

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD VE ÖKLİD DIŞI UZAYLARDA EĞRİ
HAREKETLERİ

Tezi Hazırlayan
Işık ARSLANOĞLU ERGEN

Tez Danışmanı
Dr. Öğretim Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Eylül 2023
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD VE ÖKLİD DIŞI UZAYLARDA EĞRİ
HAREKETLERİ

Tezi Hazırlayan
Işık ARSLANOĞLU ERGEN

Tez Danışmanı
Dr. Öğretim Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Eylül 2023

Dr. Öğretim Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN danışmanlığında Işık ARSLANOĞLU ERGEN tarafından hazırlanan “Öklid ve Öklid Dışı Uzaylarda Eğri Hareketleri Üzerine” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

18/09/2023

JÜRİ

Başkan : Doç. Dr. Gülsüm YÜCA

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Çağla RAMİS İLGÜZ

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN

ONAY

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun.....tarih ve..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

... / ... / 2023

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Işık ARSLANOĞLU ERGEN

TEŐEKKÖRLER

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan Sayın Hocam Dr. Öğretim Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN'e,

Maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen çok kıymetli aileme,

Teknik ve idari yardımları için Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına teşekkür ederim.

ÖKLİD VE ÖKLİD DIŞI UZAYLARDA EĞRİ HAREKETLERİ ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

IŞık ARSLANOĞLU ERGEN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2023

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde giriş kısmı bulunmaktadır. İkinci bölümde sırasıyla 3 boyutlu Öklid uzayında, 3 boyutlu Lorentz uzayında ve 3 boyutlu Galile uzayında temel tanım ve teoremler yer almaktadır. Üçüncü bölümde 3 boyutlu Öklid uzayında helikoidal hareket grupları altında eğrilerin yörüngeleri olan helikoidal yüzeyler araştırılmış, bu yüzeylerin ortalama eğrilikleri ve Gauss eğrilikleri ile ilgili teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde 3 boyutlu Lorentz uzayında helikoidal hareket grupları tanımlanmış ve yine bu hareket grupları ile elde edilen yüzeyler için eğriliklerden bahsedilmiştir. Beşinci bölümde 3 boyutlu Galile uzayında eğrilerin hareketleri incelenmiş, bununla birlikte dönele yüzeyler için eğrilik hesaplamaları yapılmıştır. Son olarak altıncı bölüm tartışma ve sonuçlara ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler : Galile uzayı, hareketler, yüzeyler.

Tez Danışmanları : Dr. Öğretim Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN

Sayfa Adeti : 60

ON CURVE MOTIONS IN EUCLIDEAN AND NON-EUCLIDEAN SPACES
(Master Thesis)

Işık ARSLANOĞLU ERGEN
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

September 2023

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, Euclidean 3-space, Lorentz an 3-space, Galilean 3-space and their properties are mentioned respectively. In the third chapter helicoidal surfaces, which are the trajectories of the curves under the helicoidal motions in 3 dimensional Euclidean space, are examined, and the theorems about the mean curvatures of the surfaces and Gaussian curvatures are given. In the fourth chapter, helicoidal motions in 3 dimensional Lorentz Space is decomposed and curvatures for surfaces obtained with the motion groups are mentioned. In the fifth chapter, motions of curves in 3 dimensional Galilean space are examined, and curvature calculations are made for rotating surfaces. Finally, the sixth chapter is devoted to discussion and conclusions.

Keywords : *Galilean space, motions, surfaces.*

Thesis Supervisor : **Dr. Öğretim Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN**

PageNumber : **60**

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
TEŞEKKÜRLER.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ.....	ix
1. BÖLÜM	
GİRİŞ.....	1
1.1. Amaç ve Kapsam	5
2. BÖLÜM	
TEMEL TANIMLAR	6
2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Tanımlar	6
2.2. 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Temel Tanımlar	8
2.3. 3-Boyutlu Galile Uzayında Temel Tanımlar.....	11
3. BÖLÜM	
3 BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA HELİKOİDAL HAREKETLER VE	15
YÜZEYLER	15
4. BÖLÜM	
3 BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA HELİKOİDAL YÜZEYLER VE.....	20
EĞRİLİKLERİ	20
4.1.3 Boyutlu Lorentz Uzayında Helikoidal Yüzeylerin Eğrilikleri.....	22
4.2.Lightlike Eksen Etrafında Helikoidal Hareket	32
5. BÖLÜM	
3 BOYUTLU GALİLE UZAYINDA HAREKETLER.....	42
5.1. Galile Uzayı G_3	42
5.2. Galile Uzayında Dönme Hareketleri	44
5.2.1. 3 Boyutlu Galile Uzayında Sıfır Eğrilikli Dönel Yüzeyler.....	46
5.3. 3 Boyutlu Galile Uzayında Eğrilerin Hareketi	50

5.4. G_3 in Equiform Geometrisindeki Eğrilerin Hareketleri.....	55
6. BÖLÜM	
TARTIŞMA VE SONUÇ.....	58
6.1.Tartışma	58
6.2.Sonuç	58
KAYNAKLAR	59
ÖZGEÇMİŞ.....	60



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. 1.	Hiperbolik yüzey, De Sitter yüzeyi, light koni.....	2
Şekil 1. 2.	Birinci çeşit helikoid.....	2
Şekil 1. 3.	İkinci çeşit helikoid.....	3
Şekil 1. 4.	Lorentz silindiri.....	3
Şekil 2. 1.	G_3 de normal vektör alanı	14
Şekil 4. 1.	$I+$ tipinden $H(u)=1/2u$ olan helikoidal yüzey	27
Şekil 4. 2.	$I-$ tipinden sağ helikoid	28
Şekil 4. 3.	$III-$ tipinden $H(u)=1/4u$ olan helikoidal yüzey	32
Şekil 4. 4.	$IV+$ tipinden $K=0$ olan helikoidal yüzey.....	36
Şekil 4. 5.	$IV+$ tipinden helikoidal yüzey.....	37
Şekil 4. 6.	$IV+$ tipinden helikoidal yüzey.....	41
Şekil 5. 1.	Konoid yüzeyi.....	48
Şekil 5. 2.	Developable minimal yüzey.....	50

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

\mathbb{R}	:	Reel sayılar
E^3	:	3 boyutlu Öklid uzayı
E_1^3	:	3 boyutlu Lorentz uzayı
G_3	:	3 boyutlu Galile uzayı
κ	:	Eğrinin eğriliği
τ	:	Eğrinin torsiyonu
T	:	Eğrinin birim teğet vektör alanı
N	:	Eğrinin birim normal vektör alanı
B	:	Eğrinin birim binormal vektör alanı

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bilindiği gibi hareketler geometri alanında önemli bir yere sahiptir. Öklid düzleminde bir hareket düzlemi kendisine dönüştüren ve uzaklıkları koruyan bire bir dönüşümdür. Hareketler uzaklıkları korudukları için, bir hareket sonucunda her bir geometrik şekil kendisine kongrüent bir şekle dönüşür. Öteleme, dönme, yansıma ve ötelemeli yansıma hareketlere örnek olarak gösterilebilir. Bununla birlikte helikoidal hareket, homotetik hareket, vida hareketi gibi hareket çeşitlerinden de bahsetmek mümkündür. Farklı uzaylarda bu hareket çeşitlerini inceleyen birçok çalışma mevcuttur.

Bir eğrinin dönme hareketi ve helikoidal hareket altında taradığı yüzeyler sırasıyla dönele yüzey ve helikoidal yüzey olarak adlandırılır. Örneğin, 3 boyutlu Öklid uzayında bir (h,k) noktası etrafında dönme açısı α olan genel dönme hareketi

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + h - h \cos \alpha + k \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + k - k \cos \alpha - h \sin \alpha$$

şeklindedir.

Lorentz uzayında ise helikoidal hareket gruplarından bahsedilecek olursa hareket ekseninin karakterine bağlı olarak üç farklı durum söz konusudur. Bu uzayda bir (a, b, c) noktasının helikoidal hareket altındaki görüntüsü için aşağıdaki matris formları kullanılır.

1) Hareket eksenini timelike iken ($L = \langle (0,0,1) \rangle$),

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},$$

2) Hareket eksenini spacelike iken ($L = \langle (1,0,0) \rangle$),

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ 0 & \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

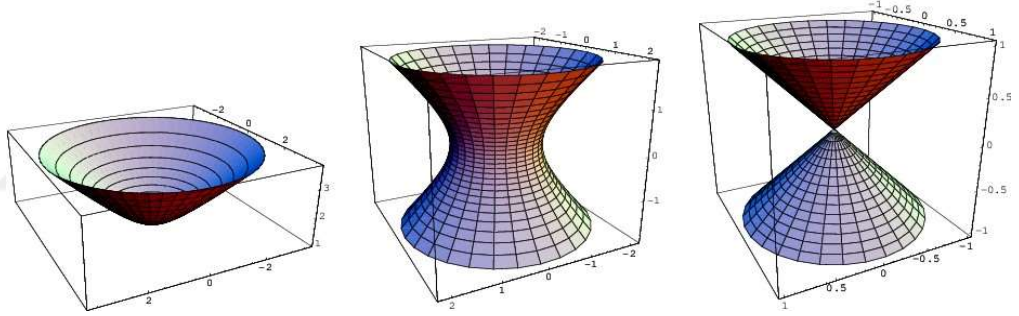
3) Hareket eksenini lightlike iken ($L = \langle (1,0,1) \rangle$),

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2} & \theta & \frac{\theta^2}{2} \\ -\theta & 1 & \theta \\ \frac{\theta^2}{2} & \theta & 1 + \frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3} - t \\ t^2 \\ \frac{t^3}{3} - t \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

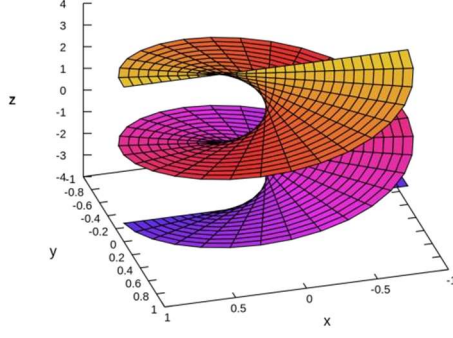
Ayrıca özel olarak bu hareketlerde adım $h=0$ olarak alındığında yine bahsedilen eksen etrafında bir dönme elde edilir. Lorentz uzayında dönele yüzeyler için örnekler hiperbolik yüzey, light koni ve De Sitter yüzeyi olarak verilebilir.

Aşağıda sırasıyla hiperbolik yüzey, De Sitter Yüzeyi ve light koni görülebilir.

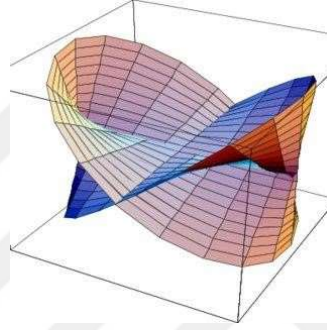


Şekil 1. 1 Hiperbolik yüzey, De Sitter yüzeyi, light koni

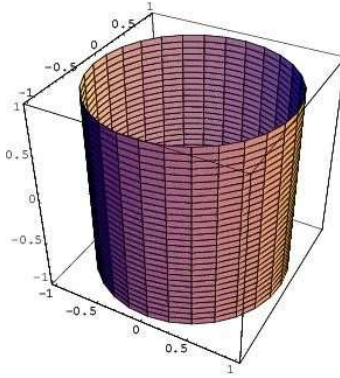
Yine Lorentz uzayında helikoidal yüzey örnekleri ise birinci, ikinci ve üçüncü helikoid yüzeyi, Cayley yüzeyi ve Lorentz silindiridir.



Şekil 1. 2 Birinci çeşit helikoid



Şekil 1. 3 İkinci çeşit helikoid



Şekil 1. 4 Lorentz silindiri

Hem Öklid uzayında hem Lorentz uzayında helikoidal hareketler ve yüzeyler ile ilgili yapılmış birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalardan bahsetmek gerekirse ilk olarak

Baikoussis ve Koufogiorgos, 3 boyutlu Öklid uzayında sabit ortalama eğriliğe ve sabit Gauss eğriliğine sahip helikoidal yüzeyleri incelemişlerdir [3]. Daha sonra Kaimakamis ve Papantoniou, 3 boyutlu Minkowski uzayında eksenin karakterine bağlı olarak üç farklı helikoidal yüzeyden bahsetmişler ve bu yüzeyler için bazı geometrik özellikleri vermişlerdir [4]. Choi, Kim ve Park ise 3 boyutlu Minkowski uzayında helikoidal yüzeyler ve bu yüzeylerin Gauss dönüşümünden bahsetmişlerdir [5]. Hou ve Ji ise yine 3 boyutlu Minkowski uzayında kübik vida hareketini tanımlamış ve bu hareketle elde edilen helikoidal yüzeyleri vermişlerdir. Ayrıca bu yüzeylerin ortalama eğrilikleri ve Gauss eğrilikleri arasındaki bağıntı ile ilgili olarak önemli sonuçlar elde etmişlerdir [9]. Yazarlar başka bir çalışmada ise 3 boyutlu Minkowski uzayında helikoidal yüzeyler için bu yüzeylerin ortalama eğrilikleri ve Gauss eğrilikleri ile belirlenen $H^2 - K = 0$ bağıntısını araştırmışlardır [10].

3-boyutlu Galile uzayında ise hareketler konusu üzerine yapılan çalışmalar yakın zamana aittir. Öztürk ve diğerleri 3 boyutlu Galile uzayında eğrilerin hareketlerini incelemişlerdir [13]. Almaz ve Külahcı 3 boyutlu Galile uzayında tüp yüzeyleri çalışmışlardır [2]. Won ve Karacan 3-boyutlu pseudo-Galile uzay da izotropik dönmelerle birlikte dönel yüzeyler üzerindeki geodeziklerin özelliklerini incelemişlerdir [14]. Mosa ve Elzawy ise 3 boyutlu Galile uzayında helikoidal yüzeyleri inşa etmişler ve bu yüzeylerin ortalama eğrilikleri ile Gauss eğriliklerinden bahsetmişlerdir [12].

1.1. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın temel amacı, 3 boyutlu Galile uzayında genel hareket denklemleri ile birlikte bu hareketler sonucunda elde edilen yüzeylere örnekler vermek ve daha sonra bu uzayda helikoidal hareketlerin incelenmesi ve helikoidal yüzeyler için ortalama eğrilik, Gauss eğriliği araştırılarak bu eğrilikler arasında bağıntılar elde etmektir. Bununla birlikte literatürde bulunan 3 boyutlu Öklid uzayı ile 3 boyutlu Lorentz uzayında yapılan çalışmalar incelenerek Galile uzayı ile karşılaştırmalar yapmaktır.



2. BÖLÜM TEMEL TANIMLAR

2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. A boştan farklı bir cümle ve V de bir cisim üzerinde vektör uzayı olmak üzere her $P, Q \in A$ noktaları için

$$\varphi: Ax_A \rightarrow V$$

$$(P, Q) \rightarrow \varphi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

dönüşümü aşağıda verilen şartları sağlıyor ise A cümlesine V ile birleşen afin uzay denir.

i) $\forall P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ dir.

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{v} \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$ olacak biçimde tek bir $Q \in A$ noktası vardır [7].

Tanım 2.1.2. 3 boyutlu reel vektör uzayı üzerinde her $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ için

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

ile verilen \langle , \rangle standart Öklid iç çarpımı tanımlansın. Bu durumda standart iç çarpımın tanımlı olduğu reel uzaya 3 boyutlu Öklid uzayı denir ve E^3 ile gösterilir [7].

Tanım 2.1.3. E^3 , 3 boyutlu Öklid uzayında

$$d: E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, B) \rightarrow d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^3 de uzaklık fonksiyonu ve $d(A, B)$ reel sayısına da A ile B noktaları arasındaki uzaklık denir [7].

Tanım 2.1.4. Reel uzayın açık bir alt aralığı $J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\beta: J \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ ile verilen diferansiyellenebilir β fonksiyonuna 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri denir [7].

Tanım 2.1.5. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, 3-boyutlu Öklid uzayı E^3 te keyfi bir eğri olsun. E^3 uzayında, her $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ için

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

ile verilen $\langle , \cdot \rangle$ standart Öklid iç çarpımı olmak üzere, $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = 1$ ise β , birim hızlı eğri (veya yay parametresi ile verilmiş eğri) olarak adlandırılır [7].

Bir β eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri kullanılarak elde edilen T, N, B vektör alanlarına sırasıyla teğet, asli normal ve binormal vektör alanları denir. Burada $\{T, N, B\}$ eğrinin her noktasında ortonormal bir çatı oluşturur. Bu çatıya β eğrisinin Frenet çatısı denir [7].

Tanım 2.1.6. Bir γ eğrisi ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ verilsin. Bu durumda Frenet vektörlerinin türevleri ile elde edilen $T'=\kappa N, N'=-\kappa T+\tau B, B'=-\tau N$ denklemlerine Frenet formülleri denir.

Burada $\kappa = \langle T', N \rangle$ ve $\tau = \langle N', B \rangle$ sırasıyla γ eğrisinin eğriliği ve burulmasıdır. Bu eğrilikler yardımıyla eğrilerin cinsleri tespit edilebilir. Örnek vermek gerekirse $\kappa = \tau = 0$ ise γ bir geodeziktir. κ sıfırdan farklı bir sabit ve $\tau = 0$ ise γ bir çemberdir. κ ve τ sıfırdan farklı sabitler ise γ dairesel helistir [7].

Tanım 2.1.7. 3 boyutlu Öklid uzayında verilen bir γ eğrisinin her noktasında teğetleri sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyor ise bu eğriye eğilim çizgisi (helis) denir. Özel olarak γ bir eğilim çizgisi ise eğriliği ve burulması κ ve τ olmak üzere κ/τ oranı sabittir [7].

Tanım 2.1.8. M, E^3 3 boyutlu Öklid uzayında boştan farklı bir cümle olsun. Öyle ki

$$M = \{x \in U \subset E^3 \mid f: U \rightarrow \mathbb{R}\}$$

ve f diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f(x) = c$ (sabit) olmak üzere $\forall P \in M$ için $\nabla f(P) \neq 0$ ise M ye E^3 de bir yüzey denir [8].

Tanım 2.1.9. E^3 de bir yüzey M olsun. M nin teğet vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere $\chi(M)^\perp$ in bir ortonormal bazı N ise N ye M nin birim normal vektör alanı denir [8].

Tanım 2.1.10. E^3 de bir yüzey M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. D, E^3 de Riemann konneksiyonu olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X N$ biçiminde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde Weingarten dönüşümü denir [8].

Tanım 2.1.11. E^3 de bir yüzey M ve S de M nin Weingarten dönüşümü olmak üzere

i) $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $\langle X, Y \rangle$ ifadesine M üzerinde birinci temel form denir.

ii) $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $\langle S(X), Y \rangle$ ifadesine M üzerinde ikinci temel form denir [8].
Bununla birlikte M yüzeyinin parametrik ifadesi $\varphi(u, v)$ ile verildiğinde

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

ile verilen $\{E, F, G\}$ sayıları birinci temel formun katsayılarıdır.

$$e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle, f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle, g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle$$

ile verilen $\{e, f, g\}$ ise ikinci temel formun katsayıları olarak adlandırılır [8].

Tanım 2.1.12. E^3 de bir yüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki Weingarten dönüşümü $S(P)$ olmak üzere $K: M \rightarrow \mathbb{R}, K(P) = \det S(P)$ biçiminde tanımlı fonksiyona M nin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. $K(P)$ ise M nin P noktasındaki Gauss eğriliği denir [8].

Tanım 2.1.13. E^3 de bir yüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki Weingarten dönüşümü $S(P)$ olmak üzere $H: M \rightarrow \mathbb{R}, H(P) = \text{iz}S(P)$ biçiminde tanımlı fonksiyona M nin ortalama eğrilik fonksiyonu denir. $H(P)$ ise M nin P noktasındaki ortalama eğriliğidir [8].

2.2. 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Temel Tanımlar

Tanım 2.2.1. $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ olmak üzere

$$\langle ., . \rangle : E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

şeklinde tanımlanan simetrik, bilineer ve non dejenere metrik tensöre Lorentz Metriği denir [11].

Tanım 2.2.2. $\langle ., . \rangle, E^3$ 'de Lorentz metriği olsun. $\{E^3, \langle ., . \rangle\}$ ikilisine 3- boyutlu Lorentz uzayı denir ve E_1^3 ile gösterilir. $v = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ olmak üzere v 'nin normu $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$ şeklinde tanımlanır [11].

Tanım 2.2.3. $v = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ olmak üzere,

$\langle v, v \rangle > 0$ ise v 'ye spacelike vektör,

$\langle v, v \rangle < 0$ ise v 'ye timelike vektör,

$\langle v, v \rangle = 0, v \neq 0$ ise v 'ye lightlike vektör denir [11].

Tanım 2.2.4. γ, E_1^3 de bir eğri olmak üzere eğer γ' sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike ise γ eğrisine de sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike eğri denir [11].

Tanım 2.2.5. γ, E_1^3 de bir eğri olmak üzere eğer $\langle \gamma', \gamma' \rangle = \pm 1$ ise γ ya birim hızlı eğri denir [11].

Tanım 2.2.6. γ, E_1^3 de spacelike bir eğri olmak üzere eğer γ nın asli normal vektörü N sıfır ise bu eğriye pseudonull eğri denir [11].

Tanım 2.2.7. E_1^3 Lorentz uzayında teğet, normal ve binormal vektör alanlarının oluşturduğu cümle $\{T, N, B\}$, $\gamma(s)$ eğrisinin Frenet çatısı olsun. γ eğrisinin karakterine göre Frenet eşitlikleri aşağıdaki formları alır [11].

1. Durum : γ lightlike olmayan bir eğri ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 \kappa & 0 \\ -\varepsilon_1 \kappa & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & -\varepsilon_2 \kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Burada κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve burulmasıdır.

Ayrıca $\varepsilon_1 = \langle T, T \rangle = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \langle N, N \rangle = \pm 1$ ve $\varepsilon_3 = \langle B, B \rangle = \pm 1$ dir.

Aynı zamanda $T \times N = \varepsilon_1 \varepsilon_2 B$, $N \times B = \varepsilon_2 \varepsilon_3 T$, $B \times T = \varepsilon_1 \varepsilon_3 B$, eşitlikleri sağlanır.

2. Durum : $\gamma(s)$ lightlike ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Yine κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve burulmasıdır, $\gamma(s)$ bir doğru ise $\kappa = 0$ diğer durumlarda ise $\kappa = 1$ dir.

$\langle T, T \rangle = \langle B, B \rangle = \langle T, N \rangle = \langle N, B \rangle = 0, \langle N, N \rangle = \langle T, B \rangle = 1$ dir ve bununla birlikte $T \times N = -T, N \times B = -B, B \times T = -N$ eşitlikleri sağlanır.

3. Durum : $\gamma(s)$ pseudonull bir eğri ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Burada κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve burulmasıdır. $\gamma(s)$ eğrisi doğru ise eğrilik $\kappa=0$ diğer durumlarda ise $\kappa=1$ dir. Aynı zamanda,

$\langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = \langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = 0, \langle T, T \rangle = \langle N, B \rangle = 1$ dir ve bununla birlikte $T \times N = N, N \times B = T, B \times T = B$ eşitlikleri sağlanır [11].

Tanım 2.2.8. V, E_1^3 ün bir alt vektör uzayı olsun. V üzerindeki metrik \langle, \rangle pozitif tanımlıysa V ye spacelike, non-dejenere ve negatif ise timelike, $V \neq 0$ iken dejenere ise lightlike denir [11].

Tanım 2.2.9. E_1^3 de iki vektör $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ olmak üzere ,

$$\alpha \times \beta = \begin{pmatrix} -i & j & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlı dönüşüme α, β vektörlerinin vektörel çarpımı denir [11].

Tanım 2.2.10. E_1^3 de bir M yüzeyi ve M nin bir P noktasında M nin teğet uzayı $T_P M$ olsun. Eğer $\forall P \in M$ için $T_P M$ timelike ise M yüzeyi timelike, $T_P M$ spacelike ise M yüzeyi timelike ve $T_P M$ lightlike ise M yüzeyi lightlike yüzey olur. Ayrıca timelike ve spacelike yüzeylere non-dejenere yüzeyler denir [11].

Tanım 2.2.11. E_1^3 de non-dejenere M yüzeyi $\varphi(u, v)$ ile parametrize edilsin. Bu durumda

$$N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

şeklinde tanımlı N, M yüzeyinin birim normal vektör alanıdır [11].

Tanım 2.2.12. $\varphi \rightarrow M$, M nin bir parametrizasyonu olmak üzere birinci esas formun katsayıları

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$$

ve

$$W = EG - F^2 \text{ dir [11].}$$

2.3. 3-Boyutlu Galile Uzayında Temel Tanımlar

Bu bölümde Galile uzayı ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilecektir. Galile uzayı, izotropik koninin bozularak düzleme dönüştüğü pseudo - Öklid uzayının sınır durumudur. Fizikte önemli bir rol oynayan çarpım uzayının Klein geometrisi olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.1. 3 boyutlu Galile uzayı \mathbb{G}_3 'de iki vektörü $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ arasındaki Galile iç çarpımı;

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{G}_3} = \begin{cases} u_1 v_1 & u_1 \text{ veya } v_1 \text{ sıfırdan farklı ise} \\ u_2 v_2 + u_3 v_3, & u_1 \text{ ve } v_1 \text{ her ikisi de sıfır ise} \end{cases} \quad (2.4)$$

ve Galile vektörel çarpımı;

$$(u \times v)_{\mathbb{G}_3} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}, & u_1 \text{ veya } v_1 \text{ sıfırdan farklı ise} \\ \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}, & u_1 \text{ ve } v_1 \text{ her ikisi de sıfır ise} \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada e_1, e_2 ve e_3 Öklid uzayının $\{e_1, e_2, e_3\}$ standart bazıdır [1].

Tanım 2.3.2. $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_3$ $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ 3 boyutlu Galile uzayında keyfi bir eğri olsun. Eğer $x(s)$ eğrinin yay parametresi ise bu durumda $\gamma(s) = (s, y(s), z(s))$ olarak elde edilir ve γ eğrisinin birinci eğriliği $\kappa(s)$ ve ikinci eğriliği (burulması) $\tau(s)$

$$\kappa(s) = \sqrt{(y'')^2(s) + (z'')^2(s)}$$

$$\tau(s) = \frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{[\kappa(s)]^2}$$

şeklinde tanımlanır [1].

γ nın Frenet 3-ayaklısı;

$$T(s) = \gamma'(s) = (1, y'(s), z'(s))$$

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \gamma''(s) = \frac{1}{\kappa(s)} (0, y''(s), z''(s))$$

$$B(s) = \frac{1}{\kappa(s)} (0, -z''(s), y''(s))$$

şeklinde verilir. T , N ve B vektörlerine sırasıyla γ eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektörleri denir. Bu vektörlerin türevleri için aşağıdaki Frenet formülleri geçerlidir [1].

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

3- boyutlu Galile uzayı esasen belirli bir mutlak figürle tanımlanan projektif bir uzaydır. Bu uzayda hareketler mutlak figürü değiştirmeyen projektif dönüşümler aracılığıyla tanımlanır. Mutlak figür $\{w, f, l\}$ şeklinde sıralı bir üçlüden ibarettir. Burada w reel (mutlak) düzlem, f reel (mutlak) doğrudur.

Tanım 2.3.3. 3 boyutlu Galile uzayında bir düzlem eğer mutlak doğru içeriyorsa Öklid düzlemi, aksi halde izotropik düzlemdir. $x = sabit$ olan düzlemler Öklid düzlemiyken diğerleri izotropik düzlemlerdir. O halde mutlak düzlem w da Öklid düzlemdir [6].

Tanım 2.3.4. $u = (u_1, u_2, u_3)$, 3 boyutlu Galile uzayında bir vektör olsun. Eğer $u_1 \neq 0$ ise u ya non-izotropik vektör denir. Bu uzayda birim normlu tüm non-izotropik vektörler $u = (1, u_2, u_3)$ biçimindedir. İzotropik vektörler için ise $u_1 = 0$ dir. $x = 0$ düzlemi Galile uzayında bir Öklid düzlemi olduğundan izotropik vektörlerin Öklid düzleminde olduğu aşıkardır [6].

Tanım 2.3.5. M , 3 boyutlu Galile uzayında bir yüzey olsun. Bu durumda M nin parametrizasyonu

$$\varphi(u^1, u^2) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2))$$

biçimindedir. Burada $u^1, u^2 \in \mathbb{R}$ ve $x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2) \in C^3$ dir [6].

Tanım 2.3.6. 3 boyutlu Galile uzayında izotropik normal vektör alanı

$$N = \frac{\varphi_{,1} \times \varphi_{,2}}{\|\varphi_{,1} \times \varphi_{,2}\|}$$

dir [6].

Bununla birlikte $\varphi(u^1, u^2)$ ile verilen yüzey için ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği de sırasıyla

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} L_{ij}$$

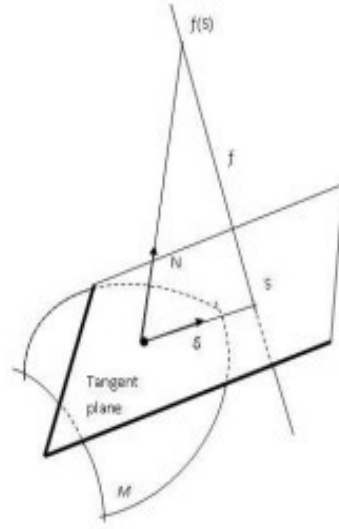
$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{w_2}$$

dir.

Burada $w = \|\varphi_{,1} \times \varphi_{,2}\|$,

$$L_{ij} = \left\langle \frac{\varphi_{,ij}x_{,1} - x_{,ij}\varphi_{,1}}{x_{,1}}, N \right\rangle = \left\langle \frac{\varphi_{,ij}x_{,2} - x_{,ij}\varphi_{,2}}{x_{,2}}, N \right\rangle$$

$g^1 = \frac{x_{,2}}{w}$, $g^2 = \frac{x_{,1}}{w}$ ve $g^{ij} = g^i g^j$, $i, j \in \{1, 2\}$ dir [6].



Şekil 2. 1 G_3 de normal vektör alanı

3. BÖLÜM

3 BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA HELİKOİDAL HAREKETLER VE YÜZEYLER

3 boyutlu Öklid uzayında bir helikoidal yüzey bir düzlem eğrisinin helikoidal hareket altındaki yörüngesi olarak tanımlanır.

E^3 üç boyutlu Öklid uzayında bir M yüzeyi ve X bu yüzeyin yer vektörü olmak üzere

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \lambda(u) + hv) \quad (*)$$

dir. Burada h bir sabit ve $\lambda(u)$ ikinci dereceden diferansiyellenebilir fonksiyondur. Bu şekilde tanımlanan M yüzeyine eksen Oz ve adımı h olan helikoidal yüzey denir. Özel olarak $h=0$ ise bu durumda yüzey bir dönel yüzeydir. M yüzeyi bir helikoidal hareket altında bir eğri ile üretilebilir. Burada katı hareket

$$g_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$g_t(x, y, z) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z + ht)$$

ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere helikoidal yüzey g_t altında invarianttır [3].

M yüzeyinin ortalama eğriliği H , Gauss eğriliği K olmak üzere bu eğrilikler sadece u ya bağımlıdır ve ikinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklemin çözümü için integrallere ihtiyaç vardır.

$$\gamma(u) = (u, 0, \lambda(u))$$

$u \in I$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere C^2 tipinden bir eğri olsun. γ eğrisine helikoidal hareket uygulandığında elde edilen yüzeyin parametrisasyonu

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \lambda(u) + hv) \quad (3.1)$$

şeklindedir.

M yüzeyinin Gauss eğriliği için birinci temel form I ve ikinci temel form II olmak üzere, bunlar sırasıyla :

$$I=(1+\lambda'^2)du^2 + 2h\lambda'dudv + (u^2 + h^2)dv^2 \quad (3.2)$$

$$II=\frac{1}{a} (u\lambda'' du^2 - 2hdudv + u^2\lambda' dv^2) \quad (3.3)$$

dir. Bununla birlikte, M nin birim normal vektör alanı

$$N=\frac{1}{a} (h\sin v - u\lambda'\cos v, -u\lambda'\sin v - h\cos v, u)$$

biçimindedir. Burada $a = (u^2(1 + \lambda'^2) + h^2)^{1/2}$ olmak üzere buradaki türev u değişkenine göre alınmıştır. Ortalama eğrilik H ve Gauss eğriliği K için (3.1) ifadesinden

$$H = \frac{(u^2+h^2)u\lambda'' + (1+\lambda'^2)u^2\lambda' + 2h^2\lambda' + 2h^2\lambda'}{2[u^2(1+\lambda'^2) + h^2]^{3/2}} \quad (3.4)$$

$$K = \frac{u^3\lambda'\lambda'' - h^2}{[u^2(1+\lambda'^2) + h^2]^2} \quad (3.5)$$

olarak hesaplanır. Burada $\lambda' = 0$ ise helikoidal yüzey sadece helikoid belirtir. (3.4) denklemi

$$A = \lambda'(u^2(1 + \lambda'^2) + h^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

olmak üzere

$$2H = 2A + uA' \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir. $u \neq 0$ olmak üzere

$$A' + \frac{2}{u}A = 2\frac{H}{u} \quad (3.8)$$

ile belirtilen diferansiyel denklemin çözümü ile

$$A = u^{-2}(2 \int Hudu + c_1) \quad (3.9)$$

bulunur. (3.6) ve (3.9) eşitliklerinin ortak çözümü ile

$$\lambda' = u^{-2}(2 \int Hudu + c_1)[u^2(1 + \lambda'^2) + h^2]^{1/2}$$

veya

$$u^2(u^2 - (2 \int Hudu + c_1)^2) \lambda'^2 = (u^2 + h^2)(2 \int Hudu + c_1)^2 \quad (3.10)$$

elde edilir. Ancak $u \neq 0$ için

$$u^2 - (2 \int Hudu + c_1)^2 = u^2(u^2 + h^2)[u^2(1 + \lambda'^2) + h^2]^{-1} > 0 \text{ dir.}$$

Böylece (3.10) eşitliğinin integrali alınarak

$$\lambda(u) = \pm \int \frac{(u^2 + h^2)^{1/2} |2 \int Hud + c_1|}{|u|(u^2 - (2 \int Hudu + c_1)^2)^{1/2}} du + c_2 \quad (3.11)$$

bulunur. Burada c_2 integral sabitidir.

Tersine $h \in \mathbb{R}$ ve $H(u)$, $I \subset \mathbb{R} - \{0\}$ açık aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere herhangi bir $u_0 \in I$ için u_0 ın, $I' \subset I$ olacak biçimde bir I' açık aralığı vardır. A açık aralığı için $c'_1 = -(2 \int Hudu)(u_0)$ dir öyle ki F fonksiyonu

$$F(u, c) = u^2 - (2 \int Hudu + c)^2 > 0 \text{ herhangi } (u, c) \in I' \times A \text{ dir.}$$

F nin sürekliliği sebebiyle \mathbb{R}^2 nin bir alt kümesinde $F(u_0, c_1) = u^2$ pozitiftir. Herhangi bir

$(u, c_1) \in I' \times A$, $c_2 \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ ve sürekli bir $H(u)$ fonksiyonu için

$$\gamma(u, H(u), h, c_1, c_2) = (u, 0, \pm \int \frac{(u^2 + h^2)^{1/2} |2 \int Hudu + c_1|}{|u|(u^2 - (2 \int Hudu + c)^2)^{1/2}} du + c_2$$

eğri ailesi tanımlanabilir.

Adımı h olan bir helikoidal hareketin bu eğrilere uygulanmasıyla, ortalama eğriliği $H(u)$ olan helikoidal yüzeyler elde edilir [3].

Teorem 3.1. $(u,0,\lambda(u))$, $u \in I$ eğrisi ile üretilen helikoidal yüzey (1) ile belirtilen helikoidal yüzey olsun. Bu yüzeyin $(u,0,\lambda(u))$ noktasındaki ortalama eğriliği $H(u)$ dir.

c_1, c_2 ve h birer sabit olmak üzere $(u,0,\lambda(u)) = \gamma(u,H(u),h,c_1,c_2)$ dir. Tersine $h \in \mathbb{R}$ ve $H(u)$, $u \in I$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere herhangi bir $u_0 \in I$ için $\gamma(u, H(u), h, c_1, c_2)$ eğri ailesi tanımlanabilir. Böylece ortalama eğriliği $H(u)$ ve adımı h olan helikoidal yüzey tanımlanabilir [3].

Şimdi Gauss eğriliği için;

(3.6) eşitliği

$$(B^2)' = 2Ku \quad (3.12)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$B^2 = 2 \int \frac{u^2 \lambda'^2 + h^2}{u^2(1 + \lambda'^2) + h^2} \quad (3.13)$$

dir ve (3.12) eşitliğinin integrali alınarak

$$B^2 = 2 \int Kudu + c_1 \quad (3.14)$$

bulunur.

(3.13) ve (3.14) eşitliklerinin ortak çözümü ile

$$(1 - c_1 - 2 \int Kudu) u^2 \lambda'^2 = (u^2 + h^2)(2 \int Kudu + c_1) - h^2 \quad (3.15)$$

elde edilir. $u \neq 0$ için

$$1 - c_1 - 2 \int Kudu = u^2 [u^2(1 + \lambda'^2) + h^2]^{-1} > 0$$

olduğundan (3.15.12) denkleminin integrali alınarak

$$\lambda(u) = \pm \int \frac{[(u^2 + h^2)(2 \int Kudu + c_1) - h^2]^{1/2}}{|u|(1 - c_1 - 2 \int Kudu)^{1/2}} du + c_2$$

bulunur. Burada $c_2 \in \mathbb{R}$ dir.

Tersine $h \in \mathbb{R}$ ve $K(u), I \subset \mathbb{R} - \{0\}$ açık aralığında tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $u_0 \in I$ için ($I' \subset I$) olmak üzere $u_0 \in I'$ dir. \mathbb{R} nin bir A açık aralığı için

$$c'_1 = -(2 \int 2Kudu)(u_0), \text{ öyleki } 1 - c_1 - 2 \int Kudu > 0$$

dir. Buradan herhangi bir $u \in I'$, $c_1 \in A$, $c_2 \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eğri ailesi tanımlanabilir.

$$\beta(u, K(u), h, c_1, c_2) = \left(u, 0, \int \frac{[(u^2 + h^2)(2 \int Kudu + c_1) - h^2]^{1/2}}{|u|(1 - c_1 - 2 \int Kudu)^{1/2}} du + c_2 \right)$$

Bu eğri ailesine helikoidal hareketin uygulanması ile elde edilen iki parametrelili helikoidal yüzeyin Gauss eğriliği $K(u)$, $u \in I'$ ve adımı h dir [3].

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem3.2. $(u, 0, \lambda(u))$, $u \in I$ üreteç eğrisi ile üretilen helikoidal yüzey (1) eşitliği ile verilmiştir. Bu yüzeyin $(u, 0, \lambda(u))$ noktasındaki Gauss eğriliği $K(u)$ dir. Böylece c_1 , c_2 ve h sabitler olmak üzere $(u, 0, \lambda(u)) = \beta(u, K(u), h, c_1, c_2)$ dir. Tersine $h \in \mathbb{R}$ ve $K(u)$, $u \in I$ için sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $u_0 \in I$ için $\beta(u, K(u), h, c_1, c_2)$, $u \in I'$ eğri ailesi tanımlanabilir. Böylece elde edilen helikoidal yüzeyin Gauss eğriliği $K(u)$, $u \in I'$ ve adımı h dir [3].

4. BÖLÜM

3 BOYUTLU LORENTZ UZAYINDA HELİKOİDAL YÜZEYLER VE EĞRİLİKLERİ

3 boyutlu Lorentz uzayında helikoidal hareket grupları Öklid uzayındaki helikoidal hareket gruplarına paralellik göstermekle birlikte, bu uzayda hareketin ekseninin karakterina bağlı olarak üç farklı durum söz konusudur.

I.Durum; Dönme ekseninin spacelike olduğu durumda, üreteç eğri γ , x_1x_2 -düzlemi veya x_0x_2 düzleminde alınabilir. Böylece ,

$$\gamma_1(u) = (0, f(u), g(u)) \text{ veya } \gamma_2(u) = (f(u), 0, g(u))$$

olmak üzere burada $f = f(u)$, $I=(a,b)$ açık aralığı üzerinde C^1 sınıfından pozitif bir fonksiyon ve $g = g(u)$ ise C^2 sınıfından bir fonksiyondur.(0,0,1) vektörünü invaryant bırakan Lorentz hareket grubu, spacelike eksen etrafındaki dönme matrisi

$$A(u) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}$$

kullanılarak tanımlanabilir. Bu eksen etrafında γ_1 eğrisine helikoidal hareket uygulanarak elde edilen M yüzeyinin denklemi

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cv \end{pmatrix}$$

$$r(u, v) = (f(u)\sinh v, f(u)\cosh v, g(u) + cv) \quad (4.1)$$

şeklindedir. Burada $f(u) > 0$ ve $c \in \mathbb{R}^+$ dir.

Aynı eksen etrafında γ_2 eğrisine helikoidal hareket uygulanarak elde edilen yüzeyin denklemi ise

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \\ g(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cv \end{pmatrix}$$

$$r(u,v) = (f(u)\cosh v, f(u)\sinh v, g(u) + cv) \quad (4.2)$$

olarak bulunur. Burada $f(u) > 0$, $c \in \mathbb{R}^+$ dir. Bu yüzeyler birinci çeşit helikoidal yüzeylerdir [4].

II.Durum. Dönme eksenini timelike olsun. Bu durumda üreteç eğri γ , x_0x_1 düzleminindedir. $\gamma(u) = (g(u), f(u), 0)$ olmak üzere $f = f(u)$ C^1 sınıfından pozitif bir fonksiyon ve $g = g(u)$ I üzerinde C^2 sınıfından bir fonksiyondur. Bu durumda Lorentz grubu hareketin eksenini olan $(1,0,0)$ vektörünü invaryant bırakan eksen etrafında tanımlanır. Bu eksen etrafındaki dönme matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh v & -\sinh v \\ 0 & \sinh v & \cosh v \end{pmatrix}, 0 \leq v \leq 2\pi.$$

olmak üzere γ eğrisine helikoidal hareket uygulanarak elde edilen M yüzeyi

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh v & -\sinh v \\ 0 & \sinh v & \cosh v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(u) \\ f(u) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(u,v) = (g(u) + cv, f(u)\cosh v, f(u)\sinh v), f(u) > 0, c \in \mathbb{R}^+ \quad (4.3)$$

ile parametrize edilir. Bu yüzey üçüncü çeşit helikoidal yüzeydir [4].

III.Durum. Dönme eksenini lightlike olsun. Bu durumda hareketin eksenini $(1,1,0)$ vektörü tarafından gerilir ve üreteç eğrisi γ , x_0x_1 düzleminde alınabilir.

$$\gamma(u) = (f(u), g(u), 0), u \in I,$$

Burada f, g I açık aralığı üzerinde fonksiyonlardır. Böylece lightlike eksen etrafında dönme matrisi

$$A(v) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1 - \frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}$$

alındığında γ eğrisine helikoidal hareket uygulanarak elde edilen yüzey

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1 - \frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ g(u) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cv \\ cv \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r(u, v) = \left\{ \left(\left(1 + \frac{v^2}{2} \right) f(u) - \frac{v^2}{2} g(u) + cv, \frac{v^2}{2} f(u) + \left(1 - \frac{v^2}{2} \right) g(u) + cv, (f(u) - g(u))v \right) \right\} \quad (4.4)$$

ile parametrize edilir. Bu yüzey dördüncü çeşit helikoiddir. $c=0$ olduğunda M bir dönel yüzeydir.

M nin birinci esas formunun diskriminantı $EG - F^2$ olmak üzere;

$EG - F^2 > 0$ ise E^3_1 de helikoidal yüzey I^+, II^+, III^+ veya IV^+ tipindedir.

$EG - F^2 < 0$ ise E^3_1 de helikoidal yüzey I^-, II^-, III^- veya IV^- tipindedir.

Bununla birlikte birinci çeşit helikoidal yüzeyin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H sadece u parametresine bağlıdır [4].

4.1.3 Boyutlu Lorentz Uzayında Helikoidal Yüzeylerin Eğrilikleri

$\gamma(u) = (0, u, g(u))$, $u \in I$, C^2 tipinden bir eğri ve I ise $\mathbb{R}/\{0\}$ in herhangi bir açık aralığı olsun. Bu eğriye helikoidal hareket uygulandığında E_1^3 de M helikoidal yüzeyi elde edilir ve bu yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u, v) = (u \sinh v, u \cosh v, g(u) + cv) \quad (4.1.1)$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.1. $\gamma(u)=(0,u, g(u))$, $u \in I=(a,b) \subset \mathbb{R}$ üreteç eğrisi ile elde edilen M yüzeyi E_1^3 de helikoidal yüzey belirtir. $(0,u,g(u))$ noktasında bu yüzeyin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği u değişkenine bağlı fonksiyonlardır. $c \in \mathbb{R}^+$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $K=K(u)$, $H=H(u)$ fonksiyonları ile birlikte $u \in I$ için $\gamma(u) \equiv \gamma(K(u), c; c_1, c_2)$ ve benzer şekilde $\gamma(u) \equiv \gamma(H(u), c; c_1, c_2)$ eğri ailesi tanımlanabilir. \mathbb{R}_1^3 de tanımlanmış bu eğri ailesi için Gauss eğriliği $K=K(u)$, $u \in I$ ve ortalama eğrilik $H=H(u)$, $u \in I_1 = (-c,c) \subset I$ dir [4].

İspat 4.1.1. Helikoidal hareket altında γ eğrisinin yörüngesi olan helikoidal yüzeyin birinci ve ikinci temel formu sırasıyla

$$I = (1 + g'^2)du^2 + 2cg'dudv + (c^2 - u^2)dv^2 \quad (4.1.2)$$

ve

$$\Pi = \frac{1}{w} (-ug''du^2 + 2cdudv + u^2g'dv^2) \quad (4.1.3)$$

şeklindedir. Burada $W = [|c^2 - u^2(1 + g'^2)|]^{1/2}$ dir. Böylece helikoidal yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K(u) = - \frac{u^3g'g'' + c^2}{[c^2 - u^2(1 + g'^2)]|c^2 - u^2(1 + g'^2)|} \quad (4.1.4)$$

ve

$$H(u) = \frac{u^2g'(1 + g'^2) - ug''(c^2 - u^2) - 2c^2g'}{2[c^2 - u^2(1 + g'^2)]|c^2 - u^2(1 + g'^2)|^{1/2}} \quad (4.1.5)$$

dir.

$W = EG - F^2 = c^2 - u^2(1 + g'^2) > 0$ olmak üzere

$$K(u) = - \frac{u^3g'g'' + c^2}{[c^2 - u^2(1 + g'^2)]^2} \quad (4.1.4a)$$

$$H(u) = \frac{u^2 g'(1+g'^2) - u g''(c^2 - u^2) - 2c^2 g'}{2[c^2 - u^2(1+g'^2)]^{3/2}} \quad (4.1.5a)$$

olarak düzenlenebilir.

(4.1.4a) denkleminin çözümü için $K = K(u)$ fonksiyonunun bilindiği varsayılınsın. Böylece (4.1.4a) eşitliği aşağıdaki şekle indirgenebilir.

$$h'(u) = 2uK(u) \quad (4.1.6)$$

Burada

$$h(u) = (u^2 g'^2 - c^2) [c^2 - u^2 (1 + g'^2)]^{-1} \quad (4.1.7)$$

dir.

(4.1.6) nin çözümü ile

$$h(u) = c_1 + 2 \int uK(u)du, c_1 \in \mathbb{R} \quad (4.1.8)$$

bulunur ve (4.1.7) ve (4.1.8) in ortak çözümü ile

$$g'^2(u) = \frac{c^2 A + u^2(A-1)}{u^2 A}, u \neq 0$$

elde edilir. Burada $A = 1 + c_1 + 2 \int uK(u)du < 0, \forall u \neq 0$ dir. Öyleyse

$$g(u) = c_2 \pm \int \frac{[(c^2 - u^2)A + u^2]^{1/2}}{|u|A|^{1/2}} du, c_2 \in \mathbb{R} \quad (4.1.9)$$

olur. $K = K(u)$ ve $c \in \mathbb{R}^+, I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ açık aralığında tanımlı olmak üzere herhangi bir $u_0 \in I$ için bir U açık alt aralığı bulunabilir. I', \mathbb{R} de bir açık aralık ve

$$c_1' = - (2 \int uK(u)du)(u_0)$$

Öyleki $F(u, c_1) = A - k$, $k > 1$ şeklinde tanımlanan $F : U \times I' \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu herhangi bir $(u, c_1) \in U \times I'$ aralığında negatiftir. Hatta $F(u_0, c'_1) = 1 - k < 0$ dir.

Ayrıca F sürekli olduğundan \mathbb{R}^2 nin altkümesi olan $U \times I'$ de negatiftir. Böylece herhangi bir $(u, c_1) \in U \times I'$, $c_2 \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+$ ve $K = K(u)$ fonksiyonu için iki parametrelili eğri ailesi tanımlanabilir.

$$\alpha(u) \equiv \alpha(K(u), c; c_1, c_2) = \left(0, u, c_2, \pm \int \frac{[(c^2 - u^2)A + u^2]^{1/2}}{|u||A|^{1/2}} du \right) \quad (4.1.10)$$

Bu eğri ailesine adımı c olan helikoidal hareketin uygulanması ile Gauss eğriliği $K(u)$ olan E_1^3 de I^+ tipi helikoidal yüzeylerin iki parametrelili ailesi elde edilir. Helikoidal yüzeyin parametrizasyonu ise

$$r(u, v) = \left(u \sinh v, u \cosh v, c_2 \pm \int \frac{[(c^2 - u^2)A + u^2]^{1/2}}{|u||A|^{1/2}} du \right) \quad (4.1.11)$$

şeklindedir.

(ii) $EG - F^2 = c^2 - u^2(1 + g'^2) < 0$ ise ilk duruma benzer şekilde Gauss eğriliği $K(u)$, adımı c olan I^- tipinden helikoidal yüzey elde edilebilir.

Şimdi (4.1.11) denkleminin çözümü ile

$$\phi'(u) + \frac{2}{u}\phi(u) = 2\frac{H(u)}{u}, u \neq 0, \quad (4.1.12)$$

$$\phi(u) = -\frac{g'(u)}{[c^2 - u^2(1 + g'^2(u))]^{1/2}} \quad (4.1.13)$$

elde edilir. (4.1.12) nin genel çözümü ise

$$\phi(u) = \frac{1}{u^2} [2 \int uH(u)du + c_1], c_1 \in \mathbb{R} \quad (4.1.14)$$

sonucunu verir. Buradan (4.1.13) ve (4.1.14) denklemlerinin ortak çözümünüyle

$$g'^2(u) = \frac{(c^2 - u^2)B^2}{u^2(u^2 + B^2)}, u \in I_1 = (-c, c), \quad (4.1.15)$$

bulunur.

$$B(u) = 2 \int uH(u) du + c_1 \text{ dir.} \quad (4.1.16)$$

$$g(u) = c_2 \pm \int \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} du, c_2 \in \mathbb{R} \quad (4.1.17)$$

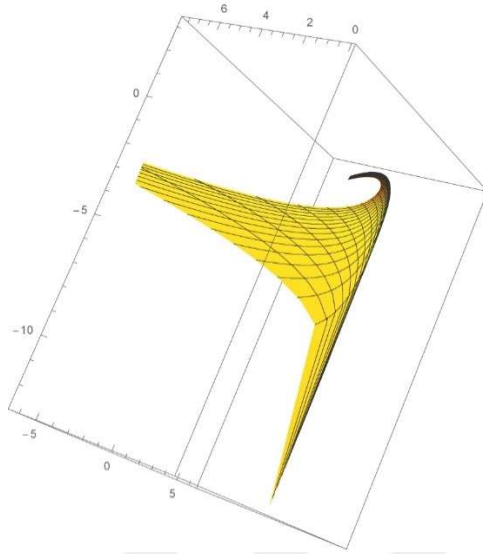
olmak üzere buradan iki parametrelili eğri ailesi tanımlanabilir.

$$a(u) \equiv a(H(u), c; c_1, c_2) = (0, u, c_2 \pm \int \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} du) \quad (4.1.18)$$

Şimdi bu eğrilere adımı c olan helikoidal hareket uygulanırsa E_1^3 de ortalama eğriliği $H=H(u)$, $u \in I_1$ olan I^+ tipinden helikoidal yüzey elde edilir. Yüzeyin parametrizasyonu ise

$$r(u, v) = \left(u \sinh v, u \cosh v, cv + c_2 \pm \int \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} du \right) \quad (4.1.19)$$

şeklindedir. (4.1.11) ve (4.1.19) da verilen helikoidal yüzeyler I^+ tipinde spacelike yüzeylerdir.



Şekil 4. 1 I^+ tipinden $H(u)=1/2u$ olan helikoidal yüzey

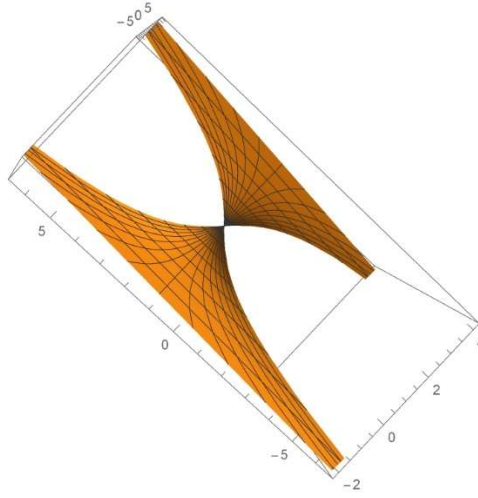
(iii) $F = 0$ kabul edilirse $g(u) = c$ olmak üzere denklem (2.1) E_1^3 deki sağ helikoidin denklemine karşılık gelir. I^+ tipi veya I^- tipi sağ helikoidin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K(u) = -\frac{c^2}{(c^2-u^2)^2} < 0, \quad H(u) = 0$$

veya

$$K(u) = \frac{c^2}{(c^2-u^2)^2} > 0, \quad H(u) = 0$$

dir. Bu nedenle tip I^+ veya tip I^- sağ helikoid yüzeyleri minimal yüzeylerdir.



Şekil 4. 2 I^- tipinden sağ helikoid

$a(u) = (u, 0, g(u))$ iken II^+ veya II^- tipinden helikoidal yüzeyler elde edilir. Bu yüzeylerin parametrizasyonu

$$r(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, g(u) + cv)$$

şeklindedir.

Şimdi $f'^2(u) + g'^2(u) \neq 0$ olmak üzere $a(u) = (g(u), f(u), 0)$ eğrisine $f(u) = u$ kabul edilerek timelike eksen etrafında helikoidal hareket uygulandığında elde edilen M helikoidal yüzeyinin parametrizasyonu

$$r(u, v) = (cv + g(u), u \cos v, u \sin v), \quad (4.1.20)$$

şeklindedir [4].

Teorem 4.1.2. $a(u) = (g(u), u, 0)$, $u \in I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ eğrisine timelike eksen etrafında helikoidal hareket uygulanarak elde edilen M yüzeyinin $(g(u), u, 0)$ noktasındaki Gauss eğriliği $K = K(u)$, ortalama eğriliği $H = H(u)$ olmak üzere $c \in \mathbb{R}^+$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için $a(u) \equiv a(K(u), c; c_1, c_2)$ eğri ailesi tanımlanabilir. Bu eğri ailesi ile elde edilen helikoidal yüzeyler ortalama eğriliği $H = H(u)$ ve Gauss eğriliği $K = K(u)$ olan, III^+ veya III^- tipinden yüzeylerdir [4].

İspat. 4.1.2. Üreteç eğrisi $a(u) = (g(u), u, 0)$ olan ve timelike eksen etrafında helikoidal hareket ile elde edilen M yüzeyinin parametrizasyonu $r(u, v) = (cv + g(u), u \cos v, u \sin v)$ biçimindedir ve bu yüzey için birinci ve ikinci temel form

$$I = (1 - g'^2)du^2 - 2cg'dudv + (u^2 - c^2)dv^2 \quad (4.1.21)$$

ve

$$II = \frac{1}{w}(ug''du^2 - 2cdudv + u^2g'dv^2), \quad (4.1.22)$$

dir. Burada $w = [u^2(1 - g'^2) - c^2]^{1/2}$ dir. M nin Gauss ve ortalama eğriliği ;

$$K(u) = \frac{u^3g'g'' - c^2}{[u^2(1 - g'^2) - c^2][u^2(1 - g'^2) - c^2]} \quad (4.1.23)$$

ve

$$H(u) = \frac{u^2g'(1 - g'^2) - ug''(c^2 - u^2) - 2c^2g'}{2[u^2(1 - g'^2) - c^2][u^2(1 - g'^2) - c^2]^{1/2}} \quad (4.1.24)$$

olarak hesaplanır.

Şimdi $EG - F^2 > 0$ durumu incelenirse (4.1.23) ve (4.1.24) eşitliklerinden

$$K(u) = \frac{-u^3g'g'' + c^2}{[c^2 - u^2(1 - g'^2)]^2} \quad (4.1.23a)$$

ve

$$H(u) = \frac{-u^2g'(1 - g'^2) + ug''(c^2 - u^2) + 2c^2g'}{2[c^2 - u^2(1 - g'^2)]^{3/2}} \quad (4.1.24a)$$

dir.

(4.1.23a) çözümü için $K = K(u)$ nin bilindiği kabul edilsin. (4.1.23a) buna göre düzenlenirse;

$$h'(u) = -2uK(u) \quad (4.1.25)$$

öyle ki burada

$$h(u) = -(u^2g'^2 + c^2)(c^2 - u^2(1 - g'^2))^{-1} \quad (4.1.26)$$

(4.1.25) in genel çözümü ile

$$h(u) = c_1 - 2 \int uK(u)du, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad (4.1.27)$$

elde edilir. (4.1.26) ile (4.1.27) nin ortak çözümü sonucunda

$$g'^2(u) = \frac{-c^2A + u^2(A+1)}{u^2A}, \quad u \neq 0$$

Burada $A = -1 - c_1 + 2 \int uK(u)du > 0, \forall u \neq 0$ dir.

$$g(u) = c_2 \pm \int \frac{[(u^2 - c^2)A + u^2]^{1/2}}{|u|A^{1/2}} du, \quad c_2 \in \mathbb{R},$$

burada c_2 integral sabitidir.

$c \in \mathbb{R}$ ve $K = K(u), I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ açık aralığında tanımlı düzgün bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $u_0 \in I$ için açık bir $U \ni u_0$ alt aralığı ve I', \mathbb{R} nin açık bir alt aralığı bulunabilir. $c_1' = (2 \int uK(u) du)(u_0)$ ve $(u, c_1) \in U \times I'$ olmak üzere $F : U \times I' \rightarrow \mathbb{R}$ öyle ki $F(u, c_1) = A + k, k > 1$ fonksiyonu $(u, c_1) \in U \times I'$ aralığında pozitiftir. Böylece $F(u_0, c_1' = -1 + k > 0$ elde edilir. Böylece herhangi bir $(u, c_1) \in U \times I'$ için $c_2 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^+$ ve $K = K(u)$ fonksiyonu için iki parametrelili eğri ailesi tanımlanabilir.

$$\alpha(u) \equiv \alpha(K(u), c; c_1, c_2) = \left(c_2 \pm \int \frac{[(u^2 - c^2)A + u^2]^{1/2}}{|u|A^{1/2}} du, u, 0 \right) \quad (4.1.29)$$

Şimdi bu eğri ailesine adımı c olan helikoidal hareket uygulandığında \mathbb{R}^3 de Gauss eğriliği $K(u), u \in I$ ve adımı c olan III^- tipinden iki parametrelili bir helikoidal yüzey ailesi elde edilir. Yüzey parametrizasyonu ise

$$r(u,v) = (c_2 \pm \int \frac{[(u^2-c^2)A + u^2]^{1/2}}{|u|A^{1/2}} du + cv, u \cos v, u \sin v) \quad (4.1.30)$$

şeklindedir.

Şimdi (4.1.24a) denkleminin çözümü için

$$\phi'(u) = \frac{2}{u} \phi(u) = 2 \frac{H(u)}{u}, \quad u \neq 0 \quad (4.1.31)$$

$$\phi(u) = \frac{g'(u)}{[c^2 - u^2(1 - g'^2(u))]^{1/2}} \quad (4.1.32)$$

ve (4.1.31) in genel çözümü ile

$$\phi(u) = \frac{1}{u^2} [2 \int uH(u) du + c_1], \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad (4.1.33)$$

(4.1.32) ve (4.1.33) ifadelerinin ortak çözümüyle

$$g'^2(u) = \frac{(c^2 - u^2)B^2}{u^2(u^2 - B^2)}, \quad u \in I_1 = (-c, c) \quad (4.1.34)$$

bulunur.

Burada $B(u) = 2 \int uH(u) du + c_1$ dir. (4.1.35)

Böylece $g(u) = c_2 \pm \int \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 - B^2}} du, \quad c_2 \in \mathbb{R}$ (4.1.36)

elde edilir.

Eğri ailesi ise;

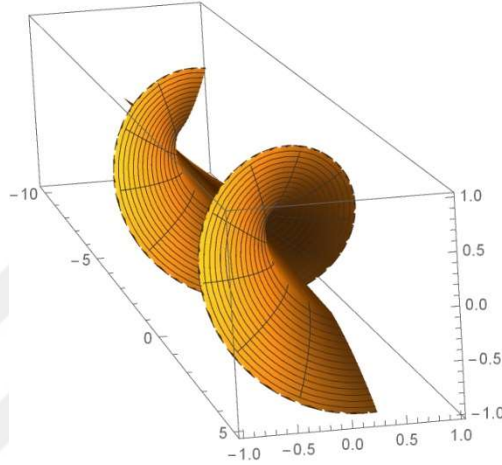
$$\alpha(u) = \alpha(H(u), c; c_1, c_2) = \left(c_2 \pm \int \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 - B^2}} du, u, 0 \right) \quad (4.1.37)$$

Parametrizasyonuna sahiptir. Bu eğrilere adımı c olan helikoidal hareket uygulandığında

\mathbb{R}^3 de ortalama eğriliği $H = H(u)$, $u \in I_1$ olan III^- ya da tip III^+ tipinden iki parametrelili helikoidal yüzey ailesini elde edilir. Bu yüzeyin parametrizasyonu ise

$$r(u,v) = \left(c_2 \pm \int \frac{|B|\sqrt{c^2-u^2}}{|u|\sqrt{u^2-B^2}} du + cv, u \cos v, u \sin v \right) \quad (4.1.38)$$

şeklindedir [4].



Şekil 4. 3 III^- tipinden $H(u) = 1/4u$ olan helikoidal yüzey

4.2.Lightlike Eksen Etrafında Helikoidal Hareket

Lightlike eksen etrafında C^2 sınıfından bir eğri eğri $a = a(u)$ nın helikoidal hareketiyle elde edilen helikoidal M yüzeylerinin durumu incelenecektir. $T=(1,1,0)$ vektörü tarafından tanımlanan eksen kullanıldığında bu yüzeylerin denklemi

$$r(u,v) = \left\{ \left(1 + \frac{v^2}{2}\right) f(u) - \frac{v^2}{2} g(u) + cv, \frac{v^2}{2} f(u) + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) g(u) + cv, f(u) - g(u)v \right\} \quad (4.2.1)$$

olarak bulunur. $f(u) = u$ kabul edildiğinde (4.2.1) ifadesi

$$r(u,v) = \left\{ \left(1 + \frac{v^2}{2}\right) u - \frac{v^2}{2} g(u) + cv, \frac{v^2}{2} u + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) g(u) + cv, u - g(u)v \right\} \quad (4.2.2)$$

şeklinde olur.

Teorem 4.2.1. $a(u) = (u, g(u), 0)$, $u \in I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bu eğri \mathbb{R}_1^3 de (4.2.2) ile verilen M helikoidal yüzeyinin üreteç eğrisi olsun. Bu durumda $(u, g(u), 0)$

noktasında Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik u parametresine bağlı olur. Böylece verilen $c \in \mathbb{R}^+$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sabitleri ve $K = K(u)$ ve $H = H(u)$ fonksiyonları için 3 boyutlu Lorentz uzayında $a(u) \equiv a(K(u), c; c_1, c_2)$ veya $a(u) \equiv a(H(u), c; c_1, c_2)$ tanımlanabilir. Bu eğriler kullanılarak üretilen helikoidal yüzeyler \mathbb{R}_1^3 de tip IV^+ veya tip IV^- olarak elde edilirler [4].

İspat 4.2.1. M helikoidal yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$E = g'^2(u) - 1$, $F = c(g'(u) - 1)$, $G = (u - g(u))^2$ ve ikinci temel formunun katsayıları

$$L = \frac{g''(u)(g(u) - u)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{c(g'(u) - 1)^2}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{(g(u) - u)^2(g'(u) - 1)}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (4.2.3)$$

olarak hesaplanır.

Birinci temel formun diskriminantı

$$EG - F^2 = (g'(u) - 1)[(g(u) - u)^2(g'(u) + 1) - c^2(g'(u) - 1)] \quad (4.2.4)$$

dir. Böylece M nin Gauss eğriliği

$$K(u) = \frac{g''(g-u)^3(g'-1) - c^2(g'-1)^4}{(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)][(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]} \quad (4.2.5)$$

olarak bulunur.

$$EG - F^2 = (g' - 1)[(g - u)^2(g' + 1) - c^2(g' - 1)] > 0 \quad (4.2.6)$$

kabul edildiğinde (4.2.5) eşitliği

$$K(u) = \frac{g''(g-u)^3 - c^2(g'-1)^3}{(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]^2} \quad (4.2.7)$$

olarak yazılabilir.

(4.2.7) eşitliğinde $g(u) - u = h(u)$ alınırsa $g'(u) - 1 = h'(u)$ ve $g''(u) = h''(u)$ ve buradan (4.2.7) denklemini

$$K(u) = \frac{h^3 h'' - c^2 h'^3}{h' [h^2 (h' + 2) - c^2 h']^2} \quad (4.2.8)$$

olur. Bu ise lineer olmayan ikinci dereceden bir diferansiyel denklemdir. Bu yüzeyler hakkında bir fikir edinmek için, bu Gauss eğriliğinin bazı özel fonksiyonel formları incelenecektir.

I. Durum

(4.2.8) ifadesinde $K(u) = 0$ kabul edildiğinde

$$h'' h^3 - c^2 h'^3 = 0 \quad (4.2.9)$$

dir. $h' = p$ alınsın. Bu durumda

$h'' = p \frac{dp}{dh}$ olur ve (4.2.9) eşitliği

$$p \frac{dp}{dh} h^3 - c^2 p^3 = 0 \quad (4.2.10)$$

biçimine indirgenir. Bu eşitliğin çözümü ise

$$p = \frac{2h^2}{c^2 - 2c_1 h^2}, c_1 \in \mathbb{R} \quad (4.2.11)$$

şeklindedir. Buradan denklem (2) den

$$\frac{dh}{du} = \frac{2h^2}{c^2 - 2c_1 h^2} - \frac{c^2}{2h} - c_1 h = u + c_2, c_2 \in \mathbb{R} \quad (4.2.12)$$

Bulunur.

$c_1 = 0$ kabul edilirse $h(u) = \left\{ \frac{-c^2}{2(u+c_2)} \right\}$ ve $g(u) = u - \frac{c^2}{2(u+c_2)}, c_2 \in \mathbb{R}$

elde edilir. Böylece bir parametrelili

$$a(u) \equiv a(K(u), c; c_2) = \left(u, u - \frac{c^2}{2(u+c_2)}, 0 \right) \quad (4.2.13)$$

eğri ailesi tanımlanabilir. Bu eğri ailesi tarafından üretilen helikoidal yüzeylerin denklemi ise;

$$r(u,v) = \left\{ u + \frac{c^2 v^2}{4(u+c_2)} + cv, u - \frac{c^2(2-v^2)}{4(u+c_2)} + cv, \frac{c^2 v}{2(u+c_2)} \right\} \quad (4.2.13a)$$

biçimindedir. $c_1 \neq 0$ ise

$$h(u) = \frac{1}{2c_1} \left[-(u + c_2) \pm \sqrt{(u + c_2)^2 - 2c_1 c^2} \right]$$

ve

$$g(u) = \frac{1}{2c_1} \left[(2c_1 - 1)u - c_2 \pm \sqrt{(u + c_2)^2 - 2c_1 c^2} \right] \quad (4.2.14)$$

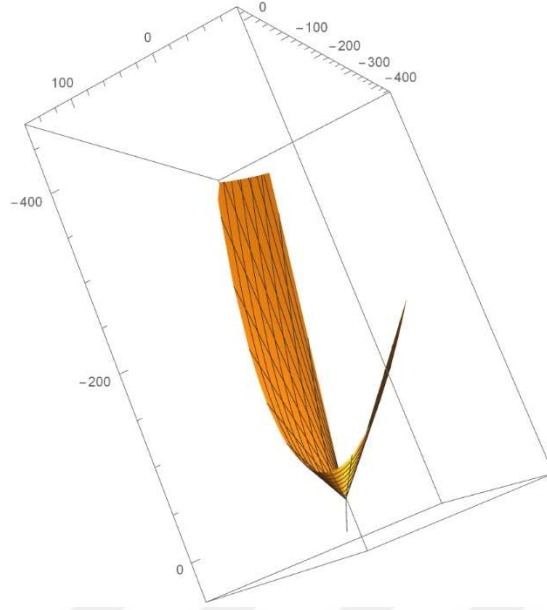
dir. Buradan iki parametrelili eğri ailesi ise

$$a(u) \equiv a(K(u), c; c_1, c_2) = \left(u, \frac{1}{2c_1} \left[(2c_1 - 1)u - c_2 \pm \sqrt{(u + c_2)^2 - 2c_1 c^2} \right], 0 \right) \quad (4.2.15)$$

olur. Sonuç olarak yüzey denklemi ise

$$r(u,v) = \left\{ \left(1 + \frac{v^2}{2} \right) u - \frac{v^2}{4c_1} \left[(2c_1 - 1)u - c_2 \pm \sqrt{(u + c_2)^2 - 2c_1 c^2} \right] + cv, \frac{v^2 u}{2} + \frac{1}{2c_1} \left(1 - \frac{v^2}{2} \right) \left[(2c_1 - 1)u - c_2 \pm \sqrt{(u + c_2)^2 - 2c_1 c^2} \right] + cv, uv - \frac{v}{2c_1} \left[(2c_1 - 1)u - c_2 \pm \sqrt{(u + c_2)^2 - 2c_1 c^2} \right] \right\} \quad (4.2.15a)$$

olur. $K = 0$ olduğu durum için bu yüzey Şekil 9 ' da görülebilir [4].



Şekil 4. 4 IV^+ tipinden $K=0$ olan helikoidal yüzey

II.Durum

$$K(u) = \frac{-c^2 a^2}{[(au+b)^2(a+2) - c^2 a]^2} < 0, a \neq 0 \quad (4.2.16)$$

olsun. Burada $u \neq \pm \left| \frac{c}{a} \right| \sqrt{\left| \frac{a}{a+2} \right|} - \frac{b}{a}$ ve $b \in \mathbb{R}$ kabul edilmiştir. Böylece (4.2.8) eşitliği

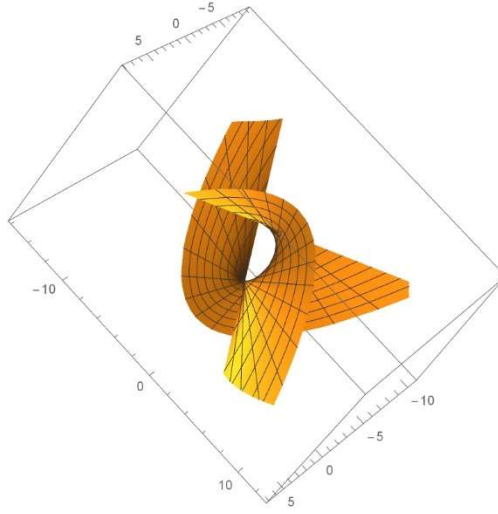
$$K(u) = \frac{h''h^3 - c^2 h'^3}{h'[h^2(h'+2) - c^2 h'^2]} = \frac{-c^2 a^2}{[(au+b)^2(a+2) - c^2 a]^2}$$

olur ve bu son eşitlik $h(u) = au + b$ için sağlanır. Buradan $g(u) = (a + 1)u + b$ elde edilir.

(4.2.16) tarafından $K = K(u)$ fonksiyonu verildiğinde IV^+ tipinden \mathbb{R}_1^3 de bir helikoidal yüzey ailesi tanımlanır. Bu helikoidal yüzeylerin parametrizasyonu ise

$$r(u,v) = \left\{ \left(1 - a \frac{v^2}{2}\right) u - b \frac{v^2}{2} + cv, u \left(a + 1 - a \frac{v^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) b + cv, -(au + b)v \right\}$$

biçimindedir. Bu helikoidal yüzey Şekil 10 da görülebilir [4].



Şekil 4. 5 IV^+ tipinden helikoidal yüzey

Şimdi

$$K(u) = \frac{2c_1(c_1u^2 + c_2u + c_3)^3 - c^2(2c_1u + c_2)^3}{(2c_1u + c_2)[(c_1u^2 + c_2u + c_3)^2(2c_1 + c_2 + 2) - c^2(2c_1u + c_2)]^2} \quad (4.2.17)$$

ve $c_i \in \mathbb{R}$, $i=1, 2, 3$ olmak üzere (4.2.8) eşitliği

$$\begin{aligned} & \frac{h''h^3 - c^2h'^3}{h'[h^2(h' + 2) - c^2h']^2} \\ &= \frac{2c_1(c_1u^2 + c_2u + c_3)^3 - c^2(2c_1u + c_2)^3}{(2c_1 + c_2)[(c_1u^2 + c_2u + c_3)^2(2c_1 + c_2 + 2) - c^2(2c_1u + c_2)]^2} \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik $h(u) = c_1u^2 + c_2u + c_3$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i=1, 2, 3$ tarafından sağlanır ve buradan $g(u) = c_1u^2 + (c_2 + 1)u + c_3$ dir.

Sonuç olarak (2) ye göre $K=K(u)$ fonksiyonu verildiğinde, \mathbb{R}_1^3 de IV^+ tipinden bir helikoidal yüzey ailesi elde edilir ve parametrisasyon

$$r(u, v) = \left\{ -c_1 \frac{v^2}{2} u^2 + \left(1 - c_2 \frac{v^2}{2}\right) u - c_3 \frac{v^2}{2} + cv, c_1 \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) u^2 + \left(c_2 + 1 - c_2 \frac{v^2}{2}\right) u + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) c_3 + cv, (-c_1u^2 - c_2u - c_3)v \right\}$$

biçimindedir.

$h''h^3 - c^2h'^3 = a$, $a \in \mathbb{R}\{0\}$ olmak üzere $h' = p$ için bu denklem

$$\frac{p dp}{p^3 + \left(\sqrt[3]{\frac{a}{c^2}}\right)^3} = c^2 \frac{dh}{h^3}$$

olur. Bu diferansiyel eşitliğin integrali alınarak

$$\frac{\ln\left[\left(\frac{p-m/2}{\sqrt[3]{3m/2}}\right)^2 + 1\right]^{1/(6m)}}{|p+m|^{1/3m}} + \frac{19\sqrt{3}}{3m} \tan^{-1}\left(\frac{p-m/2}{\sqrt[3]{3m/2}}\right) = \frac{-c^2}{2h^2} + c_1 \quad (4.2)$$

bulunur. Burada $m = \sqrt[3]{\frac{a}{c^2}}$, $c_1 \in \mathbb{R}$ dir.

Yukarıdaki analizden, $h' = p$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olan her $h = h(u)$ fonksiyonu için (3) eşitliğinin bir çözümü olduğu görülebilir. Böylece parametrizasyonu

$$r(u, v) = \left\{ \left(1 + \frac{v^2}{2}\right)u - \frac{v^2}{2}g(u) + cv, \frac{v^2}{2}u + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)g(u) + cv, (u - g(u))v \right\}$$

olan helikoidal yüzey için $K = K(u)$ eğriliği bulunabilir [4].

III. Durum Her $u \in \mathbb{R}\{0\}$ için $h'(u)=g'(u) - 1 \neq 0$ olacak şekilde $g = g(u)$ fonksiyonu ele alınsın. Bu durumda (4.2.8) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$K(u(h)) = \frac{h''h^3 - c^2h'^3}{h'[h^2(h'+2) - c^2h'^2]} \quad (4.2.19)$$

$h' = p$ için bu eşitlik

$$\frac{dp}{dh}h^3 - [c^2 + K(h^2 - c^2)^2]p^2 - 4Kh^2(h^2 - c^2)p - 4Kh^4 = 0 \quad (4.2.19)$$

olur ve bu son ifade bir Ricatti diferansiyel denklemdir. Bu sebeple bu denklemin bir özel çözümü bilinmeden genel çözümü elde edilemez [4].

IV. Durum 3 boyutlu Lorentz uzayında (4.4) ile verilen M helikoidal yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H(u) = \frac{g''(g-u)^3 - 2c^2(g'-1)^3 + (g-u)^2(g'+1)(g'-1)^2}{2(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]|(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]|^{1/2}} \quad (4.2.20)$$

dir ve

$$EG - F^2 = (g' - 1)[(g - u)^2(g' + 1) - c^2(g' - 1)] > 0$$

kabul edilirse Buradan denklem (4.2.20)

$$H(u) = \frac{g''(g-u)^3 - 2c^2(g'-1)^3 + (g-u)^2(g'+1)(g'-1)^2}{2\{(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]\}^{3/2}} \quad (4.2.21)$$

olarak elde edilir. $g = g(u)$ ve burada $H = H(u)$ için bu denklemin çözümü ile IV^+ tipinden minimal helikoidal yüzey bulunur.

$$g''(g-u)^3 - 2c^2(g'-1)^3 + (g-u)^2(g'+1)(g'-1)^2 = 0 \quad (4.2.22)$$

eşitliğinde $g(u) - u = h(u)$ alınırsa bu eşitlik

$$h^3 h'' + (h^2 - 2c^2)h'^3 + 2h^2 h'^2 = 0$$

şekline indirgenir. $h'(u) = p(u)$ kabul edilirse verilen denklem

$$h^3 p^{-2} \frac{dp}{dh} + (h^2 - 2c^2) + \frac{2h^2}{p} = 0$$

ve $\frac{1}{p} = \omega$ için son ifadeden

$$\frac{d\omega}{dh} - \frac{2}{h}\omega - \frac{h^2 - 2c^2}{h^3} = 0 \quad (4.2.23)$$

bulunur. Bu son denklemin çözümü ise

$$\omega(h) = \frac{1}{p} = \frac{2c_1 h^4 - h^2 + c^2}{2h^2}, \quad c_1 \in \mathbb{R} \text{ dir.}$$

Buradan $h = h(u)$ fonksiyonunun aşağıdaki denklemi sağladığı görülebilir.

$$2c_1 h^4 - 3h^2 - 6(u + c_2)h - 3c^2 = 0, \quad c_2 \in \mathbb{R},$$

ve $g = g(u)$ fonksiyonu ise

$$2c_1g^4 - 8c_1ug^3 + 3(4c_1u - 1)g^2 - 2(4c_1u^3 + 3c_2)g + 2c_1u^4 + 3u^2 + 6c_2u -$$

$$3c^2 = 0 \quad (4.2.24)$$

eşitliğini sağlar.

Sonuç olarak (4.2.13) eşitliğini sağlayan her $g = g(u)$ fonksiyonu için, parametrik gösterimi (4.2.2) ile verilen, \mathbb{R}_1^3 de IV^+ tipinden bir minimal helikoidal yüzey vardır.

Burada

$$c_1 = c_2 = 0 \text{ ise } h(u) = -u \pm \sqrt{u^2 - c^2}, u \in (-\infty, -c) \cup (c, +\infty) \text{ ve } g(u) = \pm \sqrt{u^2 - c^2}$$

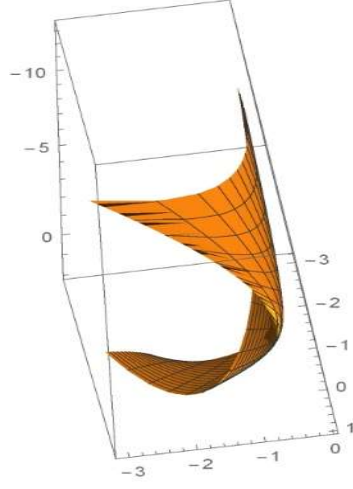
dir. Eğrinin parametrizasyonu

$$a(u) \equiv a(H(u), c) = (u, \pm \sqrt{u^2 - c^2}, 0)$$

olmak üzere \mathbb{R}_1^3 de IV^+ tipinden minimal helikoidal yüzey vardır. Bu yüzeyin parametrizasyonu

$$r(u, v) = \left\{ \left(1 + \frac{v^2}{2} \right) u \mp \frac{v^2}{2} \sqrt{u^2 - c^2} + cv, \frac{v^2}{2} u \mp \left(1 - \frac{v^2}{2} \right) \sqrt{u^2 - c^2} + cv, \left(u \mp \sqrt{u^2 - c^2} \right) v \right\}$$

biçimindedir ve Şekil 11 de görülebilir [4].



Şekil 4. 6 IV+ tipinden helikoidal yüzey

5. BÖLÜM

3 BOYUTLU GALİLE UZAYINDA HAREKETLER

Doğa bilimleri ve uygulamalı bilimlerdeki lineer olmayan birçok olay uzay eğrilerinin hareketleri ile modellenir. Girdap hareketleri, robot kol hareketlerinin şekil kontrolü, görüntü işleme, DNA sarmalı, protein dinamikleri bunlardan bazılarıdır. Bu lineer olmayan uygulamalar, eğrilerin hareketini bir aile olarak karakterize eden diferansiyel denklemler cinsinden tanımlanabilir. Bu hareketlerin integrellenebilirliği, birçok değişimin korunumu hakkında bilgi verir.

5.1. Galile Uzayı G_3

Galile uzayı G_3 , reel Cayley-Klein uzaylarından biridir. Galile uzayı G_3 ün mutlak şekli, sıralı bir üçlü $\{\omega, f, I\}$ içerir, burada ω mutlak düzlemdir. f , ω deki mutlak doğru ve I ise f in noktalarının sabit eliptik evrilmesidir.

Homojen olmayan afin koordinatlarda Galile uzayı G_3 in benzerlik grubu H_8 aşağıdaki forma sahiptir.

$$\begin{cases} \bar{x} = a_{11} + a_{12}x, \\ \bar{y} = a_{21} + a_{22}x + a_{23}\cos\varphi y + a_{23}\sin\varphi z, \\ \bar{z} = a_{31} + a_{32}x - a_{23}\sin\varphi y + a_{23}z\cos\varphi \end{cases} \quad (5.1.1)$$

burada a_{ij} ve φ reel sayılardır.

Özel olarak $a_{12} = a_{23} = 1$ seçildiğinde (5.1.1) ile verilen grup aşağıdaki gibi Galile uzayı G_3 in $B_6 \subset H_8$ grubu olur.

$$\begin{cases} \bar{x} = a_{11} + x, \\ \bar{y} = a_{21} + a_{22}x + \cos\varphi y + \sin\varphi z, \\ \bar{z} = a_{31} + a_{32}x - \sin\varphi y + \cos\varphi z, \end{cases} \quad (5.1.2)$$

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerinin Galile iç çarpımı aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} u_1 v_1, & u_1 \neq 0 \vee v_1 \neq 0, \\ u_2 v_2 - u_3 v_3, & u_1 = 0 \wedge v_1 = 0 \end{cases} \quad (5.1.3)$$

$u=(u_1, u_2, u_3)$ vektörünün Galile normu ise şu şekilde tanımlanır:

$$\|u\| = \begin{cases} u_1, & u_1 \neq 0 \\ \sqrt{u_2^2 + u_3^2}, & u_1 = 0 \end{cases} \quad (5.1.4)$$

α, G_3 uzayında yay parametresi ile verilmiş bir eğri olsun

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G_3$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)) \quad (5.1.5)$$

$$x(s), y(s), z(s) \in C^3.$$

α eğrisi Galile uzayında diferansiyel form $ds=dx$ ile yay uzunluğu parametresi s tarafından şu şekilde tanımlanır:

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_3$$

$$x \rightarrow \alpha(x) = (x, y(x), z(x)) \quad (5.1.6)$$

α nın eğriliği $\kappa(x)$ ve burulması $\tau(x)$ ise sırasıyla

$$\kappa(x) = \sqrt{y''(x)^2 + z''(x)^2},$$

$$\tau(x) = \frac{\det(\alpha'(x), \alpha''(x), \alpha'''(x))}{\kappa^2(x)}, \quad (5.1.7)$$

şeklindedir. Bununla birlikte eğrinin Frenet elemanları

$$T(x) = \alpha'(x) = (1, y'(x), z'(x)),$$

$$N(x) = \frac{1}{\kappa(x)} \alpha''(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, y''(x), z''(x)), \quad (5.1.8)$$

$$B(x) = \frac{1}{\kappa(x)} (0, \varepsilon z''(x), \varepsilon y''(x)),$$

dir. Frenet denklemleri ise

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ 0 & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{bmatrix}, \quad (5.1.9)$$

biçimindedir. Burada T, N, B ortogonal vektörlerdir [13].

5.2. Galile Uzayında Dönme Hareketleri

3 boyutlu Galile uzayında iki farklı dönme hareketi mevcuttur. Bunlardan ilki nonizotropik x eksenini etrafındaki dönmedir ve

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlıdır. Burada θ Öklidyen açıdır.

İzotropik dönme ise

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\theta \\ \frac{c\theta^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Burada θ izotropik açı ve $c \in R$ dir. Buradaki düzlem demeti $z=\text{sabit}$ biçimindedir [6].

Tanım 5.2.1. 3 boyutlu Galile uzayında bir dönel yüzey bu uzayda düzlemsel bir eğriye izotropik veya non izotropik dönme hareketi uygulandığında eğrinin izlediği yörüngedir. Eğer hareket , Öklidyen dönme hareketi ise hareketin eksenini üreteç eğrisinin destek düzleminde. Eğer hareket izotropik dönme ise sabit düzlemlerin bir demeti seçilir. Bu uzayda iki çeşit düzlem olduğundan profil eğrisinin destek düzlemi için iki durum söz konusudur. Profil eğrisi Öklidyen düzlemde veya izotropik düzlemde olabilir [6].

i) 3- Boyutlu Galile Uzayında 1. Çeşit Dönel Yüzeyler

Profil eğrisi γ nın Öklidyen yz düzleminde olduğu kabul edilsin. Bu durumda eğrinin parametrizasyonu $\gamma(t) = (0, f(t), g(t))$ olur. Burada f ve g reel değerli fonksiyonlardır. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere bu üreteç eğrisine izotropik dönme uygulandığında

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\theta \\ \frac{c\theta^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılır ve elde edilen dönel yüzeyin parametrizasyonu

$$\varphi(\theta, t) = (c\theta, f(t) + \frac{c\theta^2}{2}, g(t))$$

olur. Bu yüzey 3 boyutlu Galile uzayında birinci çeşit dönel yüzeydir [6].

ii) 3- Boyutlu Galile Uzayında 2. Çeşit Dönel Yüzeyler

Profil eğrisi γ nın izotropik xy düzleminde olduğu kabul edilsin. Bu durumda eğrinin parametrizasyonu $\gamma(t) = (f(t), g(t), 0)$ olur. Burada f ve g reel değerli fonksiyonlardır. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere bu üreteç eğrisine izotropik dönme uygulandığında

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\theta \\ 0 \\ \frac{c\theta^2}{2} \end{pmatrix}$$

yazılır ve elde edilen dönel yüzeyin parametrizasyonu

$$\varphi(\theta, t) = (f(t) + c\theta, g(t), \theta f(t) + \frac{c\theta^2}{2})$$

olur. Bu yüzey 3 boyutlu Galile uzayında ikinci çeşit dönel yüzeydir [6].

iii) 3- Boyutlu Galile Uzayında 3. Çeşit Dönel Yüzeyler

Son olarak profil eğrisi γ nın yine izotropik xy düzleminde olduğu kabul edilsin. Bu durumda eğrinin parametrizasyonu $\gamma(t) = (f(t), g(t), 0)$ olur. Burada f ve g reel değerli

fonksiyonlardır. Ancak bu sefer $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere bu üreteç eğrisine x eksenine etrafındaki Öklidyen dönme uygulansın. Böylece

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılır elde edilen döneel yüzeyin parametrizasyonu

$$\varphi(\theta, t) = (f(t), g(t)\cos\theta, -g(t)\sin\theta)$$

olur. Bu yüzey 3 boyutlu Galile uzayında üçüncü çeşit döneel yüzeydir [6].

5.2.1. 3 Boyutlu Galile Uzayında Sıfır Eğrilikli Döneel Yüzeyler

Bu kısımda bir önceki bölümde bahsedilen üç farklı yüzey için Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplanmıştır. Öklid uzayına benzer şekilde, 3 boyutlu Galile uzayında da bir yüzeyin her noktasında Gauss eğriliği sıfır ise bu yüzeye developable yüzey, Ortalama eğriliği sıfır ise minimal yüzey denir.

Teorem 5.2.1. 3 boyutlu Galile uzayında minimal yüzeyler tepe noktası mutlak doğru f üzerinde bulunan koniler ve C tipinden regle yüzeylerdir. C tipinden regle yüzeyin parametrizasyonu

$$\varphi(\theta, t) = (\theta, f(\theta), 0) + t(0, \alpha_2(\theta), \alpha_3(\theta))$$

biçimindedir. Burada f, α_2, α_3 fonksiyonları sürekli, üçüncü dereceden diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca $\alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ dir [6].

Teorem 5.2.2. 3 boyutlu Galile uzayında birinci çeşit döneel yüzeyin minimal yüzey ya da developable yüzey olması ancak ve ancak aşağıda verilen şartlardan biri sağlandığında mümkündür.

- (i) Bu yüzey parametrizasyonu $\varphi(\theta, t) = (c\theta, a + \frac{c\theta^2}{2}, g(t))$ olan parabolik silindirdir.
- (ii) Bu yüzey izotropik düzlemin bir parçasıdır ve $\varphi(\theta, t) = (c\theta, f(t) + \frac{c\theta^2}{2}, a)$

parametrizasyonuna sahiptir.

(iii) Bu yüzey parametrizasyonu $\varphi(\theta, t) = (c\theta, f(t) + \frac{c\theta^2}{2}, af(t) + b)$ olan parabolik silindirdir. Burada $a, b, c \in R$ dir [6].

İspat 5.2.2. Birinci çeşit döne1 yüzeyin parametrizasyonu

$$\varphi(\theta, t) = (c\theta, f(t) + \frac{c\theta^2}{2}, g(t))$$

idi. Bu yüzey için Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik sırasıyla

$$K = \frac{g'(f''g' - f'g'')}{c(f'^2 + g'^2)^2}$$

ve

$$H = \text{sgn}(c) \frac{f'g'' - f''g'}{2(f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

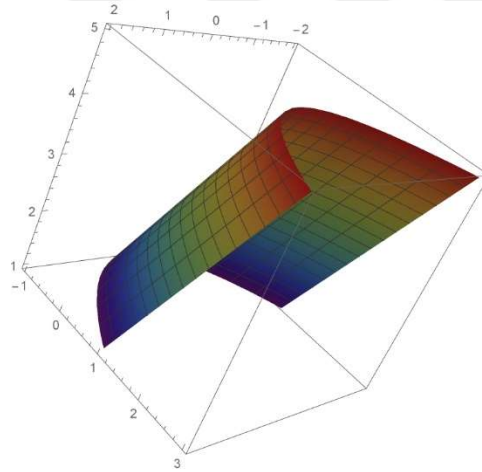
olarak hesaplanır. Buradan görüleceği üzere $K = 0$ olduğu durumda $H = 0$ elde edilir. Böylece 3 boyutlu Galile uzayında birinci çeşit döne1 yüzey developable bir yüzeydir ancak ve ancak minimal yüzeydir. Bununla birlikte bu eğriliklerin sıfır olabilmesi için $f'g'' - f''g' = 0$ olmalıdır. İlk olarak $f' = 0$ veya $g' = 0$ ise (i) ve (ii) yüzeyleri elde edilir. İkinci olarak $f' \neq 0$ ve $g' \neq 0$ ise bu durumda $\frac{f''}{f'} = \frac{g''}{g'}$ olur. Bu eşitliğin integrali alınırsa $g(t) = af(t) + bt$ sonucuna ulaşılr. Burada $a \neq 0$ ve $b \in R$ dir. Böylece profil eğrisi bir doğrudur ve elde edilen yüzey de (iii) yüzeyi olur. Böylece aşığıdaki sonuç verilebilir [6].

Sonuç 5.2.1.3 boyutlu Galile uzayında birinci çeşit döne1 yüzey developable ve aynı zamanda minimal bir yüzeydir ancak ve ancak profil eğrisi izotropik bir doğrudur.

Ayrıca kolayca görülebileceği üzere (i) eşitliğinde koordinatlar arasında $y = a + \frac{x^2}{2c}$ ve buna benzer olarak (iii) eşitliğinde $y = \frac{z-b}{a} + \frac{x^2}{2c}$ bağıntıları mevcuttur. (i) eşitliğinde $g(t) = v$ alındığında yeni parametrisasyon $\varphi(\theta, v) = (c\theta, a + \frac{c\theta^2}{2}, 0) + v(0,0,1)$ olur ve bu da C tipinden bir regle yüzeydir. Benzer şekilde (iii) eşitliğinde $f(t) = v$ alındığında yüzeyin parametrisasyonu

$$\varphi(\theta, t) = (c\theta, \frac{c\theta^2}{2}, b) + v(0,1,a)$$

olur. Bu ise bir konoid yüzeyidir. Burada $a = 1, b = c = 2$ alındığında elde edilen yüzey minimal, developable bir yüzeydir ve aşağıda görülebilir [6].



Şekil 5. 1 Konoid yüzeyi

Teorem 5.2.3. 3 boyutlu Galile uzayında ikinci çeşit döneel yüzeyin minimal yüzey ya da developable yüzey olması ancak ve ancak aşağıda verilen şartlardan biri sağlandığında mümkündür.

(i) Bu yüzey izotropik düzlemin bir parçasıdır ve $\varphi(\theta, t) = (f(t) + c\theta, a, \theta f(t) + \frac{c\theta^2}{2})$ parametrisasyonuna sahiptir.

(ii) Bu yüzey parametrizasyonu $\varphi(\theta, t) = (a + c\theta, g(t), a\theta + \frac{c\theta^2}{2})$ olan parabolik silindirdir.

(iii) Bu yüzey parametrizasyonu $\varphi(\theta, t) = (t + c\theta, at^2 + b, \theta t + \frac{c\theta^2}{2})$ olan parabolik küredir. Burada $a, b, c \in R$ dir [6].

İspat 5.2.3. İkinci çeşit dönele yüzeyin parametrizasyonu

$$\varphi(\theta, t) = (f(t) + c\theta, g(t), \theta f(t) + \frac{c\theta^2}{2})$$

Bu yüzey için Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik sırasıyla

$$K = \frac{c^2 g'}{w^4} (f(f'g'' - f''g') - f'^2 g')$$

ve

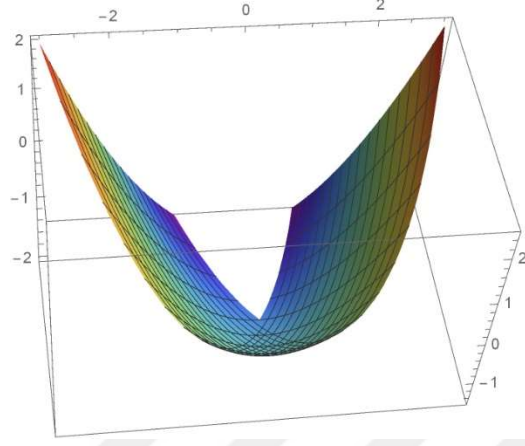
$$H = \frac{c^2}{2w^3} (f(f(f'g'' - f''g') - f'^2 g'))$$

olarak hesaplanır. Burada $w = f^2 f'^2 + c^2 g'^2$ dir.

Birinci çeşit dönele yüzeylere benzer olarak yüzeyin Gauss eğriliği sıfırdır ancak ve ancak ortalama eğriliği sıfırdır. O halde ikinci çeşit dönele yüzey developable bir yüzeydir ancak ve ancak minimal bir yüzeydir.

Bununla birlikte (iii) ifadesi için profil eğrisi birim hızlı kabul edilmiştir. Bu durumda $f(t) = t$ alınacaktır. (ii) ifadesindeki eşitlikten kolayca görülebilir ki koordinatlar arasında $z = \frac{x^2 - a^2}{2c}$ bağıntısı mevcuttur. Ayrıca (iii) ifadesindeki eşitlikten yine koordinatlar arasında $x^2 - \frac{y-b}{a} - 2cz$ bağıntısı vardır. (ii) eşitliğinde $g(t) = v$ alındığında bir konoid yüzeyi elde edilir ve bu C tipinden bir regle yüzeydir. Bu yüzeyin parametrizasyonu $\varphi(\theta, v) = (a + c\theta, 0, a\theta + \frac{c\theta^2}{2}) + v(0,1,0)$ şeklindedir.

(iii) ifadesindeki yüzey denkleminde $a = c = 1$, $b = -2$ alındığında bulunan yüzey aşağıda görülebilir.



Şekil 5. 2 *Developable minimal yüzey*

Bu yüzey developable minimal bir yüzeydir. Burada profil eğrisi izotropik çemberdir [6].

Teorem 5.2.4. 3 boyutlu Galile uzayında üçüncü çeşit döneel yüzeyin developable bir yüzey olması ancak ve ancak aşağıda verilen şartlardan biri sağlandığında mümkündür.

- (i) Bu yüzey bir Öklid çemberi etrafında silindirdir ve $\varphi(\theta, t) = (f(t), a\cos\theta, -a\sin\theta)$ parametrizasyonuna sahiptir.
- (ii) Bu yüzey parametrizasyonu $(\theta, t) = (ag(t) + b, g(t)\cos\theta, -g(t)\sin\theta)$ ve tepe noktası $(b, 0, 0)$ olan konidir. Burada $a, b \in R$ ve $a \neq 0$ dir [6].

5.3. 3 Boyutlu Galile Uzayında Eğrilerin Hareketi

Bu bölümde bazı integrallenebilir denklemleri elde etmek için Frenet çerçeve yapısını kullanarak Galile uzayı G_3 'deki eğri evrimi incelenecektir.

G_3 Galile uzayında t zamanı göstermek üzere u parametresine bağlı (u, t) eğri ailesi ele alınsın. Bu ailer (u, t) değişim denkleminde göre şekillendiğine göre

$$\dot{r} := \frac{dr}{dt} = a(u, t)T + b(u, t)N + c(u, t)B \quad (5.3.1)$$

ve

$$r(u, 0) = r(u) \quad (5.3.2)$$

olmak üzere burada a , b , c keyfi fonksiyonlardır.

$$g(u, t) := \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \right\| = \sqrt{\left| \left\langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial u} \right\rangle \right|} \quad (5.3.3)$$

fonksiyonu eğri boyunca uzunluğu göstermektedir. Yay uzunluğu parametresi s ise

$s(u, t) := \int_0^u g(u', t) du'$ dir. (5.2.9) dan;

$$T = \frac{dr}{ds} = \frac{1}{g} \frac{\partial r}{\partial u},$$

$$N = \frac{1}{\kappa} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\kappa g} \frac{\partial t}{\partial u}, \quad (5.3.4)$$

$$B = \frac{1}{\tau} \frac{dn}{ds} = \frac{1}{\tau g} \frac{\partial n}{\partial u},$$

ve

$$\kappa = \left\| \frac{dt}{ds} \right\| = \frac{1}{g} \left\| \frac{\partial t}{\partial u} \right\|, \quad \tau := - \left\langle N, \frac{db}{ds} \right\rangle. \quad (5.3.5)$$

Şimdi Frenet çatısından değişim denklemleri elde edilecektir. (5.3.2) eşitliğini sağlayan eğri ailesi için metrik g , eğrilik κ ve burulma τ olmak üzere $g^2 = \left\langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial u} \right\rangle$ olduğundan her iki tarafın türevi alınır ve (5.3.1) ve (5.3.4) eşitliklerinin kullanılmasıyla g metriğinin değişimi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} 2g \frac{dg}{dt} &= 2 \left\langle \frac{\partial r}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{dr}{dt} \right) \right\rangle \\ &= 2 \left\langle gT, \frac{\partial}{\partial u} (aT + bN + cB) \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2g \left\langle T, \frac{\partial a}{\partial u} T + a\kappa g N + \frac{\partial b}{\partial u} N + b\tau g B + \frac{\partial c}{\partial u} B - c\tau g N \right\rangle \\
&= 2g \left\langle T, \frac{\partial a}{\partial u} T + \left(\frac{\partial b}{\partial u} + a\kappa g - c\tau g \right) N + \left(\frac{\partial c}{\partial u} + b\tau g \right) B \right\rangle = 2g \frac{\partial a}{\partial u}
\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

ve böylece

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial a}{\partial u} \tag{5.3.7}$$

elde edilir.

Burada u ve t lineer bağımsız ancak s ve t lineer bağımlıdır. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial r}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{dr}{dt} \\
&= -\frac{1}{g} \frac{\partial a}{\partial u} T + \frac{1}{g} \frac{\partial a}{\partial u} T + a\kappa N + \frac{1}{g} \frac{\partial b}{\partial u} N + b\tau B + \frac{1}{g} \frac{\partial c}{\partial u} B - c\tau N \\
&= \left(\frac{\partial b}{\partial s} + a\kappa - c\tau \right) N + \left(\frac{\partial c}{\partial s} + b\tau \right) B
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Benzer şekilde, birim normal vektör alanı N 'nin değişimi için

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial b}{\partial s} + a\kappa - c\tau \right) - \frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{dt} - a_s - \frac{\tau}{\kappa} \left(\frac{\partial c}{\partial s} + b\tau \right) \right) N + \left(\frac{\tau}{\kappa} \left(\frac{\partial b}{\partial s} + a\kappa - c\tau \right) + \right. \\
&\left. \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial c}{\partial s} + b\tau \right) \right) B
\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

ve $\left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, N \right\rangle = 0$ olduğundan

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{\tau}{\kappa} \left(\frac{\partial b}{\partial s} + a\kappa - c\tau \right) + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial c}{\partial s} + b\tau \right) \right) B \tag{5.3.10}$$

ve

$$\frac{d\kappa}{dt} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial b}{\partial s} + a\kappa - c\tau \right) - \kappa \frac{\partial a}{\partial s} - \tau \left(\frac{\partial c}{\partial s} + b\tau \right). \tag{5.3.11}$$

Buradan binormal vektör B için değişim ;

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= - \left(\frac{\tau}{\kappa} \left(\frac{\partial b}{\partial s} + a\kappa - c\tau \right) + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial c}{\partial s} + b\tau \right) \right) N \\ &+ \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\tau}{\kappa} \left(\frac{\partial b}{\partial s} + a\kappa - c\tau \right) + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial c}{\partial s} + b\tau \right) \right) - \frac{1}{\tau} \frac{dr}{dt} - \frac{\partial a}{\partial s} \right) B \end{aligned}$$

Buradan $\langle \frac{\partial b}{\partial t}, B \rangle = 0$ olduğundan

$$\frac{\partial b}{\partial t} = - \left(\frac{\tau}{\kappa} \left(\frac{\partial b}{\partial s} + a\kappa - c\tau \right) + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial c}{\partial s} + b\tau \right) \right) N \quad (5.3.12)$$

ve

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\tau}{\kappa} \left(\frac{\partial b}{\partial s} + a\kappa - c\tau \right) + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial c}{\partial s} + b\tau \right) \right) - \tau \frac{\partial a}{\partial s}$$

Tüm (u, t) için $\langle T, N \rangle = 0$ ve $\langle T, B \rangle = 0$ olduğundan

$$\langle \frac{dT}{dt}, N \rangle + \langle T, \frac{dN}{dt} \rangle = 0$$

ve

$$\langle \frac{dT}{dt}, B \rangle + \langle T, \frac{dB}{dt} \rangle = 0$$

Böylece (5.3.9), (5.3.10) ve (5.3.12) eşitliklerinden

$$\frac{\partial b}{\partial s} + a\kappa - c\tau = 0 \quad (5.3.13)$$

ve

$$\frac{\partial c}{\partial s} + b\tau = 0 \quad (5.3.14)$$

olur. Dolayısıyla Frenet çatısının değişim denklemleri

$$\frac{dT}{dt} = 0, \quad \frac{dN}{dt} = 0, \quad \frac{dB}{dt} = 0 \quad (5.3.15)$$

ve buradan değişim denklemleri

$$\frac{d\kappa}{dt} = -\kappa \frac{\partial a}{\partial s}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\tau \frac{\partial a}{\partial s} \quad (5.3.16)$$

[13].

I. Durum Burger denklemleri özellikle akışkanlar mekaniğinde doğrusal olmayan dalga yayılımı için bir modeldir.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0,$$

olmak üzere burada $\psi(s,t)$ denklemin bir çözümüdür.(5.3.16) denklemlerinde $a = \kappa$ veya $a = \tau$ alınır, κ ve τ değerlerinin burger denklemine göre değişimi elde edilir [13].

Tanım 5.3.1. Galile uzayı G_3 ' teki bir eğri değişimi $r(u,v)$ ve bunun akışı $\frac{dr}{dt}$ nin aşığıdaki durumda değişmez olduğu söylenir:

$$\frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \right\| = 0.$$

(5.3.1) tarafından verilen $r(u,t)$ eğri ailesi değişmez ise o zaman (5.3.7)'den tüm (u,t) için

$$\frac{\partial a}{\partial u} = 0$$

ve

$$g(u,t) = \xi(u)$$

elde edilir [13]. Buradan aşığıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.3.1. (5.3.1) tarafından verilen $r(u,t)$ eğri ailesi değişmezdir ancak ve ancak tüm (u,t) için

$$\frac{\partial a}{\partial u} = 0$$

eşitliği sağlanır. Şimdi değişmez ve yay parametrelili eğriler ele alınsın.

Yani $g(u,t) = \xi(u)=1$ ve $\frac{\partial a}{\partial u}=0$ olsun. Bu durumda lokal koordinat u yay uzunluğu parametresi s ye karşılık gelir. Dolayısıyla eğrinin akışı şu şekilde ifade edilir:

$$\dot{r} := \frac{dr}{dt} = a(s,t)T + b(s,t)N + c(s,t)B \quad (5.3.17)$$

ve Frenet çatısının değişim denklemleri ise

$$\frac{dT}{dt} = 0$$

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

$$\frac{dB}{dt} = 0$$

$$\frac{d\kappa}{dt} = 0$$

$$\frac{d\tau}{dt} = 0$$

(5.3.18)

şeklindedir [13].

5.4. G_3 in Equiform Geometrisindeki Eğrilerin Hareketleri

$\alpha : I \rightarrow G_3$ yay uzunluğu parametresi s olan bir eğri olsun. Bu eğri başka bir parametrik gösterimde $\alpha(\sigma)$ yazılırsa, öyle ki

$$\sigma = \int \frac{1}{p} ds ,$$

$P = \frac{1}{\kappa} \alpha(s)$ nin eğrilik yarıçapı olmak üzere yeni Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T(\sigma) \\ N(\sigma) \\ B(\sigma) \end{bmatrix}_\sigma = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa} & 1 & 0 \\ 0 & \tilde{\kappa} & \tilde{\tau} \\ 0 & -\tilde{\tau} & \tilde{\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(\sigma) \\ N(\sigma) \\ B(\sigma) \end{bmatrix} \quad (5.4.1)$$

olur. Burada $\tilde{\kappa}$, equiform eğrilik ve $\tilde{\tau}$ eğrinin equiform burulması olarak adlandırılır $\alpha(\sigma)$. Equiform eğrilik ve burulma ile κ ve τ arasında ise aşağıdaki bağıntı mevcuttur.

$$\tilde{\kappa} = -\frac{1}{\kappa^2} \frac{d\kappa}{ds}, \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{\kappa}. \quad (5.4.2)$$

Buradan

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{p}. \quad (5.4.3)$$

Ayrıca equiform invaryant Frenet vektörleri $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ Galilean Frenet vektörleri T, N, B arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur.

$$\tilde{T} = \frac{T}{\kappa} = pT$$

$$\tilde{N} = \frac{T}{\kappa} = pN$$

$$\tilde{B} = \frac{B}{\kappa} = pB$$

$r(u,t)$ ailesinin equiform invaryant yay uzunluğu parametresi u olmak üzere

$$\sigma(u) = \int_0^u \frac{1}{p} g(u', t) du'$$

dir. $r(u,t)$ ailesinin hareketi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{dr}{dt} = WT + UN + VB, \quad (5.4.5)$$

Burada W, U ve V herhangi fonksiyonlardır. $r(u,t)$ ailesinin bir önceki hareketi, Gaile uzayı G_3 'deki hareket (5.3.1) ile şu şekilde ilişkilidir:

$$\frac{dr}{dt} = aT + bN + cB$$

Burada $a = pW, b = pU$ ve $c = pV$ dir. Buradan

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial a}{\partial u} = p \frac{\partial W}{\partial u} + g \tilde{\kappa} W \text{ veya}$$

$$\frac{dg}{dt} = g \left(\frac{\partial W}{\partial \sigma} + \tilde{\kappa} W \right) \quad (5.4.6)$$

elde edilir. Burada

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \sigma} = - \left(\frac{\partial W}{\partial \sigma} + \tilde{\kappa} W - \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{d}{dt} \quad (5.4.7)$$

dir. (5.4.4) ve (5.3.15) eşitlikleri kullanılarak equiform invaryant teğet vektör alanı \tilde{T} nin değişimi

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} = \frac{d}{dt} (pT) = - \frac{1}{g} \frac{\partial a}{\partial u} \tilde{T} = - \left(\frac{\partial W}{\partial \sigma} + \tilde{\kappa} W \right) \tilde{T} \quad (5.4.8)$$

biçimindedir. Benzer şekilde equiform invaryant normal ve binormal vektör alanlarının, equiform eğrilik $\tilde{\kappa}$ ve burulma $\tilde{\tau}$ nin değişimleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{d\tilde{N}}{dt} = \frac{d}{dt} (pN) = - \left(\frac{\partial W}{\partial \sigma} + \tilde{\kappa} W \right) \tilde{N}, \quad (5.4.9)$$

$$\frac{d\tilde{B}}{dt} = \frac{d}{dt} (pB) = - \left(\frac{\partial W}{\partial \sigma} + \tilde{\kappa} W \right) \tilde{B} \quad (5.4.10)$$

$$\frac{d\tilde{\kappa}}{dt} = -2 \left(\frac{\partial W}{\partial \sigma} + \tilde{\kappa} W \right) \tilde{\kappa} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial W}{\partial \sigma} + \tilde{\kappa} W \right), \quad (5.4.11)$$

$$\frac{d\tilde{\tau}}{dt} = 0 \quad (5.4.12)$$

[13].

6. BÖLÜM

TARTIŞMA VE SONUÇ

6.1.Tartışma

Bu çalışmada, öncelikle 3 boyutlu Öklid uzayında ve 3 boyutlu Lorentz uzayında hareket çeşitleri verilmiş ve bazı sonuçlar paylaşılmıştır. Daha sonra ise 3 boyutlu Galile uzayında farklı hareket çeşitlerinden bahsedilmiştir. Galile uzayında elde edilen sonuçlar bu uzayın yapısı sebebiyle Öklid ve Lorentz uzaylarından farklılık göstermekle birlikte Galile uzayında eğri yörüngeleri ile elde edilen yüzeyler sınırlıdır.

6.2.Sonuç

Yapılan çalışmada elde edilen sonuçlar şu şekildedir:

3 boyutlu Öklid uzayında ve 3 boyutlu Lorentz uzayında bir uzay eğrisinin helikoidal hareket altında izlediği yörünge sonucunda elde edilen helikoidal yüzeyler için ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği hesaplamaları birçok çalışmada mevcuttur. 3 boyutlu Galile uzayında ise genel olarak dönel yüzeyler üzerine yapılan çalışmalar ağırlıktadır. Helikoidal hareketler ve helikoidal yüzeyler ile ilgili çalışmalar sınırlıdır.

KAYNAKLAR

1. Ali, A. T., “Position vectors of curves in the Galilean space G^3 ”, *Mat. Vesn.*, 64(3), 200-210, 2012.
2. Almaz, F., K ulahc , M. A., “A mathematical interpretation on special tube surfaces in Galilean 3-space”, *Hacet. J. Math. Stat.*, 51(3), 632-645, 2022.
3. Baikoussis, C., Koufogiorgos, T., “Helicoidal surfaces with prescribed mean or Gaussian curvature”, *J. Geom.*, 63, 25-29, 1998.
4. Beneki, C., Kaimakamis, G., Papantoniou B. J., “Helicoidal surfaces in three-dimensional Minkowski space”, *J. Math. Anal. Appl.*, 275, 586-614, 2002.
5. Choi, M., Kim, Y. H., Park, G., “Helicoidal surfaces and their Gauss map in Minkowski 3-space”, *Bull. Korean Math. Soc.*, 46, 567-576, 2009.
6. Dede, M., Ekici, C., Goemans, W., “Surfaces of revolution with vanishing curvature in Galilean 3-space”, *J. Math. Phys. Anal. Geom.*, 14 (2) 141-152, 2018.
7. Hacısalihoğlu, H. H., “Diferensiyel Geometri I”, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi*, Ankara, 2000.
8. Hacısalihoğlu, H. H., “Diferensiyel Geometri II”, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi*, Ankara, 2000.
9. Hou, Z. H., Ji, F., “Helicoidal surfaces under cubic screw motion in Minkowski 3-space”, *J. Math. Anal. Appl.*, 634-647, 2006.
10. Hou, Z. H., Ji, F., “Helicoidal surfaces with $H^2 = K$ in Minkowski 3-space”, *J. Math. Anal. Appl.*, 318, 101-113, 2007.
11. Lopez, R., “Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz- Minkowski space”, *Int. Elec. J. of Geo.*, 7 (1), 44-107, 2014.
12. Mosa S., Elzawy, M., “Helicoidal surfaces in Galilean space with density”, *Front. Phys.*, 8, 2020.
13.  zt rk, U., Cengiz, S., Öztürk, E. B. K., “Motions of curves in the Galilean space G_3 ”, *Acta Math. Sci.*, 35(5), 1046-1054, 2015.
14. Yoon, D. W., Karacan, M. K., Bukcu, B., “Geodesics on rotational surfaces in pseudo-Galileanspace”, *J. Geom. Symmetry. Phys.*, 45, 87-94, 2017.