}}(S_{a,b}) = \left\{ \begin{array}{ccccc} \sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\beta}}{2}} & \sqrt{\frac{\alpha-\sqrt{\beta}}{2}} & 0 & -\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\beta}}{2}} & -\sqrt{\frac{\alpha-\sqrt{\beta}}{2}} \\ 1 & 1 & a+b-2 & 1 & 1 \end{array} \right\}$$

eşitliği geçerlidir. Spektrum da $\alpha = 4a + 4b + 9ab$ ve $\beta = (4a + 4b + 9ab)^2 - 64ab$ dir.

Teorem 5.2.6. [93] $S_{a,b}$ çift yıldız çizge ve $a, b \geq 1$ olmak üzere,

$$E_{\mathcal{E}}(S_{a,b}) = \sqrt{2[(4a + 4b + 9ab) + \sqrt{(4a + 4b + 9ab)^2 - 64ab}]}$$

$$+ \sqrt{2[(4a + 4b + 9ab) - \sqrt{(4a + 4b + 9ab)^2 - 64ab}]}$$

enerji eşitliği geçerlidir.

Çizgelerin spektral karakterizasyonunda önemli bir yere sahip olan başka bir problem ise az sayıda özdeğere sahip çizgelerin sınıflandırılmasıdır. Bu tez çalışmasının ana çıktılarında biri olan “*Tam olarak bir tek pozitif dışmerkezlilik özdeğerine sahip çizgelerin sınıflandırılması*” özdeğer araştırmalarında önemli bir boşluğu doldurmaktadır.

Lemma 5.2.7. [93] n noktalı ve d çaplı bağlantılı bir G çizgesi, ancak ve ancak aşağıdaki durumlarda iki farklı \mathcal{E} -özdeğerine sahiptir.

- $G = K_n$

$$Spec_{\mathcal{E}}(K_n) = \left\{ \begin{array}{cc} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{array} \right\}$$

- $G = a$ -zıtkutuplu çizge

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \left\{ \begin{array}{cc} d(a-1) & -d \\ \frac{n}{a} & \frac{n(a-1)}{a} \end{array} \right\}$$

Lemma 5.2.8. [93] G nokta sayısı m ve çapı d olan a -zıtkutuplu çizge ve H nokta sayısı m ve $diam(H) < d$ olan bir çizge olmak üzere,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G \boxtimes H) = \left\{ \begin{array}{ccc} dn(a-1) & 0 & -dn \\ \frac{m}{a} & m(n-1) & \frac{m(a-1)}{a} \end{array} \right\}$$

spektrum eşitliği geçerlidir ($a|m$).

Teorem 5.2.7. [93] G nokta sayısı m ve çapı d olan bir a -zıtkutuplu çizge ve H nokta sayısı m ve $diam(H) < d$ olan bir çizge olmak üzere,

$$E_{\mathcal{E}}(G \boxtimes H) = 2mnd\left(\frac{a-1}{a}\right)$$

enerji eşitliği geçerlidir.

Sonuç 5.2.2. [93] C_{2k} döngü çizge, H nokta sayısı n ve $diam(H) < k$ olan bir çizge olmak üzere,

$$E_{\mathcal{E}}(C_{2k} \boxtimes H) = 2k^2n$$

enerji eşitliği geçerlidir.

Çizge enerjisi araştırmalarında *isimli çizgeler (döngü, yol, yıldız, tekerlek, tam, iki parçalı tam, çok parçalı tam, vb. çizgeler)* için enerji formüllerinden daha önemli bir konuda enerjiler için alt/üst sınır eşitsizliklerinin çizge parametreleri ile ifade edilmesidir. Bu sınırların hassas olması ve çizge parametrelerinin anlaşılabilir olması araştırmacılar tarafından arzu edilen çıktılardandır.

Teorem 5.2.8. [93] G nokta sayısı n olan bir çizge ve $\mathcal{E}(G)$ 'nin determinantının mutlak değeri $\Delta = |\det(\mathcal{E}(G))|$ olmak üzere,

$$\sqrt{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \epsilon_{i,j}^2 + n(n-1)\Delta^{2/n}} \leq E_{\mathcal{E}}(G) \leq \sqrt{2(n-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} \epsilon_{i,j}^2 + n\Delta^{2/n}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu *çapsal çizge* olmasıyla sağlanır.

Lemma 5.2.9. [93] G nokta sayısı n olan bir çizge, özdeğer dizisi $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \dots \geq \epsilon_n$ ve dışmerkezlilik matrisinin i .sıtr toplamı $\mathcal{E}(i) = \sum_{j=1}^n \epsilon_{i,j}$ olmak üzere,

$$\epsilon_1 \geq \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \epsilon(i)^2}}{n}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu sıtr toplamları eşit olan dışmerkezlilik matrisine sahip çizgeler için geçerlidir.

Teorem 5.2.9. [93] G nokta sayısı n olan bir çizge olmak üzere,

$$E_{\mathcal{E}}(G) \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{E}(i)^2}{n}} + \sqrt{(n-1) \left[\sum_{1 \leq i < j \leq n} \epsilon_{i,j}^2 - \frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{E}(i)^2}{n} \right]}$$

sağlanır. Eşitlik durumu $diam(G) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \mathcal{E}(i)^2}{n}}$ koşulunun sağlandığı çapsal çizgeler için geçerlidir.

Son olarak Wang ve diğer yazarlar iki tane problem ile makaleyi sonlandırmışlardır.

Problem 5.2.1. [93] Çift sayıda nokta içeren ($n = 2k$), çapı 2'ye eşit veya büyük olan ve $n \geq 4d - 4$ eşitsizliğini sağlayan çapsal çizge oluşturulabilir mi?

Problem 5.2.2. [93] Verilen bir S çizge ailesindeki çizgelerin \mathcal{E} -enerjisi için üst ve alt sınırları bulun ve uç değer çizgelerini (extramal graphs) karakterize edin.

Spektral çizge kuramı çalışmalarında özgül ağırlığa sahip akademik yayınlar genelde varsayım ispatı içermektedir. Yeni varsayımlar ve problemler üzerine kaleme alınan makaleler kıymetli olsa da, alan duayenleri tarafından kabul görmüş varsayımların veya problemlerin ispatı daha da önemlidir. Bu bakış açısı ile denebilir ki Iswar Mahota ve çalışma arkadaşları önemli bir makaleyi literatüre kazandırmışlardır [94]. Yazarlar, öncelikle Wang ve çalışma arkadaşlarının yazdığı [91] referans numaralı makalede bulunan varsayımın ispatını yıldız çizgenin spektrumundan hareketle ifade/ispat etmişlerdir.

Teorem 5.2.10. [94] $S_n = K_{1,n-1}$ çizgesi nokta sayısı n olan bir yıldız çizge olmak üzere

$$\det(\mathcal{E}(K_{1,n-1})) = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}$$

ve

$$Spec_{\mathcal{E}}(K_{1,n-1}) = \left\{ \begin{array}{cc} (n-2) \pm \sqrt{n^2 - 3n + 3} & -2 \\ 1 & n-2 \end{array} \right\}$$

dir. Dahası $n \geq 3$ için $\min(Spec_{\mathcal{E}}(K_{1,n-1})) = -2$ eşitliği sağlanır.

Teorem 5.2.11. [94] [Varsayım 5.2.2] $T \neq P_2$ çizgesi n noktalı bir ağaç ve $\varepsilon_n, \mathcal{E}(T)$ matrisinin minimum özdeğeri olmak üzere

$$\varepsilon_n \leq -2$$

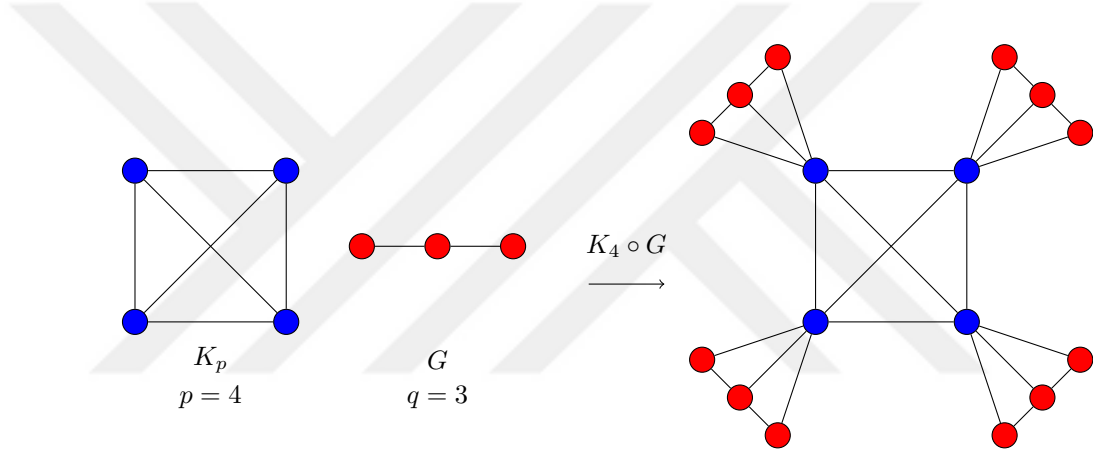
eşitsizliği korunur. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $T = S_n$ alınmasıdır.

Özel çizge işlemleri ile elde edilen çizge aileleri üzerine yapılan spektral çalışmalar oldukça ilginç sonuçlar barındırır. Mahota ve diğer araştırmacılar makalelerinde bir çok özel çizge aileleri için spektrum hesaplamaları da yapmışlardır.

Teorem 5.2.12. [94] K_p çizgesi p noktalı tam çizge ve G q noktalı bağlantılı bir çizge olmak üzere,

$$Spec_{\mathcal{E}}(K_p \circ G) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{-3q \pm \sqrt{9q^2 + 16q}}{2} & (p-1) \frac{-3q \pm \sqrt{9q^2 + 16q}}{2} \\ p(q-1) & p-1 & 1 \end{array} \right\}$$

spektrum eşitliği sağlanır



Şekil 5.3. Teorem 5.2.12 için örnek gösterim.

$$Spec_{\mathcal{E}}(K_4 \circ G) = \{-10.18^{(3)}, -3.54, 0^{(8)}, 1.18^{(3)}, 30.54\}$$

Açıklama 5.2.1. [94] G çizgesinden n kopya alma yerine G_1, G_2, \dots, G_n olacak şekilde bağlantılı çizgeler almak Teorem 5.2.12 ifadesinde bulunan spektrum ile aynı formata sahiptir. Bu ilginç durum ise sonsuz sayıda spektrumu belirli çizge üretmek anlamına gelir. Mahota ve diğerleri C_n döngü çizge ve K_1 tam çizgesinin spektral özelliklerini kullanarak aşağıdaki teoremi ifade/ispata etmişlerdir.

Teorem 5.2.13. [94] W_{n+1} tekerlek çizge ($n \geq 4$) olmak üzere,

$$Spec_{\mathcal{E}}(W_{n+1}) = \left\{ \begin{array}{cccc} (n-3) \pm \sqrt{(n-3)^2 + n} & -2(\lambda_2 + 1) & \dots & -2(\lambda_n + 1) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 5.2.14. [94] $B_{n,n}$ halter çizge ($n \geq 3$) olmak üzere,

$$Spec_{\mathcal{E}}(B_{n,n}) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{3(n-1) \pm \sqrt{9n^2 - 2n - 7}}{2} & \frac{-3(n-1) \pm \sqrt{9n^2 - 2n - 7}}{2} \\ 2(n-2) & 1 & 1 \end{array} \right\}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 5.2.15. [94] $CP(n)$ kokteyl parti çizgesi olmak üzere,

$$Spec_{\mathcal{E}}(CP(n)) = \left\{ \begin{array}{cc} 2 & -2 \\ n & n \end{array} \right\}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 5.2.16. [94] $\sum_{i=1}^k n_i = n$ ve $2 \leq k \leq n - 1$ olmak üzere K_{n_1, n_2, \dots, n_k} k parçalı tam çizgesi için,

$$Spec_{\mathcal{E}}(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = \left\{ \begin{array}{cccccc} -2 & 2(n_1 - 1) & 2(n_2 - 1) & \dots & 2(n_k - 1) \\ n - k & 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right\}$$

olacak şekilde spektrum eşitliği vardır.

Mahota ve diğer yazarlar Önerme 5.2.1 den yararlanarak, iki farklı tam olmayan çizgenin tam çarpım çizgesi için matris eşitliğini ifade etmişlerdir.

Teorem 5.2.17. [94] G_1 ve G_2 herhangi bir tam olmayan bağlantılı çizge olmak üzere,

$$\mathcal{E}(G_1 \vee G_2) = \begin{pmatrix} 2A(\overline{G_1}) & 0 \\ 0 & 2A(\overline{G_2}) \end{pmatrix}$$

blok matris eşitliği geçerlidir.

Mahota ve diğer yazarlar son olarak spektral çizge kuramının ilginç kavramlarından biri olan bir matrisin *eylemsizliği* (*inertia*) üzerine iki teorem ifade ve ispat etmişlerdir. Teoremleri açık ifade edebilmek için n_+ pozitif özdeğer sayısı, n_- negatif özdeğer sayısı ve n_0 sıfır özdeğer sayısı notasyonlarını teoremlere ekledik.

Teorem 5.2.18. [94] $q \geq 2$ olmak üzere $L_{p,q}$ Lolipop çizgesine ait dışmerkezlilik matrisinin eylemsizliği,

$$In(\mathcal{E}(L_{p,q})) = (n_+ = 2, n_- = 2, n_0 = p + q - 4)$$

Teorem 5.2.19. [94] P_n yol çizgesine ait dışmerkezlilik matrisinin eylemsizliği,

$$In(\mathcal{E}(P_n)) = (n_+ = 2, n_- = 2, n_0 = n - 4)$$

şeklindedir.

Spektral çizge kuramının başka bir elit çalışma alanı ise çizge matrisine ait spektrumların cebirsel özellikleridir. 2020 tarihli makalelerinde Jianfeng Wang, Mei Lu, Lu Lu ve Francesco Belardo dışmerkezlilik matrisine ait özdeğerlerin cebirsel özelliklerini incelemişlerdir [95]. Wang ve çalışma arkadaşları makalelerinde öncelikle C_{2k} çizgesinin indirgenebilir, C_{2k+1} çizgesinin indirgenemez olduğunu ifade ederek indirgenebilirlik üzerine kısmı bir teorem vermiştir.

Teorem 5.2.20. [95] G çizgesi n noktalı bağlantılı bir çizge olmak üzere, $v_c \in V(G)$ bir kesen-nokta (cut vertex) için, $G - v_c$ çizgesi aşağıdaki koşulu sağlayan T ağaç çizgesini bileşen olarak içeriyorsa G çizgesinin dışmerkezlilik matrisi $\mathcal{E}(G)$ indirgenemezdir.

- Bazı $v \in V(T)$ nokta/noktaları için $ecc_G(v_c) = d(v, v_c)$ eşitliği sağlanır.

Yukarıdaki teoremden hareketle yazarlar iki sonuç üzerine tartışma yapmışlardır. İlk sonuçları ağaç çizgelerin indirgenemezliği (herhangi bir ağaç çizgeden kesme noktası kullanılarak istenen koşulu sağlayan ağaç çizge bileşenleri elde edilebileceği) diğer sonuç ise 2 dallanmış çizgeyi ve nokta çakıştırma işlemi kullanılarak indirgenemez dışmerkezlilik matrisine sahip bir çizge üretilebileceğidir. Wang ve diğerleri çizge kuramında mesafe tabanlı özel çizge ailelerinden biri olan zıt kutuplu (antipodal) çizgeler için en küçük özdeğer özelliği üzerine elde ettikleri sonuçları ifade ve ispat etmişlerdir.

G , r -zıt kutuplu çizge olmak üzere dışmerkezlilik matrisi,

$$\mathcal{E}(G) = \begin{pmatrix} d(J_r - I_r) & & & \\ & d(J_r - I_r) & & \\ & & d(J_r - I_r) & \\ & & & d(J_r - I_r) \end{pmatrix}$$

şeklinde etiketlenebilir. Bu matrisin köşegenleri özdeş bloklardan oluşmaktadır, J ve I sırasıyla bir elemanından oluşan sabit kare matris ve birim matris dir. Kolayca görülebilir ki $\mathcal{E}(G)$ matrisinin en küçük özdeğeri $-d$ dir.

Teorem 5.2.21. [95] G çizgesi n noktalı ve d çaplı bağlantılı bir çizge olmak üzere, $\mathcal{E}(G)$ 'nin özdeğerleri $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n$ şeklinde artmayan bir dizi olarak sıralansın. Dışmerkezlilik matrisinin en küçük özdeğeri için $\varepsilon_n \leq -d$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumunun geçerli olması için gerek ve yeter şart çizgenin d çapa sahip r -zıtkutuplu çizge olmasıdır ($r \geq 2$). Özel olarak,

- $\varepsilon_n = -1 \iff G \cong K_n (n \geq 2)$
- $\varepsilon_n = -2 \iff G \cong K_{n_1, n_2, \dots, n_k} (n \geq 4, k \geq 2)$

Teoremin doğal sonucu olarak Wang ve diğer araştırmacılar bazı özel çizge ailelerinin spektrumları ile ilgili temel çıkarımlarda bulunmuşlardır.

Sonuç 5.2.3. [95] K_n tam çizgesi ve K_{n_1, n_2, \dots, n_k} k -parçalı tam çizgesi dışmerkezlilik spektrumu ile belirlidir.

Ayrıca isimleri geçen yazarlar yukarıda ki teoremde genel çizge yerine ağaç çizge aldıklarında, $\varepsilon_n \leq -2$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu ve eşitlik durumunun ise $T \cong K_{1, n-1}$ yıldız çizge olması durumunda sağlanacağını ifade ederek 8 noktalı ağaçlar için spektrum tablosunu ek olarak vermişlerdir. Makalenin sonraki bölümünde yazarlar spektral yarıçap ile ilgili bazı sınırları ifade/ispat etmişlerdir.

Teorem 5.2.22. [95] G çizgesi $n \geq 2$ noktalı bağlantılı bir çizge ve $S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ olmak üzere,

$$\varepsilon_1 \leq \sqrt{\frac{(n-1)S}{n}}$$

dir.

Çizgelerin en temel parametrelerinden biri olan derece dizilerine benzer olarak bir çizge için dışmerkezlilik derece dizisi tanımlanabilir. Yazarlar bu motivasyondan hareketle bazı tanımlar vermişlerdir.

Tanım 5.2.2. [95] G çizgesi $n \geq 2$ noktalı bağlantılı bir çizge olmak üzere,

- $v_i \in V(G)$ için dışmerkezlilik derecesi $\mathcal{E}(i) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij}(G)$
- $v_i \in V(G)$ için ikincil dışmerkezlilik derecesi $T_{\mathcal{E}}(i) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} \mathcal{E}(j)$

Tanım 5.2.3. [95] G çizgesi $n \geq 2$ noktalı bağlantılı bir çizge ve dışmerkezlilik derecesi $\{\mathcal{E}(1), \mathcal{E}(2), \dots, \mathcal{E}(n)\}$, ikincil dışmerkezlilik derecesi $\{T_{\mathcal{E}}(1), T_{\mathcal{E}}(2), \dots, T_{\mathcal{E}}(n)\}$ olmak üzere,

- $1 \leq i \leq n$ için $\mathcal{E}(i) = k$ ise G çizgesine dışmerkezlilik derece dizisi altında düzenlidir (regular) denir.
- $1 \leq i \leq n$ için $\frac{T_{\mathcal{E}}(i)}{\mathcal{E}(i)} = k$ ise G çizgesine dışmerkezlilik derece dizisi altında düzenimsidir (pseudo regular) denir.

Teorem 5.2.23. [95] G çizgesi $n \geq 2$ noktalı bağlantılı bir çizge ve dışmerkezlilik derecesi $\{\mathcal{E}(1), \mathcal{E}(2), \dots, \mathcal{E}(n)\}$, ikincil dışmerkezlilik derecesi $\{T_{\mathcal{E}}(1), T_{\mathcal{E}}(2), \dots, T_{\mathcal{E}}(n)\}$ olmak üzere,

- $\varepsilon_1 \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathcal{E}(j)$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart G çizgesinin dışmerkezlilik derece dizisi altında düzenli olmasıdır.
- $\varepsilon_1 \geq \sqrt{\frac{T_{\mathcal{E}}(1)^2 + T_{\mathcal{E}}(2)^2 + \dots + T_{\mathcal{E}}(n)^2}{\mathcal{E}(1)^2 + \mathcal{E}(2)^2 + \dots + \mathcal{E}(n)^2}}$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart G çizgesinin dışmerkezlilik derece dizisi altında düzenimsi olmasıdır.

Yine Wang ve diğer yazarlar aşağıdaki problemleri literatüre kazandırmışlardır.

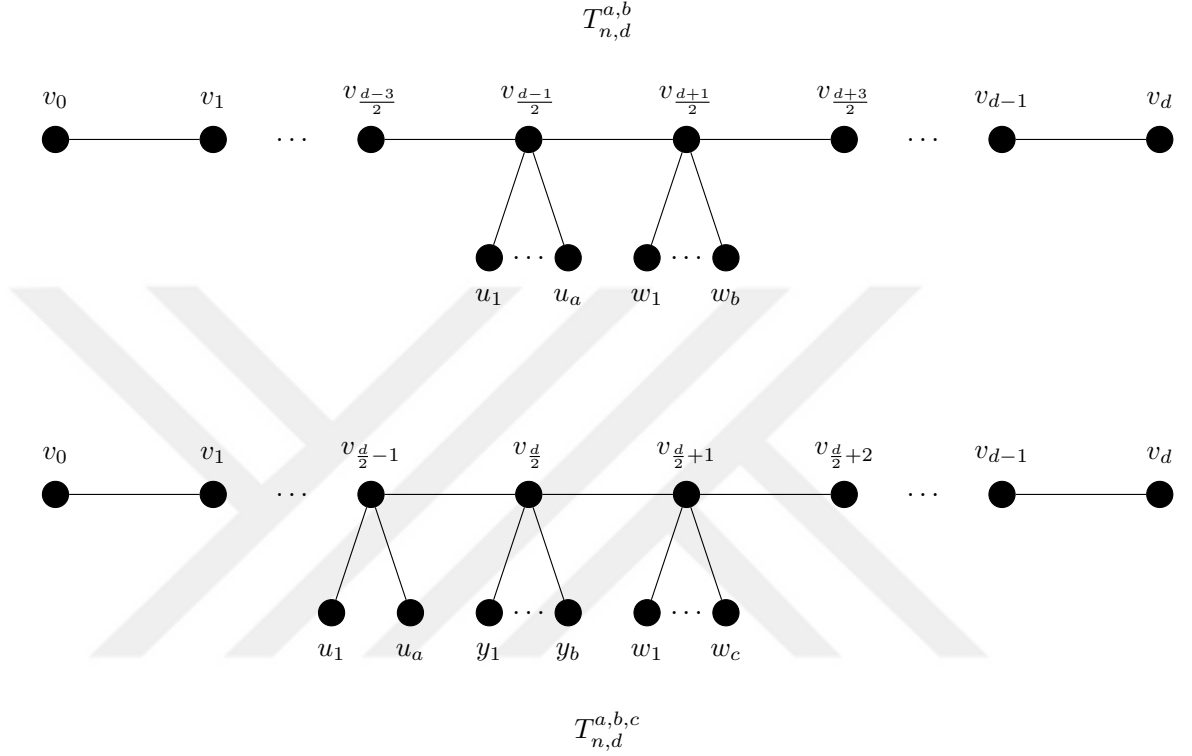
Problem 5.2.3. [95] Küçük sayıda farklı özdeğere (dışmerkezlilik matrisinin özdeğeri) sahip çizgeleri karakterize ediniz.

Problem 5.2.4. [95] Maksimum dışmerkezlilik spektral yarıçapına sahip ağaç çizgeleri hangileridir?

Problem 5.2.5. [95] En küçük dışmerkezlilik özdeğeri $\varepsilon_n = -d$ ($d \geq 3$) olan çizgeleri belirleyiniz.

Diğer bir araştırma makalesi Wei Wei, Xiaocong He ve Shuchao L isimli yazarlar tarafından kaleme alınmıştır [96]. Çalışmalarında ağırlıklı olarak iki varsayım üzerine yoğunlaşarak önemli sonuçlar elde ederek literatüre kazandırmışlardır. Varsayım 5.2.1 in hatalı olduğunu ve Varsayım 5.2.2 nin ise geçerli olduğunu ifade ederek gerekli teoremler, yardımcı teoremlerle vb. ifadeleri ispat etmişlerdir. Yani, Wei ve diğerleri Varsayım 5.2.1 için karşıt örnek bularak (16 noktalı bir ağaç çizge örneği ile) varsayımın

hatalı olduğunu ifade etmişlerdir. Devamında ise dışmerkezlilik matrisi için spektral yarıçap üzerine ekstremal sonuçları ifade ederek gerekli ispatları sunmuşlardır. Varsayım 5.2.2 ispatını verdikten sonra yazarlar en küçük özdeğer için aralık vererek makalelerini tamamlamışlardır.



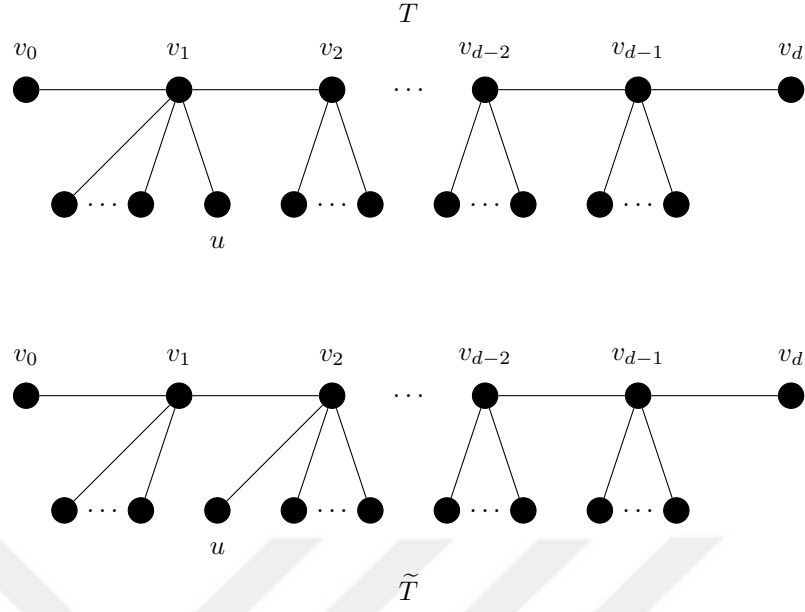
Şekil 5.4. $T_{n,d}^{a,b}$ ve $T_{n,d}^{a,b,c}$ ağaç çizge aileleri

Lemma 5.2.10. [96] G , n noktalı ve d çaplı bağlantılı bir çizge olsun. Bu durumda $\varepsilon_1(G) \geq d$ ve $\varepsilon_n(G) \leq -d$ dir.

Lemma 5.2.11. [96] $a + b = n - 4$ ve $b \geq a \geq 1$ koşullarını sağlayan $T_{n,3}^{a,b}$ ağaç çizge ailesi (Şekil 5.4), $\mathcal{T}_{n,3}$ (çapı 3 olan ağaç çizgeler) genel ailesinin alt kümesi olmak üzere, $\varepsilon_1(T_{n,3}^{a-1,b+1}) < \varepsilon_1(T_{n,3}^{a,b})$ eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 5.2.24. [96] $\mathcal{T}_{n,3}$ formunda ki tüm ağaç çizgeler içerisinde dışmerkezlilik matrisine ait en küçük spektral yarıçapa sahip yegane çizge ailesi $T_{n,3}^{a,n-4}$ dir.

Lemma 5.2.12. [96] n noktalı Tırtıl ağaç T , çap uzunluklu yolu $P_{d+1} = v_0, v_1, \dots, v_{d-1}, v_d$ ($d \geq 5$, tek) olan bir çizge ve kabul edelim ki $d_T(v_i) \geq 3$ olsun (Şekil 5.5). Bu durumda $\varepsilon_1(T) > \varepsilon_1(\tilde{T})$ eşitsizliği geçerlidir.



Şekil 5.5. T ve \tilde{T} ağaç çizge aileleri

Lemma 5.2.13. [96] Verilen n noktalı Tırtıl ağaç çizgesi T , çap uzunluklu yolu $P_{d+1} = v_0, v_1, \dots, v_{d-1}, v_d$ ($d \geq 7$, tek) olan bir ağaç çizge ve kabul edelim ki bazı $i \in \{2, 3, \dots, \frac{d-3}{2}\}$ için $d_T(v_i) \geq 3$, $d_T(v_1) = d_T(v_{d-1}) = 2$ olsun (Şekil 5.5). Bu durumda $\varepsilon_1(T) > \varepsilon_1(\tilde{T})$ eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 5.2.14. [96] $d \geq 5$ koşuluyla $\mathcal{T}_{n,d}$ formunda ki tüm ağaç çizgeleri içerisinde dışmerkezlilik matrisine ait en küçük spektral yarıçapa sahip çizge aileleri $a+b = n-d-1$ eşitliği kullanılarak $T_{n,d}^{a,b}$ ağaç çizgesinden elde edilir.

Lemma 5.2.15. [96] Verilen n noktalı Tırtıl ağaç çizgesi T , çap uzunluk yolu $P_{d+1} = v_0, v_1, \dots, v_{d-1}, v_d$ ($d \geq 8$) olan bir ağaç çizge ve kabul edelim ki bazı $i \in \{2, 3, \dots, \frac{d}{2} - 2\}$ için $d_T(v_i) \geq 3$, $d_T(v_1) = d_T(v_{d-1}) = 2$ olsun (Şekil 5.5). Bu durumda $\varepsilon_1(T) > \varepsilon_1(\tilde{T})$ eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 5.2.16. [96] Çap $d \geq 4$ koşuluyla $\mathcal{T}_{n,d}$ formunda ki tüm ağaç çizgeleri içerisinde dışmerkezlilik matrisine ait en küçük spektral yarıçapa sahip çizge aileleri $c \geq a \geq 0, b \geq 0$ eşitsizlikleri ve $a + b + c = n - d - 1$ eşitliği kullanılarak $T_{n,d}^{a,b,c}$ ağaç çizgesinden elde edilir.

Lemma 5.2.17. [96] Tek sayılı $d \geq 7$ çapa sahip ağaç çizgeleri içerisinde,

$$\varepsilon_1(T_{n,d-2}^{a+1,b+1}) < \varepsilon_1(T_{n,d}^{a,b})$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 5.2.18. [96] Çift sayılı $d \geq 6$ çapa sahip ağaç çizgeleri içerisinde,

$$\varepsilon_1(T_{n,d-1}^{a,b+c+1}) < \varepsilon_1(T_{n,d}^{a,b,c})$$

eşitsizlik geçerlidir.

Teorem 5.2.25. [96] $n \geq 4$ eşitsizlik koşulullu $\bigcup_{d=2}^4 \mathcal{T}_{n,d}$ ağaç çizge aileleri içerisinde dışmerkezlilik matrisine ait en küçük spektral yarıçapa sahip yegane ağaç çizge $T_{n,3}^{0,n-4}$ dir.

Teorem 5.2.26. [96] $\bigcup_{d \geq 5} \mathcal{T}_{n,d}$ ağaç çizge aileleri içerisinde dışmerkezlilik matrisine ait en küçük spektral yarıçapa sahip yegane ağaç çizge $T_{n,5}^{\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-6}{2} \rceil}$ dir.

Teorem 5.2.27. [96] T ağaç çizgesi n noktalı olmak üzere,

- i. Eğer $4 \leq n \leq 15$ ise, $\varepsilon_1(T) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{13n - 35 + \sqrt{(13n - 35)^2 - 64(n - 3)}}$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart $T \cong T_{n,3}^{0,n-4}$.
- ii. Eğer $n \geq 16$ ve n tek ise, $\varepsilon_1(T) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{16n - 21 + \sqrt{800n - 1419}}$. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart $T \cong T_{n,5}^{\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-6}{2} \rceil}$.
- iii. Eğer $n \geq 16$ ve n çift ise, $\varepsilon_1(T) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{16n - 21 + 5\sqrt{32n - 67}}$. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart $T \cong T_{n,5}^{\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-6}{2} \rceil}$.

Teorem 5.2.28. [96] $\mathcal{T}_{n,4}$ formunda ki tüm ağaç çizge aileleri içerisinde dışmerkezlilik matrisine ait en küçük spektral yarıçapa sahip çizge ailesi $T_{n,4}^{0,n-5,0}$ dir.

Teorem 5.2.29. [96] $d \geq 5$ olacak şekilde tek sayılı çapa sahip $\mathcal{T}_{n,d}$ formunda ki tüm ağaç çizgeleri içerisinde dışmerkezlilik matrisine ait en küçük spektral yarıçapa sahip çizge ailesi $T_{n,d}^{\lfloor \frac{n-d-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-d-1}{2} \rceil}$ dir.

Teorem 5.2.30. [96] $d \geq 6$ olacak şekilde çift sayılı çapa sahip $\mathcal{T}_{n,d}$ formunda ki tüm ağaç çizgeleri içerisinde dışmerkezlilik matrisine ait en küçük spektral yarıçap sahip çizge ailesi $T_{n,d}^{\lfloor \frac{n-d-1}{2} \rfloor, 0, \lceil \frac{n-d-1}{2} \rceil}$ dir.

Teorem 5.2.31. [96] G çizgesi $n \geq 3$ noktalı ve $\Delta(G) \leq n - 2$ olan bağlantılı bir çizge olmak üzere $\varepsilon_n(G) = -2\sqrt{2}$ olması için gerek ve yeter şart, her $n_i \geq 2$ ve ya $s \geq 2, k = 0$ yada $s \geq 1, k \geq 1$ koşulu ile birlikte $G \cong (\bigcup_{i=1}^s P_3)^c + (K_{n_1} \cup \dots \cup K_{n_k})^c$ olmasıdır.

Wei wei ve diğer araştırmacılar genel bağlantılı çizgelerin dışmerkezlilik matrisine ait en küçük özdeğer için koşullu olarak aşağıdaki teoremi ifade ve ispat ederek makalelerine son vermişlerdir.

Teorem 5.2.32. [96] G çizgesi n noktalı ve $\Delta(G) \leq n - 2$ olan bağlantılı bir çizge olmak üzere, $\varepsilon_n(G) \in [-2\sqrt{2}, -2]$ olması için gerek ve yeter şart her bir $n_i \geq 2, 1 \leq i \leq k$ ve $k \geq 2$ olmak üzere $G \cong K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ olması yada her $n_i \geq 2$ veya $s \geq 2, k = 0$ yada $s \geq 1, k \geq 1$ koşulu ile birlikte $G \cong (\bigcup_{i=1}^s P_3)^c + (K_{n_1} \cup \dots \cup K_{n_k})^c$ olmasıdır.

Xingyu Lei, Jianfeng Wang ve Guozheng Li isimli araştırmacılar *On the eigenvalues of eccentricity matrix of graphs* başlıklı makalelerinde [97] spektral çizge kuramının başka bir araştırma konularından biri olan en küçük ikinci özdeğer üzerine önemli sonuçları ifade/ispat etmişlerdir. Ayrıca yazarlar spektrumları ile belirli olan çizgelerin tasnifi ile ilgili dikkate değer sonuçlar elde etmişlerdir. Son olarak bazı çizgelerin dışmerkezlilik matrisine ait enerjileri için sınırlar ve üç farklı dışmerkezlilik özdeğerine sahip çizgeler baz alınarak çeşitli karakterizasyonlar yapmışlardır. Xingyu ve diğer yazarlar ana sonuçlarını üç temel teoreme ayırmışlardır.

Teorem 5.2.33. [97] G çizgesi $n \geq 3$ noktalı ve d çaplı bir çizge olsun bu durumda $\varepsilon_{n-1} < 0$ eşitsizliği sağlanır. Dahası,

- $\varepsilon_{n-1} \in (-\frac{4}{5}, 0) \iff G \cong K_{n-2,1}^1.$
- $\varepsilon_{n-1} \in (-1, -\frac{4}{5}) \iff G \cong K_{s,t}^1, s \geq t \geq 2.$
- $\varepsilon_{n-1} = -1 \iff G \cong P_4$ veya $G \cong K_{s,t}^r, s \geq t \geq 1$ yada $r + s \geq 3$ ve $t = 0.$
- $\varepsilon_{n-1} \notin (-\sqrt{15 - \sqrt{193}}, -1).$
- $\varepsilon_{n-1} \leq -\sqrt{15 - \sqrt{193}} \iff d \geq 3$ ve $n \geq 5$ yada $d = 2$ ve G çizgesi $K_{1,3}, P_4, C_4$ alt çizgelerini indirgenmiş olarak içerir.

Yukarıda ifade edilen teoremde bulunan çizge ailesi $K_{s,t}^t = K_r \wedge (K_s \cup K_t), r \geq 1, s \geq t \geq 0$ olacak şekilde tam çizgeler ve çizge operasyonları vasıtası ile oluşturulmuş bir ailedir. Bu önemli teoreminin çıktısı olarak yazarlar aşağıda ki teoremi spektral belirlenebilirlik adına ifade ve ispat etmişlerdir.

Teorem 5.2.34. [97] En küçük ikinci özdeğeri $\varepsilon_{n-1} > -\sqrt{15} - \sqrt{193}$ olan tüm çizgeler dışmerkezlilik spektrumu ile belirlidir.

Teorem 5.2.33 ve Teorem 5.2.34 nin ispatı için aşağıda yer alan lemmalar elde edilmiştir. Daha önceki literatür taramasında ifade ettiğimiz gibi $\mathcal{E}(i) = \sum_{j=1}^n \epsilon_{ij}$, $T_{\mathcal{E}}(i) = \sum_{j=1}^n \epsilon_{ij} \mathcal{E}(j)$ ve $S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \epsilon_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ eşitlikleri yazarlar tarafından kullanılmıştır. Xingyu Lei ve diğer yazarlar az sayıda dışmerkezlilik özdeğerlerine sahip çizgelerin karakterizasyonu motivasyonundan hareketle çizge işlemleri ile oluşturdukları çizge ailesinin özdeğerlerini oldukça kısıtlayıcı koşullar altında ifade ve ispat etmişlerdir.

Lemma 5.2.19. [97] G çizgesi $n \geq 3$ noktalı bağlantılı bir çizge olsun. $G \cong K_{s,t}^r$ ($r \geq 1, s \geq t$) olması için gerek ve yeter şart G 'nin $K_{1,3}, P_4, C_4$ çizgelerini indirgenmiş alt çizge olarak içermemesidir.

Lemma 5.2.20. [97] $G \cong K_{s,t}^r$ çizgesi $r \geq 1$ ve $s \geq t \geq 0$ koşullarını sağlasın, bu durumda çizgenin spektrumları,

$$Spec_{\varepsilon}(G) = \left\{ \begin{array}{ccccc} w_1 + w_2 + \frac{r-1}{3} & 0 & w^3 w_1 + w^2 w_2 + \frac{r-1}{3} & -1 & w^3 w_1 + w^3 w_2 + \frac{r-1}{3} \\ 1 & s+t-2 & 1 & r-1 & 1 \end{array} \right\}$$

eşitlikte;

$$p = 1/3(-3(rs + rt + 4st) - (1 - r)^2),$$

$$q = 1/27(2(1 - r)^3 + 9(1 - r)(rs + rt + 4st) - 108st) \text{ olmak üzere,}$$

$$w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, w_1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{p}{3}}}, w_2 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{p}{3}}}$$

Dahası,

$$\text{i. } \varepsilon_{n-1}(K_{s,t}^r) \in \left(-\frac{4}{5}, 0\right) \iff r = 1, s \geq t = 1.$$

$$\text{ii. } \varepsilon_{n-1}(K_{s,t}^r) \in \left(-1, -\frac{4}{5}\right) \iff r = 1, s \geq t \geq 2.$$

$$\text{iii. } \varepsilon_{n-1}(K_{s,t}^r) = -1 \iff r \geq 2, s \geq t \geq 1 \text{ yada } r + s \geq 3, t = 0.$$

verilen yardımcı teoremin (lemma) aşırı kısıtlamalardan oluşturulduğu net bir şekilde görülmektedir. Test edilebilirlik açısından sorunlu görünsede verilen spektrum eşitliği küçük sayıda özdeğer içeren çizgeleri anlamada önemli bir yere sahiptir. Yazarlar ana sonuçları ispat edebilmek için Cauchy arada olma teoremini ve kullanışlı bazı yardımcı teoremleri kullanmıştır.

Lemma 5.2.21. [97] G çizgesi $n \geq 3$ noktalı ve $d \leq 2$ çaplı bağlantılı bir çizge ise $\varepsilon_{n-1} < 0$ dir. Dahası,

- $\varepsilon_{n-1} \in (-\frac{4}{5}, 0) \iff G \cong K_{n-2,1}^1$.
- $\varepsilon_{n-1} \in (-1, -\frac{4}{5}) \iff G \cong K_{s,t}^1, (s \geq t \geq 2)$.
- $\varepsilon_{n-1} = -1 \iff G \cong K_{s,t}^r, r \geq 2$ and $s \geq t \geq 1$ yada $r + s \geq 3$ ve $t = 0$ koşulları altında.
- $\varepsilon_{n-1} \notin (1 - \sqrt{5}, -1)$.
- $\varepsilon_{n-1} \leq 1 - \sqrt{5}$ olması için gerek ve yeter şart G çizgesinin $K_{1,3}, P_4, C_4$ çizgelerini indirgemiş alt çizge olarak içermesidir.

Lemma 5.2.22. [97] G çizgesi n noktalı ve $d \geq 4$ çaplı bağlantılı bir çizge olsun. Bu durumda $\varepsilon_{n-1} \leq 2 - \sqrt{13}$ eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 5.2.23. [97] G çizgesi $n \geq 4$ noktalı ve $d = 3$ çaplı bağlantılı bir çizge olsun. Bu durumda,

- $\varepsilon_{n-1} = -1 \iff G \cong P_4$
- $\varepsilon_{n-1} \notin (-\sqrt{15 - \sqrt{193}}, -1)$.
- $\varepsilon_{n-1} \leq -\sqrt{15 - \sqrt{193}}, n \geq 5$

Teorem 5.2.35. [97] G çizgesi $n \geq 2$ noktalı bir çizge olsun. Bu durumda,

$$E_{\mathcal{E}}(G) \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n T_{\mathcal{E}^2(i)}}{\sum_{i=1}^n \mathcal{E}^2(i)}} + \sqrt{(S - \frac{\sum_{i=1}^n T_{\mathcal{E}^2(i)}}{\sum_{i=1}^n \mathcal{E}^2(i)})(n-1)}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart G çizgesinin 2-zıtkutuplu çizge olması veya dışmerkezlilik dizisi altında k düzenimsi çizge olması ki bu çizgenin spektrumları,

$$Spec_{\varepsilon}(G) = \left\{ \begin{array}{ccc} k & \sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}} & -\sqrt{\frac{S-k^2}{n-1}} \\ 1 & m & n-1-m \end{array} \right\}$$

şeklindedir ($m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$).

Üçüncü ana teorem olarak yazarlar dışmerkezlilik matrisinin enerjisi ile ilgili üst sınır eşitsizliğinin ifade/ispat etmişlerdir. Matris enerjisi kavramının popülerliği ve prestiji düşünüldüğünde gerek bu doktora tezinde gerekse sonraki akademik çalışmalarda sıklıkla enerji kavramına atıfta bulunulacaktır.

Xingyu Lei ve diğer çalışma arkadaşları yoğun hesaplamalar ve matris teori ile ana çatıyı oluşturan teoremlerini ifade ve ispat etmişlerdir. Makalenin tez için en önemli yanlarından biri de son bölümle verilen önerme, sonuç ve açık problemlerdir. Sonraki akademik çalışmalarda bizlere ve yeni araştırmacılara motivasyon oluşturması amacıyla makalenin son bölümü bu kısma alıntılıyoruz.

Önerme 5.2.3. [97] G çizgesi n noktalı ve 2 yarıçapa sahip k düzenli çizge olsun, eğer $\Delta(G) < n - 1$ ise G çizgesinin 3 farklı dışmerkezlilik özdeğerine sahip olması için gerek ve yeter şart G çizgesinin güçlü düzenli (strongly regular) olmasıdır.

Sonuç 5.2.4. [97] G çizgesinin bir ve yalnız bir negatif dışmerkezlilik özdeğerine sahip olması için gerek ve yeter şart $G \cong P_2$ olmasıdır.

Makalede sunulan problemleri bütünlük ve erişilebilirlik amacıyla aşağıdaki düzende ifade edebiliriz.

Problem 5.2.6. [97]

- İki pozitif ve bir negatif dışmerkezlilik özdeğerlerine sahip çizgeleri belirleyin.
- Üç farklı pozitif dışmerkezlilik özdeğerlerine sahip çizgeleri karakterize edin.
- Parametreleri $(n, r, \lambda, \lambda + 2)$ olan güçlü düzenli çizgeleri tasnif edin.
- İki tane negatif dışmerkezlilik özdeğerlerine sahip çizgeleri belirleyin.

Dışmerkezlilik matrisi 2020 li yıllarda gördüğü ilgi katlanarak 2021 yılında da farklı araştırmacılar tarafından incelenmeye devam etmiştir. Ajay Kumar Patel, Lavanya Selvaganesh ve Sanjay Kumar Pandey isimli araştırmacılar dışmerkezlilik enerjisi ve özdeğer eylemsiziği üzerine makale kaleme almışlardır [98]. Makalelerinde öncelikle dışmerkezlilik matrisinin indirgenemez ailelerinin oluşturulması ve oluşturulan bu çizge ailesinin spektral özelliklerinin belirlenmesi konusunda verimli sonuçlar elde etmişlerdir. Doktora tezinde bu makaleye yer vermemizin en önemli gerekçesi, danışmanımızla birlikte

yoğunlaştığımız kavramlardan biri olan *indirgenabilirlik/indirgenemezlik* konusu üzerine çalışılmış olmasıdır. Sonuç olarak yazarlar bazı özel çizge aileleri için çizge işlemi altında çeşitli sonuçlar elde ederek literatüre kazandırmıştır. Rüzgar gülü çizge ailesinin oluşum yapısı dikkate alan yazarlar *toplaşım* olarak isimlendirilen çizge işlemi genelleştirerek çeşitli sonuçlar elde etmiştir.

Tanım 5.2.4. [98] G ve H iki farklı çizge olmak üzere, çizgelerin ayırt edici nokta/noktaların çakıştırılması ile yeni çizge oluşturma işlemine toplaşım (coalescence) işlemi denir ve $G * H$ ile gösterilir. Kolayca söylenebilir ki rüzgar gülü çizgesi için çizge işlemi aşağıda ki formda genelleştirilebilir.

$$W_n^{(m)} \cong \underbrace{K_n * K_n * \dots * K_n}_{m\text{-tane}}$$

Teorem 5.2.36. [98] $a_1, a_2, \dots, a_m \geq 2$ olmak üzere $G \cong K_{a_1} * K_{a_1} * \dots * K_{a_m}$ çizgesi indirgenemez dışmerkezlilik matrisine sahiptir.

Teorem 5.2.37. [98] $a, b \geq 3$ olmak üzere $G \cong K_a * K_b$ çizgesinin spektrumları,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \left\{ \begin{array}{cccc} 2\sqrt{R} \cos \frac{\theta}{3} & 0 & 2\sqrt{R} \cos \frac{\theta+4\pi}{3} & 2\sqrt{R} \cos \frac{\theta+2\pi}{3} \\ 1 & a+b-4 & 1 & 1 \end{array} \right\}$$

$$\text{ve } E_{\mathcal{E}}(G) = 4\sqrt{R} \cos \frac{\theta}{3} = 2\rho(\mathcal{E}(G)), R = \frac{1}{3}(4ab - 3(a+b) + 2), \theta = \cos^{-1} \left(\frac{2(a-1)(b-1)}{\sqrt{R^3}} \right)$$

Sonuç 5.2.5. [98] $a, b \geq 3$ olmak üzere $G \cong K_n * K_m$ çizgesinin dışmerkezlilik matrisine göre eylemsizliği,

$$In(\mathcal{E}(G)) = (n_+ = 1, n_- = 2, n_0 = a + b - 4)$$

Teorem 5.2.38. [98] $G \cong W_{n+1}^{(m)}$ çizgesinin spektrumu,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \left\{ \begin{array}{cccc} b + \sqrt{b^2 + mn} & 0 & b - \sqrt{b^2 + mn} & -2n \\ 1 & m(n-1) & 1 & m-1 \end{array} \right\}$$

$$\text{ve } E_{\mathcal{E}}(G) = 2(b + \sqrt{b^2 + mn}) = 2\rho(\mathcal{E}(G)), b = n(m-1)$$

Sonuç 5.2.6. [98] $G \cong W_{n+1}^{(m)}$ çizgesi rüzgar gülü olmak üzere dışmerkezlilik matrisine göre eylemsizliği,

$$In(\mathcal{E}(G)) = (n_+ = 1, n_- = m, n_0 = m(n-1))$$

Teorem 5.2.39. [98] İndisler $a_1, a_2, \dots, a_m \geq 2$ olmak üzere $G \cong K_{a_1} * K_{a_1} * \dots * K_{a_m}$ çizgesi için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

- $n_+(G) = 1.$
- $n_0(G) = |G| - m - 1.$
- $n_-(G) = m.$
- $E_{\mathcal{E}}(G) = 2\rho(\mathcal{E}(G))$

Patel ve diğerleri son bölüm olarak döngü çizgesinin toplama işlemi altında spektral özelliklerini inceleyerek dışmerkezlilik matrisinin rankını, spektrumlarını, enerjisini ve eylemsizliğini ifade ve ispat etmişlerdir [98].

Teorem 5.2.40. [98] Herhangi bir $m \geq 3$ nokta sayısı için $G \cong C_m * C_m$ çizgesi için $rank(\mathcal{E}(G)) = 4$ eşitliği geçerlidir.

Lemma 5.2.24. [98] $G \cong C_m * C_m$ çizgesi için,

i. Eğer $m = 2k$ ($k \geq 2$) ise,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \begin{pmatrix} k+a & -k+b & a & k-a & -k-b \\ 1 & 1 & 4k-5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = \sqrt{\frac{k(14k^2-6k+1)}{3}} \text{ ve } b = \sqrt{\frac{k(14k^2-12k+1)}{3}}$$

ii. Eğer $m = 2k + 1$ ($k \geq 1$) ise,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \begin{pmatrix} 2k+c & -2k+d & 0 & 2k-c & -2k-d \\ 1 & 1 & 4k-3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c = \sqrt{\frac{2k(14k^2-3k+1)}{3}} \text{ ve } b = \sqrt{\frac{2k(14k^2-9k+1)}{3}}$$

Teorem 5.2.41. [98] $C_m * C_m$ çizgesi için,

i. $E_{\mathcal{E}}(C_{2k} * C_{2k}) = 2\sqrt{\frac{k}{3}}(\sqrt{14k^2 - 6k + 1} + \sqrt{14k^2 - 12k + 1}), k \geq 2$

ii. $E_{\mathcal{E}}(C_{2k+1} * C_{2k+1}) = 2\sqrt{\frac{2k}{3}}(\sqrt{14k^2 - 3k + 1} + \sqrt{14k^2 - 9k + 1}), k \geq 1$

Sonuç 5.2.7. [98] $C_m * C_m$ çizgesi için,

- $n_+(C_m * C_m) = 2$.
- $n_0(C_m * C_m) = 2m - 5$.
- $n_-(C_m * C_m) = 2$.

Dışmerkezlilik matrisinin yeni bir matris olması sebebi ile dünyanın çeşitli kesimlerinden (özellikle Çinli ve İranlı araştırmacılar tarafından) yoğun bir şekilde araştırılmaktadır. Ayrıca matrisin mesafe ile olan ilginç ilişkisi disiplinler arası çalışmalara öncelik veren akademik platformda dikkatle takip edilmektedir. Spektral çizge kuramının popüler ilgi alanlarından biri ise topolojik indisler ile moleküler özellikler arasında kurulabilecek ilişkilerin incelenmesidir. Yani, \mathcal{T} topolojik indeksi, M molekülü ve \mathcal{P} arzu edilen fizikokimyasal özelliği göstermek üzere $\mathcal{T}(G) \iff \mathcal{P}(M)$ olması için gerek ve yeter koşulların belirlenmesidir. Bu bağlamda aşağıda atıfta bulunacağımız makale ve seçilmiş sonuçları Türkçe akademik içerik oluşturma açısından önem arz etmektedir (sonraki çalışmaları motive edeceği inancındayız). Wang ve diğerleri *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* isimli dergi de dikkate değer bir makale kaleme almışlardır [99].

Teorem 5.2.42. [99] G bağlantılı bir çizge olmak üzere, dışmerkezlilik matrisinin spektral yarıcapı en büyük özdeğerine eşittir. Yani,

$$\rho(\mathcal{E}(G)) = \varepsilon_1$$

Lemma 5.2.25. [99] $G \cong K_t + K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ çizgesi n noktalı $(k + t)$ parçalı çizge olmak üzere (her bir $n_i \geq 2$),

- Eğer $t = 0, k = 1$ yada $t = 1, k = 0$ ise $\phi_{\mathcal{E}}(G, \lambda) = \lambda^n$.
- Eğer $t = 0, k \geq 2$ ise $\phi_{\mathcal{E}}(G, \lambda) = (\lambda - 2n_1 + 2) \dots (\lambda - 2n_k + 2)(\lambda + 2)^{n-2}$.
- Eğer $t \geq 2, k = 0$ ise $\phi_{\mathcal{E}}(G, \lambda) = (\lambda - n + 1)(\lambda + 1)^{n-1}$.
- Eğer $t \geq 1, k \geq 1$ ise,

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{E}}(G, \lambda) = & (\lambda + 1)^{t-1}(\lambda + 2)^{n-t-k} [(\lambda - t + 1)(\lambda - 2n_1 + 2) \dots ((\lambda - 2n_k + 2)) \\ & - tn_1(\lambda - 2n_2 + 2) \dots (\lambda - 2n_k + 2) \\ & - tn_2(\lambda - 2n_1 + 2) \dots (\lambda - 2n_k + 2) \\ & \dots \\ & - tn_k(\lambda - 2n_1 + 2) \dots (\lambda - 2n_{k-1} + 2)]. \end{aligned}$$

Sonuç 5.2.8. [99] $G \cong K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ çizgesi n noktalı k parçalı tam çizge olmak üzere eğer $k \geq 2$ ve $n_i \geq 2, 1 \leq i \leq k$ ise,

$$Spec_\varepsilon(G) = \left\{ \begin{array}{cccc} 2n_1 - 2 & \dots & 2n_k - 2 & -2 \\ 1 & \dots & 1 & n - k \end{array} \right\}$$

dir. Özel olarak çizge kokteyl parti alınırsa $CP(n) \cong K_{2, 2, \dots, 2}, n = 2k$ için,

$$Spec_\varepsilon(CP(n)) = \left\{ \begin{array}{cc} 2 & -2 \\ k & k \end{array} \right\}$$

Lemma 5.2.26. $G \cong (\bigcup_{i=1}^t K_{n_i})^c + (sP_3)^c$ çizgesi n noktalı bağlantılı bir çizge olmak üzere,

i. Eğer $t = 0, s \geq 2$ ise,

$$Spec_\varepsilon(G) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} \\ s & s & s \end{array} \right\}$$

ii. Eğer $t \geq 1, s \geq 1$ ise,

$$Spec_\varepsilon(G) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2n_1 - 2 & \dots & 2n_t - 2 & 2\sqrt{2} & 0 & -2 & -2\sqrt{2} \\ 1 & \dots & 1 & s & s & n - t - 3s & s \end{array} \right\}$$

Jianfeng Wang ve diğerleri dışmerkezlilik matrisinin spektral yarıçapının karakterizasyonu için çizge işlemlerinden yararlanarak çeşitli sonuçları ifade/ispat etmişlerdir.

Teorem 5.2.43. [99] G çizgesi $n \geq 4$ noktalı bağlantılı bir çizge olsun. $\varepsilon_1 \geq 2$ olması için gerek ve yeter şart $G \cong CP(n)$ olmasıdır. Dahası $\varepsilon_1 \geq 2\sqrt{2}$ olması için gerek ve yeter şart $t = 0, s \geq 2$ yada $t \geq 1, s \geq 1$ koşulu ile birlikte $G \not\cong CP(n)$ ve $G \cong (tP_2)^c + (sP_3)^c$ olmasıdır.

Lemma 5.2.27. [99] G çizgesinin çok parçalı tam çizge olması için gerek ve yeter şart $K_1 \cup K_2$ alt çizgesini indirgenmiş alt çizge olarak içermemesidir.

Lemma 5.2.28. [99] $G \cong K_t + K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ çizgesi n noktalı $(k + t)$ parçalı çizge olmak üzere (her bir $n_i \geq 2$ ve $1 \leq k \leq 4$), eğer $t = 1, 1 \leq k \leq 2, t = 2, 1 \leq k \leq 3$ yada $t \geq 3, 1 \leq k \leq 2$ ise $\varepsilon_n = -2$.

Teorem 5.2.44. [99] G çizgesi $n \geq 2$ noktalı bağlantılı bir çizge olsun. $\varepsilon_n \leq -1$ eşitsizliğinde eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong K_n$ olmasıdır. Dahası $G \not\cong K_n$ için $\varepsilon_n \leq -2$ eşitsizliğinde eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart ya $k \geq 2$ ve her $n_i \geq 2$ koşulu ile $G \cong K_{n_1, \dots, n_k}$ olması yada $n_i \geq 2$ koşulu ile $G \cong K_t + K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ olmasıdır ($t = 1$ ise $1 \leq k \leq 2$, $t = 2$ ise $1 \leq k \leq 3$ yada $t \geq 3$ ise $1 \leq k \leq 2$ koşulları altında).

Teorem 5.2.45. [99] $G \cong \{K_{1, n_1, \dots, n_6} : n_1, \dots, n_6 \geq 2\}$ koşulunu sağlayan bağlantılı bir çizge olmak üzere $\varepsilon_n = -2\sqrt{2}$ olması için gerek ve yeter şart $G \cong (\bigcup_{i=1}^t K_{n_i})^c + (sP_3)^c$ olmasıdır ($1 \leq i \leq k$ için $n_i \geq 2$ ve $k = 0$, $s \geq 2$ yada $k \geq 1$, $s \geq 1$ koşulları altında).

Lemma 5.2.29. [99] Her bir $n_i \geq 2$ ve $t \geq 1$ olmak üzere $G \cong K_t + K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ çizgesi n noktalı $(k + t)$ parçalı çizge olsun.

- i. $K_t + n_1 K_1$ çizgesinin dışmerkezlilik matrisine ait -1 ve -2 özdeğerlerinin katı sırasıyla $t - 1$ ve $n - t - 1$ dir.
- ii. $K_t + K_{n_1, n_2}$ çizgesinin dışmerkezlilik matrisine ait -1 ve -2 özdeğerlerinin katı sırasıyla $t - 1$ ve $n - t - 2$ dir.
- iii. K_{1, n_1, n_2, n_3} çizgesinin dışmerkezlilik matrisine ait -1 ve -2 özdeğerlerinin katı sırasıyla 0 ve $n - 4$ dir.
- iv. $K_2 + K_{n_1, n_2, n_3}$ çizgesinin dışmerkezlilik matrisine ait -1 ve -2 özdeğerlerinin katı sırasıyla 1 ve $n - 4$ dir.
- v. $K_{1, n_1, n_2, n_3, n_4}$ çizgesinin dışmerkezlilik matrisine ait -1 ve -2 özdeğerlerinin katı sırasıyla 0 ve $n - 4$ dir.

Ayrıca dışmerkezlilik matrisine ait eşspektrumlu çizge ailelerinin belirlemesi üzerinde çeşitli sonuçlar elde etmişlerdir.

Lemma 5.2.30. [99] $n_i, n'_i \geq 0$ olacak şekildeki K_{n_1, n_2, n_3, n_4} ve $K_{n'_1, n'_2, n'_3, n'_4}$ çizgelerinin eşspektrumlu olması için gerek ve yeter şart her $a \geq 2$ için,

$$(n_1, n_2, n_3, n_4) = (a + 1, a, a, a) \text{ ve } (n'_1, n'_2, n'_3, n'_4) = (a, a, a, a)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

Teorem 5.2.46. [99] G çizgesi $n \geq 2$ noktalı bağlantılı bir çizge olsun.

- i. Eğer $\rho(\mathcal{E}(G)) \in \{2, 2\sqrt{2}\}$ ise G çizgesi dışmerkezlilik matrisine ait spektruma göre belirlidir.
- ii. Eğer $\varepsilon_n = -2$ ise G çizgesinin dışmerkezlilik matrisine ait spektruma göre belirli olması için gerek ve yeter şart,

$$G \notin \{K_{a+1,a,a,a} : a \geq 2\} \cup \{K_{1,a,a,a,a} : a \geq 2\}$$

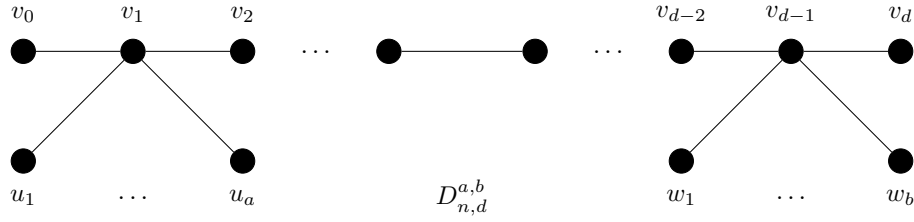
dir. Dahası $a \geq 2$ tamsayısı için sadece $K_{a+1,a,a,a}$ ve $K_{1,a,a,a,a}$ çizgeleri eşspektrumludur.

Jianfeng Wang ve diğer araştırmacılar makalelerinde ki son bölümü kimyasal çizge kuramının popüler çalışma alanlarından biri olan topolojik indisler ve moleküller arasındaki ilişkinin analizine ayırmışlardır. Literatürde sıkça karşılaşılan molekül yapılarından biri olan benzoid hidrokarbon ailesine (21 tane) ait kaynama noktasının, dışmerkezlilik matrisine ait spektral yarıçap, birincil ve ikincil bağlantılılık indeksi, Wiener indeksi, birincil ve ikincil dışmerkezlilik-bağlantılılık indeksi ile olan ilişkilerinin tablo ve grafikler yardımı ile ifade ederek gerekli-geçerli yorumlarda bulunmuşlardır. Öncelikle *Maplesoft* programı ile spektral yarıçap ve topolojik indisleri hesaplamışlardır. Devamında benzoid hidrokarbonların kaynama noktası ile bu değerler arasında ki ilişkiyi dağılım grafiğinde görselleştirmişlerdir. Lineer regresyon metotları vasıtası ile mevzu bahis ilişkinin güçlü(zayıf) regresyon katsayılarını hesaplamışlardır. Özetle kaynama noktası ve spektral yarıçap, birincil/ikincil dışmerkezlilik-bağlantılılık indeksleri arasında güçlü bir ilişki olduğunu ifade etmişleridir (yaklaşık olarak ilişki katsayıları 0.8751, 0.9128). Diğer taraftan yazarlar oktan izomerlerinin fiziko-kimyasal özellikleri ile topolojik indisler (enerji de dahil) arasındaki ilişkiyi de benzer olarak incelemişlerdir. Dikkat edilecek olursa ilişkiler her zaman olumlu sonuçlar vermemiştir. Dışmerkezlilik matrisine ait enerji ve oktan izomerlerinin özellikleri arasında ki ilişki katsayısı yaklaşık olarak 0.6 dır. Makalenin sonuç bölümünde ise yazarlar genel bir değerlendirme yaparak dışmerkezlilik matrisine ait spektral özelliklerin literatürde ki yerini vurgulamışlardır. Xiacong He isimli araştırmacı 2022 tarihli makalesinde ağaç çizgelerin dışmerkezlilik matrisine göre spektral özellik tahlilinde bulunarak aşağıdaki problemlere kayda değer yaklaşımlar getirmiştir [100].

Problem 5.2.7. [95] Hangi çizgeler maksimum dışmerkezlilik spektrumuna sahiptir?

Yukarıdaki problem Problem 5.2.4 ün genel bir halidir.

Problem 5.2.8. [100] Verilen bazı $c \leq -2\sqrt{2}$ sayıları için $[c, -2\sqrt{2})$ aralığına düşen en küçük dışmerkezlilik özdeğerine sahip ağaç çizge hangisidir?



Şekil 5.6. Lemma 5.2.31 de kullanılan özel tanımlı ağaç çizge ailesi

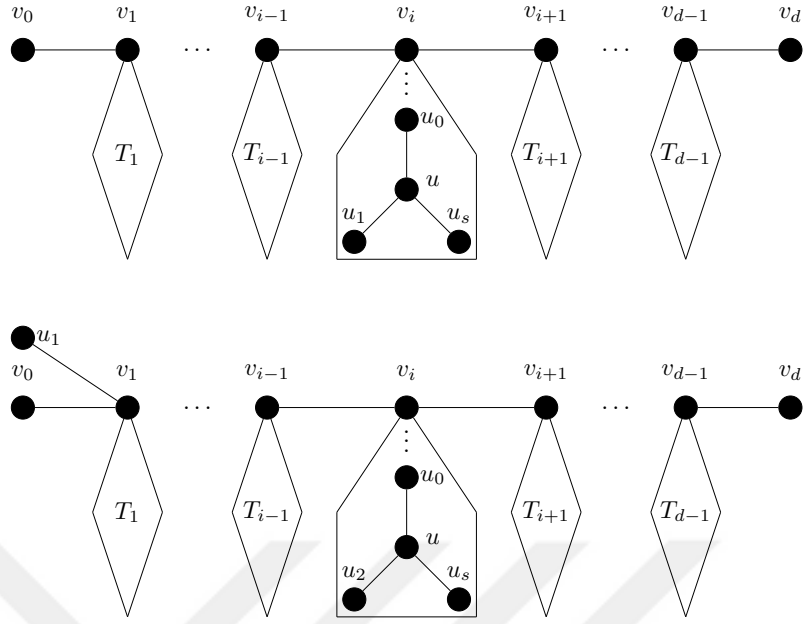
$\mathcal{T}_{n,d}$ çizge ailesi n noktalı ve d çaplı ağaç çizmelerini göstermek üzere,

Lemma 5.2.31. [100] $a + b = n - 4$ ve $b \geq a \geq 1$ koşullarını sağlayan $D_{n,3}^{a,b} \in \mathcal{T}_{n,3}$ çizge ailesi için $\varepsilon_1(D_{n,3}^{a-1,b+1}) < \varepsilon_1(D_{n,3}^{a,b})$ eşitsizliği geçerlidir.

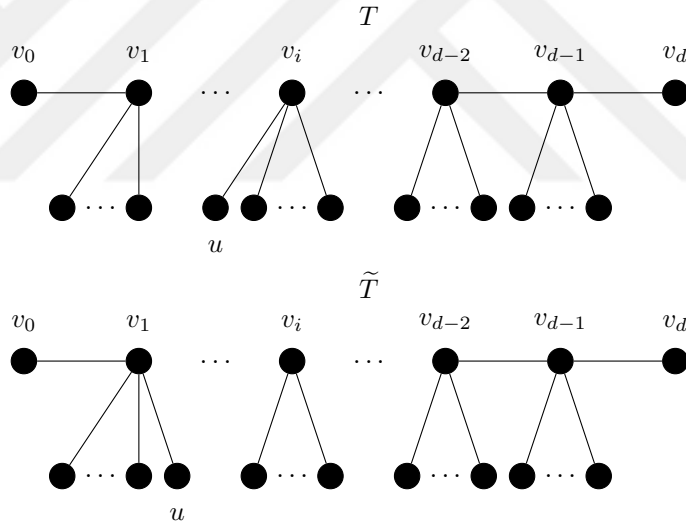
Teorem 5.2.47. [100] $\mathcal{T}_{n,3}$ tüm ağaç çizmeleri arasında en büyük spektral yarıçapa sahip yegane çizge $D_{n,3}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-4}{2} \rceil}$ formuna sahip ağaç çizge ailesidir.

Lemma 5.2.32. [100] $T \in \mathcal{T}_{n,d}$ ağaç çizmesi çapsal uzunluk yolu $P_{d+1} = v_0, v_1, \dots, v_{d-1}, v_d$ ($d \geq 5$, tek sayı) olan bir ağaç çizme ve $j \in \{0, 1, \dots, d\}$ koşulu ile T_j , v_j yi içeren $T - E(P_{d+1})$ çizmesinin bağlantılı bileşeni olsun. Kabul edelim ki bir $u_1 \in V(T_i)$ ($2 \leq i \leq \frac{d-1}{2}$) noktası olsun öyle ki, $d_{T_i}(v_i, u_1) = ecc_{T_i}(v_i) \geq 2$ koşulunu sağlayan (açıktır ki u_1 sarkık noktadır). Ayrıca u_1 noktasının tek komşuluğu u ve u nun diğer komşulukları u_0, u_1, \dots, u_s ki bu komşuluklar $1 \leq j \leq s$ olacak şekilde $d_T(u_0) \geq 2$ ve $d_T(u_j) = 1$ koşullarını sağlasın. $\tilde{T} = T - uu_1 + u_1v_1$ ise $\varepsilon_1(T) \leq \varepsilon_1(\tilde{T})$ dir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $d_{T_i}(v_i, u_1) = e_{T_i}(v_i) = i$ olmasıdır.

Lemma 5.2.33. [100] Verilen n noktalı Tırtıl ağaç çizmesi T , çapsal uzunluklu yolu $P_{d+1} = v_0, v_1, \dots, v_{d-1}, v_d$ ($d \geq 5$, tek sayı) olan bir ağaç çizme ve kabul edelim ki $d_T(v_i) \geq 3$ ($2 \leq i \leq \frac{d-1}{2}$) olsun. $v_i u$ kenarını $v_1 u$ kenarı olarak kaydırılarak oluşturulan \tilde{T} ağaç çizmesi için $\varepsilon_1(T) < \varepsilon_1(\tilde{T})$ eşitsizliği geçerlidir.



Şekil 5.7. Lemma 5.2.32 de kullanılan T ve \tilde{T} ağaç çizge aileleri



Şekil 5.8. Lemma 5.2.33 de kullanılan T ve \tilde{T} ağaç çizge aileleri

Teorem 5.2.48. [100] $T \in \mathcal{T}_{n,d}$ ağaç çizgesi $d \geq 5$ (tek) çapa sahip olsun. Bu durumda,

$$\rho(\mathcal{E}(T)) \leq \max\{\varepsilon_1(D_{n,d}^{0,n-d-1}), \varepsilon_1(D_{n,d}^{\lfloor \frac{n-d-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-d-1}{2} \rceil})\}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart,

$$T \cong D_{n,d}^{0,n-d-1} \text{ yada } T \cong D_{n,d}^{\lfloor \frac{n-d-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-d-1}{2} \rceil} \text{ olmasıdır.}$$

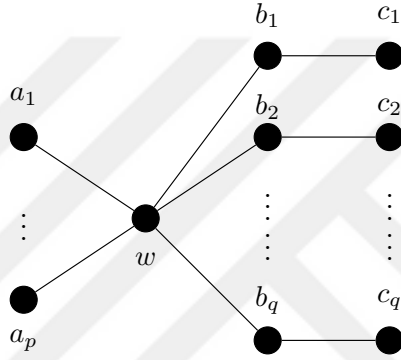
Teorem 5.2.49. [100] $T \in \mathcal{T}_{n,d}$ ağaç çizgesi d tek sayılı çapa sahip olsun. Bu durumda,

$$\rho(\mathcal{E}(T)) \leq \max\{\varepsilon_1(D_{n,d}^{0,n-d-1}), \varepsilon_1(D_{n,d}^{\lfloor \frac{n-d-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-d-1}{2} \rceil})\}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$T \cong D_{n,d}^{0,n-d-1}$ yada $T \cong D_{n,d}^{\lfloor \frac{n-d-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-d-1}{2} \rceil}$ olmasıdır. Özellikle $\mathcal{T}_{n,3}$ ağaç çizge ailesi içerisinde dışmerkezlilik spektral yarıçapı maksimum hale getiren yegane ağaç çizge $D_{n,3}^{\lfloor \frac{n-4}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-4}{2} \rceil}$ dir.

Xiacong He makalesinin son bölümünde dışmerkezlilik matrisine ait en küçük özdeğeri $[-2 - \sqrt{13}, -2\sqrt{2})$ aralığına düşen ağaç çizgeler için çeşitli sonuçları ifade ve ispat etmiştir. Öncelikle ifade ve ispatlarda kullandığı özel ağaç çizge ailesinin şeklini verelim (Şekil 5.9). Dikkat edilecek olursa verilen aile, yıldız çizgesinin özelleştirilmiş halidir.



Şekil 5.9. $H_{p,q}$ ağaç çizge ailesi

Verilen soyutlama $p \geq 0$ ve $q \geq 0$ olmak üzere S_{p+q+1} yıldız çizge ailesine q tane sarkık kenar eklenmesi olarak yorumlanabilir.

Lemma 5.2.34. [100] $p \geq 0$ ve $q \geq 2$ için $H_{p,q}$ ağaç çizge ailesine ait dışmerkezlilik matrisinin karakteristik polinomu,

$$\lambda^{p+1}(\lambda^2 + 4\lambda - 9)^{q-1}[\lambda^2 + (4 - 4q)\lambda - (9pq + 9q^2 + 9 - 14q)]$$

şeklindedir.

Lemma 5.2.35. [100] $n = p + 2q + 1$ olmak üzere $H_{p,q}$ ağaç çizge ailesi için,

$\varepsilon_n \leq -2 - \sqrt{13}$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumunun olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların gerçekleşmesi ile sağlanır.

- i. $p = 0$ ve $2 \leq q \leq 4$;
- ii. $p = 1$ ve $q = 2$ yada $q = 3$;
- iii. $p = 2$ ve $q = 2$;

Teorem 5.2.50. [100] T ağaç çizgesi $n \geq 3$ noktalı olsun, $\varepsilon_n \in [-2 - \sqrt{13}, -2\sqrt{2})$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların gerçekleşmesi ile sağlanır.

- i. $T \cong P_4$;
- ii. $T \cong D_{n,3}^{0,1}$;
- iii. $p = 0$ ve $2 \leq q \leq 4$ için $T \cong H_{p,q}$;
- iv. $p = 1$ ve $q = 2$ yada $q = 3$ için $T \cong H_{p,q}$;
- v. $p = 2$ ve $q = 2$ için $T \cong H_{p,q}$;

Yazar *tek sayılı* çap uzunluğuna sahip n noktalı ağaçlar içerisinde ek büyük dışmerkezlilik spektral yarıçapına sahip ağaç çizgelerini karakterize etmiştir. Makalesinin yorum bölümünde *çift sayılı* çap uzunluğuna sahip n noktalı ağaçlar çizgeleri için karakterizasyonun hala açık olduğunu ifade ederek aşağıdaki problemi araştırmacıların ilgisine sunmuştur.

Problem 5.2.9. [100] Çift sayılı çap uzunluğuna sahip n noktalı ağaç çizgeleri içerisinde dışmerkezlilik matrisine ait spektral yarıçapı en büyük olan çizgeleri karakterize edin
Yukarıdaki problem Problem 5.2.7 nin daha özel bir halidir.

Teorem 5.2.51. [101] Bir T ağaç çizgesine ait dışmerkezlilik matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter şart $n \geq 2$ koşulu ile ya $T \cong P_4$ yada $T \cong K_{1,n-1}$ (yıldız çizge) olmasıdır.

Teorem 5.2.52. [101] n noktalı ve $d = 2$ çaplı tüm bağlantılı çizgeler içerisinde en büyük dışmerkezlilik spektral yarıçapına sahip yegane çizge $K_{1,n-1}$ yıldız çizgesidir.

Yukarıdaki teorem *mesafe matrisi* için literatüre kazandırılan bir teoremin dışmerkezlilik matrisine uyarlanılmış halidir.

Lemma 5.2.36. [101] Herhangi bir $k \geq 3$ tamsayısı için çapı 3 olan ve $2k$ noktalı $W_{k,k}$ çizgesi yegane iki parçalı çapsal çizgedir. Burada $W_{k,k}$, $K_{k,k}$ çizgesinden k tane bağımsız kenarın çıkarılması ile oluşan çizgedir.

Teorem 5.2.53. [101] G çizgesi $n \geq 5$ noktalı iki parçalı bir çizge olsun. Bu durumda $\rho(\mathcal{E}(G)) \geq 3$ eşitsizliği sağlanır. Dahası $\rho(\mathcal{E}(G)) = 3$ durumunun olması için gerek ve yeter şart bazı k tamsayıları için $n = 2k$ ve $G \cong W_{k,k}$ olmasıdır.

Mesafe matrisi üzerinden tanımlanan Wiener indeks tanımına benzer olarak dışmerkezlilik kavramı kullanılarak *Wiener-dışmerkezlilik indeksi* aşağıdaki formda tanımlanabilir.

$$W(G)_\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(G)} \epsilon_{u,v}$$

Teorem 5.2.54. [101] G çizgesi n noktalı bağlantılı bir çizge olsun. Bu durumda $\rho(\mathcal{E}(G)) \geq \frac{2W_\varepsilon(G)}{n}$ eşitsizliği geçerlidir. Dahası $\rho(\mathcal{E}(G)) = \frac{2W_\varepsilon(G)}{n}$ olması için gerek ve yeter şart G çizgesinin dışmerkezliliğe göre düzenli çizge olmasıdır.

Sonuç 5.2.9. [101] G çizgesi n noktalı, m kenarlı ve çapı 2 olan bağlantılı bir çizge olsun. Eğer G çizgesi k -baskın (*dominating*) nokta içeriyorsa,

$$\rho(\mathcal{E}(G)) \geq \frac{2(n^2 - n - 2m) + k(2n - k - 1)}{n}$$

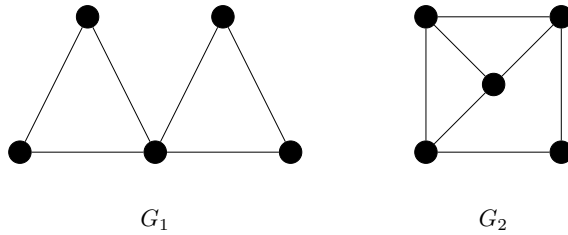
eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 5.2.55. [101] G çizgesi n noktalı bağlantılı bir çizge olsun. Ayrıca $(\varepsilon(1), \varepsilon(2), \dots, \varepsilon(n))$ dışmerkezlilik dizisini göstermek üzere,

$$\rho(\mathcal{E}(G)) \geq \max_i \left\{ \frac{1}{n-1} \left((W_\varepsilon - \varepsilon(i)) + \sqrt{(W_\varepsilon - \varepsilon(i))^2 + (n-1)\varepsilon^2(i)} \right) \right\}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Açıklama 5.2.2. [101] Yukarıdaki teorem de bulunan ifadede eşitlik durumunun olması için gerek ve yeter şart G çizgesinin dışmerkezliliğe göre düzenli çizge olmasıdır.



Şekil 5.10. Dışmerkezlilik matrisine göre eşspektrumlu olmayan eşenerjili çizge çifti.

Lemma 5.2.37. [101] $n = p + q$ noktalı $K_{p,q}$ iki parçalı tam çizgesi için, eğer $p, q \geq 2$ ise $E_{\mathcal{E}}(K_{p,q}) = 4(p + q - 2)$ eşitliği geçerlidir.

Bilgisayar programları kullanılarak rahatlıkla 3 ve 4 noktalı bağlantılı çizgeler içerisinde enerjileri eşit olan çizgeleri bulabiliriz. Şekil 5.10 de bulunan G_1 ve G_2 çizgeleri

dışmerkezlilik matrisine göre enerjileri eşit olan ve eşspektrumlu olmayan 5 noktalı çizge çiftine bir örnektir. Dahası bu çizge çifti,

$$Spec_{\varepsilon}(G_1) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2(1 \pm \sqrt{2}) & -4 & 0 \\ & 1 & 1 & 2 \end{array} \right\}, Spec_{\varepsilon}(G_2) = \left\{ \begin{array}{ccc} \pm\sqrt{2} & \pm 2 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\}$$

olacak şekilde spektrum eşitliklerine sahiptir. Basit bir hesaplama ile enerjilerin eşit olduğu görülebilir. Yani $E_{\mathcal{E}}(G_1) = E_{\mathcal{E}}(G_2) = 4 + 4\sqrt{2}$ görülebilir.

Teorem 5.2.56. [101] $n \geq 6$, $2 \leq p, q \leq n - 2$ ve $p + q \neq n$ olmak üzere, $K_{p,n-p}$ ve $K_{q,n-p}$ çizgeleri eşspektrumlu olmayan eşenerjili çizgelerdir.

Son olarak yazarlar aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmişlerdir.

Teorem 5.2.57. [101] Aynı nokta sayısına sahip k -parçalı ($k \geq 2$) iki tam çizge için, eğer her parçalansında en az iki nokta var ise bu iki çizge eşspektrumlu olmayan ve eşenerjili olan çizgelerdir.

Nokta sayısı n olan bir ağaç çizgesine ait uzaklık matrisinin tam olarak bir tane pozitif ve $n - 1$ tane negatif özdeğere sahip olması literatürde iyi bilinen bir gerçektir. Bu gerçek $rank(D(T)) = n$ olduğunu ifade eder. [101] referanslı makalede yazarlar n noktalı ağaç çizgeleri içerisinde dışmerkezlilik matrisi tersinir olan yegane çizgenin $K_{1,n-1}$ yıldız çizge olduğunu ifade ve ispat etmişlerdir, yani $rank(D(K_{1,n-1})) = n$ dir. Dahası $D(K_{1,n-1}) = \mathcal{E}(K_{1,n-1})$ olduğu için $In(\mathcal{E}(K_{1,n-1})) = (n_+ = 1, n_- = n - 1, n_0 = 0)$ olur. Iswar Mahato ve M. Rajesh Kannan isimli yazarlar makalelerinde [102] öncelikle n noktalı tüm ağaç çizgelerinin dışmerkezlilik matrisine ait eylemsizlik değerlerini ifade ve ispat etmişlerdir.

Lemma 5.2.38. [102] B matrisi $2n \times 2n$ boyutlu ve aşağıdaki parçalanmaya sahip bir matris olmak üzere $In(B) = (n_+ = n, n_- = n, n_0 = 0)$ eşitliği geçerlidir.

$$B = \begin{pmatrix} 2d(J - I) & (2d - 1)(J - I) \\ (2d - 1)(J - I) & 0 \end{pmatrix}$$

Teorem 5.2.58. [102] T çizgesi $d \in \mathbb{N}$ olmak üzere çapı $diam(T) = 2d + 1$ olan $n \geq 4$ noktalı ağaç çizge olsun. Bu durumda $rank(\mathcal{E}(T)) = 4$ eşitliği sağlanır. Dahası $\mathcal{E}(T)$ matrisi tam olarak iki pozitif ve iki negatif özdeğere sahiptir. Yani ağaç çizgesinin eylemsizliği $In(T) = (n_+ = 2, n_- = 2, n_0 = -4)$.

Tanım 5.2.5. [102] T ağaç çizgesi çift çapa ve $u_0 \in V(T)$ merkez noktaya sahip olsun. Bu durumda u_0 noktasına komşu olan ve çapsal yol üzerinde bulunan $v \in V(T)$ noktasına çapsal olarak *ayırt edici* (*diametrically distinguished*) nokta denir.

Teorem 5.2.59. [102] T ağaç çizgesi $u_0 \in V(T)$ merkezi noktaya ve $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$ koşulu ile $diam(T) = 2d$ çapa sahip bir çizge olsun. Kabul edelim ki u_0 noktasının komşuları, her $i = 1, 2, \dots, l$ için $T - \bigcup_{i=1}^l \{u_0, u_i\}$ yapısının bileşeni olan T_i ile birlikte $e_{T_i}(u_i) = d - 1$ koşulunu sağlayan $u_1, u_2, \dots, u_l (l \geq 2)$ noktalarından meydana gelsin. Bu durumda $In(T) = (n_+ = l, n_- = l, n_0 = n - 2l)$ dir.

Iswar Mahato ve M. Rajesh Kannan makalelerine kısıtlı çizgeler için dışmerkezlilik matrisine ait özdeğerlerin orjin (0) noktasına göre simetrik olup olmaması için gerek ve yeter şartları incelemiştir.

Teorem 5.2.60. [102] T çizgesi tek sayıda çapa sahip bir ağaç çizge ise dışmerkezlilik matrisine ait özdeğerler simetriktir. Yani λ özdeğeri katı k olacak şekilde $\mathcal{E}(T)$ matrisine ait ise $-\lambda$ da katı k olacak şekilde $\mathcal{E}(T)$ matrisine aittir.

Sonuç 5.2.10. [102] Eğer T çizgesi $n \geq 5$ noktalı ve tek sayılı çapa sahip bir ağaç çizge olsun. Bu durumda T tam olarak beş farklı dışmerkezlilik özdeğerine sahiptir.

Yazarlar [96] referans numaralı makalede bulunan maksimum dışmerkezlilik özdeğeri için verilen sınırı kendi çalışmaları ile birlikte kullanarak aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmişlerdir. Teoremin ifadesinde bulunan $T_{n,d}^{a,b}$ çizgesi ilgili referans numaralı makalede tanımlanan çizge ailesidir.

Teorem 5.2.61. [102] Tek çapa sahip ve $n \geq 4$ noktalı T çizgesi için,

i. Eğer $4 \leq n \leq 15$ ise,

$$\varepsilon_n(T) \leq -\sqrt{\frac{13n - 35 + \sqrt{(13n - 35)^2 - 64(n - 3)}}{2}}$$

Dahası eşitlik olması için gerek ve yeter şart $T \cong T_{n,3}^{0,n-4}$ dir.

ii. Eğer $n \geq 16$ olacak şekilde tek ise,

$$\varepsilon_n(T) \leq -\sqrt{\frac{16n - 21 + \sqrt{800n - 1419}}{2}}$$

Dahası eşitlik olması için gerek ve yeter şart $T \cong T_{n,5}^{\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-6}{2} \rceil}$ dir.

iii. Eğer $n \geq 16$ olacak şekilde çift ise,

$$\varepsilon_n(T) \leq -\sqrt{\frac{16n - 21 + 5\sqrt{32n - 67}}{2}}$$

dir. Dahası eşitlik olması için gerek ve yeter şart $T \cong T_{n,5}^{\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor, \lceil \frac{n-6}{2} \rceil}$ dir.

Teorem 5.2.62. [102] T çizgesi çift sayıda çapa sahip bir ağaç çizge ise dışmerkezlilik matrisine ait özdeğerler simetrik olamaz.

Teorem 5.2.63. [102] T çizgesi $n \geq 4$ noktalı bir ağaç olmak üzere, $\mathcal{E}(T)$ matrisinin tam olarak üç farklı özdeğere sahip olması için gerek ve yeter şart $T \cong K_{1,n}$ olmasıdır.

Yazarlar sonuç olarak makalelerini önemli bir problemi literatüre kazandırarak tamamlamışlardır.

Problem 5.2.10. [102] Orjine göre simetrik dışmerkezlilik özdeğerlerine sahip çizgeleri karakterize ediniz.

Jianfeng Wang, Mei Lu, Maurizio Brunetti, Lu Lu ve Xueyi Huang isimli araştırmacılar dışmerkezlilik matrisine ait spektral özelliklerin araştırılması ve derinleştirilmesini amacıyla önemli diyebileceğimiz bir makale kaleme almışlardır [103]. Spektral çizge kuramında belirli bir matrisin karakterize edilmesi her ne kadar prestijli olsa da matrisin diğer çizge matrisleri ile olan ilişkisi bilimsel çalışmanın özgül ağırlığı arttıracaktır. Bu bağlamda yazarlar öncelikle çeşitli çizge matrisleri ile dışmerkezlilik matrisi arasında ki kıyası incelemişlerdir. Devamında iki farklı özdeğere sahip çizgeler için gerek ve yeter koşulları ifade/ispat etmişlerdir. Dahası eşspektrumlu (dışmerkezlilik matrisi için) çizge çiftlerinin belirlenmesi problemi için çizge işlemlerinden faydalanmışlardır. Nihai olarak spektral çizge kuramına dışmerkezlilik matrisini daha fazla dahil etmek için oldukça yetkin ve çeşitli problemleri ifade ederek çalışmalarını tamamlamışlardır. Aşağıda alıntıladığımız teorem ve varsayım spektral çizge kuramı çalışmalarında önemli bir yere sahiptir.

Teorem 5.2.64. [104] Hemen hemen her ağaç çizge komşuluk matrisine göre eşspektrumludur.

Varsayım 5.2.3. [104] Hemen hemen her çizge komşuluk matrisine göre eşspektrumludur.

Eşspektrumlu çizge ailelerinin genişletilmesi çalışmaları literatür için doğrudan özgün bir değer ifade edecektir. Spektral çizge kuramının seçkin isimleri bu varsayımın herhangi bir M -çizge matrise paralel olarak genişletilebileceğini ifade etmişlerdir. *Hemen hemen her çizge eşspektrumludur* varsamı üzerine önemli sonuçlar [105] referans numaralı makalede bulunmaktadır. Özet olarak yazarlar eşspektrumluluk üzerine genel bir kanı oluşturmak için karşılaştırma tabloları vermiştir. Makaledeki iki tablonun birleştirilmiş hali Tablo 5.1 de sunulmuştur. Çizge kuramında spektrumların genelleştirilmesi diğer bir

Tablo 5.1. M -eşspektrumlu çizgelerin oranları

n	4	5	6	7	8	9	10	11
A	0	0.059	0.064	0.105	0.139	0.186	0.213	0.211
$A\&\bar{A}$	0	0	0	0.038	0.094	0.160	0.201	0.208
L	0	0	0.026	0.125	0.143	0.155	0.118	0.090
Q	0.182	0.118	0.103	0.098	0.097	0.069	0.053	0.038
D	0	0	0	0.0258	0.0592	0.0960	0.1186	?
D^L	0	0	0	0.0670	0.0504	0.0758	0.0672	?
D^Q	0	0.0952	0.0536	0.0445	0.0407	0.0313	0.0730	?
\mathcal{E}	0	0.0952	0.2143	0.4576	0.4464	0.4953	?	?

yaklaşım şeklindedir. Dikkat edilirse Tablo 5.1 de $A\&\bar{A}$ ifadesi, çizge ve çizgenin tümleyenine ait komşuluk matrisleri birlikte düşünülerek eşspektrumluluk oranı verilmiştir.

Varsayım 5.2.4. [103] Hemen hemen her çizge komşuluk (Laplasyan yada genelleştirilmiş) olarak belirlidir.

Önerme 5.2.4. [103] G çizgesi n noktalı bağlantılı bir çizge ve \bar{G} gösterimi G 'nin tümleyenini göstermek üzere,

- i. Eğer $diam(G) = 2$ ve $\Delta(G) < n - 1$ ise $A(\bar{G}) = D(G) + I_n - J_n = \frac{1}{2}\mathcal{E}(G)$.
- ii. Eğer $diam(G) > 3$ ise $A(G) = \frac{1}{2}\mathcal{E}(\bar{G})$

Lemma 5.2.39. [103] Hemen hemen tüm bağlantılı çizgeler iki çap ve iki yarıçapa sahiptir.

Önerme 5.2.5. [103] Hemen hemen tüm bağlantılı çizgeler $\mathcal{E}(G) = 2A(\overline{G})$ eşitliğini sağlar.

Dışmerkezlilik matrisinin diğer çizge matrisleri ile olan ilişkisinin en bariz ve yalın olanı $A(K_n) = D(K_n) = \mathcal{E}(G)$ dir. Yazarlar bu motivasyondan hareketle aşağıdaki önermeyi ifade ve ispat etmişlerdir.

Önerme 5.2.6. [103] G çizgesi n noktalı bağlantılı bir çizge olsun. Bu durumda,

1. $\mathcal{E}(G) = 2A(G)$ olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_n$
2. $\mathcal{E}(G) = D(G)$ olması için gerek ve yeter şart $G \cong K_r \vee \overline{K_{n-r}}$, $(1 \leq r \leq n - 1)$.

Önerme 5.2.7. [103] Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. Varsayım 5.2.3 sağlanır.
2. Hemen hemen tüm iki çapa sahip özmerkezli çizgeler A -eşspektrumludur.
3. Hemen hemen tüm iki çapa sahip özmerkezli çizgeler \mathcal{E} -eşspektrumludur.

Önerme 5.2.8. [103] Aşağıdaki ifadeler denktir.

1. Varsayım 5.2.4 sağlanır.
2. Hemen hemen tüm iki çapa sahip özmerkezli çizgeler A matrisine göre belirlidir.
3. Hemen hemen tüm iki çapa sahip özmerkezli çizgeler \mathcal{E} matrisine göre belirlidir.

Makalede yukarıdaki iki önermeyi desteklemek adına yazarlar az sayıda noktaya sahip çizgeler için eşspektrumluluk oranlarını tablolar haline özetlemişlerdir. Yazarlar

Tablo 5.2. A eşspektrumlu çizgelerin ve çapı 2 olan özmerkezli çizgelerin (A^*, \mathcal{E}^*) oranları

n	3	4	5	6	7	8	9
A	0	0	0.0588	0.0641	0.1054	0.1395	0.1858
A^*	0	0	0	0	0.0971	0.1373	0.1941
\mathcal{E}^*	0	0	0	0	0.0971	0.1373	0.1941

makalelerinde zıtkutuplu, özmerkezli ve mesafe düzenli çizgeler için literatür bilgisi vererek aşağıdaki problemi ileri sürmüşlerdir.

Tablo 5.3. Küçük noktalı özmerkezli çizge sayıları. SCG = Özmerkezli çizgeler, RSCG = Düzenli özmerkezli çizgeler, DRG = Mesafe düzenli çizgeler

n	3	4	5	6	7	8
SCG	1	2	5	28	221	3151
RSCG	1	2	2	5	4	16
DRG	1	2	2	4	2	5

Problem 5.2.11. [103] Hangi koşullar altında düzenli özmerkezli çizgeler ayrıca mesafe düzenli çizgelerdir.

Akademik platformda özdeğerleri az olan çizgelerin incelenmesi her zaman daha çok ilgi çekmiştir. Bu konuda [106] referans numaralı çalışma incelenebilir. Oldukça iyi bilinen bir gerçek şudur ki; *Eğer G bağlantılı çizgesinin M -spektrumu ($M \in \{A, Q, L, D\}$) sadece iki farklı özdeğere sahip ise $G \cong K_n$ olmalıdır.* Bu gerçek malesef dışmerkezlilik matrisi için oldukça farklıdır (bazı koşullar altında geçerlidir).

Lemma 5.2.40. [103] G çizgesi n noktalı bağlantılı bir çizge ve indirgenemez dışmerkezlilik matrisine sahip olsun. Bu durumda G 'nin iki farklı dışmerkezlilik özdeğerine sahip olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{E}(G) = J_n - I_n$ olmasıdır. Yani $G \cong K_n$.

Lemma 5.2.41. [103] G çizgesi n noktalı bağlantılı bir çizge ve $diam(G) \geq 2$ olsun. Bu durumda G 'nin dışmerkezlilik matrisinin indirgenebilir ve iki farklı dışmerkezlilik özdeğerine sahip olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{E}(G) = dI_n \otimes (J_r - I_r)$, $r|n, r \geq 2$ olmasıdır (farklı etiketlenme ile). Dahası iki farklı dışmerkezlilik özdeğeri $\varepsilon_1 = d(r - 1)$ ve $\varepsilon_2 = -d$.

Teorem 5.2.65. [103] (d, r) pozitif tamsayı ikilisi öyle ki $r \geq 2$. $n = rh$ noktalı bağlantılı G çizgesinin d çaplı ve r zıt kutuplu çizge olması için gerek ve yeter şart G çizgesinin iki farklı dışmerkezlilik özdeğerine sahip olmasıdır. Eğer bu durum sağlanıyorsa, G çizgesinin dışmerkezlilik spektrumu,

$$Spec_{\varepsilon}(G) = \left\{ \begin{array}{cc} d(r - 1) & -d \\ h & h(r - 1) \end{array} \right\}$$

Yukarıda verilen teoremin haricinde diğer karakterizasyonlarada vurgu yapan yazarlar aşağıdaki problemi ifade etmişlerdir.

Problem 5.2.12. [103] r -zıtkutuplu çizgeleri diğer formlarda karakterize ediniz?

Araştırmacılar verilen probleme kısmi olarak çeşitli yaklaşımlar getirmişlerdir (Özel çizge işlemleri, özel çizge aileleri ve özel tanımlı koşullarla birlikte). Devamında yazarlar mesafe düzenli çizgeler için tablo vererek iddialarını güçlendirmek istemişlerdir (Johnson, Tetrahedral, Küp, Heawood, Pappus, Foster vb. çizgeler). Eşspektrumlu çizgelerin inşası için araştırmacılar temel gözlemlerini ifade etmişlerdir.

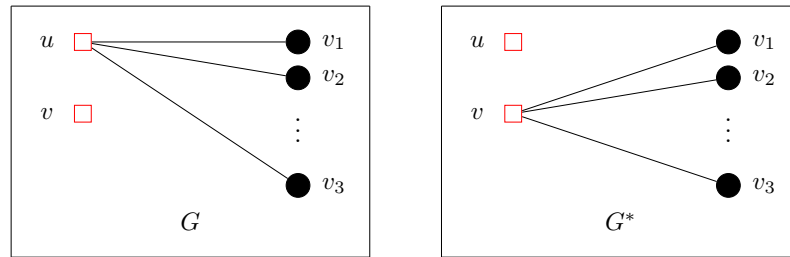
Lemma 5.2.42. [103] G çizgesi için n nokta sayısı dışmerkezlilik matrisine göre eşspektrumluluk değişmezdir.

İlginç ve gözlemlenmesi kolay olan bir gözlem ise çizgenin kenar sayısının eşspektrumluluk için çizge değişmezi olmamasıdır.

Lemma 5.2.43. [103] G çizgesi n noktalı r -zıtkutuplu bir çizge olsun. Bu durumda G çizgesinin eşspektrumlu çizgesi aynı noktalı ve aynı çapa sahip r -zıtkutuplu bir çizgedir.

Teorem 5.2.66. [103] Aynı noktalı ve aynı çaplı tüm r -zıtkutuplu çizgeler ($r \geq 2$) dışmerkezlilik matrisine göre eşspektrumludur.

Wang ve diğerleri r -zıtkutuplu çizge ailelerini çeşitli çizge işlemleri altında spektrum incelemesi yaparak problemlerden oluşan son bölüm ile makalelerini tamamlamışlardır.



Şekil 5.11. Problem 5.2.14 de bahsedilen aşılama dönüşümü (graft transformation)

Problem 5.2.13. [103] Hangi bağlantılı çizgeler indirgenemez dışmerkezlilik matrisine sahiptir?

Yukarıda ki problem [91] referans numaralı makale ile literatüre katılmıştır. Birinci yazar aynı olduğu için [103] referans numarası verilerek tekrar edilmiştir.

Problem 5.2.14. [103] Aşılama dönüşümü altında çizgelerin dışmerkezlilik spektrumunu araştırınız.

Problem 5.2.15. [103] Verilen bir S çizge ailesinde dışmerkezlilik matrisine ait spektral yarıçapı maksimum/minimum olan çizgeleri karakterize ediniz.

Problem 5.2.16. [103] Bir çizgenin alt çizgesi ve dışmerkezlilik matrisine ait karakteristik polinomun katsayıları arasındaki ilişkiyi bulunuz.

Doktora tezinin ana amaçlarından biri olan aşağıdaki problemi Wang ve diğerleri tekrar ifade etmişlerdir.

Problem 5.2.17. [103] Hangi koşullar altında bir çizgenin çapı \mathcal{E} -spektrum tarafından belirlenir?

Varsayım 5.2.5. [103] G çizgesi n noktalı ve d çaplı çift çizge (çapsal çizge) olsun. Bu durumda $n \geq 4d - 4$ eşitsizliği geçerlidir.

Problem 5.2.18. [103] Her $n, d \geq 2$ tamsayı ikilisi için; n noktalı, d çaplı ve blok indeksi $r|n$ olan tüm r -zıtkutulu çizgelerini inşaa ediniz.

Problem 5.2.19. [103] Her $n, d \geq 2$ tamsayı ikilisi için ve n noktalı, d çaplı ve blok indeksi $r|n$ olan tüm r -zıtkutulu çizgeleri inşaa ediniz.

Problem 5.2.20. [103] Sınır çizgelerde (peripheral graphs) kullanışlı olabilecek karakterizasyon yöntemlerini belirleyiniz.

Zhengping Qiu ve Zikai Tang isimli araştırmacılar 2022 basımlı makalelerinde *eşik çizgelerinin* dışmerkezlilik matrisine ait spektral özellikleri incelemişlerdir [107]. Yazarlar öncelikle eşik çizgelerinin önemini vurgulamıştır. Spektral incelemelerden sonra yazarlar temel tanım ve kullanışlı matris yöntemlerini (adil parçalanış, vb.) ifade ederek ana sonuçlarını sunmuşlardır. Son olarak eşik çizgelerin dışmerkezlilik matrisine ait farklı özdeğer dağılımını ifade ve ispat etmişlerdir.

Tanım 5.2.6. [107] Γ çizgesi, $1 \leq i \leq m$ için $s_i \geq 1$ ayrık noktalar ve $t_i \geq 1$ baskın noktaları göstermek üzere $(0^{s_1}, 1^{t_1}, \dots, 0^{s_m}, 1^{t_m})$ ikili dizisine sahip bağlantılı çizge olsun. $s = \sum_{i=1}^m s_i$ ve $t = \sum_{i=1}^m t_i$ gösterimi için Γ çizgesi $s + t$ noktalı ve $V(\Gamma) = U_1 \cup V_1 \cup \dots \cup U_m \cup V_m$ nokta parçalanış kümesine sahip iki çaplı bir çizgedir.

Teorem 5.2.67. [107] $\Gamma = sK_1 + K_t$ olmak üzere,

1. Eğer $(s, t) \neq (3, 4)$ yada $(s, t) \neq (4, 3)$ ise

$$Spec_{\mathcal{E}}(\Gamma) = \left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & t-1 & s-1 \end{array} \right\}$$

λ_1 ve λ_2 ifadeleri $\lambda_1 > \lambda_2$ koşulu ile birlikte $x^2 - (2s+t-3)x + (st-2s-2t+2) = 0$ denkleminin kökleridir.

2. Eğer $(s, t) = (3, 4)$ yada $(s, t) = (4, 3)$ ise

$$Spec_{\mathcal{E}}(3K_1 + K_4) = \left\{ \begin{array}{cccc} 7 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & t-1 & s-1 \end{array} \right\}$$

ve

$$Spec_{\mathcal{E}}(4K_1 + K_3) = \left\{ \begin{array}{cccc} 8 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & t-1 & s-1 \end{array} \right\}$$

Lemma 5.2.44. [107] Γ çizgesi $b = (0^{s_1}, 1^{t_1}, \dots, 0^{s_m}, 1^{t_m})$ ikili dizisine sahip bağlantılı çizge olsun. Bu durumda,

- i. $\mathcal{E}(\Gamma)$ matrisi, katı en az $s - m$ olan -2 özdeğerine sahiptir.
- ii. $\mathcal{E}(\Gamma)$ matrisi, katı en az $t_m - 1$ olan -1 özdeğerine sahiptir.
- iii. $\mathcal{E}(\Gamma)$ matrisi, katı en az $t - t_m - (m - 1)$ olan 0 özdeğerine sahiptir.

Nokta parçalanış $\pi : V(\Gamma) = U_1 \cup V_1 \cup \dots \cup U_m \cup V_m$ bölüm matrisli denk parçalanıştır.

Yani,

$$B = \begin{pmatrix} 2(s_1 - 1) & 0 & 2s_2 & 0 & \dots & 2s_m & t_m \\ 0 & 0 & 2s_2 & 0 & \dots & 2s_m & t_m \\ 2s_1 & 2t_1 & 2(s_2 - 1) & 0 & \dots & 2s_m & t_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2s_m & t_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2s_1 & 2t_1 & 2s_2 & 2t_2 & \dots & 2(s_m - 1) & t_m \\ s_1 & t_1 & s_2 & t_2 & \dots & s_m & t_m - 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri ile $\mathcal{E}(\Gamma)$ matrisinin özdeğerleri aynıdır.

Lemma 5.2.45. [107] $m \geq 2$ koşullu B_m matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen bir $x = (x_1, y_1, \dots, x_m, y_m)$ özvektörü olsun. Bu durumda,

- i. $\lambda y_1 = (\lambda - 2s_1 + 2)x_1$.
- ii. $(2\lambda - t_m + 2)y_m = (\lambda + 2)x_m$.

iii. $1 \leq i \leq m - 1$ için $2t_i y_i = (\lambda + 2)(x_{i+1} - x_i)$.

iv. $1 \leq i \leq m - 2$ için $2s_{i+1} x_{i+1} = \lambda(y_i - y_{i+1})$.

Lemma 5.2.46. [107] Eğer B_m matrisinin bir özdeğeri λ ise $\lambda \neq -2$ ve $\lambda \neq -1$ dir.

Lemma 5.2.47. [107] λ, B_m ($m \geq 2$) matrisinin özdeğeri olsun. Bu durumda,

- i. Eğer $s_1 \geq 2$ ve $s_m t_m - 2s_m - t_m \neq 0$ ise $\lambda \neq 0$.
- ii. Eğer $s_1 \geq 2$ ve $s_m t_m - 2s_m - t_m = 0$ ise $\lambda = 0$ özdeğeri B_m matrisinin yalın özdeğeridir.
- iii. Eğer $s_1 = 1$ ve $s_m t_m - 2s_m - t_m \neq 0$ ise $\lambda = 0$ özdeğeri B_m matrisinin yalın özdeğeridir.
- iv. Eğer $s_1 = 1$ ve $s_m t_m - 2s_m - t_m = 0$ ise $\lambda = 0$ özdeğeri B_m matrisinin katı iki olan yalın özdeğeridir.

Lemma 5.2.48. [107] B_m matrisinin $\lambda \neq 0$ özdeğeri yalındır.

Lemma 5.2.49. [107] C , boyutu h olan B_m matrisinin asıl alt matrisi olsun. Eğer B_m matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_{2m}$ ve C matrisinin özdeğerleri $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \mu_h$ ise $1 \leq i \leq h$ koşulu ile $\lambda_{2m-h+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i$ eşitsizliği geçerlidir (Cauchy arada olma teoreminden hareketle).

Lemma 5.2.50. [107] $B_m + 2I$ matrisi için,

$$\det(B_m + 2I) = (-4)^{m-1} s_1 \dots s_m t_1 \dots t_{m-1} (t_m + 2)$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 5.2.7. [107] Γ_{m+1} çizgesi $b_{m+1} = (0^{s_1}, 1^{t_1}, \dots, 0^{s_{m+1}}, 1^{t_{m+1}})$ ikili dizisine sahip bağlantılı çizge ve $\widehat{\Gamma}_{m+1}$ çizgesi $\widehat{b}_{m+1} = (0^{s_1}, 1^{t_1}, \dots, 0^{s_{m-1}}, 1^{t_{m-1}}, 0^{s_{m+1}}, 1^{t_{m+1}})$ ikili dizisine sahip bağlantılı çizge olsun. $\mathcal{E}(\widehat{\Gamma}_{m+1})$ 'in bölüm matrisi \widehat{B}_{m+1} olarak tanımlayalım.

Açıklama 5.2.3. [107] $\widehat{\Gamma}_{m+1}$ eşik çizgesine karşılık gelen \widehat{B}_{m+1} matrisi B_{m+1} matrisinin asıl alt matrisidir ama \widehat{B}_{m+1} matrisi B_m matrisinden farklıdır. $\widehat{\Gamma}_{m+1}$ ve Γ_{m+1} eşik çizgelerinin aynı ikili diziye sahip olduğunu söyleyemeyiz.

Lemma 5.2.51. [107] B_m matrisinin -2 den küçük $m - 1$ özdeğeri vardır.

Lemma 5.2.52. [107] B_m ($m \geq 2$) matrisinin $(-2, -1)$ aralığına düşen özdeğeri yoktur.

Lemma 5.2.53. [107] B_m ($m \geq 2$) matrisinin özdeğeri λ ve $s_1 \geq 2$ olsun. Bu durumda,

- i. Eğer $s_m t_m - 2s_m - t_m > 0$ ise $\lambda \notin (-1, 0)$.
- ii. Eğer $s_m t_m - 2s_m - t_m < 0$ ise sadece bir tane $\lambda \in (-1, 0)$ özdeğeri vardır.

Son olarak yazarlar makalelerini eşik çizgelerin dışmerkezlilik matrisine ait spektrum eşitliklerini ifade eden bir teorem ile sonlandırmışlardır.

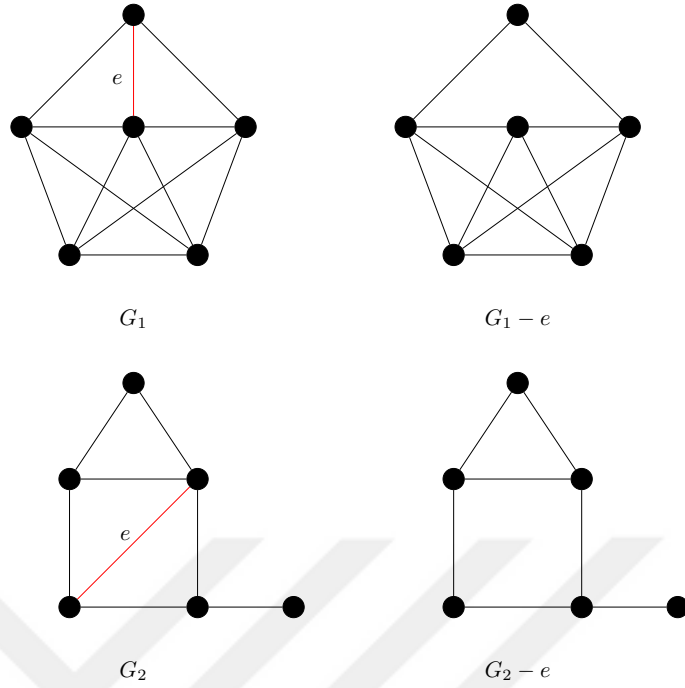
Teorem 5.2.68. [107] $s = \sum_{i=1}^m s_i$ ve $t = \sum_{i=1}^m t_i$ olmak üzere, $(0^{s_1}, 1^{t_1}, \dots, 0^{s_m}, 1^{t_m})$ ikili dizisine sahip Γ çizgesi eşik çizge olsun. B_m matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_{2m}$ için,

- i. Eğer $s_1 \geq 2$ ve $s_m t_m - 2s_m - t_m < 0$ ise,
$$\text{Spec}_{\mathcal{E}}(\Gamma) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0^{(t-t_m-(m-1))}, \lambda_{m+1}, -1^{(t_m-1)}, -2^{(s-m)}, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_{2m}\}.$$
- ii. Eğer $s_1 \geq 2$ ve $s_m t_m - 2s_m - t_m > 0$ ise,
$$\text{Spec}_{\mathcal{E}}(\Gamma) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}, 0^{(t-t_m-(m-1))}, -1^{(t_m-1)}, -2^{(s-m)}, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_{2m}\}.$$

Çizge matrisleri arasındaki ilişkiler oldukça ilginçtir. Örneğin mesafe matrisi daima indirgenemez bir matris olmasına rağmen dışmerkezlilik matrisi indirgenemez olmak zorunda değildir. Çizgelerin dışmerkezlilik matrisi, uzaklık matrisi ile yakından ilişkili olmasına rağmen, dışmerkezlilik matrisinin bazı özellikleri, mesafe matrisinin özelliklerinden önemli ölçüde farklılaşır. Kenar silme nedeniyle bir çizgenin dışmerkezlilik enerjisindeki değişim böyle bir özelliktir (Şekil 5.12). Iswar Mahato ve M. Rajesh Kannan isimli araştırmacılar çizge enerjileri ile ilgili literatür bilgisi vererek makalelerine giriş yapmışlardır [108]. Yazarlar makalesinin ana fikrini aşağıda ki problem ile özetlemişlerdir.

Problem 5.2.21. [108] Kenar silme işlemi ile dışmerkezlilik enerjisi sürekli artan veya azalan çizgeleri sınıflandırınız.

Mahata ve diğer yazar k -parçalı tam çizge için dışmerkezlilik enerjisinin $E_{\mathcal{E}}(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = 4(n_1 + n_2 + \dots, n_k - k)$ olduğunu ifade ederek enerji değişimini inceleyen makalelerinin ana sonuçlarını ifade ve ispat etmişlerdir.



Şekil 5.12. Dışmerkezlilik enerji değişiminin farklılığını ifade eden örnek bir görsel.

$$E_{\mathcal{E}}(G_1) \approx 12.28, E_{\mathcal{E}}(G_1 - e) \approx 10.93, E_{\mathcal{E}}(G_2) \approx 16.83, E_{\mathcal{E}}(G_2 - e) \approx 17.89$$

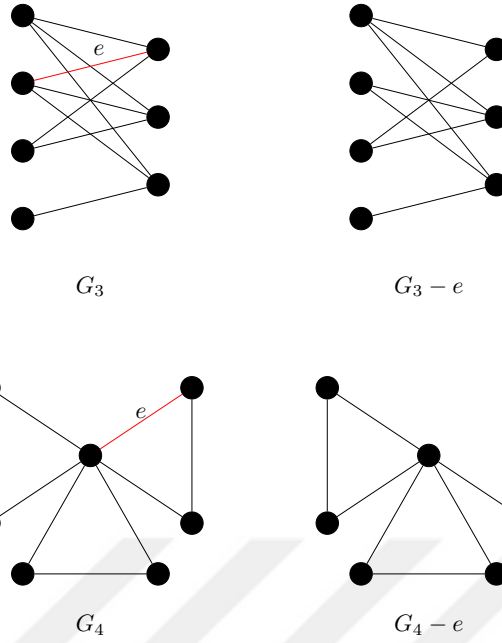
Tablo 5.4. Mesafe matrisi ve dışmerkezlilik matrisi için enerji değişim tablosu.

Çizge	$E_D(G)$	$E_{\mathcal{E}}(G)$	Çizge	$E_D(G)$	$E_{\mathcal{E}}(G)$
G_3	≈ 23.5415	≈ 22.6856	$G_3 - e$	≈ 23.4115	≈ 24.0922
G_4	≈ 19.2470	≈ 17.3808	$G_4 - e$	≈ 22.4508	≈ 16.9706

Lemma 5.2.54. [108] $m, n \geq 2$ olmak üzere $K_{m,n}$ çizgesi iki parçalı tam çizge olsun. Bu durumda herhangi bir $e \in E(K_{m,n})$ kenarı için $K_{m,n} - e$ çizgesi katı en az $m + n - 4$ olan -2 dışmerkezlilik özdeğerine sahiptir.

$K_{m,n} - e$ çizgesinin nokta parçalanışı $\pi := V(K_{m,n} - e) = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$ olsun. Eşitlik için $P_1 = \{v_1\}$, $P_2 = \{v_2, \dots, v_m\}$, $P_3 = \{u_1\}$ ve $P_4 = \{u_2, \dots, u_m\}$ dir. Dikkat edilmelidir ki π , $\mathcal{E}(K_{m,n-e})$ matrisin adil parçalanışındır ve bu parçalanışa karşılık gelen bölüm matrisi,

$$Q_{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 2(m-1) & 3 & 0 \\ 2 & 2(m-2) & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2(n-1) \\ 0 & 0 & 2 & 2(n-2) \end{pmatrix}$$



Şekil 5.13. Dışmerkezlilik enerji değişiminin farklılığını ifade eden örnek.

şeklindedir. Ayrıca Q_π matrisine ait karakteristik polinom,

$$p(x) = x^4 - 2(m + n - 4)x^3 + (4mn - 12(m + n) + 15)x^2 + (16mn - 6(m + n) - 40)x - 4(5mn - 14(m + n) + 32)$$

ile gösterilebilir.

Lemma 5.2.55. [108] $n \geq 2$ olmak üzere eğer e kenarı $K_{2,n}$ çizgesine ait ise,

$$E_{\mathcal{E}}(K_{2,n}) < E_{\mathcal{E}}(K_{2,n} - e)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 5.2.56. [108] $n \geq 3$ olmak üzere eğer e kenarı $K_{3,n}$ çizgesine ait ise,

$$E_{\mathcal{E}}(K_{3,n}) < E_{\mathcal{E}}(K_{3,n} - e)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 5.2.57. [108] $m \geq 4$ ve $n \geq 5$ olmak üzere $p(x)$ polinomu tam olarak üç pozitif ve bir negatif köke sahiptir. Yani $x_4 < 0 < x_3 \leq x_2 \leq x_1$ eşitsizliği sağlanır. Dahası $-5 < x_4 < -4$ aralığı geçerlidir.

Teorem 5.2.69. [108] $K_{m,n}$ çizgesi ($m, n \geq 2$) iki parçalı tam çizge olsun. Bu durumda herhangi bir e kenarı için $K_{m,n} - e$ çizgesinin dışmerkezlilik matrisine ait özdeğerler katı $m + n - 4$ olan -2 özdeğeridir ve

$$p(x) = x^4 - 2(m + n - 4)x^3 + (4mn - 12(m + n) + 15)x^2 \\ + (16mn - 6(m + n) - 40)x - 4(5mn - 14(m + n) + 32)$$

polinomunun kökleridir.

Teorem 5.2.70. [108] $K_{m,n}$ çizgesi ($m, n \geq 2$) iki parçalı tam çizge olsun ve herhangi bir e kenarı silinerek oluşturulan $K_{m,n} - e$ çizgesi için, $E_{\mathcal{E}}(K_{m,n}) < E_{\mathcal{E}}(K_{m,n} - e)$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem 5.2.71. [108] K_{n_1, n_2, \dots, n_k} çizgesi k -parçalı tam çizge olsun öyle ki $\sum_{i=1}^k n_i = n$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $n_i \geq 2$ koşullarını sağlayan. Bu durumda K_{n_1, n_2, \dots, n_k} çizgesinin herhangi bir e kenarı için,

$$E_{\mathcal{E}}(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) < E_{\mathcal{E}}(K_{n_1, n_2, \dots, n_k} - e)$$

eşitsizliği geçerlidir.

5.3. Bulgular, Gözlemler ve Yorumlar

Tezin bu bölümünde danışmanım ile birlikte uzun süredir çalıştığımız, gözlemlediğimiz, test sürecinden geçirdiğimiz ve de kuramsal zeminde ifade ederek ispatını yaptığımız tüm sonuçlar aktarılmıştır. İlk olarak, Jianfeng Wang ve çalışma ekibinden bağımsız olarak oluşturduğumuz çalışmalar partnerlerimizin teklifi ile ikili işbirliği makalesine dönüştürülmüştür. Sorumlu yazar Jianfeng Wang kendi sonuçları ile bizim çalışmalarımızı harmanlamış ve seçkin bir dergiye sunmuştur [109]. İkinci olarak danışmanım ile birlikte makale formatına getirdiğimiz ve ön değerlendirme için akademik bir dergiye gönderdiğimiz çalışmalardan bahsedilmiştir. Hali hazırda sunulan sonuçların literatürde önemli bir yer kaplayacağını düşünmekteyiz.

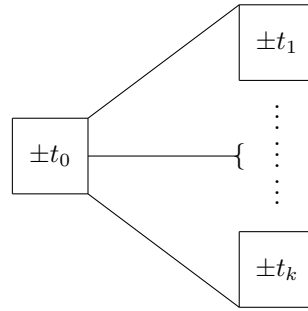
Komşuluk matrisinin spektrumu tarafından belirli olan çizgeleri araştırmak Spektral çizge kuramının merkezinde yer almıştır. Özellikle son yıllarda spektral karakterizasyon konusunda önemli ve prestijli çalışmaları bulunan seçkin bilim insanı Willem Haemers [110] referans numaralı makalesin de kullanışlı ve bir o kadar da üretken çizge işlemi olan *karma genişleme (mixed extension)* işlemi literatüre kazandırmıştır. Haemers'ın bu güçlü ve kullanışlı çizge işleminin spektral karakterizasyonda ne kadar önemli olduğunu gösteren bir başka çalışma ise [111] referans numaralı makaledir. Bu ortak çalışmanın ([109]) temel motivasyonu iki meşhur varsayıma dayanmaktadır. Bu varsayımlardan biri Schwenk tarafında öne sürülen “*Hemen hemen her çizge komşuluk matrisine göre eşspektrumludur.*” diğer varsayım ise Haemers tarafından literatüre kazandırılan “*Hemen hemen her çizge komşuluk/Laplasyan matrisine göre belirlidir.*”

Wang ve diğer yazarlar önceki çalışmalarında komşuluk ve dışmerkezlilik matrislerinin eşspektrumluluk bakış açısından oldukça benzer davranışlar sergilediklerini ifade ederek çeşitli gözlemlere yer vermişlerdir (özmerkezli ve iki çapa sahip çizgelerde). Ayrıca dışmerkezlilik matrisine ait tam olarak iki farklı özdeğere sahip çizgelerin r -zıtkutuplu çizgeler olması mevcut araştırmacılar tarafından bilinen bir gerçektir.

Bağlantılı bir çizgenin bir ve yalnız bir pozitif komşuluk özdeğerine sahip olması için gerek ve yeter şart $(-n_1, -n_2, \dots, -n_t)$ karma genişleme ile üretilen K_{n_1, n_2, \dots, n_t} çok parçalı tam çizgeye eşyapılı olmasıdır. Benzer motivasyon ile tezin bu bölümünde ağırlıklı olarak $K_{1, k+1}$ yıldız çizgenin karma genişlemesi yardımıyla bir ve yalnız bir dışmerkezlilik özdeğerine sahip çizgelerin karakterizasyonuna yer verilecektir. Ayrıca

iki özdeğer hariç diğerleri -2 ve 0 dan oluşan çizgelerin karakterizasyonu ifade ve ispat edilecektir. Nihai olarak çeşitli problemlerle birlikte bu kısım tamamlanacaktır (Wang ve diğer yazarlar tarafından bağımsız olarak elde edilen *HOMO-LUMO* indeksi ile ilgili sonuçlar tezin amaçları içerisinde olmadığından verilmeyecektir). Ana sonuçlara geçmeden önce *yıldız çizge genişlemesini* ifade edelim.

Tanım 5.3.1. $K_{1,k+1}$ yıldız çizge olsun ve $\deg(v_0) = k + 1, \deg(v_1) = 1, \deg(v_2) = 1, \dots, \deg(v_{k+1}) = 1$ olacak şekilde $K_{1,k+1} = S_{k+1}$ yıldız çizgesini etiketleyelim. Mevcut etiketlenme düzeni içerisinde $K_{1,k+1}$ yıldız çizgesinin karma genişlemesini $S(t_0, t_1, \dots, t_k)$ ile gösterebiliriz. Koşullar $0 \leq p, q \leq k (p = k - q)$ ve $t_j \geq 2 (1 \leq j \leq q)$ olmak üzere eğer $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_q \geq 2 > t_{q+1} = \dots = t_k = 1$ ise $S(t_0, t_1, \dots, t_k) \cong S(t_0, -p, t_1, \dots, t_q)$ olur. Eğer $p = 0$ alınırsa her bir bileşen $t_i \geq 2 (i = 1, 2, \dots, k)$ koşulunu belirtir. Şekil 5.14 de görüleceği üzere her bir bileşen \pm sembolü ile gösterilerek klik veya koklik durumlarını ifade edilir. Ayrıca karma genişleme işlemini $\mathcal{M}^{\mathcal{E}}(K_{1,k+1})[t_0, t_1, \dots, t_k]$ ile de gösterebiliriz (asıl alt matris gösterimi ile karışmaması için bu kısımda ilk gösterim şekli kullanılacaktır).



Şekil 5.14. $K_{1,k+1}$ yıldız çizgesinin karma genişleme modeli

Ana sonuçların kanıtını vermeden önce özmerkezli çizgeler ile ilgili temel yaklaşımı ifade ve ispat edelim.

Lemma 5.3.1. Bir ve yalnız bir tane pozitif dışmerkezlilik özdeğerine sahip özmerkezli çizge yoktur.

İspat. G çizgesi çapı d olan özmerkezli çizge olsun ve nokta kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun. G çizgesi özmerkezli olduğundan en az $2d$ dolaşım içerir bu ise G çizgesinde en az iki çift çapsal noktaların olduğunu garantiler. Diyelim ki bu nokta

çiftleri (v_1, v_2) ve (v_3, v_4) olsun. Bu durumda $\mathcal{E}(G)$ matrisi,

$$\mathcal{E}(G) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & ? \\ \hline ? & ? \end{array} \right) A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bloklanabilir. A_{11} matrisinin özdeğerleri $\{d, d, -d, -d\}$ olacağından (simetrik özdeğerler) ve Cauch arada olma teoreminden hareketle ispat tamamlanır. Yani G özmerkezli çizgesi en az iki pozitif dışmerkezlilik özdeğerine sahiptir. \square

Kanıtlarda gösterim kolaylığı için, tam olarak bir pozitif dışmerkezlilik özdeğerine sahip çizge ailelerini \mathcal{G} ile ifade edelim.

Lemma 5.3.2. G bağlantılı bir çizge ve $H \subseteq G$ olsun (H çizgesi G 'nin alt çizgesi). Herhangi $u, v \in V(H)$ noktaları için eğer $ecc_H(u) = ecc_G(u)$ ve $d_H(u, v) = d_G(u, v)$ ise $\mathcal{E}(H)$ matrisi $\mathcal{E}(G)$ matrisinin asıl alt matrisidir.

İspat. Herhangi $u, v \in V(H)$ noktaları için, $\mathcal{E}(H)$ ve $\mathcal{E}(G)$ matrislerinin $\epsilon_{uv}(H)$ ve $\epsilon_{uv}(G)$ elemanları göz önüne alalım. Eğer $\epsilon_{uv}(G) \neq 0$ ise $\epsilon_{uv}(G) = d_G(u, v)$ dir ve $d_H(u, v) = d_G(u, v) = \min\{\epsilon_G(u), \epsilon_G(v)\} = \min\{\epsilon_H(u), \epsilon_H(v)\}$ eşitlikleri geçerlidir. Böylece $\epsilon_{uv}(H) = d_H(u, v) = d_G(u, v) = \epsilon_{uv}(G)$ eşitlik geçişleri sağlar. Eğer $\epsilon_{uv}(G) = 0$ ise $d_H(u, v) = d_G(u, v) < \min\{\epsilon_G(u), \epsilon_G(v)\} = \min\{\epsilon_H(u), \epsilon_H(v)\}$ dir. Böylece $\epsilon_{uv}(H) = 0 = \epsilon_{uv}(G)$ ve $\epsilon_{uv}(H) = 0 = \epsilon_{uv}(G)$ eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak $\epsilon_{uv}(H) = \epsilon_{uv}(G)$ ve böylece $\mathcal{E}(H)$ matrisi $\mathcal{E}(G)$ matrisinin asıl alt matrisi olur. \square

Sonuç 5.3.1. Lemma 5.3.2 deki koşullar altında ve $n' = |H|$ nokta kümesini ve $\epsilon_i(G)$ özdeğerleri göstermek üzere $i = 1, 2, \dots, n'$ için,

$$\epsilon_{n-n'+i}(G) \leq \epsilon_i(H) \leq \epsilon_i(G)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Cauchy arada olma teoremi ve Lemma 5.3.2'den ispat kolayca sağlanır. \square

Lemma 5.3.3. $p, q \geq 0, t_j \geq 2$ ve $1 \leq j \leq q$ koşuluyla $G \cong S(t_0, -p, t_1, \dots, t_q)$ olsun. Eğer $G \in \mathcal{G}$ ise G çizgesi Tablo 5.5 ile verilen çizgeleri indirgemiş alt çizge olarak içermez.

Tablo 5.5. En büyük ikinci dışmerkezlilik özdeğerleri verilen bazı çizgeler.

Etiket	Çizge	ε_2
F_1	$S(5, -3)$	~ 0.127
F_2	$S(5, -2, 2)$	~ 0.138
F_3	$S(5, -1, 2, 2)$	~ 0.152
F_4	$S(4, -4)$	~ 1.579
F_5	$S(4, -3, 2)$	~ 0.238
F_6	$S(4, -2, 2, 2)$	~ 0.248
F_7	$S(4, -1, 2, 2, 2)$	~ 0.259
F_8	$S(3, -5)$	~ 0.101
F_9	$S(3, -4, 2)$	~ 0.103
F_{10}	$S(3, -3, 2, 2)$	~ 0.105
F_{11}	$S(3, -2, 2, 2, 2)$	~ 0.107
F_{12}	$S(3, -1, 2, 2, 2, 2)$	~ 0.109

İspat. Sonuç 5.3.1 ve Tablo 5.5 den açıktır. □

Lemma 5.3.4. Herhangi bir $G \in \mathcal{G}$ çizgesi için $diam(G) \leq 2$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $diam(G) \geq 3$ olsun ve G çizgesi $diam(G) = d$ olacak şekilde $P_{d+1} = v_0 v_1 \dots v_{d-1} v_d$ yolunu içersin bu durumda $ecc_G(v_0) = ecc_G(v_d) = d$ ve $d - 1 \leq ecc_G(v_1), ecc_G(v_{d-1}) \leq d$ olur.

1. durum: $ecc_G(v_1) = d$ ve $ecc_G(v_{d-1}) \leq d$ yada $ecc_G(v_1) \leq d$ ve $ecc_G(v_{d-1}) = d$.

Genellemeye sadık kalarak bazı $u \in V(G)$ ve $ecc_G(v_1) = d_G(v_1, u) = d = ecc_G(u)$ olsun. Bu durumda $\{v_0, v_d, v_1, u\}$ etiketlemesi ile birlikte $\mathcal{E}(G)$ matrisinin asıl alt matrisi,

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & \epsilon_{v_0 u} \\ d & 0 & 0 & \epsilon_{v_d u} \\ 0 & d & 0 & d \\ \epsilon_{uv_0} & \epsilon_{uv_d} & d & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca $d_G(v_i, u) \leq d$ için $\epsilon_{v_i u} \in \{0, d\}$ ($0 \leq i \leq d$). Bu durumda $\{v_0, v_d, v_1, u\}$ etiketlemesi ile birlikte $\mathcal{E}(G)$ matrisinin asıl alt matrisi aşağıdakilerden

birine denktir.

$$W_2 = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}, W_3 = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & d & d & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & d \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ d & 0 & d & 0 \end{pmatrix}, W_5 = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & d \\ d & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & d \\ d & d & d & 0 \end{pmatrix}$$

Direk hesaplama yaparak W_2, W_3, W_4 matrislerinin en büyük ikinci büyük özdeğerleri sırasıyla $d > 0$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}d > 0$ ve $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}d > 0$ dir. Ayrıca W_5 matrisinin karakteristik polinomu $f(\lambda) = \lambda^3 - d\lambda^2 - 3d^2\lambda + d^3$ olmak üzere $\phi_{W_5}(\lambda) = (\lambda + d)f(\lambda)$ şeklindedir. $d \geq 3$ için $f(-d^2) = d^3 - 3d^4 - d^5 - d^6 < 0$, $f(0) = d^3 > 0$, $f(d) = -2d^3 < 0$ ve $f(d^2) = d^3 - 3d^4 - d^5 + d^6$ eşitsizlikleri sağlanır. Böylece W_5 alt matrisinin ikinci özdeğeri $\varepsilon_2(W_5) > 0$ olur. Cauchy arada olma teoreminden $\varepsilon_2(G) \geq \min\{\varepsilon_2(W_i) : i = 2, 3, 4, 5\}$ elde edilir. Bu durum ise çelişkiyi doğurur.

2. durum: $\text{ecc}_G(v_1) = d - 1 = \text{ecc}_G(v_{d-1})$ olsun.

Bu durumda $\{v_0, v_d, v_1, u\}$ etiketlemesi ile birlikte $\mathcal{E}(G)$ matrisinin asıl alt matrisi,

$$W_6 = \begin{pmatrix} 0 & d & 0 & d-1 \\ d & 0 & d-1 & 0 \\ 0 & d-1 & 0 & 0 \\ d-1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Kolayca hesaplanır ki $\varepsilon_2(W_6) = \frac{1}{2}(-d + \sqrt{4 - 8d + 5d^2}) > 0$ ve Cauchy arada olma teoreminden $\varepsilon_2(G) \geq \varepsilon_2(W_6) > 0$ eşitsizlikleri elde edilir ki çelişki meydana gelir (yalnız ve yalnız bir pozitif özdeğer içermesi). Sonuç olarak $G \in \mathcal{G}$ çizgesi için $\text{diam}(G) \leq 2$ olur. \square

Lemma 5.3.5. \mathcal{G} ailesinde bulunan çizgeler $\{P_4, C_4, P_3 \cup K_1\}$ çizgelerinden hiç birini indirgenmiş alt çizge olarak içermez.

İspat. \mathcal{G} ailesi için Lemma 5.3.4 den hareketle $\text{diam}(G) = 2$ olduğunu düşünmek yeterli olacaktır ($\text{diam}(G) = 1$ durumu aşikar olacağından).

Kabul edelim ki $P_4 = v_1v_2v_3v_4 \subseteq G$ olsun (aksini kabul edelim). $1 \leq i \leq 4$ eşitsizliği için $ecc_G(v_i) \leq 2$ olması gerektiğinden herhangi $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ için $d_G(v_i, v_j) \leq 2$ eşitsizliği sağlanmalıdır. Böylece $d_G(v_1, v_3) = 2$, $d_G(v_1, v_4) = 2$, $d_G(v_2, v_4) = 2$ ve $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ için $ecc_G(v_i) = 2$ sonucuna ulaşılır. Tüm bu ön bilgilerden hareketle diyebiliriz ki; v_1, v_2, v_3, v_4 etiketli $\mathcal{E}(G)$ matrisinin asıl alt matrisi,

$$W_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formunda olmalıdır. asıl alt matrisin en büyük ikinci özdeğeri $\varepsilon_2(W_7) = \sqrt{5} - 1$ olur. Cauchy arada olma teoremini kullanarak $\varepsilon_2(G) \geq \varepsilon_2(W_7) > 0$ eşitsizlik geçişi sağlanır. Bu ise çelişkiyi doğurur (tam olarak bir pozitif özdeğer). Tüm bu sonuçlardan hareketle $P_4 \not\subseteq G$ olması gerektiği ispat edilir.

Kabul edelim ki $C_4 \subseteq G$ olsun Açıktır ki $\mathcal{E}(G)$ matrisinin asıl alt matrisi (formal etiketleme ile),

$$W_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formunda olur. Kolayca hesaplanabilir ki $\varepsilon_2(W_8) = 2$ dir. Böylece $\varepsilon_2(G) \geq 2 > 0$ eşitsizliği olur ki G çizgesinin tam olarak bir pozitif dışmerkezlilik özdeğerine sahip olmasıyla çelişir. Kabul edelim ki $P_3 \cup K_1 \subseteq G$ olsun. $\mathcal{E}(G)$ matrisinin asıl alt matrisi,

$$W_9 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formunda olur. Kolay bir şekilde $\varepsilon_2(W_9) \approx 0.6222$ olduğu hesaplanabilir. Yukarıda bulunan kabullere benzer olarak $\varepsilon_2(G) > 0$ olur ki bu ise çelişki doğurur.

Yani $P_3 \cup K_1 \not\subseteq G$ olmalıdır. □

Kabul edelim $S(t_0, t_1, \dots, t_k)$ ($k \geq 2$)'nin nokta kümesi $V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$ olsun. Genellemede $1 \leq i \leq k$ aralığı için t_i bileşenine karşılık gelen küme setini

$V_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{it_i}\}$ şeklinde alalım. Ayrıca $G[v_1, \dots, v_j]$ gösterimi ile G çizgesinin $\{v_1, \dots, v_j\}$ nokta kümesi tarafından indirgenen alt çizgesini gösterelim.

Lemma 5.3.6. $t_i \geq 1$ olmak üzere $G' = S(t_0, t_1, \dots, t_k)$ olsun ($k \geq 2$). Eğer $G' \in \mathcal{G}$ ve G çizgesi G' çizgesine yeni bir w noktası eklenerek oluşturulan bir çizge ($G \in \mathcal{G}$) ise w noktası V_0 bileşeninde bulunan tüm noktalara komşu olmalıdır.

İspat. $S_{1,k}$ yıldız çizgesinin karma genişlemesini düşünelim. V_0 bileşenindeki herhangi bir nokta diğer V'_i ($1 \leq i \leq k$) bileşenindeki noktalardan birine komşudur. Ayrıca tanım gereği $1 \leq i \neq j \leq k$ için V_i ve V_j bileşenlerindeki noktalar komşu değildir. Aksini kabul edelim öyle ki bazı $v_{01} \in V_0$ noktaları için $v_{01} \not\sim w$ olsun. Bu durumda $v_{i1} \in V_i$ ve $v_{j1} \in V_j$ ($i \neq j$) için v_{01}, v_{i1} ve v_{01}, v_{j1} noktaları komşu olur. Lemma 5.3.5 den biliyoruz ki $P_3 \cup K_1 \not\subseteq G$ geçerlidir. Ayrıca w noktası, v_{i1} ve v_{j1} noktalarının enaz biri ile komşudur. Eğer w noktası, v_{i1} ve v_{j1} noktalarının her ikisi ile komşu ise $G[v_{01}, v_{i1}, w, v_{j1}] \cong C_4$ ve diğer durumda $G[v_{01}, v_{i1}, w, v_{j1}] \cong P_4$ olur. Bu ise yine Lemma 5.3.5 ile çelişir. Tüm bunlardan hareketle w noktası V_0 bileşenindeki tüm noktalar ile komşu olduğu sonucuna varılır. \square

Önerme 5.3.1. $G \in \mathcal{G}$ çizgesi n nokta olsun. Bu durumda $k \geq 1$ ve $t_i \geq 1$ ($1 \leq i \leq k$) koşuluyla G çizgesi $S(t_0, t_1, \dots, t_k)$ karma genişlemesine eşyapılı olur.

İspat. Lemma 5.3.4 den; Eğer $diam(G) = 1$ ise $G \cong K_n \cong S(t_0, n-t_0)$ olur. Eğer G ağaç çizge ve $diam(G) = 2$ ise $G \cong S_{1,n-1} \cong S(1, 1, \dots, 1)$ ($n \geq 3$) olur. Şimdi G çizgesinin en az bir döngü içerdiğini düşünelim. $C_4, P_4 \not\subseteq G$ olduğunu önceki sonuçlardan biliyoruz. Bu durumda G çizgesi sadece C_3 içerir (üçgen). Eğer $n = 3$ ise $G \cong C_3 \cong S(1, 2)$ olur. Açık ki $n = 4$ için $G \cong S(1, 1, 2)$ veya $G \cong S(2, 1, 1)$ olur. Kalan durumlar için tüme varım yöntemini uygulayacağız ($n \geq 5$). Kabul edelim ki $n - 1$ noktalı çizgeler için teorem doğru olsun. G çizgesi döngü içerdiği için öyle bir w noktası vardır ki $G' = G - w$ çizgesi bağlantılıdır. Eğer $diam(G') = 1$ ise $G' \cong K_{n-1} \cong S(t_0, n-1-t_0) \in \mathcal{G}$ geçerlidir. Eğer $diam(G') \geq 3$ ise $P_4 \subseteq G' \subseteq G$ olur ki bu durum Lemma 5.3.5 ile çelişir. Böylece $diam(G') = 2$ olmalıdır.

İddia: Bazı $G \in \mathcal{G}$ çizgeleri ve $w \in V(G)$ için eğer $G' \cong G - w \subseteq G$ ve $diam(G') = 2$ ise $G' \in \mathcal{G}$ olur.

İddianın ispatı: Lemma 5.3.4 ve $G \in \mathcal{G}$ olmasından hareketle $diam(G) \leq 2$ olduğunu

biliyoruz ve $diam(G') = 2$ olduğu için $diam(G) = 2$ olur. Diğer durumda $diam(G) = 1$ ve böylece $diam(G') = diam(G - w) = 1$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla herhangi iki $x, y \in V(G')$ için $d'_G(x, y) = d_G(x, y)$ mesafe eşitliği geçerlidir. Herhangi bir $u \in V(G')$ noktası için $ecc'_G(u)$ ve $ecc_G(u)$ dışmerkezliliklerini göz önüne alalım. Eğer $ecc'_G(u) = 1$ ise $ecc_G(u) = 1$ olur. Diğer durumda $diam(G) = 2$ ile $ecc_G(u) = 2$ ve de $ecc'_G(u) = 2$ olur ki bu bir çelişki doğurur. Benzer şekilde eğer $ecc'_G(u) = 2$ ise $ecc_G(u) = 2$ aksine $diam(G) = 2$ vasıtasıyla $ecc_G(u) = 1$ ve $ecc'_G(u) = 1$ olur ki bu da başka bir çelişkiyi getirir. Böylece $u \in V(G')$ noktası için $ecc'_G(u) = ecc_G(u)$ eşitliği sağlanır. Tüm bu yaklaşımlarla birlikte ve Sonuç 5.3.1 den,

$\varepsilon_1(G) \geq \varepsilon_1(G') \geq \dots \geq \varepsilon_{n-1}(G) \geq \varepsilon_n(G)$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ve $G \in \mathcal{G}$ ile birlikte $G' \in \mathcal{G}$ iddiasının ispatını tamamlar.

Tümevarım hipotezi ve $G' \in \mathcal{G}$ olmasından hareketle $\sum_{i=0}^k t'_i = n - 1$ ve $V'_i = \{v_{i1'}, \dots, v_{it'_i}\}$, $k \geq 2$ ve $t'_i \geq 1$ ($0 \leq i \leq k$) olmak üzere $G' \cong S(t'_0, t'_1, \dots, t'_k)$ ifadesini yazabiliriz. Bu durumda yukarıda belirtilen w noktası için ve Lemma 5.3.6 dan V'_0 bileşeninin tüm noktaları ile w noktası komşudur. Eğer $w, V'_1 \cup \dots \cup V'_k$ nin herhangi bir noktasına komşu değil ise $G \cong S(t'_0, t'_1, \dots, t'_k, 1)$ olur. Eğer w noktası $\{V'_1 \cup \dots \cup V'_k\}$ kümesinin herhangi bir bileşeni olan V'_s nin herhangi bir noktasına ($v_{s1'}$ diyelim) komşu ise w noktası V'_s nokta kümesinin hepsine komşu olur. Aksi takdirde w ve $v_{st'_a}$ noktalarının komşu olmadığı öyle bir $v_{st'_a} \in V'_s$ vardır ki $G[w, v_{s1'}, v_{st'_a}, v_{j1'}] \cong P_3 \cup K_1 \not\subseteq G$ olan. Bu ise çelişki oluşturur. Sonuç olarak $G \cong S(t'_0, t'_1, \dots, t'_{i+1}, \dots, t'_k)$ elde edilir. Eğer w noktası, $\{V'_1, \dots, V'_k\}$ bileşen setinde ki en az iki bileşendeki noktalara (Diyelim ki $0 \leq i \neq j \leq k$ için bu bileşenler V'_i ve V'_j olsun) komşu ise w noktası $V'_1 \cup \dots \cup V'_k$ küme setinin tüm noktalarına komşu olur. Aksi takdirde öyle bir $v \in V'_1 \cup \dots \cup V'_k$ noktası vardır ki u ve w noktalarının komşu olmadığı. Bu durumda eğer $v \in V'_i \cup V'_j$ ise $G[w, v, v_{i1'}, v_{j1'}] \cong P_4$ olur yada $v \notin V'_i \cup V'_j$ ise $G[w, v, v_{i1'}, v_{j1'}] \cong P_3 \cup K_1$ olur ki bu bir çelişki oluştururdu (Lemma 5.3.5). Sonuç olarak w noktası $V'_1 \cup \dots \cup V'_k$ setinin tüm noktalarına komşu olur ve böylece $G \cong S(t'_0 + 1, t'_1, \dots, t'_k)$ ile ispat tamamlanır. \square

Önerme 5.3.2. $p, q \geq 0$ ve $t_j \geq 2$ ($1 \leq j \leq q$) koşulu ile birlikte $G \cong S(t_0, -p, t_1, \dots, t_q)$ olsun. Eğer $G \in \mathcal{G}$ ise,

- i. $t_0 = 1, p + q \geq 1$;
- ii. $t_0 = 2, p, q \geq 0$;

iii. $t_0 = 3, 0 \leq q \leq 4 - p, 0 \leq p \leq 4$;

iv. $t_0 = 4, 0 \leq q \leq 3 - p, 0 \leq p \leq 3$;

v. $t_0 \geq 5, 0 \leq q \leq 2 - p, 0 \leq p \leq 2$;

İspat. Kabul edelim $t_0 \geq 5$ olsun eğer $p \geq 3$ ise $F_1 \subseteq G$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $p \leq 2$ olmalıdır. Eğer $p = 2$ ise $F_2 \not\subseteq G$ olduğu için $q = 0$ olur. Eğer $p = 0, 1$ ise $F_3 \not\subseteq G$ olduğu için $q \leq 2 - p$ olur. $t_0 = 4$ alalım $F_4 \not\subseteq G$ için $p \leq 3$ olur. $F_5, F_6, F_7 \not\subseteq G$ olduğu için biz $q \leq 3 - p$ eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca $F_8 \not\subseteq G$ olduğundan $p \leq 4$ olmalıdır, $i = 9, 10, 11, 12$ olmak üzere $F_i \not\subseteq G$ genellemesinden hareketle $q \leq 4 - p$ ($p \leq 3$) eşitsizliği yazılabilir. G çizgesinin nokta sayısı en az 2 olduğundan eğer $t_0 = 2$ ise $p, q \geq 0$ ve eğer $t_0 = 1$ ise $p + q \geq 1$ olur ki ispat tamamlanır. \square

Sonuç olarak ortak çalışmanın ana teoremlerinden biri olan Teorem 5.3.1 in ispatı için yeter koşul tamamlanmıştır.

Önerme 5.3.3. $p, q \geq 0$ ve $t_j \geq 0$ ($1 \leq j \leq h$) koşulları ile birlikte $G = S(t_0, -p, k_1 t_1, \dots, k_h t_h)$ karma genişlemesi olsun. Önerme 5.3.2 koşullarla birlikte G çizgesi tam olarak bir dışmerkezlilik özdeğerine sahiptir. Dahası,

i. $p + q \leq 1$ koşulu ile eğer $t_0 \geq 1$ ise $G \cong K_n$ olur ve özdeğerler,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$$

ii. $p + q \leq 2$ ve $p \geq 1$ koşuluyla birlikte eğer $t_0 = 1, q = 0, t_0 = 3, q = 4 - p$ yada $t_0 = 4, q = 3 - p$ ise,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & -1 & -2 & \varepsilon_5 & -2t_h & \varepsilon_7 & \dots & -2t_2 & \varepsilon_{2h+3} & -2t_1 \\ 1 & n-t_0-p-q+1 & t_0-1 & p-1 & 1 & k_h-1 & 1 & \dots & k_2-1 & 1 & k_1-1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_5 \in (-2t_h, -2), \varepsilon_{5+2i} \in (-2t_{h-i}, -2t_{h-i+1})$ ($1 \leq i \leq h-1$). Diğer koşullar için (Önerme 5.3.2 koşulları ile birlikte),

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 & -1 & -2 & \varepsilon_6 & -2t_h & \varepsilon_8 & \dots & -2t_2 & \varepsilon_{2h+4} & -2t_1 \\ 1 & n-t_0-p-q & 1 & t_0-1 & p-1 & 1 & k_h-1 & 1 & \dots & k_2-1 & 1 & k_1-1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_6 \in (-2t_h, -2), \varepsilon_{6+2i} \in (-2t_{h-i}, -2t_{h-i+1})$ ($1 \leq i \leq h-1$).

iii. $p + q \leq 2$ ve $p = 0$ koşuluyla birlikte eğer $t_0 = 3, q = 4$ yada $t_0 = 4, q = 3$ ise,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} \varepsilon_1 & 0 & -1 & -2t_h & \varepsilon_5 & -2t_h - 1 & \dots & -2t_2 & \varepsilon_{2h+1} & -2t_1 \\ 1 & n - t_0 - q + 1 & t_0 - 1 & k_h - 1 & k_{h-1} - 1 & \dots & k_2 - 1 & 1 & k_1 - 1 & \end{array} \right\}$$

$\varepsilon_{3+2i} \in (-2t_{h-i}, -2t_{h-i+1})$ ($1 \leq i \leq h - 1$). Diğer koşullar için (Önerme 5.3.2 koşulları ile birlikte),

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} \varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 & -1 & -2t_h & \varepsilon_6 & -2t_{h-1} & \dots & -2t_2 & \varepsilon_{2h+2} & -2t_1 \\ 1 & n - t_0 - q & 1 & t_0 - 1 & k_h - 1 & 1 & k_{h-1} - 1 & \dots & k_2 - 1 & 1 & k_1 - 1 \end{array} \right\}$$

$\varepsilon_{4+2i} \in (-2t_{h-i}, -2t_{h-i+1})$ ($1 \leq i \leq h - 1$).

İspat.

i. Eğer $p + q \leq 1$ ise açıktır ki $G \cong K_n$ çizgesi $S(t_0, n - t_0)$ karma genişlemesine eşyapılıdır.

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \left\{ \begin{array}{cc} n - 1 & -1 \\ 1 & n - 1 \end{array} \right\}$$

ii. Kabul edelim $p + q \leq 1$ ve $p \geq 1$ oldun. G çizgesinin uygun bir şekilde etiketlenmesi ile aşağıdaki matris elde edilir.

$$\mathcal{E}(G) = \begin{pmatrix} J - I & J & J & J & \dots & J \\ J & 2(J - I) & 2J & 2J & \dots & 2J \\ J & 2J & 0 & 2J & \dots & 2J \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J & 2J & 2J & 2J & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ve matrise ait dışmerkezlilik polinomu,

$$\phi(G, \lambda) = \lambda^{n-t_0-p-q}(\lambda + 1)^{t_0-1}(\lambda + 2)^{p-1}gt_0, -p, \dots, t_q(\lambda)$$

Polinomda $gt_0, -p, \dots, t_q(\lambda) = \prod_{i=1}^h (\lambda + 2t_i)^{k_i-1}h(\lambda)$ ve

$$h(\lambda) = (\lambda^2 - 2p\lambda - t_0\lambda + 3\lambda + t_0p - 2t_0 - 2p + 2) \prod_{i=1}^h (\lambda + 2t_i) - (\lambda + 2)(2\lambda - t_0 + 2) \sum_{i=1, i \neq j}^h (\lambda + 2t_i)$$

eşitlikleri geçerlidir. Polinomun detaylı çözümü Önerme 5.3.2 de bulunan koşullar altında gerçekleştirilerek arzu edilen sonuc elde edilir. Yani, $p + q \leq 2$ ve $p \geq 1$ koşuluyla birlikte eğer $t_0 = 1, q = 0, t_0 = 3, q = 4 - p$ yada $t_0 = 4, q = 3 - p$ ise,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} \varepsilon_1 & 0 & -1 & -2 & \varepsilon_5 & -2t_h & \varepsilon_7 & \dots & -2t_2 & \varepsilon_{2h+3} & -2t_1 \\ 1 & n - t_0 - p - q + 1 & t_0 - 1 & p - 1 & 1 & k_h - 1 & 1 & \dots & k_2 - 1 & 1 & k_1 - 1 \end{array} \right\}$$

$\varepsilon_5 \in (-2t_h, -2)$, $\varepsilon_{5+2i} \in (-2t_{h-i}, -2t_{h-i+1})$ ($1 \leq i \leq h-1$) ve,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} \varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 & -1 & -2 & \varepsilon_6 & -2t_h & \varepsilon_8 & \dots & -2t_2 & \varepsilon_{2h+4} & -2t_1 \\ 1 & n-t_0-p-q & 1 & t_0-1 & p-1 & 1 & k_h-1 & 1 & \dots & k_2-1 & 1 & k_1-1 \end{array} \right\}$$

$\varepsilon_6 \in (-2t_h, -2)$, $\varepsilon_{6+2i} \in (-2t_{h-i}, -2t_{h-i+1})$ ($1 \leq i \leq h-1$) ifadeleri elde edilir.

iii. $p+q \geq 2$ ve $p=0$ yani $q \geq 2$ koşulları ile birlikte G çizgesi etiketlenir ise,

$$\mathcal{E}(G) = \begin{pmatrix} J-I & J & J & \dots & J \\ J & 0 & 2J & \dots & 2J \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J & 2J & 2J & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrise ait dışmerkezlilik polinomu,

$$\phi(G, \lambda) = \lambda^{n-t_0-q} (\lambda+1)^{t_0-1} \prod_{i=1}^h (\lambda+2t_i)^{k_i-1} l(\lambda)$$

olarak yazılır. Burada,

$$l(\lambda) = (\lambda-t_0+1) \prod_{i=1}^h (\lambda+2t_i) - (2\lambda-t_0+2) \sum_{j=1}^h (k_j t_j \prod_{i=1, i \neq j}^h (\lambda+2t_i))$$

eşitliği geçerlidir. Önerme 5.3.2 de ki koşullar altında ve yoğun hesaplamalarla birlikte istenen sonuç elde edilir. Yani, $p+q \leq 2$ ve $p=0$ koşuluyla birlikte eğer $t_0=3, q=4$ yada $t_0=4, q=3$ ise,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} \varepsilon_1 & 0 & -1 & -2t_h & \varepsilon_5 & -2t_h-1 & \dots & -2t_2 & \varepsilon_{2h+1} & -2t_1 \\ 1 & n-t_0-q+1 & t_0-1 & k_h-1 & k_{h-1}-1 & \dots & k_2-1 & 1 & k_1-1 \end{array} \right\}$$

$\varepsilon_{3+2i} \in (-2t_{h-i}, -2t_{h-i+1})$ ($1 \leq i \leq h-1$). Diğer koşullar için,

$$Spec_{\mathcal{E}}(G) = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} \varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 & -1 & -2t_h & \varepsilon_6 & -2t_{h-1} & \dots & -2t_2 & \varepsilon_{2h+2} & -2t_1 \\ 1 & n-t_0-q & 1 & t_0-1 & k_h-1 & 1 & k_{h-1}-1 & \dots & k_2-1 & 1 & k_1-1 \end{array} \right\}$$

$\varepsilon_{4+2i} \in (-2t_{h-i}, -2t_{h-i+1})$ ($1 \leq i \leq h-1$).

□

Teorem 5.3.1. Bağlantılı bir G çizgesinin dışmerkezlilik matrisine ait tam olarak bir pozitif özdeğerinin olması için gerek ve şart $p, q \geq 0$ ve $t_j \geq 2$ ($1 \leq j \leq q$) olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $(t_0, -p, t_1, \dots, t_q)$ bileşenleri ile oluşturulan $S_{1,q+1}$ çizgesinin karma genişlemesine eşyapılı olmasıdır.

- i. $t_0 = 1$ ve $p + q \geq 1$;
- ii. $t_0 = 2$ ve $p, q \geq 0$;
- iii. $t_0 = 3$ ve $0 \leq q \leq 4 - p$, $0 \leq p \leq 4$;
- iv. $t_0 = 4$ ve $0 \leq q \leq 3 - p$, $0 \leq p \leq 3$;
- v. $t_0 \geq 5$ ve $0 \leq q \leq 2 - p$, $0 \leq p \leq 2$;

İspat. Önerme 5.3.1, Önerme 5.3.2 ve Önerme 5.3.3 den ispat tamamlanır. \square

Bu bölümde ise -2 ve 0 hariç en fazla iki dışmerkezlilik özdeğerine sahip çizgelerin sınıflandırılması yapılmıştır.

K_{n_1, n_2, \dots, n_l} çizgesi $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l$ koşulunu sağlayan çok parçalı tam çizge olsun.

Lemma 5.3.7. [99] G çizgesi $n_0 \geq 1$, $n_r \geq 2$ ve $l \geq 2$ ($1 \leq r \leq l$) koşullarının saylayan $G \cong K_{n_0} + K_{n_1, n_2, \dots, n_l}$ bir çizge olsun. Bu durumda,

$$\phi(G, \lambda) = (\lambda + 1)^{n_0 - 1} (\lambda + 2)^{n - n_0 - l} \left[(\lambda - n_0 + 1) \prod_{r=1}^l (\lambda - 2n_r + 2) - n_0 \sum_{r=1}^l \prod_{s=1, r \neq s}^l n_r (\lambda - 2n_s + 2) \right]$$

Lemma 5.3.8. [99] G çizgesi n noktalı ve en küçük dışmerkezlilik özdeğeri $\varepsilon_n(G)$ olan bir çizge olsun. Bu durumda $\varepsilon_n(G) = -2$ olması için gerek ve yeter şartlar,

- i. $l \geq 2$ ve $n_r \geq 2$ ($1 \leq r \leq l$) için $G \cong K_{n_1, n_2, \dots, n_l}$
- ii. Eğer $n_0 = 1$ ise $2 \leq l \leq 4$, eğer $n_0 = 2$ ise $2 \leq l \leq 3$ yada eğer $n_0 \geq 3$ ise $l = 2$ ve $n_r \geq 2$ ($1 \leq r \leq l$) için $G \cong K_{n_0} + K_{n_1 \dots n_l}$

Nokta sayısı $n \geq 2$ olan bağlantılı çizgeler en az bir pozitif dışmerkezlilik özdeğerine sahiptir. \mathcal{S} sembolü ile -2 ve 0 hariç en fazla iki dışmerkezlilik özdeğerine sahip bağlantılı çizgeleri gösterelim. $G \in \mathcal{S}$ için olası durumlar; -2 ve 0 den farklı bir negatif ve bir pozitif, sadece bir pozitif yada tam olarak iki pozitif özdeğere sahiptir.

Lemma 5.3.9. Nokta sayısı n olan $G \in \mathcal{S}$ çizgesini ele alalım. Bu durumda G çizgesinin iki pozitif dışmerkezlilik özdeğerinin olması için gerek ve yeter şart $n_1, n_2 \geq 2$ koşulu ile $G \cong K_{n_1, n_2}$ olmasıdır.

İspat. Eğer $G \in \mathcal{S}$ çizgesi -2 ve 0 den farklı tam olarak iki pozitif özdeğere sahip ise G 'nin en küçük özdeğerleri -2 olur. Lemma 5.3.8 den hareketle iki durumu değerlendirelim.

1. *durum:* $l \geq 2$ ve $n_r \geq 2$ ($1 \leq r \leq l$) için $G \cong K_{n_1, n_2, \dots, n_l}$ olmak üzere,

$\text{Spec}_{\mathcal{E}}(K_{n_1, n_2, \dots, n_l}) = \{2(n_1 - 1), 2(n_2 - 1), \dots, 2(n_l - 1), -2^{n-l}\}$ ise G çizgesi en az iki pozitif dışmerkezlilik özdeğerine sahiptir. Böylece $n_1, n_2 \geq 2$ koşulu ile $G \cong K_{n_1, n_2}$ eşyapılılık ilişkisi sağlanır.

2. *durum:* $n_0 \geq 1$, $l \geq 2$ ve $n_1 \geq \dots \geq n_l \geq 2$ ($1 \leq r \leq l$) olacak şekilde $G \cong K_{n_0} + K_{n_1 \dots n_l}$ çizgesine ait dışmerkezlilik matrisinin karakteristik polinomu,

$$\phi(G, \lambda) = (\lambda + 1)^{n_0-1} (\lambda + 2)^{n-n_0-l} f_{n_0, n_1, \dots, n_l}(\lambda),$$

$$f_{n_0, n_1, \dots, n_l}(\lambda) = (\lambda - n_0 + 1) \prod_{r=1}^l (\lambda - 2n_r + 2) - n_0 \sum_{r=1}^l \prod_{s=1, r \neq s}^l n_r (\lambda - 2n_s + 2)$$

Eğer $n_0 \geq 3$ ise G çizgesi en az üç dışmerkezlilik özdeğerine sahip olur. Yani -2 ve 0 dan farklı bir pozitif ve en az iki tane -1 özdeğeri olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $n_0 \leq 2$ eşitsizliği doğrulanır. Ayrıca bir önceki lemma'dan $2 \leq l \leq 4$ aralığına sahibiz. İspat için aşağıdaki alt durumları inceleyelim.

Alt durum (I): $l = 2$ ve önceki lemma'dan ($n \geq 1$).

$$f_{n_0, n_1, n_2}(\lambda) = (\lambda - n_0 + 1)(\lambda - 2n_1 + 2)(\lambda - 2n_2 + 2) - n_0 n_1 (\lambda - 2n_1 + 2) - n_0 n_2 (\lambda - 2n_1 + 2)$$

Bir dizi hesaplamalar kullanılarak,

$$f_{n_0, n_1, n_2}(-2) = -4n_1 n_2 < 0,$$

$$f_{n_0, n_1, n_2}(-1) = (n_1 + n_2 - 1)n_0 > 0,$$

$$f_{n_0, n_1, n_2}(2n_2 - 2) = 2n_0 n_2 (n_1 - n_2) \geq 0,$$

$$f_{n_0, n_1, n_2}(2n_1 - 2) = 2n_0 n_1 (n_2 - n_1) \leq 0,$$

$$f_{n_0, n_1, n_2}(2(n_0 + n_1 + n_2) - 2) = 2n_1^2 (4n_0 + 3n_2)$$

$$+ 2n_0 [3n_2^2 + 2(n_0 - 1)n_0 + n_2(5n_0 - 2)] + 2n_1 [4n_2^2 + n_0(5n_0 - 2) + 2n_2(5n_0 - 1)] > 0$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece G çizgesi -2 ve 0 dan farklı ikiden fazla dışmerkezlilik özdeğerine sahip olur. Yani,

$\varepsilon_1 \in [2n_1 - 2, 2(n_0 + n_1 + n_2) - 2)$, $\varepsilon_2 \in [2n_2 - 2, 2n_1 - 2)$ ve $\varepsilon_{n_0+2} \in (-2, -1)$ özdeğer aralıkları olur ki bu bir çelişkidir.

Alt durum (2): $l = 3$ ve önceki lemma'dan $n_0 = 1$ yada $n_0 = 2$ olur.

Eğer $n_0 = 1$ ise $G \cong K_1 + K_{n_1, n_2, n_3}$ ve,

$$\begin{aligned} f_{1, n_1, n_2, n_3} &= \lambda(\lambda - 2n_1 + 2)(\lambda - 2n_2 + 2)(\lambda - 2n_3 + 2) \\ &- n_0 n_1 (\lambda - 2n_1 + 2)(\lambda - 2n_2 + 2) - n_0 n_2 (\lambda - 2n_1 + 2)(\lambda - 2n_3 + 2) \\ &- n_0 n_3 (\lambda - 2n_2 + 2)(\lambda - 2n_3 + 2) \end{aligned}$$

polinomdaki fonsiyon eşitliği sağlanır. Yoğun hesaplamalarla birlikte,

$$\begin{aligned} f_{1, n_1, n_2, n_3}(-2) &= 4n_1 n_2 n_3 > 0, \\ f_{1, n_1, n_2, n_3}(2n_3 - 2) &= 4n_3(n_1 - n_3)(n_3 - n_2) \leq 0, \\ f_{1, n_1, n_2, n_3}(2n_2 - 2) &= 4n_2(n_1 - n_2)(n_2 - n_3) \leq 0, \\ f_{1, n_1, n_2, n_3}(2n_1 - 2) &= -4n_1(n_1 - n_2)(n_1 - n_3) \leq 0, \\ f_{1, n_1, n_2, n_3}(2(n_1 + n_2 + n_3) - 2) &= 4(n_1^3(-1 + 4n_2 + 4n_3) \\ &+ n_1^2(n_2 + n_3)(8n_2 + 8n_3 - 5) + (n_2 + n_3)(4n_2(n_3 - 1)n_3 - n_3^2 + n_2^2(4n_3 - 1)) \\ &+ n_1(4n_2^3 + n_3^2(4n_3 - 5) + n_2 n_3(16n_3 - 11) + n_2^2(16n_3 - 5))) > 0 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece G çizgesi -2 ve 0 dan farklı ikiden fazla özdeğere sahip olur. Yani,

$\varepsilon_1 \in [2n_1 - 2, 2(n_1 + n_2 + n_3) - 2)$, $\varepsilon_2 \in [2n_2 - 2, 2n_1 - 2)$, $\varepsilon_3 \in [2n_3 - 2, 2n_2 - 2)$ ve $\varepsilon_{n_0+3} \in (-2, -2n_3 - 2)$ özdeğer aralıkları olur ki bu bir çelişkidir. Eğer $n_0 = 2$ ise $G \cong K_2 + K_{n_1, n_2, n_3}$ olur. Açık ki $\mathcal{E}(K_2 + K_{n_1, n_2, n_3})$ matrisinin asıl alt matrisi $\mathcal{E}(K_1 + K_{n_1, n_2, n_3})$. Önceki değerlendirme ve sonuçlardan hareketle $\varepsilon_1 \geq 2n_1 - 2$, $\varepsilon_2 \geq 2n_2 - 2$ ve $\varepsilon_3 \geq 2n_3 - 2$ olur ki yine bir çelişki oluşturur.

Alt durum (3): $l = 4$ eşitliği ve önceki lemmadan, $n_0 = 1$ ve $G \cong K_1 + K_{n_1, n_2, n_3, n_4}$ olur. Açık ki $\mathcal{E}(K_1 + K_{n_1, n_2, n_3, n_4})$ matrisinin asıl alt matrisi $\mathcal{E}(K_1 + K_{n_1, n_2, n_3})$ dir. Sonuçlarda ve alt durumlardan hareketle $\varepsilon_1 \geq 2n_1 - 2$, $\varepsilon_2 \geq 2n_2 - 2$ ve $\varepsilon_3 \geq 2n_3 - 2$ olur ki bu da başka bir çelişki oluşturur.

Tüm bu olası durumların hepsi birlikte düşünüldüğünde eğer G çizgesi iki pozitif dışmerkezlilik özdeğerine sahip ise $G \cong K_{n_1, n_2}$ ($n_1 n_2 \geq 2$) eşyapılığ geçerklidir. \square

Sonraki lemma için \mathcal{S} ailesi ile sadece bir pozitif veya bir pozitif ve bir negatif dışmerkezlilik özdeğerine sahip çizgeleri gösterebilirsin. Ayrıca \mathcal{G} gösteri ile de sadece bir pozitif dışmerkezlilik özdeğerine sahip çizgeleri gösterebiliriz.

Lemma 5.3.10. $G \in \mathcal{S} \cap \mathcal{G}$ olması için gerek ve yeter şart $p \geq 1$ olmak üzere $G \cong S_{1,p} \cong S(1, -p)$ dir.

İspat. $G \in \mathcal{G}$ için ve Teorem 5.3.1 den $G \cong S(t_0, -p, t_1, \dots, t_q)$ olur (tabiki gerekli kısıtlamalarla birlikte). $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_q \geq 2$ sıralaması için eğer t_0 ise G çizgesinin en az iki dışmerkezlilik özdeğeri -1 sonucu çıkarılır ki bu bir çelişkidir. Böylece $t_0 \leq 2$ durumunu ele alalım.

1. durum: Teorem 5.3.1 $t = 0$ ve $p, q \geq 0$ koşulu ile $p + q \geq 1$ durumunu ele alalım.

Alt durum (1): $p = 0$ ise $q \geq 1$ ve böylece $t_j \geq 2$ ($1 \leq j \leq q$) şartı ile $G \cong S(1, t_1, t_2, \dots, t_q)$ olur. Eğer $q = 1$ ise $G \cong K_n, n = 2$ ($K_2 \cong S(1, -1)$) için $G \in \mathcal{S}$ ama diğerleri için $G \notin \mathcal{S}$. Eğer $q \geq 2$ ise $q_{t_0, -p, \dots, t_q}(\lambda)$ ifadesi tanımlanır.

Eğer $q = 2$ ise $G \cong S(1, t_1, t_2)$ olur. Önceki Önerme 5.3.3, G çizgesi -2 ve 0 dan farklı üç dışmerkezlilik özdeğerine sahip olur. Yani $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_{n-1} \in (-1, 0)$ ve $\varepsilon_n \in [-2t_1, -2t_2)$ olur ki bu da çelişkiyi gerektirir.

Eğer $q = 3$ ise $G \cong S(1, t_1, t_2, t_3)$ olur. Önerme 5.3.3, G çizgesi -2 ve 0 dan farklı dört dışmerkezlilik özdeğerine sahip olur. Yani $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_{n-2} \in (-1, 0), \varepsilon_{n-1} \in [-2t_2, -2t_3)$ ve $\varepsilon_n \in [-2t_1, -2t_2)$ olur ki yine çelişkiyi gerektirir.

Eğer $q \geq 4$ ise $G \cong S(1, t_1, \dots, t_q)$ olur. Açıktır ki (Lemma 5.3.2) G ve $S(1, t_1, t_2, t_3)$ çizgeleri aynı koşulları paylaşır. Böylece $\mathcal{E}(S(1, t_1, t_2, t_3))$ matrisi $\mathcal{E}(S(1, t_1, \dots, t_q))$ matrisinin asıl alt matrisi olur. Sonuç olarak $\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_{n-1} \leq -2t_3$ ve $\varepsilon_n \leq -2t_2$ olur ki bu bir çelişkidir. (Sonuç 5.3.1)

Alt durum (2): $p = 1$ ise $q \geq 0$. Eğer $q = 0$ ise $G \cong S(1, -1) \in \mathcal{S} \cap \mathcal{G}$ olur.

Eğer $q = 1$ ise $G \cong S(1, -1, t_1, t_2)$. Benzer şekilde Önerme 5.3.3, G çizgesi -2 ve 0 dan farklı üç dışmerkezlilik özdeğeri sahip olur. Yani, $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_{n-1} \in (-1, 0)$ ve $\varepsilon_n \in (-2t_1, -2)$ olur ki bu çelişkidir.

Eğer $q = 2$ ise $G \cong S(1, -1, t_1, t_2)$. Önerme 5.3.3 den açıktır ki G çizgesi -2 ve 0 dan farklı dört dışmerkezlilik özdeğeri sahip olur. Yani, $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_{n-2} \in (-1, 0), \varepsilon_{n-1} \in [-2t_2, -2)$ ve $\varepsilon_n \in (-2t_1, -2t_2)$ olur ki bu çelişkidir.

Eğer $q \geq 3$ ise $G \cong S(1, -1, t_1, \dots, t_q)$ olur. Açıktır ki G ve $S(1, -1, t_1, t_2)$

önceki koşullara sahip olur (Lemma 5.3.2). Böylece $\mathcal{E}(S(1, -1, t_1, t_2))$ matrisi $\mathcal{E}(S(1, -1, t_1, \dots, t_q))$ matrisinin asıl alt matrisi olur. Sonuçlar ve olası durumlardan (Sonuç 5.3.1) $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_{n-1} < -2$ ve $\varepsilon_n \leq -2t_2$ olur ki yine çelişki elde edilir.

Alt durum (3): Eğer $p \geq 2$ ise $q \geq 0$ ve eğer $q = 0$ ise $G \cong S(1, -p)$ olur. Dahası özdeğerler,

$$\text{Spec}_{\mathcal{E}}(S(1, -p)) = \{\sqrt{p^2 - p + 1} + p - 1, 0^{(n-t_0-p-q)}, -\sqrt{p^2 - p + 1} + p - 1, -2^{(p-1)}\}$$

Böylece $S(1, -p) \in \mathcal{S} \cap \mathcal{G}$ olur.

Eğer $q = 1$ ise $G \cong S(1, -p, t_1)$ olur. Önerme 5.3.3 dan hareketle -2 ve 0 dan farklı üç dışmerkezlilik özdeğerine sahip olur ki bu bir çelişkidir. Yani özdeğerler; $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_{n-p} \in (-1, 0)$ ve $\varepsilon_n \in (-2t_1, -2)$.

Eğer $q \geq 2$ ise $G \cong S(1, -p, t_1, \dots, t_q)$. Benzer şekilde $\mathcal{E}(S(1, -1, t_1, t_2))$ matrisi $\mathcal{E}(S(1, -p, t_1, \dots, t_q))$ matrisinin asıl alt matrisi olur. Alt durum 2 dekine benzer şekilde çelişki elde ederiz.

2. durum: Teorem 5.3.1 ve $t_0 = 2$ den $p, q \geq 0$ eşitliğine sahibiz.

Alt durum (1): Eğer $p = 0$ ise $q \geq 1$ ve $G \cong S(2, t_1, t_2, \dots, t_q)$. Eğer $q = 1$ ise $G \cong K_n \notin \mathcal{S}$. Eğer $q = 2$ ise $G \cong S(2, t_1, t_2)$ ve G çizgesi -2 den ve 0 dan farklı üç dışmerkezlilik özdeğerine sahip olur. Yani $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_{n-1} \in (-1, 0)$ ve $\varepsilon_n \in [-2t_1, -2)$ olur ki Önerme 5.3.3 den çelişki oluşur.

Eğer $q \geq 3$ ise $G \cong S(2, t_1, \dots, t_q)$ olur. Benzer şekilde $\mathcal{E}(S(1, -1, t_1, t_2, t_3))$ matrisi $\mathcal{E}(S(2, t_1, \dots, t_q))$ matrisinin asıl alt matrisi olur. $q = 3$ olduğu durum için çelişki elde ederiz.

Alt durum (2): $p = 1, q \geq 0$. Eğer $q = 0$ ise $G \cong S(2, -1) \cong C_3 \notin \mathcal{S}$. Eğer $q = 1$ ise $G \cong S(2, -1, t_1)$ olur. Önerme 5.3.3 den hareketle G çizgesi -2 den ve 0 dan farklı üç dışmerkezlilik özdeğerine sahip olur. Yani $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_{n-1} \in (-1, 0)$ ve $\varepsilon_n \in [-2t_1, -2)$ olur ki çelişkidir. Eğer $q \geq 2$ ise $G \cong S(2, -1, t_1, \dots, t_q)$ eşyapılılık geçerlidir. Benzer şekilde $\mathcal{E}(S(1, -1, t_1, t_2))$ matrisi $\mathcal{E}(S(2, -1, t_1, \dots, t_q))$ matrisinin asıl alt matrisi olur. $q = 2$ olduğu durum için $G \notin \mathcal{S}$ elde ederiz.

Alt durum (3): $p \geq 2$. Eğer $q = 0$ ise $G \cong S(2, -p)$ ve Önerme 5.3.3 den G çizgesinin -2 ve 0 dan farklı üç dışmerkezlilik özdeğeri olur. Yani $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_{n-p-1} \in (-1, 0)$ ve $\varepsilon_{n-p} = -1$ olur ki çelişkidir.

Eğer $q = 1$ ise $G \cong S(2, -p, t_1)$. Böylece G çizgesinin -2 ve 0 dan farklı üç

dışmerkezlilik özdeğeri olur. Yani Yani $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_{n-p-1} \in (-1, 0)$ ve $\varepsilon_n \in (-2t_1, -2)$ olur ki çelişkidir (Önerme 5.3.3).

Eğer $q \geq 2$ ise $G \cong S(2, -p, t_1, \dots, t_q)$ olur. Benzer şekilde, $\mathcal{E}(S(1, -1, t_1, t_2))$ matrisi $\mathcal{E}(S(2, -1, t_1, \dots, t_q))$ matrisinin asıl alt matrisi olur ve $G \notin \mathcal{S}$.

Tüm bu durumlar ve altdurumlarla birlikte sonuç olarak,

$$p \geq 2 \text{ için } G \in \mathcal{S} \cap \mathcal{G} \iff G \cong S(1, -p) \quad \square$$

Aşağıda ki sonuç Lemma 5.3.10 dan elde edilmiştir.

Sonuç 5.3.2. G , -2 ve 0 dan farklı sadece bir pozitif dışmerkezlilik özdeğere sahip çizge için $G \notin \mathcal{S}$ koşulu geçerlidir. Açıktır ki $S_{1,p} = S(1, p)$ çizgesi $K_{n_1, n_2} \cong S(-n_1, -n_2)$ iki parçalı tam çizgesinin özel bir türüdür.

Teorem 5.3.2. G bağlantılı bir çizge ise,

- i. -2 ve 0 dan farklı tam olarak bir tane dışmerkezlilik özdeğerine sahip çizge yoktur.
- ii. G çizgesinin -2 ve 0 dan hariç tam olarak iki tane dışmerkezlilik özdeğerine sahip olması için gerek ve yeter şart $t_0, t_1 \geq 1$ olmak üzere $(-t_0, -t_1)$ bileşenleri ile oluşturulan $S_{1,1}$ yıldız çizgenin karma genişlemesine eşyapılı olmasıdır.

İspat. Lemma 5.3.9 ve Lemma 5.3.10 dan ispat tamamlanır. □

Buraya kadar verilen sonuçlar uluslararası saygın bir deriye gönderilmiş olup ayrıca [109] referansa bakılabilir. Şimdi daha önceki bölümde de bahsedilen iki problemi ele alalım:

Problem 5.3.1. Bağlantılı hangi çizgeler için dışmerkezlilik matrisi indirgenebilir veya indirgenemezdir?

Problem 5.3.2. Küçük sayıda farklı dışmerkezlilik özdeğerine sahip çizgeleri karakterize ediniz.

Tekrardan vurgulamak gerekir ki indirgenebilirlik aşık bir çıkarım değildir. Ağaç çizgeleri için indirgenemezlik ispat edilmişse de bağlantılı çizge aileleri düşünüldüğünde problem hala açık ve verimlidir.

Tanım 5.3.2. [112] G bir çizge olmak üzere, G çizgesinde bulunan maksimum dışmerkezli noktalar üzerinden tanımlı ve kenar oluşumu için noktalar arasındaki mesafenin çapa eşit olması gerekliliğini sağlayan çizgeye G çizgesinin S -zıtkutuplu çizgesi denir ve $SAP(G)$ ile gösterilir.

Önerme 5.3.4. [112] G bir çizge olmak üzere, G çizgesinin özmerkezli çizge olması için gerek ve yeter şart $SAp(G) \cong Ap(G)$ dir.

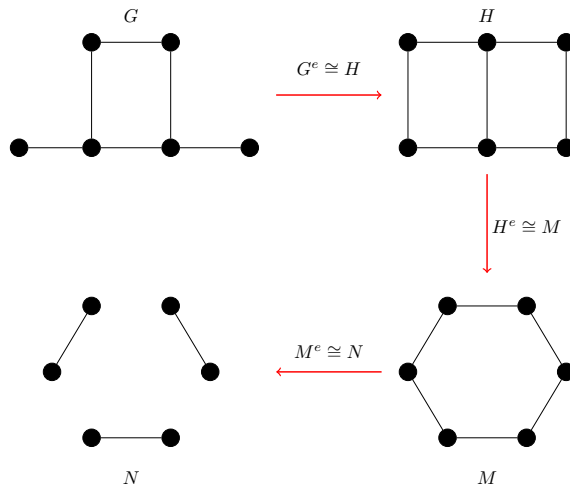
Önerme 5.3.5. G çizgesi özmerkezli bir çizge. G 'nin zıtkutuplu çizgesinin (S zıtkutuplu) bağlantısız olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{E}(G)$ matrisinin indirgenebilir olmasıdır.

İspat. Önerme 5.3.4 den hareketle G çizgesinin zıtkutuplu ve S zıtkutuplu çizgesi eşyapılıdır. G 'nin her noktası maksimum dışmerkezliliğe sahip olduğu için $\Gamma(\mathcal{E}(G)) \cong Ap(G)$ ilişkisi sağlanır. $\mathcal{E}(G)$ matrisine ait $\Gamma(\mathcal{E}(G))$ çizgesi bağlantısız ise $\mathcal{E}(G)$ matrisi indirgenebilir, $\mathcal{E}(G)$ matrisi indirgenebilir bir matris ise $\Gamma(\mathcal{E}(G))$ çizgesi bağlantısızdır. Arzu edilen sonuç özmerkezli çizgeler için sağlanır. \square

Tanım 5.3.3. [113] G çizgesi n noktalı bağlantılı bir çizge olsun. Aşağıdaki nokta ve kenar kümelerine sahip çizgeye G çizgesinin dışmerkezli çizgesi denir ve G^e ile gösterilir.

- $V(G^e) = V(G)$
- $E(G^e) = \{uv : d(u, v) = \min\{ecc(u), ecc(v)\}\}$

Dışmerkezlilik matrisinin tanımından ve G^e çizgesinin oluşturulmasından açıktır ki $G^e \cong \Gamma(\mathcal{E}(G))$ eşyapılılık ilişkisi vardır.



Şekil 5.15. Bir çizgenin dışmerkezlilik çizge gösterimleri

Sonuç 5.3.3. G çizgesi n noktalı olmak üzere $\mathcal{E}(G)$ matrisinin indirgenemez olması için gerek ve yeter şart G^e çizgesinin bağlantılı olmasıdır.

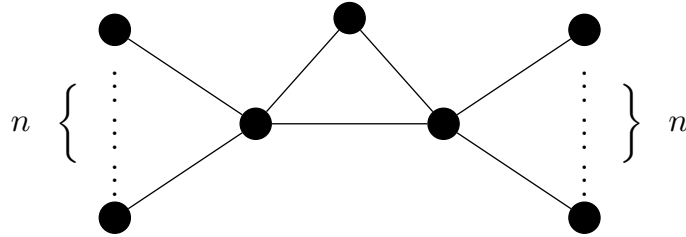
Açıklama 5.3.1. Dikkat edilecek olursa d -özmerkezli çizgeler için $G^e \cong \Gamma(\mathcal{E}(G)) \cong Sap(G)$ eşyapılılık sağlanır. Dahası $A(G)$ matrisi G çizgesinin komşuluk matrisi olmak üzere $\mathcal{E}(G) = dA(G^e)$ eşitliği geçerlidir. Özel olarak $d = 2$ için kolayca görülebilir ki $\mathcal{E}(G) = 2A(G^e) = 2A(\overline{G})$ eşitlikleri sağlanır.

Lemma 5.3.11. G çizgesi 2-özmerkezli olsun. \overline{G} bağlantılıdır ancak ve ancak $\mathcal{E}(G)$ matrisi indirgenemezdir.

İspat. G çizgesi 2 özmerkezli olduğundan $\mathcal{E}(G) = 2A(\overline{G})$ eşitliği sağlanır. $A(\overline{G})$ komşuluk matrisinin indirgenemez bir matris olması gerçeğinden hareketle $\mathcal{E}(G)$ matrisinde indirgenemezdir. İspatın diğer kısmı için, $\mathcal{E}(G)$ matrisi indirgenemez bir matris ise $A(\overline{G})$ matrisinin indirgenemez olması için gerek ve yeter şart \overline{G} çizgesinin bağlantılı olmasıdır. Böylelikle ispat tamamlanır. \square

G çizgesi yarıçapı 1 olan bir çizge olsun. Keyfi bir çizgenin yarıçapı 1 ise en az bir tane derecesi $n - 1$ olan noktası var öyle ki bu nokta diğer tüm noktalar ile dışmerkezlidir. Böylece G^e çizgesinin bağlantılı olması zorunlu hale gelir.

Sonuç 5.3.4. G yarıçapı 1 olan çizge olsun. Bu durumda G çizgesinin dışmerkezlilik matrisi daima indirgenemez bir matristir.



Şekil 5.16. Çift yıldız çizgesinden üretilen özel çizge

Tüm ağaç çizgelerinin dışmerkezlilik matrislerinin indirgenemez olduğu savı öncelikle Wang ve çalışma arkadaşları tarafından ispat edildi [91]. Sonrasında alternatif ispat Mahato ve diğer araştırmacılar tarafından [101] referans numaralı makalede ele alındı. Dışmerkezlilik çizgesi tanımından ve Sonuç 5.3.3 den hareketle çokta daha kısa bir ispat yapmak mümkündür. Eğer T bir ağaç çizgesi ise T^e çizgesi bağlantılıdır. Gerçektende T ağaç çizgesinde bulunan her nokta çifti arasında sadece bir tek yol vardır. Böylece T 'nin her noktası çapsal noktalardan birine dışmerkezlidir. Bu ise T^e çizgesinin bağlantılı

Tablo 5.6. Bazı özel çizgeler ve onların dışmerkezlilik çizgeleri

İsim	G	G^e	İsim
Tam çizge	K_n	K_n	Tam çizge
Yıldız çizge	S_n	K_n	Tam çizge
Döngü çizge	C_{2n}	nK_2	n-Tam çizge:Ayrık birleşim
Döngü çizge	C_{2n-1}	C_{2n-1}	Döngü çizge
Yol çizge	P_{2n}	$S_{n,n}$	Çift yıldız çizge
Yol çizge	P_{2n-1}	$S_{n,n}^*$	Şekil 5.16
İki parçalı tam çizge	$K_{n,m}$	$K_n + K_m$	İki tam çizge:Ayrık birleşim
Kübik çizge	Q_n	$2^{n-1}K_n$	2^{n-1} tam çizge:Ayrık birleşim
Parçalı tam çizge	$CS_{n,\alpha}$	K_n	Tam çizge
Tekerlek çizge	W_n	W_n	Tekerlek çizge
Uçurtma çizge	K_p^q	$CS_{q+1,p-1}$	Parçalı tam çizge
Koktely parti çizge	$K_{n \times 2}$	nK_2	n-Tam çizge:Ayrık birleşim
Zıtkutuplu çizge	$A_{(d,r)}$	hK_r	h-Tam çizge:Ayrık birleşim

Tablo 5.7. Çapı 2 den büyük 10 noktalı çizgelerin dışmerkezlilik matrisine ait indirgenebilir/indirgenemez durum dağılımı

Nokta Sayısı		4	5	6	7	8	9	10
<i>İndirgenebilir</i>	Özmerkezli olan	0	0	1	3	32	352	6987
	Özmerkezli olmayan	0	0	0	0	4	45	1069
<i>İndirgenemez</i>	Özmerkezli olan	0	0	0	1	7	147	4653
	Özmerkezli olmayan	1	6	51	475	6919	169017	7586965

olacağı anlamına gelir. Tablo 5.7 da görüleceği üzere özmerkezli çizgelerin indirgenebilir olması daha olasıdır. Bu önemli gözlem ve algoritma destekli sonuçlar aşağıdaki problemi anlamlı kılmaktadır.

Problem 5.3.3. İndirgenebilir dışmerkezlilik matrisine sahip özmerkezli çizge ailelerini sınıflandırın veya inşa ediniz.

Yukarıda bulunan problemin çözümüne kapı aralamak ve sonraki akademik çalışmalara

motivasyon oluşturmak amacı ile 6, 7 ve 8 noktalı tüm 3-özmerkezli çizgeleri gösteren görsel Şekil 5.17 de sunulmuştur.

Spektral çizge kuramının etkin çalışma alanlarından biriside eşspektrumlu çizge çiftlerinin sınıflandırılmasıdır.

Tanım 5.3.4. \mathcal{F} sembolü ile çapı en az üç olan ve en az bir $u, v \in G$ çifti için aşağıdaki koşulları sağlayan G çizgelerini içeren aileyi gösterelim

- Tüm $w \in V(G)$ noktaları için $d(u, w) = d(v, w)$.
- $\text{ecc}(u) \neq 2$ ve $\text{ecc}(v) \neq 2$.

Önerme 5.3.6. $G \in \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda,

- i. $\det(\mathcal{E}(G)) = 0$
- ii. G çizgesi en az bir tane eşspektrum çiftine sahiptir.

İspat.

- i. $G \in \mathcal{F}$ ve tanımdan hareketle G çizgesini en az bir tane u ve v noktaları vardır öyle ki $V(G)$ nokta kümesindeki diğer noktalarla aynı mesafelere sahip olan. Dışmerkezlilik matrisinin tanımı gereği en az iki satır eşittir. Böylece $\text{rank}(\mathcal{E}(G)) \leq n - 1$ ve sonuç olarak $\det(\mathcal{E}(G)) = 0$ olur.
- ii. Kabul edelim G çizgesinde öyle u, v noktaları vardır ki $w \in V(G)$ için $d(u, w) = d(v, w)$ olan. Böylece $N(u) = N(v)$ yada $N[u] = N[v]$ olacak şekilde olası iki durum söz konusu olur. Eğer $N(u) = N(v)$ ise u ve v noktalarını birleştirerek oluşturulan bir H çizgesi için $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H)$ olur. Benzer şekilde eğer $N[u] = N[v]$ ise u ve v noktaları komşu olur. Açık ki u ve v arasında ki kenarı çıkartarak $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H)$ eşitliğini sağlayan bir H çizgesi elde edebiliriz. Sonuç olarak G ve H çizeleri aynı dışmerkezlilik spektruma sahiptir.

Böylelikle ispat tamamlanır. □

Sonuç 5.3.5. \mathcal{F} ailesinde ki tüm çizgeler dışmerkezlilik spektrumu ile belirli değildir.

Tablo 5.8. Eşspektrumlu çiftte sahip olmayan bağlantılı çizgeler (3-9 nokta sayılı)

Nokta sayısı	3	4	5	6	7	8	9
Bağlantılı çizge sayısı	2	6	19	88	548	6154	131777

Hamemers tarafından literatüre kazandırılan *keyfi bir çizgenin karma genişlemesi* kavramının, spektral karakterizasyon açısından kullanışlı bir araç olmasının yanı sıra *indirgenbilir/indirgenemez* çizge matrislerinin inşasında da çok önemli bir argümandır ([109], [110], [111]).

Lemma 5.3.12. G çizgesi n noktalı ve $rad(G) \geq 3$ olan bağlantılı bir çizge olsun. Karma genişleme dizisi p_1, p_2, \dots, p_n olan çizgeyi $\mathcal{M} \mathcal{E}_G[p_1, p_2, \dots, p_n]$ ile gösterelim. Bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$null(\mathcal{E}(\mathcal{M} \mathcal{E}_G[p_1, p_2, \dots, p_n])) = null(G) + \sum_{i=1}^n (p_i - 1)$$

İspat. $\mathcal{M} \mathcal{E}_G[p_1, p_2, \dots, p_n]$ çizgesi G 'nin karma genişlemesi ise her p_i bileşenindeki nokta, diğer noktalara aynı mesafededir. Böylece her i için $\mathcal{E}(G)$ matrisinde $p_i - 1$ eş satır oluşur. Böylece $x^{\sum_{i=1}^n (p_i - 1)}$ ifadesi $\mathcal{E}(\mathcal{M} \mathcal{E}_G[p_1, p_2, \dots, p_n])$ matrisine ait karakteristik polinomunun çarpanını oluşturur. Ayrıca,

$$\phi(\mathcal{E}(\mathcal{M} \mathcal{E}_G[p_1, p_2, \dots, p_n]), x) = x^{\sum_{i=1}^n (p_i - 1)} \phi(\mathcal{E}(G))$$

eşitliği geçerlidir. Sonuç olarak arzu edilen ispat tamamlanır. \square

Sonuç 5.3.6. $H = \mathcal{M} \mathcal{E}_G[p_1, p_2, \dots, p_n]$ çizgesi $rad(G) \geq 3$ olan G çizgesinin karma genişlemesi olsun. Bu durumda en az bir $p_i \geq 2$ için H çizgesi dışmerkezlilik matrisi altında belirli değildir.

İspat. Farzedelim $p_1 = k$ olsun. Bu durumda ilk bileşende u_1, u_2, \dots, u_k noktaları vardır öyle ki, $i, j \in [1, k]$ için $d(u_i, u_j) \leq 2$ ve tüm $w \in V$ için $d(u_i, w) = d(u_j, w)$ olur. Önerme 5.3.6 den H çizgesinin en az bir eşspektrumlu çifti vardır. İspat tamamlanır. \square

Tezin bu alt bölümünde karma genişleme kavramını kullanarak sıfırdan farklı dışmerkezlilik özdeğerine sahip çizgelerin karakterizasyonu için elde ettiğimiz sonuçları ifade/ispata edeceğiz.

Teorem 5.3.3. [103] Nokta sayısı $n = rh$ olan bağlantılı G çizgesi, çapı d olan r -zıtkutuplu çizgedir ancak ve ancak $\mathcal{E}(G)$ matrisinin iki farklı özdeğere sahip olmasıdır.

Yani G 'nin dışmerkezlilik matrisine ait spektrum eşitliği,

$$\text{Spec}(\mathcal{E}(G)) = \{d(r-1)^{(h)}, -d^{(h(r-1))}\} \text{ dir.}$$

Lemma 5.3.13. $Ap(d, r)$ çizgesi rh noktalı zıtkutuplu çizge olsun. $\mathcal{M}\mathcal{E}_G$ çizgesine ait dışmerkezlilik matrisinin 0 dan farklı tam olarak iki özdeğerinin olması için gerek ve yeter şart $Ap(d, r)^e \cong hK_r$ yada $p_1, p_2 \geq 2$ koşulu ile $Ap(d, r)^e \cong hK_{p_1, p_2}$ olmasıdır.

İspat. $Ap(d, r)$ çizgesinin dışmerkezlilik matrisi,

$$\mathcal{E}(Ap(d, r)) = \begin{pmatrix} d(J_r - I_r) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & d(J_r - I_r) \end{pmatrix}$$

ve

$$\mathcal{E}(\mathcal{M}\mathcal{E}(A(d, r))) = \begin{pmatrix} dA(K_{p_1^1, \dots, p_r^1}) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & dA(K_{p_1^1, \dots, p_r^1}) \end{pmatrix}$$

olur. $A(K_{p_1^i, \dots, p_r^i})$ gösteri ile $K_{p_1^i, \dots, p_r^i}$ çok parçalı tam çizgesinin komşuluk matrisini göstermektedir. $\mathcal{E}(\mathcal{M}\mathcal{E}(A(d, r))) = dA(A(d, r)^e)$ ($1 \leq i \leq r$) olduğu için $Ap(d, r)^e$ çizgesi $K_{p_1^i, \dots, p_r^i}$ çizgesinin ayrık birleşimine eşyapılı olur. Böylece $\mathcal{E}(\mathcal{M}\mathcal{E}(A(d, r)))$ matrisi 0 dan farklı tam olarak iki farklı özdeğere sahip çizge olması için gerek ve yeter şart $r = 2$ ve $p_1 = p_1^1 = \dots p_1^h, p_2 = p_2^1 = \dots p_2^h$ olacak biçimde $A(d, r)^e \cong hK_r$ yada $A(d, r)^e \cong hK_{p_1, p_2}$ olmasıdır. Böylece K_r ve $K_{p, q}$ çizgelerinin komşuluk matrisine ait spektrumları

$$\text{Spec}_{\mathcal{E}}(K_r) = \{d(r-1)^{(r)}, -d^{(h(r-1))}\}$$

ve

$$\text{Spec}_{\mathcal{E}}(K_{p, q}) = \{d\sqrt{p_1 q_1}^{(h)}, -d\sqrt{p_1 q_1}^{(h)}, 0^{(h(p_1 + p_2 - 2))}\}$$

şeklindedir. □

Teorem 5.3.4. G çizgesi çapı d ve nokta sayısı n olan bağlantılı bir çizge olsun. G 'nin 0 dan farklı tam olarak iki farklı dışmerkezlilik özdeğerine sahip olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

- $\mathcal{M} \mathcal{E}_{A(2,r)}[p, \dots, p]$ ve $\mathcal{M} \mathcal{E}_{A(2,r)}[-p, \dots, -p]$, $diam(G) \geq 3$ için $\mathcal{M} \mathcal{E}_{A(d,r)}[\pm p, \dots, \pm p]$.
- $\mathcal{M} \mathcal{E}_{A(2,r)}[p, q, \dots, p, q]$ ve $diam(G) \geq 3$ için $\mathcal{M} \mathcal{E}_{A(d,r)}[\pm p, \pm q, \dots, \pm p, \pm q]$.

İspat. Kabul edelim ki G çizgesi 0 dan farklı tam olarak iki farklı dışmerkezlilik özdeğerine sahip olsun. Böylece G çizgesinin dışmerkezlilik matrisine ait blok matris aşağıdaki formattadır (çift boyutlu).

$$\mathcal{E}_1(G) = J_p \otimes \begin{pmatrix} d(J_r - I_r) & & \\ & \ddots & \\ & & d(J_r - I_r) \end{pmatrix}, \mathcal{E}_2(G) = J_p \otimes \begin{pmatrix} & & d(J_r - I_r) \\ & \ddots & \\ d(J_r - I_r) & & \end{pmatrix}$$

yada,

$$\mathcal{E}_3(G) = \begin{pmatrix} X & & \\ & \ddots & \\ & & X \end{pmatrix}, \mathcal{E}_4(G) = \begin{pmatrix} & & X \\ & \ddots & \\ X & & \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki matrisler için,

$$X = \begin{bmatrix} 0_p & dJ_{p \times q} \\ dJ_{p \times q} & 0_q \end{bmatrix}$$

G çizgesi en az bir çapsal nokta çiftlerine sahip olduğu için dışmerkezlilik matrisinin sıfır olmayan elemanları kabulümüz ile aynı olmalıdır. Böylece G çizgesi özmerkezli çizge olur. Genellemeye sadık kalarak, kabul edelim ki iki form olsun ($\mathcal{E}_1(G)$ ve $\mathcal{E}_3(G)$). $\mathcal{E}_1(G)$ ve $\mathcal{E}_3(G)$ matrisleri $\mathcal{E}_2(G)$ ve $\mathcal{E}_4(G)$ matrislerine benzer olur. Dahası $p = q$ için $\mathcal{E}_1(G) = \mathcal{E}_3(G)$ eşitliği geçerlidir. Bu kabullerle ve önceli lemmadan $G^e \cong hK_r$ eşyapılılık geçerlidir. Ayrıca $\mathcal{M} \mathcal{E}_{A(2,r)}[p, \dots, p]$ yada $\mathcal{M} \mathcal{E}_{A(2,r)}[-p, \dots, -p]$ eşyapılılığı sağlanır ($d = 2$). Ana önermeden $d \geq 3$ olduğu zaman $\mathcal{E}_1(G)$ formu için G çizgesi $\mathcal{M} \mathcal{E}_{A(d,r)}[\pm p, \pm q, \dots, \pm p, \pm q]$ çizgelerden birine eşyapılıdır.

Kabul edelim $p \neq q$ olsun. Benzer bir şekilde $\mathcal{E}_3(G)$ formunda ki matrisin 0 dan farklı iki farklı özdeğeri vardır ancak ve ancak $\mathcal{E}_3(G)$ matrisinin tüm bloklarının aynı boyutlu olmasıdır. Önceki sonuçlardan $p = p_1$, $q = p_2$ ve $r = 2$ durumunda $G \cong \mathcal{M} \mathcal{E}_{Ap(2,r)}[p, q, \dots, p, q]$ olur. Yada $d \geq 3$ için $\mathcal{M} \mathcal{E}_{A(d,r)}[\pm p, \pm q, \dots, \pm p, \pm q]$ çizgelerden birine eşyapılıdır. \square

Lemma 5.3.14. G_1, G_2, \dots, G_m ($m \geq 2$) bağlantılı çizgeler olsun. $\bigcup G_i$ çizgesi r farklı komşuluk özdeğerine sahip olması için gerek ve yeter şart $\overline{\bigcup G_i}$ çizgesinin r farklı dışmerkezlilik özdeğerine sahip olmasıdır.

İspat. Kabul edelim $H = \overline{\bigcup G_i}$ olsun. Tüm G_i çizgeleri bağlantılı olduğu için H çizgesinin 2 özmerkezli çizge olduğu açıktır (yani $\text{diam}(H) = \text{rad}(H) = 2$). $\mathcal{E}(H) = 2A(\overline{\bigcup G_i})$ eşitliğinden $A(\overline{\bigcup G_i})$ ve $\mathcal{E}(H)$ matrisleri aynı sayıda r farklı özdeğere sahip olur. \square

Çizge kuramının diğer bir prestijli alanı ise *çizge enerjisi* çalışmalarıdır. Son olarak danışmanım ile birlikte hazırlanmış olduğumuz makalemizde bulunan önemli iki sonucu ifade/ispat edeceğiz.

Teorem 5.3.5. G çizgesi n noktalı ve d -özmerkezli çizge olsun. Bu durumda,

$$E_{\mathcal{E}(G)} \leq d \sqrt{n \sum_{i=1}^n T_d(i)}$$

eşitsizliği geçerlidir. İfadede $T_d(i)$ gösterimi $\{j \in V(G) : d(i, j) = d\}$ kümesinin kardinalitesidir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $G \cong Ap(d, r)$ olmasıdır.

İspat. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{E}(G)} &= \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \sqrt{n} \\ &= \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_{i,j}^2} \sqrt{n} \end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer yandan G çizgesi özmerkezli çizge olduğu için $\mathcal{E}(G)$ matrisinin her bir i . satırının sıfır olmayan elemanları $T_d(i)$ olur. Yukarıdaki son eşitliğin düzenlenmesi ile birlikte,

$$E_{\mathcal{E}(G)} \leq d \sqrt{n \sum_{i=1}^n T_d(i)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Dahası eşitsizlikteki ifadeleri eşit olarak alırsak eğer G çizgesi r -zıtkutuplu çizge ise $|\varepsilon_1| = \dots = |\varepsilon_n|$ eşitsizliği geçerlidir. \square

Açıklama 5.3.2. d özmerkezli G çizgesi için G de bulunan $T_d(i)$ G^e çizgesindeki d_i lere karşılık gelir. $\mathcal{E}(G) = dA(G^e)$ eşitliği olduğu için $E_{A(G^e)} \leq \sqrt{2mn}$ eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç 5.3.7. G çizgesi nokta sayısı n ve kenar sayısı m olan 2 özmerkezli çizge olsun. Bu durumda,

$$E_{A(G^e)} \leq 2\sqrt{n^3 - n^2 - 2mn}$$

enerji eşitsizliği elde edilir.

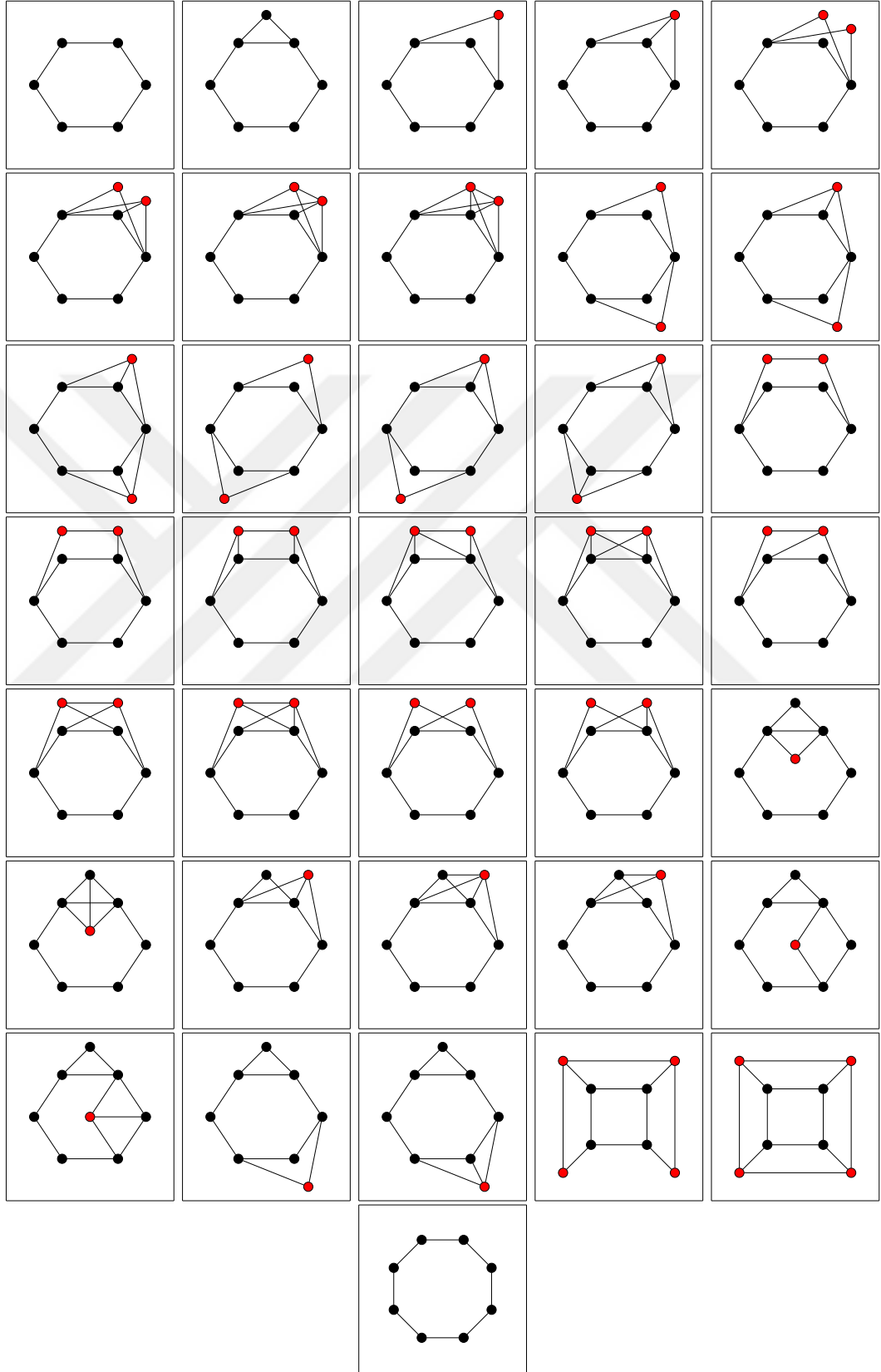
İspat. G çizgesi 2-özmerkezli çizge olduğu için $\mathcal{E}(G)$ matrisinin her bir i . satırının sıfır olmayan elemanları $n - d_i - 1$ olur. Böylece $T_2(i) = n - d_i - 1$ olur ve enerji eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{E}(G)} &\leq 2\sqrt{\sum_{i=1}^n (n - d_i - 1)\sqrt{n}} \\ &= 2\left(\sum_{i=1}^n n - \sum_{i=1}^n d_i - \sum_{i=1}^n 1\right) \\ &= 2\sqrt{n^3 - n^2 - 2mn} \end{aligned}$$

geçişleri yapılarak arzu edilen ispat tamamlanır. □

Bu kısımda ispatları da verilen sonuçlar [114] referans numaralı çalışma olarak hakemli bir dergiye gönderilmiştir.

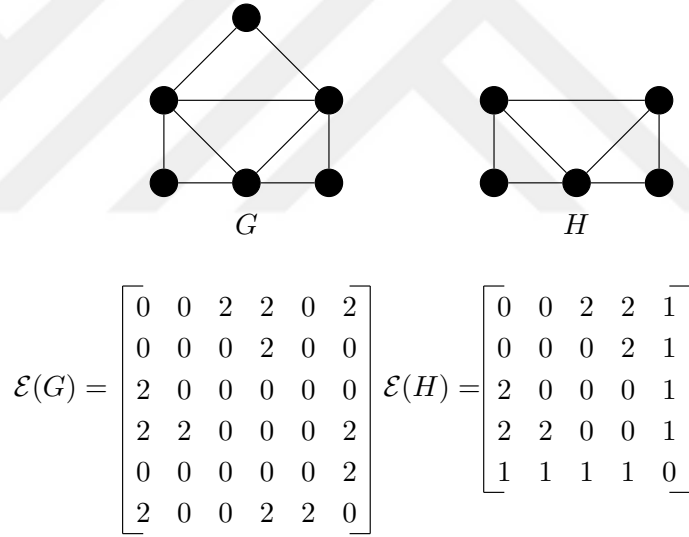
Şekil 5.17. Çapı 2 den büyük 6, 7 ve 8 noktalı indirgenebilir özmerkezli çizgeler.



6. BÖLÜM

SONUÇ, ÖNERİLER ve TARTIŞMA

Tez çalışmasının merkezinde bulunan “*dışmerkezlilik*” matrisi oldukça ilginç özellikleri bünyesinde barındırır. Önceki bölümlerde değindiğimiz özelliklerden en önemlisi (belkide ilk dikkat çeken zorluk) dışmerkezlilik matrisinin indirgenemezliği veya indirgenebilirliği. Akademik platformda iyi bir şekilde bilinen spektral özellik: Bağlantılı çizgelerin komşuluk matrisi her zaman indirgenemez bir matristir. Bu gerçek ele aldığımız matris için her zaman geçerli değildir (kısmen bu durumu inceleyen makalelere literatür taraması kısmında yer verilmiştir). Diğer bir zorluk ise G çizgesinin indirgenmiş (nokta bazlı) H alt çizgesine ait dışmerkezlilik matrisi G çizgenin dışmerkezlilik matrisi tarafından içerilmez (asıl alt matris olarak). Şekil 6.1 de bu durum resmedilmiştir.



Şekil 6.1. G , $\mathcal{E}(G)$ ve indirgenmiş (nokta) alt çizgesi H , $\mathcal{E}(H)$.

Spektral çizge kuramının verimli bir başka uğraş alanı ise küçük sayıda özdeğere (arzu edilen matrisin) sahip çizgelerin karakterizasyonudur. Ayrıca bu ve benzeri karakterizasyonlar beraberinde seçili özdeğer içermeyen çizgelerin incelenmesini getirir. Hali hazırda sunulan doktora tezinin özgül ağırlığı, bahsedilen zorluklara getirilen tatmin edici izahlar ve karakterizasyon konusunda elde edilen önemli sonuçların varlığı üzerine tasarlanmış olmalıdır.

Uçdeğer Çizge Kuramı (Extremal Graph Theory), çizge değişmezlerine (nokta sayısı, kenar sayısı, kalınlık, renklendirme sayısı, vb.) bağlı fonksiyonlar ve çizge yapıları (alt

çizgeler) arasındaki eşitsizlikler ve bu eşitsizliklerin mümkün olan en iyi şekilde (en küçük/en büyük) olduğunu gösteren (ilişkilendiren) çizgelerle ilgilenir. Daha soyut bir tanım olarak, bir çizgenin global parametrelerinin yerel altyapılarını nasıl etkilediğini inceler. Örneğin; döngü içermeyen n noktalı hangi çizge olası maksimum kenar sayısına sahiptir?, Çapı 3 olan bağlantılı çizgeler içerisinde minimum dışmerkezlilik özdeğeri $-d$ olan çizge aileleri nelerdir? Bu ve benzeri sorular ışığında şu anlaşılabilir ki çizge kuramı çalışmalarında genellikle uçdeğer çizgeler araştırılır [115]. Hazırlanan tezin bünyesindeki çalışmalar ayrıca uçdeğer çizge kuramı çalışmalarında hizmet eder.

Dışmerkezlilik matrisi ile ilgili önceki bölümlerde bahsedilen problemler aşağıda belirtilmiştir:

1. Çift sayıda nokta içeren ($n = 2k$) çapı 2'ye eşit veya büyük olan ve $n \geq 4d - 4$ eşitsizliğini sağlayan çapsal çizge oluşturulabilir mi?
2. Verilen bir S çizge ailesinde, S'deki çizgelerin \mathcal{E} -enerjisi için üst ve alt sınırları bulun ve ekstrem çizgeleri karakterize edin.
3. Küçük sayıda farklı özdeğere (dışmerkezlilik matrisinin özdeğeri) sahip çizgeleri karakterize ediniz.
4. Maksimum dışmerkezlilik spektral yarıçapına sahip ağaç çizgeleri hangileridir?
5. İki tane negatif dışmerkezlilik özdeğerlerine sahip çizgeleri belirleyin.
6. Dışmerkezlilik matrisine ait en küçük özdeğeri $\varepsilon_n = -d$ ve çapı $d \geq 3$ olan bağlantılı G çizgelerini belirleyiniz.
7. Hangi çizgeler maksimum (en büyük) dışmerkezlilik spektrumuna sahiptir?
8. Verilen bazı $c \leq -2\sqrt{2}$ sayıları için $[c, -2\sqrt{2})$ aralığına düşen en küçük dışmerkezlilik özdeğerine sahip ağaç çizge hangisidir?
9. Çift sayılı çap uzunluğuna sahip n noktalı ağaç çizgeleri içerisinde dışmerkezlilik matrisine ait spektral yarıçapı en büyük olan çizgeleri karakterize edin.
10. Orjine göre simetrik dışmerkezlilik özdeğerine sahip çizgeleri karakterize ediniz.
11. Hangi bağlantılı çizgeler indirgenemez dışmerkezlilik matrisine sahiptir?

12. Aşılama dönüşümü altında çizgelerin dışmerkezlilik spektrumunu araştırınız.
13. Verilen bir S çizge ailesinde dışmerkezlilik matrisine ait spektral yarıçapı maksimum/minimum olan çizgeleri karakterize ediniz.
14. Bir çizgenin alt çizgesi ve dışmerkezlilik matrisine ait karakteristik polinomun katsayıları arasındaki ilişkiyi bulunuz.
15. Hangi koşullar altında bir çizgenin çapı \mathcal{E} -spektrum tarafından belirlenir?
16. Sınır çizgelerde (peripheral graphs) kullanışlı olabilecek karakterizasyon yöntemlerini belirleyiniz.
17. Kenar silme işlemi ile dışmerkezlilik enerjisi sürekli artan veya azalan çizgeleri sınıflandırınız.

Belirtilen problemler hala güncelliğini korumakta ve çözüldükleri taktirde literatüre önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir.

Bu tez çalışmasında 3 ve 11 nolu problemlere kısmi cevaplar verilmiştir. Kullanılan metotlar diğer problemlerin çözümlerine katkı sağlayacaktır. Ayrıca *bir ve yalnız bir pozitif özdeğere* sahip çizgelerin (uçdeğer çizgeleri) tam karakterizasyonu yapılmıştır. Tez boyunca verilen özgün sonuçlar uluslararası saygın dergilere yayın için gönderilmiştir. Uzunca bir zamandır gerçekleştirilen gözlemler neticesinde arzu edilen simetrik özdeğerlere sahip bazı aileler çeşitli inşa yöntemleri ile olası gözükmemektedir. Algoritma temelli yaklaşımlar umut vericidir ve dışmerkezlilik enerjisi ile ilgili uçdeğer çizgeler (extremal graphs) koşullar konulara üretilebilmektedir. Maksimum özdeğeri değişmeyecek şekilde gerçekleştirilebilecek mevcut çizge işlemleri veya hibrit çizge işlemleri (alt-ayrışım/subdivision gibi) yine algoritma tabanlı (python ve julia programlama dilleri vasıtası ile hazırlanan kodlar) gözlemlerlerden edindiğimiz izlenimlerdir. *Seidel komşuluk* matrisinde olduğu gibi diğer çizge matrisleri (özellikle mesafe matrisi) ile dışmerkezlilik matrisi arasında kuvvetli bir ilişkinin varlığı zor problemler sınıfındadır (çok özel çizge aileleri için bazı aşikar ilişkiler literatürde mevcuttur).

KAYNAKÇA

1. Wells, D., “Are these the most beautiful?,” *The Mathematical Intelligencer*, vol. 12, pp. 37–41, 1990.
2. Benjamin, A., Chartrand, G., and Zhang, P., *The Fascinating World of Graph Theory*. Princeton University Press, 2015.
3. Nica, B., *A Brief Introduction to Spectral Graph Theory*. EMS Textbooks in Mathematics, 2018.
4. Cvetkovic, D. M., Doob, M., Gutman, I., and Torgašev, A., *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*. North Holland, 2012.
5. LIU, X., “Selected topics in spectral graph theory,” *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, pp. 511–512, 2016.
6. Chung, F. R. and Graham, F. C., *Spectral graph theory*. American Mathematical Soc., 1997.
7. Ceyhun, Y., *Çizge Kuramı Üzerine Kısa Bir İnceleme*. Elektrik Mühendisliği yayın no: 54, Mühendislik Fakültesi, ODTÜ, 1976.
8. İsmail Naci Cangül,, *Graf Teori-1*. Dora Yayıncılık, 2017.
9. Gök, G. K., Şerife Büyükköse,, and Bekki, S., *Açıklamalı Graf Teori Terimleri Sözlüğü*. Pegem Akademi, 2018.
10. Şerife Büyükköse,, Gök, G. K., Özkan Kızılırmak, G., and Eren, S., *Graf Teori*. Nobel Akademik Yayıncılık, 2021.
11. Akyar, E., *Çizge Kuramına (Graf Teorisine) Giriş*. Seçkin Yayıncılık, 2021.
12. Küçükçifçi, S., “Çizgeler,” *Matematik Dünyası(Çizgeler Özel Sayısı)*, vol. 12(3), pp. 9–46, 2003.
13. Euler, L., “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis,” *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol. 8, pp. 128–140, 1741.

14. Ball, W. W. R., “Mathematical recreations and problems of past and present times,” *Nature*, vol. 46, 1892.
15. Euler, L., “Solution d’une question curieuse que ne paroît soumise à aucune analyse,” *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin*, vol. 15, pp. 310–337, 1759.
16. Vandermonde, A.-T., “Remarques sur les problèmes de situation,” *Mémoires de l’Académie royale des sciences Paris*, vol. 15, pp. 556–574, 1771.
17. Kirkman, T. P., “On the representation of polyedra,” *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, vol. 146, pp. 413–418, 1856.
18. Gross, J. L., Yellen, J., and Zhang, P., *Handbook of Graph Theory*. Chapman & amp; Hall/CRC, second edition ed., 2013.
19. Cayley, A., “On the theory of the analytical forms called trees,” *Phil. Mag. (4)*, vol. 13, pp. 172–176, 1857.
20. Cayley, A., “On the mathematical theory of isomers,” *Phil. Mag. (4)*, vol. 47, pp. 444–446, 1874.
21. Sylvester, J. J., “Chemistry and algebra,” *Nature*, vol. 17, pp. 284–284, 1877.
22. Euler, L., “Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita,” *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, vol. 4, pp. 72–93, 1759.
23. Legendre, A.-M., *Éléments de géométrie (First edition)*. Firmin Didot, Paris, 1794.
24. Cauchy, A.-L., “Recherches sur les polyèdres (premier mémoire),” *J. Ecole Polytech. (Cah. 16)*, vol. 9, pp. 68–86, 1813.
25. Kuratowski, K., “Sur le problème des courbes gauches en topologie,” *Fund. Math.*, vol. 15, pp. 271–283, 1930.
26. Whitney, H., “Non-separable and planar graphs,” *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 17, pp. 125–127, 1931.

27. Tutte, W. T., "Matroids and graphs," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 90, pp. 527–552, 1959.
28. Kempe, A. B., "On the geographical problem of four colours," *Amer. J. Math.*, vol. 2, pp. 193–200, 1879.
29. Tait, P. G., "Remarks on the colouring of maps," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, vol. 10, p. 729, 1878-1880.
30. Heawood, P. J., "Map-colour theorem," *Quart. J. Pure Appl. Math.*, vol. 24, pp. 332–338, 1890.
31. Birkhoff, G. D., "The reducibility of maps," *Amer. J. Math.*, vol. 35, pp. 115–128, 1913.
32. Birkhoff, G. D., "A determinantal formula for the number of ways of coloring a map," *Ann. of Math.*, vol. 14, pp. 42–46, 1912.
33. Franklin, P., "The four color problem," *Amer. J. Math.*, vol. 44, pp. 225–236, 1922.
34. Appel, K. and Haken, W., "Every planar map is 4-colorable: Part 1, discharging," *Illinois J. Math.*, vol. 21, p. 429–490, 1977.
35. Appel, K., Haken, W., and Koch, J., "Every planar map is 4-colorable: Part 2, reducibility," *Illinois J. Math.*, vol. 21, p. 429–490, 1977.
36. Robertson, N., Sanders, D., Seymour, P., and Thomas, R., "The four color problem," *J. Combin. Theory, Ser.*, vol. 70, pp. 2–44, 1997.
37. König, D., "Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre," *Mathematische Annalen*, vol. 77, pp. 453–465, 1916.
38. Brooks, R. L., "On colouring the nodes of a network," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 37, no. 2, p. 194–197, 1941.
39. Vizing, V. G., "On an estimate of the chromatic class of a p-graph," *Discrete Analysis [in Russian]*, vol. 3, pp. 25–30, 1964.

40. Vizing, V. G., "The chromatic class of a multigraph," *Discrete Analysis [in Russian]*, vol. 5, pp. 9–17, 1965.
41. Petersen, J., "Die theorie der regulären graphs," *Acta Math.*, vol. 15, pp. 193–220, 1891.
42. Petersen, J., "Sur le théorème de tait," *L'intermédiaire des Mathématiciens*, vol. 5, pp. 225–227, 1898.
43. Tutte, W. T., "The factorizations of linear graphs," *J. London Math. Soc.*, vol. 22, p. 107–111, 1947.
44. Dantzig, G. B., Fulkerson, D. R., and Johnson, S. M., "Solution of a large-scale traveling-salesman problem," *Operations Research*, vol. 2, pp. 393–410, 1954.
45. Padberg, M. W. and Rinaldi, G., "Optimization of a 532-city symmetric traveling salesman problem by branch and cut," *Operations Research Letters*, vol. 6, pp. 1–7, 1987.
46. Dijkstra, E. W., "A note on two problems in connexion with graphs," *Numerische Mathematik*, vol. 1, p. 269–271, 1959.
47. Meigu, G., "Graphic programming using odd or even points," *Acta Math. Sinica*, vol. 10, p. 263–266, 1962.
48. Hall, P., "On representatives of subsets," *J. London Math. Soc.*, vol. 10, p. 26–30, 1935.
49. Halmos, P. R. and Vaughan, H. E., "The marriage problem," *Amer. J. Math.*, vol. 72, p. 214–215, 1950.
50. Edmonds, J. R., "Paths, trees and flowers," *Canad. J. Math.*, vol. 17, p. 449–467, 1965.
51. Cook, S. A., "The complexity of theorem-proving procedures," *Proc. 3rd Annual ACM Symp. Theory of Computing New York*, pp. 151–158, 1971.
52. Karp, R. M., *Reducibility among combinatorial problems, 85–103 in Complexity of Computer Computations (ed. R. E. Miller and J. W. Thatcher)*. Plenum Press, 1972.

53. Grossman, J., “The erdős number project.” <https://www.oakland.edu/enp/>. (erişim: 12-11-2021).
54. Przulj, N., “Graph theory analysis of protein-protein interactions,” *Knowledge Discovery in Proteomics*, vol. 8, pp. 73–128, 2005.
55. Gross, J. L., Yellen, J., and Anderson, M., *Graph Theory and Its Applications*. Chapman & Hall/CRC, third edition ed., 2018.
56. Bickle, A., *Fundamentals of Graph Theory*, vol. 43. American Mathematical Soc., 2020.
57. Thulasiraman, K., Arumugam, S., Brandstädt, A., and Nishizeki, T., *Handbook of Graph Theory, Combinatorial Optimization, and Algorithms*. Taylor & Francis, 2016.
58. West, D. B., *Introduction to graph theory*, vol. 2. Prentice hall Upper Saddle River, 2001.
59. West, D., “A question on notation in graph theory.” <https://faculty.math.illinois.edu/west/igt/notat.html>. (erişim: 20-11-2021).
60. Saoub, K. R., *Graph Theory An Introduction to Proofs, Algorithms, and Applications*. Chapman & Hall/CRC, first edition ed., 2021.
61. Chvtal, V. and Hammer, P., “Aggregation of inequalities in integer programming,” *Ann. Discrete Math*, vol. 1, pp. 145–162, 1977.
62. Henderson, P. B. and Zalcstein, Y., “A graph-theoretic characterization of the pv_chunk class of synchronizing primitives,” *SIAM Journal on Computing*, vol. 6, no. 1, pp. 88–108, 1977.
63. Setiawan, S. E., Margaretha, A., Adzkiya, D., and others,, “On some closed operations in threshold graphs,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1218, p. 012032, IOP Publishing, 2019.
64. Nishizeki, T. and Chiba, N., *Planar graphs: Theory and algorithms*. Elsevier, 1988.

65. Zaslavsky, T., “Signed graphs,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 4, no. 1, pp. 47–74, 1982.
66. Bretto, A., “Hypergraph theory,” *An introduction. Mathematical Engineering. Cham: Springer*, 2013.
67. Stanić, Z., *Regular graphs: a spectral approach*, vol. 4. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2017.
68. Meringer, M., “Markus meringer’s homepage: Regular graphs.” <http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/markus/reggraphs.html>, 1997. Erişim tarihi: 17/06/2022.
69. Bapat, R. B., *Graphs and matrices*, vol. 27. Springer, 2010.
70. Zhang, F., *Matrix theory: basic results and techniques*. Springer, 2011.
71. Meyer, C. D., *Matrix analysis and applied linear algebra*, vol. 71. Siam, 2000.
72. Moliterno, J. J., *Applications of combinatorial matrix theory to Laplacian matrices of graphs*. CRC Press, 2016.
73. Brualdi, R. A. and Cvetkovic, D., *A combinatorial approach to matrix theory and its applications*. Chapman and Hall/CRC, 2008.
74. Cayley, A., “Ii. a memoir on the theory of matrices,” *Philosophical transactions of the Royal society of London*, no. 148, pp. 17–37, 1858.
75. Yuan, Y.-x., “Jiu zhang suan shu and the gauss algorithm for linear equations,” *Documenta Mathematica, Extra Volume ISMP*, pp. 9–14, 2012.
76. Horn, R. A. and Johnson, C. R., *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2012.
77. Hazewinkel, M., “Encyclopaedia of mathematics: Stochastic approximation zygmond class of functions. encyclopaedia of mathematics,” 1993.
78. Janezic, D., Milicevic, A., Nikolic, S., and Trinajstic, N., *Graph-theoretical matrices in chemistry*. CRC Press, 2015.

79. Gutman, I., Vukicević, D., Graovac, A., and Randić, M., “Algebraic kekulé structures of benzenoid hydrocarbons,” *Journal of chemical information and computer sciences*, vol. 44, no. 2, pp. 296–299, 2004.
80. Stanić, Z., *Inequalities for graph eigenvalues*, vol. 423. Cambridge University Press, 2015.
81. Brouwer, A. E. and Haemers, W. H., *Spectra of graphs*. Springer Science & Business Media, 2011.
82. d’Amato, S., Gimarc, B., and Trinajstić, N., “Isospectral and subspectral molecules,” *Croatica Chemica Acta*, vol. 54, no. 1, pp. 1–52, 1981.
83. Haemers, W. H., “Seidel switching and graph energy,” *Available at SSRN 2026916*, 2012.
84. Graham, R. L. and Pollak, H. O., “On the addressing problem for loop switching,” *The Bell system technical journal*, vol. 50, no. 8, pp. 2495–2519, 1971.
85. Aouchiche, M. and Hansen, P., “Distance spectra of graphs: A survey,” *Linear algebra and its applications*, vol. 458, pp. 301–386, 2014.
86. Hogben, L. and Reinhart, C., “Spectra of variants of distance matrices of graphs and digraphs: a survey,” *La Matematica*, vol. 1, no. 1, pp. 186–224, 2022.
87. Randić, M., “ d_{max} -matrix of dominant distances in a graph,” *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, vol. 70, pp. 221–238, 2013.
88. Gutman, I., “The energy of a graph,” *Ber. Math-Statist.*, 1978.
89. Gutman, I. and Furtula, B., “Survey of graph energies,” *Mathematics Interdisciplinary Research*, vol. 2, no. 2, pp. 85–129, 2017.
90. Gutman, I., “The energy of a graph: old and new results,” in *Algebraic combinatorics and applications*, pp. 196–211, Springer, 2001.
91. Wang, J., Lu, M., Belardo, F., and Randić, M., “The anti-adjacency matrix of a graph: Eccentricity matrix,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 251, pp. 299–309, 2018.

92. Gary Chartrand, Linda Lesniak, P. Z., *Graphs & Digraphs*. Chapman and Hall/CRC, 2015.
93. Wang, J., Lu, L., Randić, M., and Li, G., “Graph energy based on the eccentricity matrix,” *Discrete Mathematics*, vol. 342, no. 9, pp. 2636–2646, 2019.
94. Mahato, I., Gurusamy, R., Kannan, M. R., and Arockiaraj, S., “Spectra of eccentricity matrices of graphs,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 285, pp. 252–260, 2020.
95. Wang, J., Lu, M., Lu, L., and Belardo, F., “Spectral properties of the eccentricity matrix of graphs,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 279, pp. 168–177, 2020.
96. Wei, W., He, X., and Li, S., “Solutions for two conjectures on the eigenvalues of the eccentricity matrix, and beyond,” *Discrete Mathematics*, vol. 343, no. 8, p. 111925, 2020.
97. Lei, X., Wang, J., and Li, G., “On the eigenvalues of eccentricity matrix of graphs,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 295, pp. 134–147, 2021.
98. Patel, A. K., Selvaganesh, L., and Pandey, S. K., “Energy and inertia of the eccentricity matrix of coalescence of graphs,” *Discrete Mathematics*, vol. 344, no. 12, p. 112591, 2021.
99. Wang, J., Lei, X., Wei, W., Luo, X., and Li, S., “On the eccentricity matrix of graphs and its applications to the boiling point of hydrocarbons,” *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 207, p. 104173, 2020.
100. He, X. and Lu, L., “On the largest and least eigenvalues of eccentricity matrix of trees,” *Discrete Mathematics*, vol. 345, no. 1, p. 112662, 2022.
101. Mahato, I., Gurusamy, R., Rajesh Kannan, M., and Arockiaraj, S., “On the spectral radius and the energy of eccentricity matrices of graphs,” *Linear and Multilinear Algebra*, pp. 1–11, 2021.
102. Mahato, I. and Kannan, M. R., “On the eccentricity matrices of trees: Inertia and spectral symmetry,” *arXiv preprint arXiv:2203.16186*, 2022.

103. Wang, J., Lu, M., Brunetti, M., Lu, L., and Huang, X., “Spectral determinations and eccentricity matrix of graphs,” *Advances in Applied Mathematics*, vol. 139, p. 102358, 2022.
104. Schwenk, A. J., “Almost all trees are cospectral,” *New directions in the theory of graphs*, pp. 275–307, 1973.
105. van Dam, E. R. and Haemers, W. H., “Developments on spectral characterizations of graphs,” *Discrete Mathematics*, vol. 309, no. 3, pp. 576–586, 2009. International Workshop on Design Theory, Graph Theory, and Computational Methods.
106. van Dam, E. R., *Graphs with few eigenvalues: An interplay between combinatorics and algebra*. Phd Thesis, Tilburg University, 1996.
107. Qiu, Z. and Tang, Z., “On the eccentricity spectra of threshold graphs,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 310, pp. 75–85, 2022.
108. Mahato, I. and Kannan, M. R., “Eccentricity energy change of complete multipartite graphs due to edge deletion,” *Special Matrices*, vol. 10, no. 1, pp. 193–202, 2022.
109. Wang, J., Lei, X., Lu, M., Sorgun, S., and Küçük, H., “On graphs with exactly one anti-adjacency eigenvalue and beyond,” 2021. arXiv:2102.09292, e-prints.
110. Haemers, W. H., “Spectral characterization of mixed extensions of small graphs,” *Discrete Mathematics*, vol. 342, no. 10, pp. 2760–2764, 2019.
111. Topcu, H., Sorgun, S., and Haemers, W. H., “The graphs cospectral with the pineapple graph,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 269, pp. 52–59, 2019.
112. Nair, R. R. and Vijaykumar, A., “S-antipodal graphs,” *Indian J. Pure Appl. Math*, vol. 28, no. 5, pp. 641–645, 1997.
113. Akiyama, J., Ando, K., and Avis, D., “Eccentric graphs,” *Discrete Mathematics*, vol. 56, no. 1, pp. 1–6, 1985.
114. Sorgun, S. and Küçük, H., “On two problems related to anti-adjacency matrix,” *submitted*, 2022.
115. Bollobás, B., *Extremal graph theory*. Courier Corporation, 2004.



EKLER

TERİMLER SÖZLÜĞÜ

Türkçe	English
Çizge	Graph
Nokta, Düğüm	Vertex, Node
Uç noktalar	Endpoints
Kenar, Ayırıt	Edge, Link
Çakışık	Incident
Komşu	Adjacent, Neighbour
(Açık/Kapalı) komşuluk	(Open/Closed) Neighborhood
Uygun kenar	Proper edge
Yalın komşuluk, Katlı-kenar	Simple-edge, Multi-edge
Katlı-çizge	Multi-graph
Kenar-çokluğu	Edge-multiplicity
İlmek	Loop
Yalın çizge	Simple graph
İlmeksiz çizge	Loopless graph
İki kutuplu	Dipole
Buket	Bouquet
Yön	Direction
Ağırlık	Weight
Ağırlıklı edge, Yönlü kenar	Weighted, Directed edge
Yay	Arc
Baş	Head
Kuyruk	Tail
Çoklu-yay	Multi-arc
Yönlü (Yönlendirilmiş) çizge	Digraph (Directed graph)
Karışık çizge	Mixed graph
Kısmen yönlü çizge	Partially directed graph
Temel çizge	Underling graph
Nokta renklendirme	Vertex coloring

TERİMLER SÖZLÜĞÜ (DEVAM)

Türkçe	English
Uygun renklendirme	Proper coloring
Renklendirme sayısı	Chromatic number
Nokta sayısı	Order
Kenar sayısı	Size
Derece	Degree
Bağdeğer	Valence
Gelen derece	Indegree
Giden derece	Outdegree
İzole nokta	Isolated vertex
Baskın nokta	Dominating vertex
Çizilebilir	Graphical
Başlangıç nokta	Initial vertex
Bitiş nokta	Final (Terminal) vertex
Açık/Kapalı yürüyüş	Open/Closed walk
Gezi	Trail
Tur	Circuit
Yol	Path
Döngü	Cycle
Bağlantılı çizge	Connected graph
Bağlantısız çizge	Disconnected graph
Zayıf bağlantılı yönlü çizge	Weakly connected directed graph
Güçlü bağlantılı yönlü çizge	Strongly connected directed graph
Euler yolu	Eulerian path
Euler turu	Eulerian trail
Euler çizgesi	Eulerian graph
Hamilton yolu	Hamiltonian path
Hamilton döngüsü	Hamiltonian cycle
Hamilton çizgesi	Hamiltonian graph

TERİMLER SÖZLÜĞÜ (DEVAM)

Türkçe	English
Mesafe	Distance
Dışmerkezlilik	Eccentricity
Çap	Diameter
Yarıçap	Radius
Merkezi nokta	Central vertex
Merkez	Center
Özmerkezli çizge	Self-centered graph
Sınır nokta	Peripheral vertex
Sınır	Periphery
Kalınlık	Girth
Çevre uzunluğu	Circumference
Çapsal nokta	Diametrical vertex
Çapsal çizge	Diametrical graph
Çift çizge	Even graph
Alt çizge	Subgraph
Bileşen	Component
Geren alt çizge	Spanning subgraph
İndirgenmiş alt çizge	Induced subgraph
Klik	Clique
Klik sayısı	Clique number
Bağımsız küme	Independent set
Bağımsızlık sayısı	Independence number
Kesen nokta kümesi	Vertex-cut
Eklem noktası	Articulation point/Cut-vertex
Kesen kenar kümesi	Edge-cut
Köprü	Bridge/Cut-edge
Nokta bağlantısallığı	Vertex-connectivity
Kenar bağlantısallığı	Edge-connectivity

TERİMLER SÖZLÜĞÜ (DEVAM)

Türkçe	English
Eşyapılı çizgeler	Isomorphic graphs
Altayrışım	Subdivision
Tümler	Complement
Hat çizge	Line graph
Birleşim çizgesi	Graph union
Ayrık birleşim	Disjoint union
Kesişim çizgesi	Graph intersection
Nokta ekleme	Vertex join
Çizge toplamı	Graph join
Kartezyen çarpım	Cartesian product
Direk, Tensor, Kroneker çarpım	Direct, Tensor, Kronecker product
Güçlü, Normal çarpım	Strong, Normal product
Korona çarpım	Corona product
Karma genişleme	Mixed extension
Sonlu çizge	Finite graph
Sonsuz çizge	Infinite graph
Tam çizge	Complete graph
Boş çizge	Null graph
Aşıkâr çizge	Trivial graph
Yol çizge	Path graph
Döngü çizge	Cycle graph
Çevrimsiz çizge	Acyclic graph
Ağaç	Tree
Orman	Forest
Yaprak	Leaf
Sarkık	Pendant
Köklü ağaç	Rooted tree
Oğul, Ata	Child, Parent

TERİMLER SÖZLÜĞÜ (DEVAM)

Türkçe	English
Yıldız çizge	Star graph
Tekerlek çizge	Wheel graph
Uçurtma çizge	Kite graph
Lolipop çizge	Lollipop graph
Kısa uçurtma çizge	Short kite graph
Halter çizge	Barbell graph
Çift yıldız çizge	Double star graph
Tırtıl ağaç çizge	Caterpillar tree
Kokteyl parti çizge	Cocktail party graph
Hiperküp çizge	Hypercube graph
Zıtkutuplu çizge	Antipodal graph
Rüzgar gülü çizgesi	Windmill graph
Eşik çizge	Threshold graph
Parçalı çizge	Partite graph
İki parçalı çizge	Bipartite graph
İki parçalı tam çizge	Complete bipartite graph
Çok parçalı tam çizge	Complete multipartite graph
Düzenli çizge	Regular graph
Mesafe düzenli çizge	Distance-regular graph
Güçlü düzenli çizge	Strongly regular graph
Zayıf düzenli çizge	Weakly regular graph
Devrik	Transpose
Eşlenik	Conjugate
Eşlenik devrik	Conjugate transpose
İz	Trace
Birim matris	Identity matrix
Köşegen matris	Diagonal matrix
Üst üçgensel	Upper triangle

TERİMLER SÖZLÜĞÜ (DEVAM)

Türkçe	English
Alt üçgensel	Lower triangle
Simetrik	Symmetric
Ters simetrik	Skew-symmetric
Ters Hermityen	Skew-Hermitian
Birimsel matris	Unitary matrix
Dikey matris	Orthogonal matrix
Tekil	Singular
Altmatris	Submatrix
Asıl altmatris	Principal submatrix
Hiçlik	Nullity
Karakteristik polinom	Characteristic polynomial
Özdeğer, Özvektör, Özçift	Eigenvalue, Eigenvector, Eigenpair
Spektrum	Spectrum
Spektral yarıçap	Spektral radius
Cebirsel kat	Algebraic multiplicity
Geometrik kat	Geometric multiplicity
Çok parçalı tam çizge	Complete multipartite graph
Eylemsizlik	Inertia
Denk matris	Congruence matrix
Benzer matris	Similar matrix
Köşegenleştirilebilir matris	Diagonalizable matrix
Cauchy arada olma	Cauchy interlacing
İndirgenebilir	Reducible
İndirgenemez	Irreducible
Güçlü bağlantılı çizge	Strongly connected graph
Bölüm matrisi	Quotient matrix
Adil parçalanış	Equitable partition
Negatif olmayan	Nonnegative

TERİMLER SÖZLÜĞÜ (DEVAM)

Türkçe	English
Çakışım matrisi	Incidence matrix
Arttırılmış komşuluk matrisi	Augmented adjacency matrix
Komşuluk matrisi	Adjacency matrix
En yüksek boş moleküler yörünge	Highest occupied molecular orbital
En düşük dolu moleküler yörünge	Lowest unoccupied molecular orbital
Eşspektrum	Cospectral
Laplasyan matrisi	Laplacian matrix (Admittance matrix)
Cebirsel bağlantısallık	Algebraic connectivity
Normalleştirilmiş komşuluk matrisi	Normalized adjacency matrix
Normalleştirilmiş Laplasyan matrisi	Normalized Laplacian matrix
İşaretsiz Laplasyan matrisi	Signless Laplacian matrix
Seidel matris	Seidel-Adjacency matrix
Mesafe matrisi	Distance matrix
Wiener indeksi	Wiener index
İletkenlik	Transmission
Mesafe Laplasyan matrisi	Distance-Laplacian matrix
İşaretsiz mesafe Laplasyan matrisi	Signness Distance-Laplacian matrix
Normalleştirilmiş mesafe Laplasyan matrisi	Normalized Distance-Laplacian matrix
Maksimum yol matrisi	Detour matrix
Çizge Enerjisi	Graph energy
Düzenimsi	Pseudo regular
Toplaşım	Coalescence
Eşenerjili	Equienergetic
Wiener-dışmerkezlilik indeksi	Wiener-eccentricity index
Ayırt edici nokta (çapsal)	Diametrically-distinguished vertex
Çizge değişmezi	Graph invariant
Aşılama dönüşümü	Graft transformation
Uçdeğer çizge	Extremal graph