

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GRAFLARIN SPEKTRAL KARAKTERİZASYONU İÇİN
KARMA GENİŞLEME KAVRAMININ KULLANIMI**

**Tezi Hazırlayan
Kübra AKYIL UÇAN**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Hatice TOPCU**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

MAYIS 2023

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GRAFLARIN SPEKTRAL KARAKTERİZASYONU İÇİN
KARMA GENİŞLEME KAVRAMININ KULLANIMI**

**Tezi Hazırlayan
Kübra AKYIL UÇAN**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Hatice TOPCU**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

MAYIS 2023

Doç. Dr. Hatice TOPCU danışmanlığında Kübra AKYIL UÇAN tarafından hazırlanan " **Grafların Spektral Karakterizasyonu İçin Karma Genişleme Kavramının Kullanımı** " başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

18/05/2023

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Sezer SORGUN

Üye : Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Üye : Doç. Dr. Hatice TOPCU

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun.....tarih ve..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.../.../20..

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Kübra AKYIL UÇAN



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam sürecince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini hiçbir zaman benden esirgemeyen ve tezimde en az benim kadar emeği olan, aynı zamanda kişilik olarak da bana çok şey katan Sayın Hocam Doç. Dr. Hatice TOPCU' ya,

Bütün eğitim-öğretim hayatım boyunca hiçbir zaman desteğini benden esirgemeyen sevgili babam Durmuş AKYIL ve sevgili annem Aynur AKYIL' a,

Yol arkadaşım ve kıymetli eşim Mehmet UÇAN' a,

Maddi ve manevi olarak her zaman desteklerini hissettiren tüm aileme,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Matematik Bölüm Başkanlığına ve Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne teşekkür ederim.

GRAFLARIN SPEKTRAL KARAKTERİZASYONU İÇİN KARMA GENİŞLEME KAVRAMININ KULLANIMI

(Yüksek Lisans Tezi)

Kübra AKYIL UÇAN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2023

ÖZET

Bu tez çalışmasında esas olarak grafların spektrumlarına göre karakterize edilebilmesi için karma genişleme kavramının kullanımı incelenmiştir. Ayrıca, en fazla üç adet özdeğeri -1 ya da 0 dan farklı olan grafların sınıflandırılması ve spektral karakterizasyonları ile ilgili literatürde var olan sonuçlarda derlenerek verilmiştir. Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tezin konusu, amacı ve yöntemi hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde bazı temel tanım ve kavramlar verilmiş olup ilerleyen bölümlerde gerekli olacak önbilgilere değinilmiştir. Üçüncü bölümde incelenen kümenin ilk kısmı olan en fazla iki adet özdeğeri -1 ya da 0 dan farklı olan graflarla ilgili literatürde var olan bulgular verilmiştir. Dördüncü bölümde incelenen kümenin diğer kısmı olan tam olarak üç adet özdeğeri -1 ve 0 dan farklı olan graflar ile ilgili literatürde var olan bulgulara değinilmiştir. Beşinci bölümde üç noktalı yol grafinin karma genişlemeleri ve özel bir durum olan ananas graflarının tam spektral karakterizasyonlarına yer verilmiştir. Altıncı bölüm olan son bölümde ise tez çalışmasının sonucunda yapılan çıkarım ve önerilerden bahsedilmiştir.

Anahtar kelimeler: Graf spektrumu, graf matrisleri, spektral karakterizasyon, karma genişleme

Tez Danışman: Doç. Dr. Hatice TOPCU

Sayfa Adeti: 83

**MIXED EXTENSION CONCEPT AS A TOOL FOR THE SPECTRAL
CHARACTERIZATION OF GRAPH
(M. Sc. Thesis)**

Kübra AKYIL UÇAN

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

MAY 2023

ABSTRACT

In this thesis, the use of the concept of mixed broadening has been examined in order to characterize graphs according to their spectra. In addition, the results available in the literature related to classification and spectral characterization of graphs with at most three eigenvalues different from -1 or 0 are given. This thesis consists of six chapters. In the first chapter, information about the subject, purpose and method of the thesis is given. In the second part, some basic definitions and concepts are given and the necessary background information is mentioned in the following sections. In the third chapter, the findings in the literature about graphs with at most two eigenvalues different from -1 or 0, which are the first part of the examined set, are given. In the fourth chapter, the findings in the literature regarding the graphs with exactly three eigenvalues different from -1 and 0, which are the other part of the examined cluster, are mentioned. In the fifth chapter, the mixed expansions of the three-point path graph and the full spectral characterizations of the pineapple graphs, which is a special case, are given. In the last chapter, which is the sixth chapter, the inferences and suggestions made as a result of the thesis work are mentioned.

Keywords: *Graph spectrum, graph matrices, mixed extension, spectral characterization*

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hatice TOPCU

Page Number: 83

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI.....	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLolar LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xi
1. BÖLÜM.....	1
GİRİŞ.....	1
2.BÖLÜM.....	5
ÖN BİLGİLER.....	5
2.1. Temel Tanım ve Kavramlar.....	5
2.2. Graf Teoride Temel Kavramlar.....	14
2.3. Graf Matrisleri ve Graf Spektrası.....	26
3. BÖLÜM.....	33
EN FAZLA 2 ÖZDEĞERİ -1 VE 0 DAN FARKLI OLAN GRAFLAR.....	33
4. BÖLÜM.....	36
KARMA GENİŞLEME KAVRAMININ GRAF KARAKTERİZASYONUNDA KULLANIMI.....	36
4.1. Karma Genişleme.....	36
4.2. Tam Olarak 3 Adet Özdeğeri -1 ve 0 dan Farklı Olan Bağlantısız Graflar.....	37
4.3. Tam Olarak 3 Adet Özdeğeri -1 ve 0 dan Farklı Olan Bağlantılı Graflar.....	39

4.3.1. $K_{p,q,r}$ Üç Parçalı Tam Graf ve $K_{p,q,1,\dots,1}$ Çok Parçalı Tam Grafı	40
4.3.2. G^* Kümesindeki Graflar	42
4.3.2.1. G^* Kümesindeki İki Parçalı Graflar	44
4.3.2.2. G^* Kümesindeki İki Parçalı Olmayan Graflar	45
5. BÖLÜM	46
P_3 YOL GRAFININ KARMA GENİŞLEMESİ	46
5.1. P_3 Grafının Karma Genişlemeleri	46
5.2. Ananas Grafların Tam Spektral Karakterizasyonu	56
6. BÖLÜM	64
TARTIŞMA SONUÇ VE ÖNERİLER	64
KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	68

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 2.1. Yürüyüş, kapalı yürüyüş, gezi, devir, yol, döngü tanımlarının karşılaştırılması	19
Tablo 4.1. W' kümesindeki bağlantısız graflar ve karakteristik polinomları.....	37
Tablo 4.2. W' kümesindeki bağlantılı graflar ve karakteristik polinomları	39
Tablo 4.3. G^* kümesi	40
Tablo 4.4. P_3 grafinin karma genişlemeleri ve karakteristik polinomları	42
Tablo 4.5. P_4 grafinin karma genişlemeleri ve karakteristik polinomları	43
Tablo 4.6. P_5 grafinin karma genişlemesi ve karakteristik polinomları	43
Tablo 4.7. G^* kümesindeki iki parçalı graflar ve karakteristik polinomları.....	44
Tablo 5.1. P_3 grafinin en fazla 25 noktaya sahip karma genişlemeleri ve ko-spektral eşleri	48

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. 5 noktalı kospektral iki graf	2
Şekil 1.2. Godsil-McKay switching uygulaması	3
Şekil. 2.1. Pseudo graf.....	15
Şekil. 2.2. Yönlü bir pseudo graf	15
Şekil. 2.3. G pseudo grafı ve H yönlü grafı	17
Şekil. 2.4. Mertebesi 4 olan tüm regüler graflar	17
Şekil. 2.5. Petersen graf.....	18
Şekil. 2.6. G grafı ve alt grafları.....	18
Şekil. 2.7. Yürüyüş, gezi, yol ve döngü	20
Şekil. 2.8. Yol graf ve döngü graf örnekleri	20
Şekil. 2.9. Bağlantılı graf ve bağlantısız graf örnekleri	20
Şekil. 2.10. Bazı tam graflar.....	21
Şekil. 2.11. Ağaç ve orman	21
Şekil. 2.12. $S_{1,7}$ yıldız grafı.....	22
Şekil. 2.13. Bazı tekerlek graflar.....	22
Şekil. 2.14. K_5^3 ananas grafı	22
Şekil. 2.15. Friendship graf.....	23
Şekil. 2.16. Bir G grafı ve tümleyeni	23
Şekil. 2.17. İki parçalı bir graf.....	24
Şekil. 2.18. $K_{3,3}$ iki parçalı tam graf	24
Şekil. 2.19. Çok parçalı tam graf.....	24
Şekil. 2.20. İzomorf graflar	25
Şekil. 2.21. $CS_{4,3}$ tam bölünmüş graF	26
Şekil 2.22. Komşuluk matrisi örneği.....	26
Şekil 2.23. Derece matrisi örneği	27
Şekil 2.24. Laplasyan matrisi örneği.....	28
Şekil 2.25. İşaretsiz laplasyan matrisi örneği.....	28
Şekil 2.26. Spektrum örneği.....	29
Şekil 2.27. İç içe geçme	30
Şekil 2.28. G grafı ve bir eşit parçalanışı	31
Şekil 2.29. Ko -spektral graflar	32

Şekil 3.1. $K_4 \cup K_5$ grafi	34
Şekil 3.2. $K_{2,4}$ grafi	35
Şekil 3.3. $K_{1,1,1,1,2}$ grafi	35
Şekil 4.1. P_3 grafinin karma genişlemesi	36
Şekil 4.2. $K_2 \cup K_2 \cup K_3$ grafi	38
Şekil 4.3. $K_3 \cup K_{2,2}$ grafi	38
Şekil 4.4. $K_2 \cup CS_{4,3}$ grafi	38
Şekil 4.5. S grafi	44
Şekil 4.6. L grafi	44
Şekil 4.7. M grafi	44
Şekil 4.8. H grafi	45

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A^T	A matrisinin transpozu
A^*	A matrisinin eşlenik transpozu
\bar{A}	A matrisinin eşleniği
I	Birim matris
J	Birler matrisi
$tr(A)$	A matrisinin izi
A^{-1}	A matrisinin tersi
$det(A)$	A matrisinin determinantı
$r(A)$	A matrisinin rankı
$G = (V, E)$	G grafi
$V, V_G, V(G)$	Nokta kümesi
$E, E_G, E(G)$	Kenar kümesi
$a \sim b$	a ve b noktalarının birbirine komşu olması
$N(a)$	a noktasına komşu olan noktaların kümesi
$deg(a)$	a noktasının derecesi
$od(a)$	a noktasının dış derecesi
$id(a)$	a noktasının iç derecesi
$\Delta(G)$	G grafının maksimum derecesi
$\delta(G)$	G grafının minimum derecesi
C_n	n noktalı döngü graf
P_n	n noktalı yol graf
K_n	n noktalı tam graf
K_p^q	Klikteki nokta sayı p ve q adet sarkıt noktası olan ananas graf

F_n^k	Friendship graf
\bar{G}	G grafının tümleyeni
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
K_{p_1, \dots, p_k}	Çok parçalı tam graf
$G \cong H$	G ve H graflarının birbirine izomorf olması
$w(G)$	G grafının maksimum klik genişliği
$CS_{q,r}$	Klikteki nokta sayısı q olan tam bölünmüş graf
$A(G)$	G grafının komşuluk matrisi
$D(G)$	G grafının derece matrisi
$L(G)$	G grafının laplasyan matrisi
$Q(G)$	G grafının işaretli laplasyan matrisi
$char(G)$	G grafının karakteristik polinomu
$spec(G)$	G grafının spektrumu
$\rho(G)$	G grafının komşuluk spektral yarıçapı
$G \cup H$	G ve H graflarının ayrık birleşimi
Q	Bölüm matrisi

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Spektral graf teorisi, grafın yapısal özellikleri ile graf matrislerinin özdeğerleri arasındaki ilişkiyi inceler. Bir grafın komşuluk matrisi hem satırları hem sütunları grafın noktalarına göre aynı sırada indekslenen sıfır-bir matrisidir. Belirli bir konumda karşılık gelen noktalar komşu ise 1 komşu değil ise 0 ile gösterilir. Graflar genellikle komşuluk matrisleri tarafından incelenir.

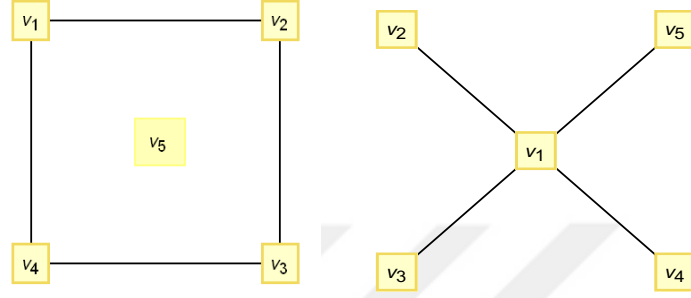
Sonlu bir grafın spektrumu tanımı gereği komşuluk matrisinin spektrumudur, yani, özdeğerler kümesidir. Spektrum graf hakkında birçok bilgi içerir. Ancak genel olarak grafi belirlemez. Yani spektral graf teorisinin merkezi şu sorudur;

Bir grafın spektrumu verildiğinde grafın yapısı hakkında ne söylenebilir?

Örneğin, spektrumdan bir grafın düzenli mi yoksa iki parçalı mı olduğunu görebiliriz. Spektral graf teorisi, bu türden soruları yanıtlamaya yarar. Eğer bir G grafi ile aynı spektruma sahip olan başka bir graf kesinlikle G grafına izomorf oluyorsa G ye komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir bir graf (kısaca DAS; determined by adjacency spectrum) denir. Son yıllarda bir grafın spektrumuna göre belirlenip belirlenmediği sorusu çok ilgi çekmiştir. Wang ve Xu geniş bir graf ailesi tanımlanmıştır ve bu ailedeki her grafın spektrumu ve tümleyeninin spektrumu tarafından belirlendiğini gösterilmiştir [1]. Öte yandan ağaçlar ve çok düzenli bir yapıya sahip graflar gibi bunların nerdeyse hiçbir zaman spektrum tarafından belirlenmediği de kanıtlanmıştır [2, 3]. Birçok graf için spektrum tarafından belirlenip belirlenmediği tespit edilmiştir. Fakat, diğer birçok ilginç graf için sorun hala açıktır [1].

Örneğin bazı sabit uzaklıklı grafın spektrumları tarafından belirlendiği kanıtlanmıştır [1] (örneğin Odd graf) ve daha da fazla graf ailesi için izomorf olmayan kospektral graflar oluşturulmuştur. Bununla birlikte birçok önemli graf ailesi için sorun hala çözülmemiştir. Bazı matris tipleri için aynı spektruma sahip iki graf, karşılık gelen matrise göre kospektral graflar olarak adlandırılır. Şekil 1.1 de gösterilen iki grafi göz önünde bulunduralım. Bu graflara karşılık gelen komşuluk matrisinin $\{2^1, 0^3, -2^1\}$

spektrumuna sahip olduğu kolayca görülür. Burada üsler o özdeğerin cebirsel katlılığını gösterir. Bu 1957’ de Collatz ve Sinogowitz tarafından bulunan izomorf olmayan kospektral grafların ilk örneğidir. Beş noktadan daha az noktaya sahip graflar için, aynı komşuluk matrisine sahip kospektral graflar yoktur. Bu nedenle beşten az noktaya sahip herhangi bir graf spektrumu tarafından belirlenir.



Şekil 1.1. 5 noktalı kospektral iki graf

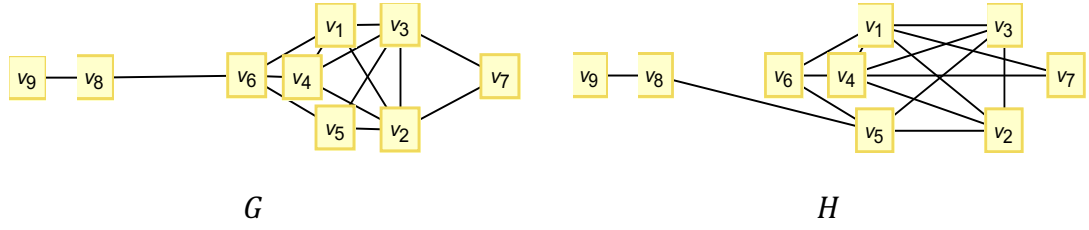
Bir graf spektrumu tarafından belirlenemezse, bu durum izomorf olmayan kospektral bir eş ilişkisi oluşturularak kanıtlanabilir. Kospektral graflar oluşturmak için çeşitli metotların var olduğu bilinmektedir [4]. En önemlisi Godsil ve McKay’ ın switching yöntemidir [5]. Bu yöntem ile yapılan işlem, graf üzerinde uygulanan ve verilen grafın komşuluk matrisinin spektrumunu değiştirmeyen bir işlemdir. Her zaman olmasa da çoğunlukla elde edilen graf ilkinizomorf değildir. Dolayısıyla Godsil-McKay switching belirli graflar için kospektral eşler oluşturmakta bir araçtır.

Örnek

Şekil 1.2 de verilen $G = (V, E)$ grafın nokta kümesi $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ve parçalanışındaki kümeler sırasıyla $X_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $X_2 = \{5, 6\}$, $X_3 = \{7, 8, 9\}$ olur. G grafına Godsil-McKay switching uygulandığında elde edilen graf H grafıdır.

G ve H graflarının komşuluk matrislerinin spektrumu;

$$\text{spec}(A(G)) = \text{spec}(A(H)) = \{-2.72, -1.31, -1^2, -0.45, 0.28, 0.71, 1.52, 3.97\} \text{ olur.}$$



Şekil 1.2. Godsil-McKay switching uygulanişı

Grafların belli matrislerinin özdeğerlerine göre karakterize edilerek sınıflandırılmaya çalışılması literatürde incelenmekte olan temel problemlerden biridir. Grafların komşuluk matrisi ve bu matrise bağlı olan özdeğerlerine göre karakterize edilebilmesine dair çalışmalar literatürde mevcuttur. Bu çalışmaların çoğunda esas amaç graf özdeğerlerine bağlı olarak karakterizasyon yapmak ya da sınıflandırma oluşturabilmektir. Genel olarak bu çalışmalarda graf çizimi, grafın spektral yarıçapı ya da belirli bir özdeğeri (en büyük, en küçük v.b.) gibi graf parametreleri esas alınmış ve buna bağlı kalınarak sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır [1].

Bu tez çalışmasında öncelikle en fazla 2 adet komşuluk özdeğeri $-1, 0$ dan farklı olan tüm grafların oluşturduğu kümeler incelenmiştir. Üçüncü bölümde bu graflarla ilgili literatürde yapılan çalışmalara ve elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Bir grafta izole bir nokta, bu grafın komşuluk spektrumunda sadece sıfır özdeğerinin yer almasına yol açar. Bu sebepten ötürü, öncelikle izole nokta içermeyen grafların oluşturduğu kümeler belirtilmiştir. Daha sonra ise izole noktalar dahil edilerek incelenen kümeler ele alınmıştır. Bu sınıflandırma en fazla iki adet özdeğeri $-1, 0$ dan farklı olan tüm grafların bulunması ve bulunan grafların çok parçalı olup olmadığını belirlemek, tüm graflar için oluşturulan grupların eş spektruma sahip olanları kümelere ayırmak ve bu kümelerin izomorfizma farkına göre ayrı ayrı incelenmesini içermektedir. Dolayısıyla bu grafların komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olup olmadıklarına da değinilmiştir.

Daha sonra karma genişleme kavramı üzerinde durulmuştur. Karma genişleme bir G grafının her noktasının bir klik veya bir ko-klik ile yer değiştirilmesi ve bu esnada G de birbirine komşu olan noktaların oluşturduğu klik veya ko-kliklerin de birbirine komşu olacak şekilde bırakılması işlemidir. Sonrasında tam olarak 3 adet özdeğeri -1 ve 0 dan farklı olan ve izole noktalar içermeyen grafların incelenmesine devam edilmiştir. Bu özelliği taşıyan tüm grafların kümesini W' ile gösterelim. W' kümesindeki bağlantılı ve bağlantısız graflar için literatürde mevcut olan bilgiler dördüncü bölümde verilmiştir.

Tablo 4.2 de verilen graf türlerinin son kısmı olan -1 ve 0 dışındaki üç özdeğerinin ikisi pozitif biri negatif olan tüm graf türlerini G^* ile gösterelim. G^* kümesinde yer alan graflar Tablo 4.3 de detaylı biçimde verilmiştir. Bu kümenin incelenmesinde literatürde mevcut olan iki parçalı olan ve iki parçalı olmayan graflar ele alınmıştır. Bu graflar sırasıyla 3, 4 ve 5 noktalı yol grafların karma genişlemelerinden oluşmaktadır.

Daha sonra 3 noktalı yol grafin karma genişlemelerinin spektral karakterizasyonları nokta sayısı 25 ile kısıtlanarak incelenmiş ve literatürde mevcut olan bilgiler derlenerek beşinci bölümde verilmiştir. Son olarak 3 noktalı yol grafin karma genişlemesinin özel bir durumu olan ananas grafların tam spektral karakterizasyonlarına yer verilmiştir.



2.BÖLÜM ÖN BİLGİLER

2.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Bu kısımda öncelikle lineer cebir ile ilgili bazı temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1. F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir dikdörtgen tabloya matris denir. m satırlı ve n sütunlu bir matrise $m \times n$ boyutlu (mertebeli) ya da kısaca bir $m \times n$ matris denir. Eğer bir matrisin satır ve sütun sayıları eşit ise bu matrise kare matris denir. Elemanları reel sayılar cismine ait olan bütün $m \times n$ matrislerin kümesi $M_{m,n}(\mathbb{R})$ ile elemanları kompleks sayılar cismine ait olan bütün $m \times n$ matrislerin kümesi de $M_{m,n}(\mathbb{C})$ ile ifade edilir. Matrisin elemanlarının ait olduğu küme farklılıklarına göre matris gösterimi F cismi üzerinde tanımlı $M_{m,n}(F)$ olacak şekilde ifade edilir [6].

Tanım 2.1.2. $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere A nın transpozu; A matrisinin satırlarını sütun ve sütunlarını satır yapmakla A matrisinden elde edilen ve A^T ile gösterilen $n \times m$ mertebeli bir matris olarak tanımlanır. Yani

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ olur [6].}$$

Tanım 2.1.3. Eğer $A = [a_{ij}]$ matrisinin elemanları kompleks sayılar ise, o zaman A matrisinin eşlenik transpozu $A^* = [\bar{a}_{ji}]$ olarak tanımlanır. Böylece eğer $A = [a_{ij}]$ olmak üzere A nın eşleniği $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ ise, o takdirde $A^* = (\bar{A})^T$ dir. Eğer A matrisinin elemanları reel sayılar ise bu durumda $A = \bar{A}$ olacağından $A^T = A^*$ şeklindedir [6].

Tanım 2.1.4. Esas köşegen üzerindeki bütün elemanları "1" ve diğer tüm elemanları "0" olan bir kare matrise birim matris denir. Birim matris I ile gösterilir. A herhangi bir kare matris olmak üzere $AI = IA = A$ olduğu kolayca görülebilir [6].

Örnek

Üçüncü mertebeden birim matris

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.1.5. Keyfi $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için bütün elemanları "1" olan $m \times n$ tipinde matris birler matrisi denir. Birler matrisi J ile gösterilir [7].

Örnek

$$J_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, J_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ biçimindedir.}$$

Tanım 2.1.6. Keyfi $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için bütün elemanları "0" olan $m \times n$ tipinde matris sıfırlar matrisi denir. Sıfırlar matrisi 0 ile gösterilir [7].

Örnek

$$0_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 0_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ biçimindedir.}$$

Tanım 2.1.7. Bir $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ kare matrisinin izi A matrisinin esas köşegen elemanlarının toplamı olarak tanımlanır ve $tr(A)$ ile gösterilir. Yani

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

olur [6].

Tanım 2.1.8. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ bir kare matris olmak üzere eğer $i \neq j$ için her zaman $a_{ij} = 0$ oluyorsa, o takdirde A matrisine köşegen matris denir ve $diag(A)$ şeklinde gösterilir.

$$diag(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Kısaca $diag(A) = (a_{11}, \dots, a_{nn})$ biçiminde gösterilir.

Özel olarak, eğer $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = a$ ise $D = aI_n$ matrisine *skaler matris* denir [6].

Tanım 2.1.9. $A_n = [a_{ij}]$ kare matrisinde, $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere,

- $\forall i > j$ için eğer $a_{ij} = 0$ ise A_n matrisine üst üçgensel matris denir.
- $\forall i < j$ için eğer $a_{ij} = 0$ ise A_n matrisine alt üçgensel matris denir.
- $A_n^T = A_n$ ise A_n matrisine simetrik matris denir.
- $A_n^T = -A_n$ ise A_n matrisine ters simetrik matris denir.
- $A_n^* = A_n$ ise A_n matrisine hermityen matris denir.
- $A_n^* = -A_n$ ise A_n matrisine ters hermityen matris denir.
- $A_n^* A_n = A_n A_n^*$ ise A_n matrisine normal matris denir.
- $A_n^* A_n = A_n A_n^* = I_n$ ise A_n matrisine birimsel matris denir.
- $A_n^T A_n = A_n A_n^T = I_n$ ise A_n matrisine ortogonal matris denir [8].

Örneğin,

- Üçüncü mertebeden bir üst üçgensel matris $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ biçimindedir.

- Üçüncü mertebeden bir alt üçgensel matris $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ biçimindedir.

- Üçüncü mertebeden bir simetrik matris $A = \begin{bmatrix} a_{11} & b & c \\ b & a_{22} & d \\ c & d & a_{33} \end{bmatrix}$ biçimindedir.

- Üçüncü mertebeden bir ters simetrik matris $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ biçimindedir.

- Üçüncü mertebeden bir hermityen matris $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a + ib & c + id \\ a - ib & a_{22} & e + if \\ c - id & e - if & a_{33} \end{bmatrix}$

biçimindedir.

- Üçüncü mertebeden bir ters hermityen matris $A = \begin{bmatrix} ia_{11} & a + ib & c + id \\ -a + ib & ia_{22} & e + if \\ -c + id & -e + if & ia_{33} \end{bmatrix}$ biçimindedir.

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} -i & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi normal midir?

$$A = \begin{bmatrix} -i & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{bmatrix} \text{ ise } A^* = \begin{bmatrix} i & -2-3i \\ 2-3i & 0 \end{bmatrix} \text{ olur. Buna göre}$$

$$\begin{aligned} AA^* &= \begin{bmatrix} -i & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -2-3i \\ 2-3i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -i^2 + 4 - 9i^2 & 2i + 3i^2 \\ -2i + 3i^2 & 4 - 9i^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -3+2i \\ -3-2i & 13 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{bmatrix} i & -2-3i \\ 2-3i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -i^2 + 4 - 9i^2 & 2i + 3i^2 \\ -2i + 3i^2 & 4 - 9i^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & -3+2i \\ -3-2i & 13 \end{bmatrix} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buradan $AA^* = A^*A$ olduğundan A normaldir.

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$$

matrisi birimsel midir?

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} \text{ ise } A^* = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$AA^* = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Buradan $AA^* = A^*A = I_2$ olduğundan A birimseldir.

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

matrisi ortogonal midir?

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{ ise } A^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{ olur. Buna göre,}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \text{ ve}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \text{ olur.}$$

Buradan $A^T A = AA^T = I_2$ olduğundan A ortogonaldir.

Tanım 2.1.10. A_n kare matris ve I_n birim matris olmak üzere

$$A_n B_n = B_n A_n = I_n$$

olacak şekilde bir B_n matrisi varsa, o zaman B matrisine A matrisinin tersi denir ve $B = A^{-1}$ ile gösterilir.

Her kare matrisin tersinir olması gerekmez. Tersinir var olan matrislere tersinir (düzgün, tekil olmayan) matris ve tersinir olmayan matrislere tekil matris (düzgün olmayan) denir [6].

Tanım 2.1.11. A , m satır ve n sütundan oluşan bir matris olsun. $K \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ olmak üzere k tane elemandan oluşan $K = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ kümesi ve $L \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere l tane elemandan oluşan $L = \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ kümesi için, satır-sütun indisleri K ve L kümeleri ile kısıtlanan bir matrise A matrisinin bir alt matrisi denir. Yani,

$$A_{mn}[K, L] = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_l} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_l} \end{bmatrix} \text{ dir [8].}$$

Teorem 2.1.1. Her $n \times n$ matrise bir reel sayıyı karşılık getiren ve aşağıdaki özelliklere sahip olan bir ve yalnızca bir fonksiyon, \det vardır [6].

- i. B matrisi; verilen bir $n \times n$ A matrisinin bir satırının bir $\alpha \neq 0$ reel sayısı ile çarpılması sonucu A matrisinden elde edildiği zaman $\det B = \alpha \det A$
- ii. B matrisi; verilen bir $n \times n$ A matrisinin herhangi iki satırının yer değiştirilmesi ile A dan elde edildiği zaman $\det B = -\det A$
- iii. B , $n \times n$ A matrisinin bir satırının bir skaler katının diğer bir satıra ilave edilmesi ile A dan elde edilen matris olduğunda $\det B = \det A$
- iv. I , $n \times n$ birim matris olmak üzere $\det I = 1$

Tanım 2.1.12. $A = (a_{ij})$ $n \times n$ bir kare matris olmak üzere A matrisinin determinanı,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada S_n , simetrik (permütasyon) grup ve $\text{sgn}(\sigma)$;

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan işaret fonksiyonudur [6].

Tanım 2.1.13. A $m \times n$ tipinde sıfırdan farklı bir matris olsun. Bu matrisin bütün alt kare matrisleri arasında, determinanı sıfırdan farklı olanlarının mertebelerinin en büyüğüne A matrisinin rankı denir ve $r(A)$ ile gösterilir [6].

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin 2×2 bütün alt matrisleri

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Bunlardan A_1 ve A_2 alt matrislerinin determinantları sıfır olmasına karşılık $\det A_3 = -9 \neq 0$ dir. Böylece determinantı sıfırdan farklı en büyük mertebeli alt matris A_3 ve A_3 ün mertebesi 2 olduğundan A matrisinin rankı 2 dir, yani $r(A) = 2$ dir.

Tanım 2.1.14. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisi ile $x, n \times 1$ vektörünün çarpımı sonucunda elde edilen vektörün orijinal vektöre paralel olduğunu kabul edelim. Yani $Ax = \lambda x$ olsun. Keza $Ax = \lambda x$ denklemini $I, n \times n$ birim matris olmak üzere $(A - \lambda I)x = 0$ şeklinde yazabiliriz. Halbuki $(A - \lambda I)x = 0$ denklemi n bilinmeyenli, n denklemden ibaret bir homojen lineer denklem sistemidir. Diğer taraftan bir homojen lineer denklem sisteminin aşikar olmayan çözümünün olması için katsayılar matrisinin tekil olması gerekir. Bundan dolayı $(A - \lambda I)x = 0$ denklem sisteminin aşikar olmayan çözümü $\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0$ olması halinde mevcuttur. Buradan

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\det(A - \lambda I)$ nin hesaplanması sonucunda λ ya bağlı n -yinci dereceden monik bir polinom elde edilir. Bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir ve $K_A(\lambda)$ şeklinde gösterilir. Yani $K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ dir. Ayrıca karakteristik denklemin köklerine A matrisinin özdeğerleri (ya da karakteristik değerleri) denir. Hemen hatırlatalım ki; $K_A(\lambda) = 0$ n -inci dereceden bir denklem olduğundan tam olarak n tane köke sahiptir. Tabiatıyla bunların hepsinin farklı olması gerekmez.

$Ax = \lambda x$ veya $(A - \lambda I)x = 0$ denkleminde sıfır olmayan x çözümlerine A nın λ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri (karakteristik vektörleri) denir. Özdeğer ve özvektörlerin bu tanımından doğrudan

$$Ax_i = \lambda_i x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

temel formülü elde ederiz [6].

Örnek

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

Önce A matrisinin karakteristik polinomunu bulalım. Buna göre

$$\begin{aligned} K_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

olur. Böylece A nın karakteristik denklemi

$$K_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

şeklinde olup buradan A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ olarak bulunur. Şimdi ise, bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bulalım. Bunun için $(A - \lambda I)x = 0$ homojen lineer denklem sistemini açık olarak aşağıdaki gibi yazarız.

$$\left. \begin{aligned} (1 - \lambda)x_1 + 0x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + (2 - \lambda)x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + (3 - \lambda)x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Daha sonra $\lambda_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulmak için (2.1) denkleminde $\lambda = 1$ koyarak

$$\left. \begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

homojen lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu homojen lineer denklem sisteminin çözümü bize $\lambda_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü verecektir. (2.2) lineer denklem sisteminin rankı 2 olup ($n - r = 3 - 2 = 1$) bir keyfi bilinmeyen sözgelimi $x_1 = a$ alırsak. O zaman

$$0x_2 - x_3 = 0$$

$$x_2 + x_3 = -a$$

olup buradan $x_2 = -a$ ve $x_3 = a$ bulunur. Böylece $\lambda_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektöre X_1 dersek, o zaman

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (0 \neq a \in \mathbb{R})$$

olarak bulunur. Şimdi $\lambda_2 = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulalım. Bunun için (2.1) denklem sisteminde $\lambda = 2$ yazarak

$$\left. \begin{array}{l} -x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

homojen lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu homojen lineer denklem sisteminin rankı da 2 olup bir keyfi bilinmeyen sözcüğü $x_3 = b$ seçeriz. Buna göre

$$x_1 - 0x_2 = -b$$

$$2x_1 + 2x_2 = -b$$

olup bu lineer denklem sisteminin çözümünden $x_1 = -b$, $x_2 = \frac{b}{2}$ değerlerini elde ederiz. Böylece $\lambda_2 = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektöre X_2 dersek, o zaman

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ \frac{b}{2} \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (0 \neq b \in \mathbb{R})$$

buluruz. Son olarak $\lambda_3 = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulmak için yine (2.1) homojen lineer denklem sisteminde $\lambda = 3$ koyarak

$$\left. \begin{array}{l} -2x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

homojen lineer denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sisteminin de rankı 2 olduğundan yine bir tane keyfi bilinmeyen seçeriz. Buna da $x_3 = c$ diyelim. O takdirde

$x_1 = -\frac{c}{2}$ ve $x_2 = \frac{c}{2}$ olarak buluruz. Eğer $\lambda_3 = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektöre X_3 dersek, o zaman

$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (0 \neq c \in \mathbb{R})$$

buluruz.

2.2. Graf Teoride Temel Kavramlar

Bu bölümde Graf teori ile ilgili bazı ön bilgilere yer verilmiştir. Genel olarak [7, 8, 9, 10, 11] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.2.1. Boştan farklı $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ noktalar kümesi ve $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ kenarlar kümesi olmak üzere bir G grafi, $G = (V, E)$ ikilisi şeklinde tanımlanır. Burada E kümesindeki bir kenar, V kümesindeki noktaların bir sıralı ikilisidir. $|V| = n$ ve $|E| = m$ ise G ye n noktalı ve m kenarlı bir graf denir. Nokta sayısına kısaca G nin mertebesi de denir. Kenar sayısına da G nin genişliği denir [9].

Tanım 2.2.2. $G = (V, E)$ grafına; $|V| = 1$ ise aşıkâr (trivial, singleton, single point) graf, $E = \emptyset$ ise null (boş, empty) graf denir [9].

Tanım 2.2.3. Bir grafın tüm kenarları, bu kenarları oluşturan noktalardan biri çıkış noktası biri varış noktası olacak biçimde yönlendirilmiş ise bu grafa *yönlü graf* ya da *digraf* denir. Yönlü bir grafın kenarlarına *yönlü kenar* denir. Yönlü kenar içermeyen bir grafa *yönsüz graf* denir. Kenarlarının bir kısmı yönlü, bir kısmı yönsüz olan bir grafa *karma graf* denir [9].

Tanım 2.2.4. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere eğer $e_k = (v_i, v_i) \in E$ ise bu kenara v_i noktası üzerinde bir *ilmek (loop)* denir [10].

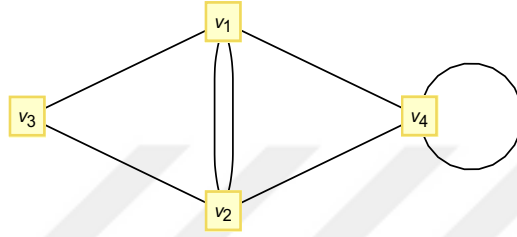
Tanım 2.2.5. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere eğer herhangi bir $v_i, v_j \in V$ için v_i ile v_j arasında birbirinden farklı birden fazla kenar varsa bu kenarlara *katlı kenarlar* denir [10].

Tanım 2.2.6. $G = (V, E)$ grafının keyfi iki noktası $v_i, v_j \in V$ olmak üzere bu iki nokta arasında en az bir kenar var ise bu noktalara birbirine komşudur denir ve $v_i \sim v_j$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.2.7. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere, G deki bir v_i noktasına komşu olan noktaların kümesine o noktanın komşuluk kümesi denir ve $N(v_i)$ ile gösterilir. $N(v_i) = \{v_j \in V: v_i \sim v_j\}$ biçiminde ifade edilir [9].

Tanım 2.2.8. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere G grafı hem katlı kenar hem de ilmek içeriyorsa G grafına *pseudo graf* denir [10].

Örnek

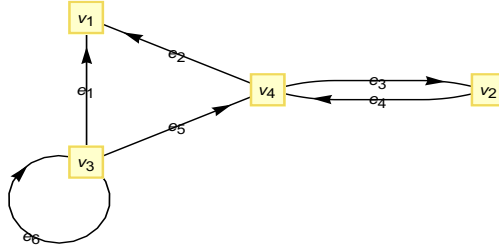


Şekil. 2.1. Pseudo graf

Tanım 2.2.9. Katlı kenar ve ilmek içermeyen bir grafa *basit graf* denir [9].

Tanım 2.2.10. Bir grafın noktalarının isimlendirilmesi işlemine *etiketleme*: noktaları isimlendirilmiş bir grafa ise *etiketlenmiş graf* denir [9].

Örnek



Şekil. 2.2. Yönlü bir pseudo graf

$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ kümesi G grafının noktalar kümesi, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ kümesi G grafının kenarlar kümesi, e_6 kenarı ilmek, e_3, e_4 kenarları da katlı kenar olur. Ayrıca herhangi bir noktanın komşuluk kümesini yazalım. Örneğin, $N(v_4) = \{v_1, v_2, v_3\}$ biçimindedir.

Tanım 2.2.11. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere $v_i \in V(G)$ noktasına bağlı kenarların sayısına v_i noktasının *derecesi* denir ve $deg_G(v_i)$, $deg(v_i)$ ya da kısaca $d(v_i)$ ile gösterilir. Herbir ilmek bağlandığı noktanın derecesini 2 artırır [10].

Tanım 2.2.12. u ve v bir yönlü grafın herhangi iki noktası olsun. u ve v bir e kenarı ile birleştirilmişse u ve v noktalarına komşu noktalar denir. Eğer kenar u noktasından v noktasına doğru yönlendirilmişse e kenarına u dan v ye bir kenar denir. u noktasından çıkan yönlendirilmiş kenarların sayısına u noktasının *dış derecesi* (*outdegree*), u noktasına gelen yönlendirilmiş kenarların sayısına da u noktasının *iç derecesi* (*indegree*) denir. Dış derece $od(v_i)$ ve iç derece $id(v_i)$ şeklinde gösterilir. Yönlü ilmekler bağlandığı noktanın iç derecesini ve dış derecesini 1 er artırır [11].

Tanım 2.2.13. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere $v_i \in V(G)$ noktası için $d(v_i) = 0$ ise yani bu noktaya değen hiçbir kenar yoksa v_i noktasına *izole nokta* denir. Eğer v_i noktası için $d(v_i) = 1$ ise bu durumda v_i noktasına *pendant (sarkıt) nokta* denir [10].

Tanım 2.2.14. Bir G grafının noktalarının derecelerinin en büyüğüne grafın maksimum derecesi denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir. Bir G grafının noktalarının derecelerinin en küçüğüne grafın minimum derecesi denir ve $\delta(G)$ ile gösterilir [9].

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg(v) \text{ ve}$$

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \deg(v) \text{ olur.}$$

Not: G , n mertebeli basit ve yönsüz bir graf ve v , G nin herhangi bir noktasıysa;

$$0 \leq \delta(G) \leq \deg(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1$$

dir.

Lemma 2.2.1. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

dir. Yani $G = (V, E)$ grafında dereceler toplamı kenar sayısının 2 katına eşittir.

Bu lemma kaynaklarda el sıkışma lemması (Handshaking Lemma) olarak da ifade edilir [10].

Sonuç 2.2.1. Bir G grafında tek dereceli noktaların sayısı çifttir [11].

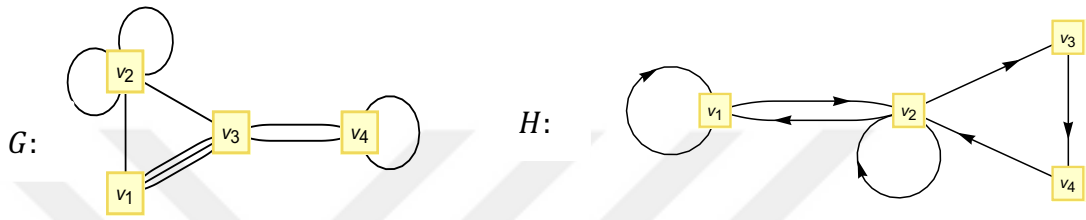
Ispat

G grafının tek dereceli noktalarının kümesi U ve çift dereceli noktalarının kümesi W olsun. $V = U \cup W$ olduğu açıktır. G nin kenar sayısı m ise Lemma 2.2.1 den

$$\sum_{v \in U} deg(v) + \sum_{v \in W} deg(v) = \sum_{v \in V} deg(v) = 2m$$

olur. $\sum_{v \in W} deg(v)$ toplamı terimler çift olduğundan dolayı çift sayı gelmek zorundadır. O halde $\sum_{v \in U} deg(v)$ toplamı çift olmalıdır. Toplamdaki tüm elemanlar tek sayı olduğundan dolayı toplamın çift sayı gelebilmesi için çift sayıda terim toplanmalıdır. Buradan $|U|$ çift sayıdır.

Örnek



Şekil. 2.3. G pseudo grafi ve H yönlü grafi

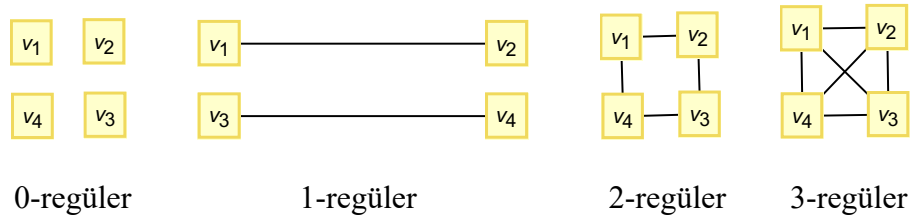
G grafında $deg(v_1) = 4, deg(v_2) = 6, deg(v_3) = 6$ ve $deg(v_4) = 4$ olur. Kenar kümesi $E(G)$ olmak üzere $|E(G)| = 10$ dir. Buradan $\Delta(G) = 6$ ve $\delta(G) = 4$ olur.

Dereceler toplamı $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) = 4 + 6 + 6 + 4 = 20 = 2|E(G)|$ olur.

H grafında $od(v_1) = id(v_1) = 2, id(v_2) = od(v_2) = 3, od(v_3) = id(v_3) = 1, od(v_4) = id(v_4) = 1$ olur. Kenar kümesi $E(H)$ olmak üzere $|E(H)| = 7$ dir.

Tanım 2.2.15. Bir $G = (V, E)$ grafi verilsin. $|G| = n$ ve $0 \leq r \leq n - 1$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{N}$ için, G deki her noktanın derecesi r ye eşit oluyorsa, G ye r - regüler (r düzenli) graf denir [11].

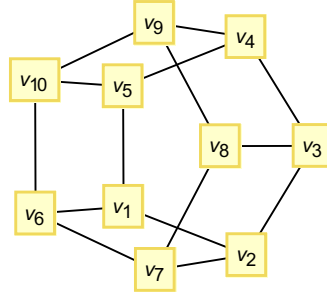
Örnek



Şekil. 2.4. Mertebesi 4 olan tüm regüler graflar

Tanım 2.2.16. Noktaların derecesi 3 olan 10 noktalı ve 15 kenarlı düzenli grafa özel olarak Petersen graf denir [10].

Örnek



Şekil. 2.5. Petersen graf

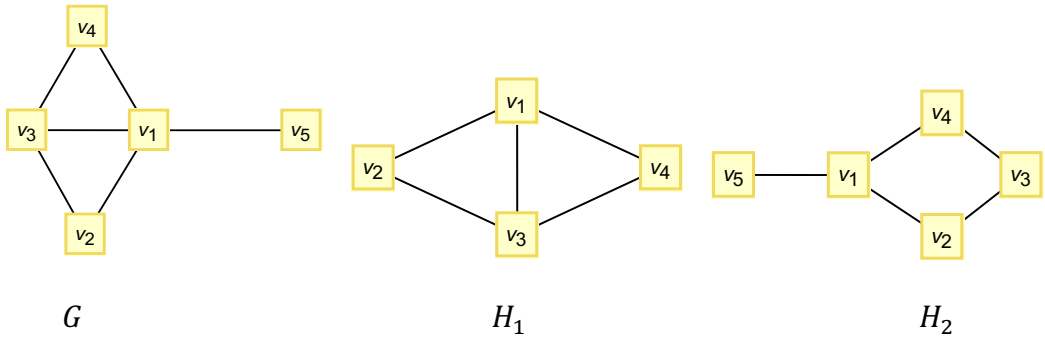
Tanım 2.2.17. $G = (V, E)$ grafı için $V' \subseteq V$ ve $E' \subseteq E$ olmak üzere, $S = (V', E')$ grafına G' nin bir *alt grafi* denir ve $S \subseteq G$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.2.18. $G = (V', E')$ grafı, $G = (V, E)$ grafının bir alt grafi ve $V' = V$, $E' = E$ ise S ve G graflarına *eşit graflar* denir [9].

Tanım 2.2.19. G grafının noktalarından bazılarının ve bu noktalara değen tüm kenarların silinmesiyle elde edilen alt grafa G nin *nokta indirgenmiş alt grafi* denir. Bazı kenarların (uç noktaları sabit bırakılarak) silinmesiyle elde edilen alt grafa ise G nin *kenar indirgenmiş alt grafi* denir. Nokta indirgenmiş herhangi bir alt grafa kısaca indirgenmiş alt graf da denir [9].

Örnek

Aşağıdaki şekilde verilen H_1 grafı G grafından v_5 noktasının silinmesiyle elde edilen nokta indirgenmiş alt grafıdır. H_2 grafı ise G grafından $\{v_1, v_3\}$ kenarının silinmesiyle elde edilen kenar indirgenmiş alt grafıdır.



Şekil. 2.6. G grafı ve alt grafları

Tanım 2.2.20. $G = (V, E)$ grafının, $H = (V', E')$ grafını alt graf olarak içermesi mümkün değil ise H grafına G nin bir *yasaklanmış (forbidden) alt grafi* denir [9].

Tanım 2.2.21. Bir $G = (V, E)$ grafının keyfi noktaları $v_{k_0}, \dots, v_{k_i} \in V$ olmak üzere v_{k_0} noktasından başlayıp v_{k_i} noktasında biten keyfi bir yürüyüş,

$$v_{k_0}, \{v_{k_0}, v_{k_1}\}, v_{k_1}, \{v_{k_1}, v_{k_2}\}, v_{k_2}, \dots, \{v_{k_{i-1}}, v_{k_i}\}, v_{k_i}$$

şeklinde yazılan nokta ve kenarlardan oluşan sonlu bir dizidir. Bir yürüyüşteki kenar sayısı *yürüyüş uzunluğudur*. Herhangi bir yürüyüşte aynı nokta veya kenar birden fazla defa yer alabilir [9].

Tanım 2.2.22. Kenar tekrarlamayan bir yürüyüşe *gezi*; nokta tekrarlanmayan bir yürüyüşe ise *yol* denir [9].

Tanım 2.2.23. Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan bir yürüyüşe *kapalı yürüyüş* denir. Kenar tekrarlamayan bir kapalı yürüyüşe *devir*; nokta tekrarlamayan bir kapalı yürüyüşe ise *döngü (cycle)* denir [9].

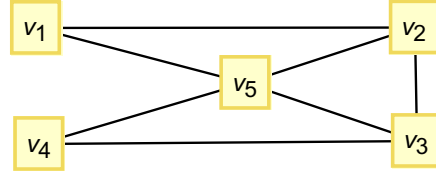
Aşağıdaki tablo ve örnekle bu tanımlar daha anlaşılır hale getirilmek istenmiştir.

Tablo 2.1. Yürüyüş, kapalı yürüyüş, gezi, devir, yol, döngü tanımlarının karşılaştırılması [9]

	Tekrarlama kısıtlaması yok	Kenar tekrarlamama	Nokta Tekrarlamama
Keyfi noktada başlayıp biten	YÜRÜYÜŞ	GEZİ	YOL
Aynı noktada başlayıp biten	KAPALI YÜRÜYÜŞ	DEVİR	DÖNGÜ

Örnek

Aşağıdaki şekilde verilen bir G grafında 5-uzunluklu bir yürüyüş; $v_3, \{v_3, v_4\}, v_4, \{v_4, v_5\}, v_5, \{v_5, v_2\}, v_2, \{v_2, v_1\}, v_1, \{v_1, v_5\}, v_5$ olur. G basit graf olduğundan $v_3 - v_4 - v_5 - v_2 - v_1 - v_5$ biçiminde de yazılabilir. Bu yürüyüş, kenar tekrarlanmadığı için, aynı zamanda bir gezidir. Fakat v_5 noktasından iki kez geçildiği için bir yol değildir. Başlangıç ve bitiş noktaları farklı olduğundan kapalı yürüyüş değildir. $v_1 - v_2 - v_3$ yürüyüşü 3 uzunluklu bir yoldur ve $v_3 - v_4 - v_5 - v_3$ yürüyüşü ise 3-uzunluklu bir döngüdür.

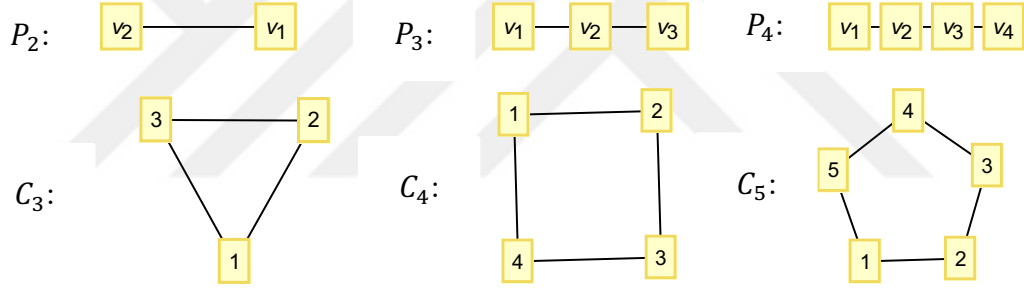


Şekil. 2.7. Yürüyüş, gezi, yol ve döngü

Tanım 2.2.24. $n \geq 3$ olmak üzere n noktalı ve n kenarlı bir basit G grafının tüm kenarları n uzunluğunda bir döngü oluşturuyorsa, G ye *döngü (cycle) graf* denir. n noktalı bir döngü graf C_n şeklinde gösterilir. Bir döngü grafın her bir noktasının derecesi 2 dir. Yani 2-regülerdir [9].

Tanım 2.2.25. C_n döngü grafından herhangi bir kenarın silinmesiyle elde edilen grafa *yol (path) graf* denir. n noktalı bir yol graf P_n ile gösterilir. Kenar sayısı $n - 1$ olur [9].

Örnek

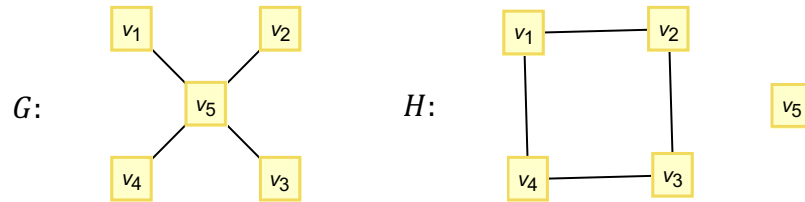


Şekil. 2.8. Yol graf ve döngü graf örnekleri

Tanım 2.2.26. $G = (V, E)$ boştan farklı bir graf olmak üzere G nin herhangi iki noktası arasında daima bir yol bulunabiliyorsa G ye *bağlantılı graf* denir. Bağlantılı olmayan grafa *bağlantısız graf* denir [10].

Örnek

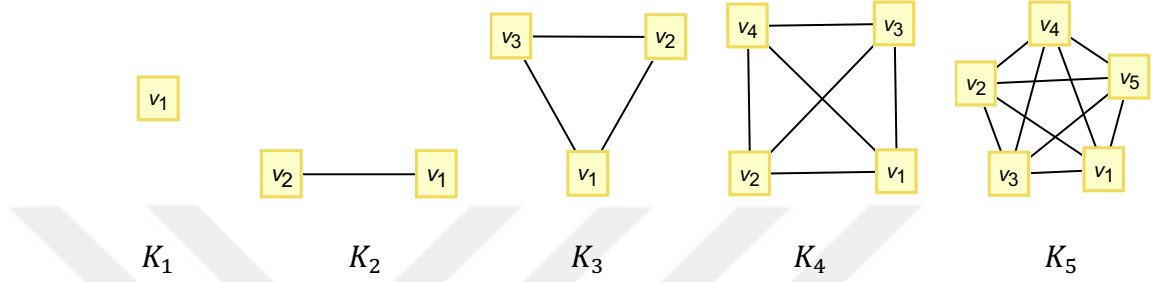
Aşağıda verilen G grafı bağlantılı, H grafı ise bağlantısızdır.



Şekil. 2.9. Bağlantılı graf ve bağlantısız graf örnekleri

Tanım 2.2.27. Her nokta çifti arasında tam olarak bir kenarı bulunan ve dolayısıyla her noktanın derecesinin aynı olduğu bağlantılı grafa *tam graf* denir. n noktalı bir tam graf K_n şeklinde gösterilir. K_n tam grafı $\frac{n(n-1)}{2}$ kenara sahiptir. Her noktası da $n - 1$ derecedir. Bu yüzden tam graflar aynı zamanda $(n - 1)$ -regüler graftır [10].

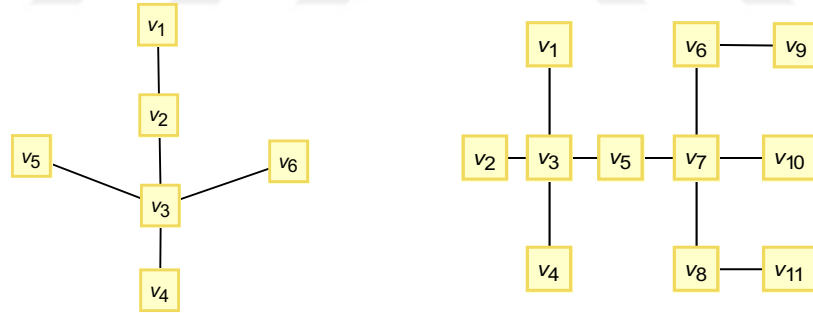
Örnek



Şekil. 2.10. Bazı tam graflar

Tanım 2.2.28. Döngü içermeyen bağlantılı basit ve yönsüz bir grafa *ağaç* denir. Bileşenlerinin hepsi ağaç olan bir grafa ise *orman* denir [9].

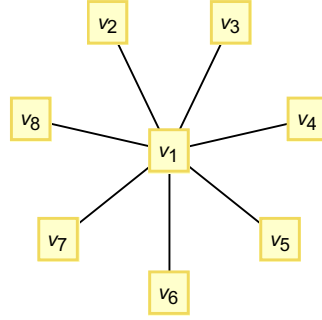
Örnek



Şekil. 2.11. Ağaç ve orman

Tanım 2.2.29. $(n + 1)$ noktalı bir G ağacında bir noktanın derecesi n diğer noktaların derecesi 1 ise bu ağaca *yıldız graf* denir ve $S_{1,n}$ ile gösterilir [10].

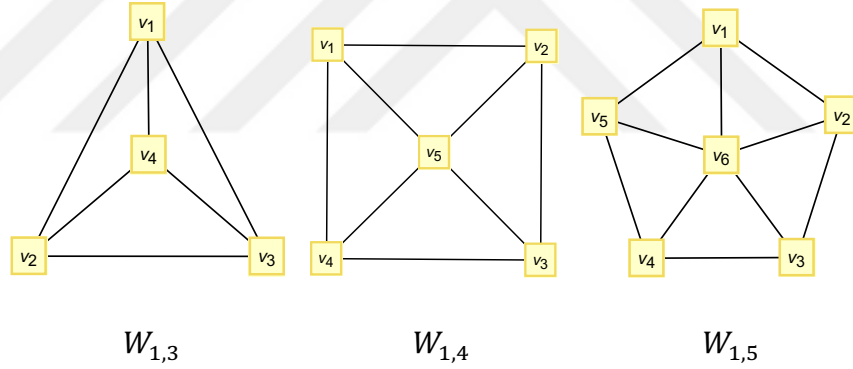
Örnek



Şekil. 2.12. $S_{1,7}$ yıldız grafi

Tanım 2.2.30. Bir döngü graf ve döngü graftaki bütün noktalarla bağlantılı bir noktanın oluşturduğu grafa *tekerlek (wheel) graf* denir ve W_n ile gösterilir. $n + 1$ noktalı bir tekerlek graf $W_{1,n}$ ile gösterilir [10].

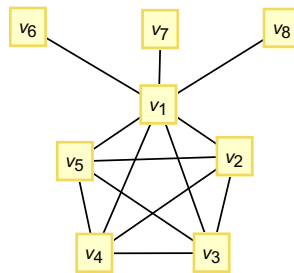
Örnek



Şekil. 2.13. Bazı tekerlek graflar

Tanım 2.2.31. K_p grafına, belirli bir noktasından q adet sarkıt kenar eklenmesiyle oluşan grafa *ananas graf* denir ve K_p^q ile gösterilir [9].

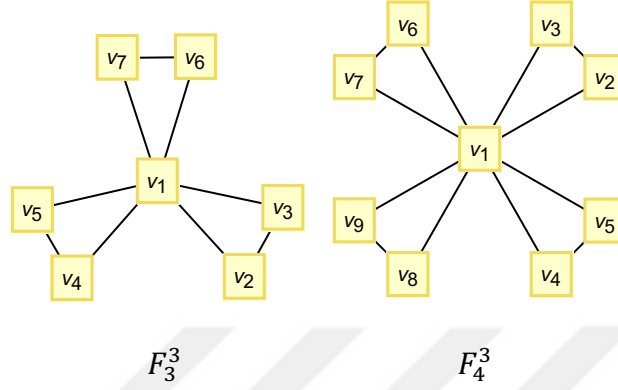
Örnek



Şekil. 2.14. K_5^3 ananas grafi

Tanım 2.2.32. Ortak bir tepe noktasına bağlı n tane C_k dan oluşan grafa *Friendship graf* denir ve F_n^k şeklinde gösterilir [7].

Örnek



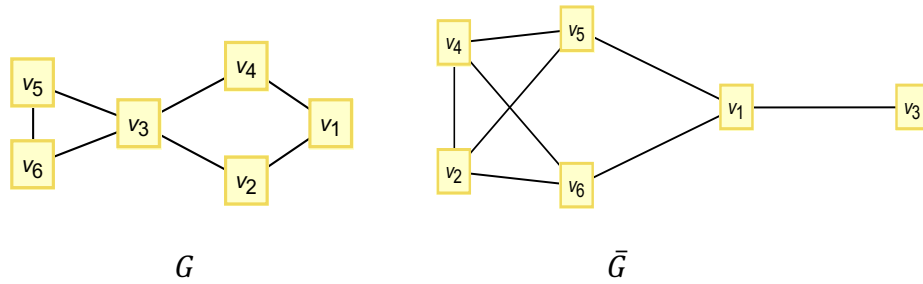
F_3^3

F_4^3

Şekil. 2.15. Friendship graf

Tanım 2.2.33. $G = (V, E)$ basit bir graf olmak üzere, kenarları " $e = \{v_i, v_j\} \in E(\bar{G}) \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \notin E(G)$ " olacak biçimde tanımlanan $\bar{G} = (V, E(\bar{G}))$ grafına $G = (V, E)$ grafının tümleyenidir denir. Yani var olan kenarların silinip yerine kenar oluşturmayan noktaların kenar oluşturmasıyla oluşan aynı nokta kümesi üzerinde tanımlanan yeni graf \bar{G} , $G = (V, E)$ grafının tümleyenidir. Örneğin tam grafın tümleyeni null graftır [10].

Örnek



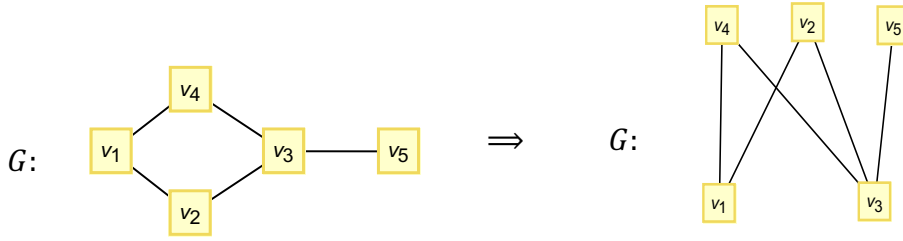
G

\bar{G}

Şekil. 2.16. Bir G grafi ve tümleyeni

Tanım 2.2.34. Nokta kümesi V_1 ve V_2 gibi iki ayrık kümeye ayrılmış ve her bir kenarı da V_1 kümesindeki bir noktanın V_2 kümesindeki bir noktaya birleştirilmesiyle elde edilen bir grafa *iki parçalı (bipartite) graf* denir [9].

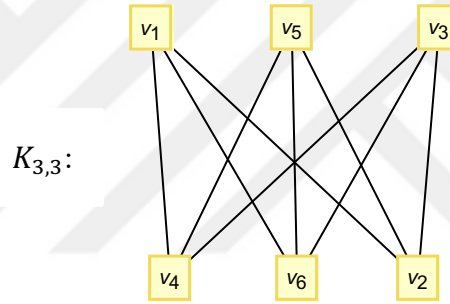
Örnek $G = (V, E)$ grafi için $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \{v_1, v_3\} \cup \{v_2, v_4, v_5\}$ birleşiminde $\{v_1, v_3\}$ ve $\{v_2, v_4, v_5\}$ kümeleri kendi içlerinde kenar oluşturmadığından G grafi iki parçalı bir graftır.



Şekil. 2.17. İki parçalı bir graf

Tanım 2.2.35. İki parçalı bir grafda A kümesinin her bir noktası, B kümesinin her bir noktası ile komşu ise grafa *iki parçalı tam graf* (*complete bipartite graph*) denir. A ya ait noktaların sayısı m ve B ye ait noktaların sayısı n ise; iki parçalı tam graf $K_{m,n}$ ile gösterilir [8].

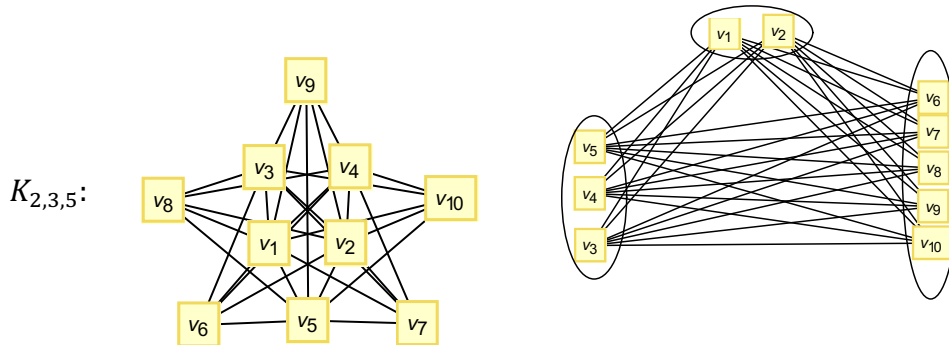
Örnek



Şekil. 2.18. $K_{3,3}$ iki parçalı tam graf

Tanım 2.2.36. Çok parçalı bir grafda, aynı bağımsız küme içerisinde bulunmayan her nokta çifti birbirine kesinlikle komşu ise bu grafa *çok parçalı tam graf* denir ve parçalardaki nokta sayıları sırasıyla m_1, \dots, m_n olmak üzere, K_{m_1, \dots, m_n} ile gösterilir [7].

Örnek

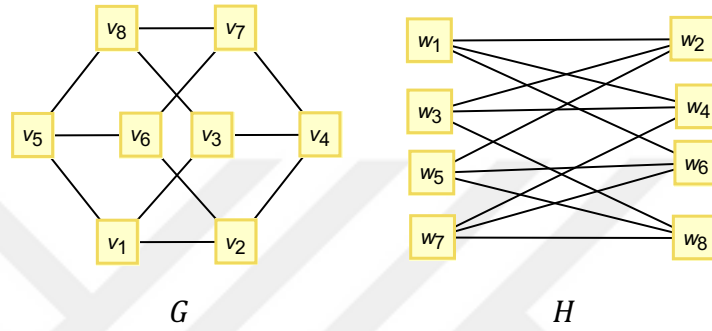


Şekil. 2.19. Çok parçalı tam graf

Tanım 2.2.37. $G = (V(G), E(G))$ ve $H = (V(H), E(H))$ grafları için birebir ve örten bir $f: V(G) \rightarrow V(H)$ dönüşümü aşağıdaki koşulu sağlıyorsa, bu dönüşüme G ve H arasında *izomorfizma* denir. $\forall u, v \in V(G)$ için $u \sim v \Leftrightarrow f(u) \sim f(v)$ [9].

Tanım 2.2.38. Aralarında en az bir izomorfizmanın tanımlı olduğu herhangi iki G ve H grafına *izomorf graflar* denir ve $G \cong H$ ile gösterilir [9].

Örnek

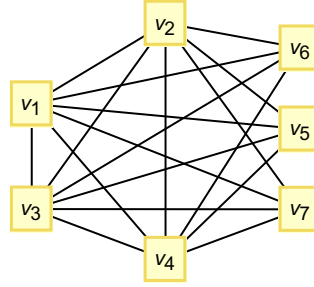


Şekil. 2.20. İzomorf graflar

Tanım 2.2.39. $G = (V, E)$ grafının bir alt grafi $H = (V', E')$ olsun. $\forall v_i, v_j \in V'$ için $v_i \sim v_j$ ise H altgrafına, G grafına ait bir *klik* denir. Bir kliğin mertebesi, klikteki nokta sayısıdır. Bir G grafının en büyük mertebeli kliğine, G deki *maksimum klik* denir. Maksimum kliğin mertebesine ise grafın maksimum klik genişliği denir ve $w(G)$ ile gösterilir. Benzer şekilde, $\forall v_i, v_j \in V'$ için $v_i \not\sim v_j$ ise H altgrafına, G grafına ait bir *ko-klik* denir. Yani hiçbir nokta arasında komşuluğun bulunmadığı durumda ko-klik oluşur [7].

Tanım 2.2.40. Bir grafta birbirleriyle komşu olmayan noktaları içeren kümeye *bağımsız (independent)* küme denir. Bağımsız kümedeki her nokta klikteki her noktaya komşu olacak şekilde bir grafın nokta kümesi bir bağımsız kümeye ve bir kliğe bölünebiliyorsa bu grafa *tam bölünmüş (complete split)* graf denir. Bağımsız kümedeki nokta sayısı r ve klikteki nokta sayısı q olan tam bölünmüş graf $CS_{q,r}$ ile gösterilir [9].

Örnek



Şekil. 2.21. $CS_{4,3}$ tam bölünmüş graf

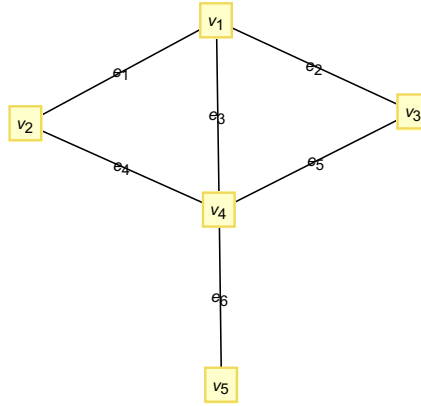
2.3 Graf Matrisleri ve Graf Spektrasi

Tanım 2.3.1. $G = (V, E)$ grafi n noktalı ve m kenarlı bir graf olsun. $\forall i, j \in V$ için

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i \sim j \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } i \not\sim j \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere G grafının komşuluk matrisi, $A(G) = [a_{ij}]$ biçiminde tanımlanan $n \times n$ tipindeki matristir [9].

Örnek



G

Şekil 2.22. Komşuluk Matrisi Örneği

Yukarıdaki şekilde verilen G grafının komşuluk matrisi $A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

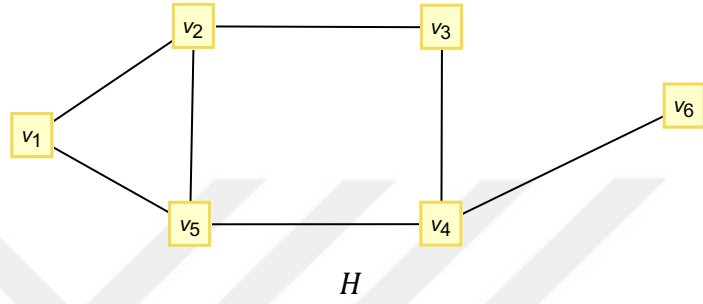
biçimindedir.

Tanım 2.3.2. $G = (V, E)$ grafi verilsin ve $V = \{1, \dots, n\}$ olsun. $\forall i \in V$ için,

$$D(G) = [d_{ij}] \text{ öyle ki } d_{ij} = \begin{cases} \text{deg}(i), & \text{eğer } i = j \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $n \times n$ tipindeki köşegen matrise G grafinin *derece matrisi* denir [9].

Örnek



Şekil 2.23. Derece Matrisi Örneği

Yukarıdaki şekilde verilen G grafinin derece matrisi $D(G) =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

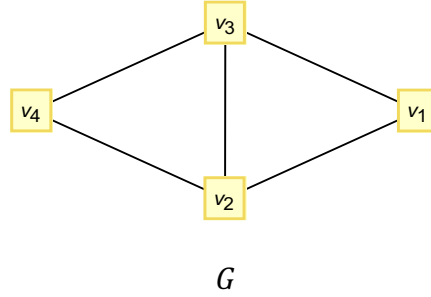
biçimindedir.

Tanım 2.3.3. n noktalı bir $G = (V, E)$ grafi verilsin $\forall i, j \in V$ için

$$b_{ij} = \begin{cases} \text{deg}(i); & \text{eğer } i = j \text{ ise} \\ -1; & \text{eğer } i \sim j \text{ ise} \\ 0; & \text{eğer } i \not\sim j \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere G grafinin *Laplasyan matrisi*, $L(G) = [b_{ij}]$ biçiminde tanımlanan $n \times n$ tipindeki matristir. $L(G) = D(G) - A(G)$ olur [10].

Örnek



Şekil 2.24. Laplasyan Matrisi Örneği

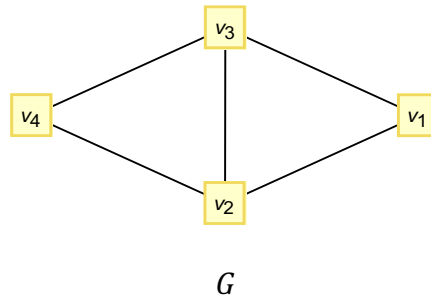
Yukarıdaki şekilde verilen G grafinin Laplasyan matrisi $L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ biçimindedir.

Tanım 2.3.4. n noktalı bir $G = (V, E)$ grafi verilsin $\forall i, j \in V$ için

$$c_{ij} = \begin{cases} \deg(i); & \text{eğer } i = j \text{ ise} \\ 1; & \text{eğer } i \sim j \text{ ise} \\ 0; & \text{eğer } i \not\sim j \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere G grafinin *işaretsiz Laplasyan matrisi*, $Q(G) = [c_{ij}]$ biçiminde tanımlanan $n \times n$ tipindeki matristir. $Q(G) = D(G) + A(G)$ olur [10].

Örnek



Şekil 2.25. İşaretsiz Laplasyan Matrisi Örneği

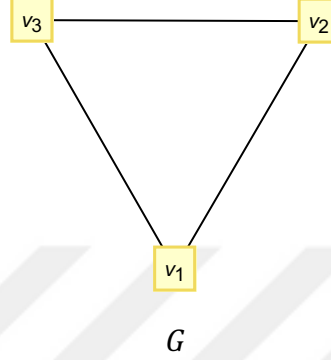
Yukarıdaki şekilde verilen G grafinin işaretsiz Laplasyan matrisi

$$Q(G) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ biçimindedir.}$$

Tanım 2.3.5. $M(G)$ ya da kısaca M , G grafına ait bir graf matrisi ve I_n birim matris olmak üzere $\det(xI - M(G))$ polinomuna G nin $M(G)$ *karakteristik polinomu* denir ve

$char(M(G))$ ile gösterilir. Bu polinomun köklerinden yani $M(G)$ matrisinin özdeğerlerinden oluşan kümeye ise G nin $M(G)$ spektrumu denir ve $spec(M(G))$ ile gösterilir. Ya da matrisin adına göre komşuluk spektrumu, Laplasyan spektrumu v.b. de denir [9].

Örnek



Şekil 2.26. Spektrum örneği

Yukarıdaki şekilde verilen G grafinin komşuluk matrisi ve bu matrisin karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } char(A(G))(x) = \begin{bmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{bmatrix} = -(x+1)^2(x-2)$$

$A(G)$ nin özdeğerleri $\{-1, -1, 2\}$ olur. Yani $spec(A(G)) = \{-1^2, 2\}$. Burada -1 özdeğeri iki katlıdır.

Not: İzomorf grafların komşuluk spektrumlarının aynı olduğu açıktır. Fakat bu durumun tersi her zaman doğru değildir.

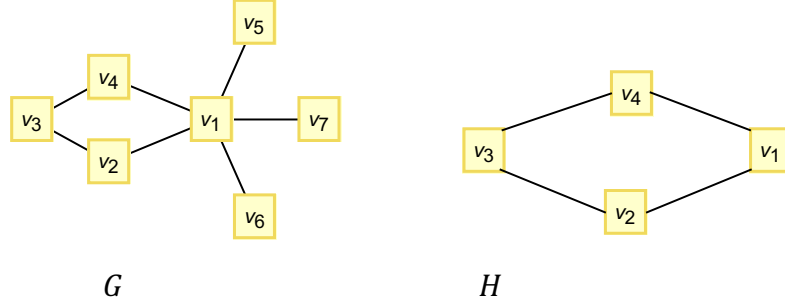
Tanım 2.3.6. $A(G)$ matrisi tanımı gereği sıfır köşegene sahip, bileşenleri 0 ve 1 den oluşan simetrik bir matristir. Dolayısıyla özdeğerleri reel olur. Bu özdeğerleri $\lambda_1(A(G)) \geq \lambda_2(A(G)) \geq \dots \geq \lambda_n(A(G))$ ile gösterelim. $A(G)$ matrisinin en büyük özdeğeri $\lambda_1(A(G))$ değerine G grafinin *komşuluk spektral yarıçapı* denir ve $\rho(G)$ ile gösterilir [9].

Lemma 2.3.1. (İç içe geçme (interlacing) lemması)

n adet noktaya sahip bir G grafinin komşuluk özdeğerleri $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$ ve G nin m noktalı indirgenmiş bir H altgrafının komşuluk özdeğerleri $\lambda_1(H) \geq \lambda_2(H) \geq \dots \geq \lambda_m(H)$ olsun. Buna göre aşağıdaki eşitlik $i = 1, 2, \dots, m$ için daima sağlanır [12].

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(H) \geq \lambda_{n-m+i}(G) \quad (2.3)$$

Örnek



Şekil 2.27. İç içe geçme

Yukarıda verilen G ve H graflarının komşuluk matrislerinin karakteristik polinomlarını inceleyelim.

$$\text{char}(A(G)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - \sqrt{6})(\lambda + \sqrt{6})$$

$$\text{char}(A(H)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Böylece G nin komşuluk özdeğerleri sırasıyla,

$$\lambda_1(A(G)) = \sqrt{6}, \lambda_2(A(G)) = 1, \lambda_3(A(G)) = 0, \lambda_4(A(G)) = 0, \lambda_5(A(G)) = 0, \\ \lambda_6(A(G)) = -1, \lambda_7(A(G)) = -\sqrt{6} \text{ olur.}$$

H nin komşuluk özdeğerleri sırasıyla,

$$\lambda_1(A(H)) = 2, \lambda_2(A(H)) = 0, \lambda_3(A(H)) = 0, \lambda_4(A(H)) = -2 \text{ olur.}$$

Buradan;

$$\lambda_1(G) \geq \lambda_1(H) \geq \lambda_4(G) \Rightarrow \sqrt{6} \geq 2 \geq 0,$$

$$\lambda_2(G) \geq \lambda_2(H) \geq \lambda_5(G) \Rightarrow 1 \geq 0 \geq 0,$$

$$\lambda_3(G) \geq \lambda_3(H) \geq \lambda_6(G) \Rightarrow 0 \geq 0 \geq -1,$$

$$\lambda_4(G) \geq \lambda_4(H) \geq \lambda_7(G) \Rightarrow 0 \geq -2 \geq -\sqrt{6}$$

olur.

Sonuç 2.3.1. Reel simetrik bir A matrisinin özdeğerleri $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ olsun.

$|\Delta_i| = n_i > 0$ olmak üzere, $\{1, 2, \dots, n\} = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_m$ bir küme parçalanışı olsun.

$A_{ij}, n \times n$ tipinde bir blok olmak üzere, $A = [A_{ij}]$ blok matrisi yazılsın. A_{ij} bloğundaki

tüm bileşenlerin toplamı e_{ij} ve $B = [e_{ij}/n_i]$ ise B nin özdeğerleri A nın özdeğerleri ile iç içe geçer. (Burada e_{ij}/n_i değeri, A_{ij} bloğundaki ortalama satır toplamıdır.)

Aynı blok içerisindeki tüm satır toplamları eşit olduğunda ise aşağıdaki sonuç elde edilir [7].

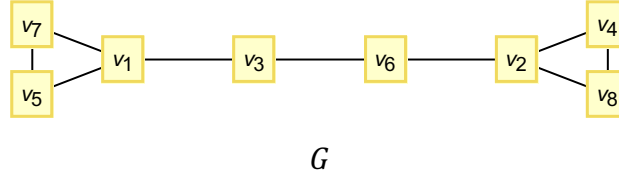
Sonuç 2.3.2. A matrisi Sonuç 2.3.1 deki gibi bloklara ayrılabilen bir matris olsun. A_{ij} bloğundaki sabit satır toplamı b_{ij} ve $B = [b_{ij}]$ ise A nın spektrumu B nin spektrumunu kapsar [7].

Tanım 2.3.7. $G = (V, E)$ grafi verilsin ve V kümesinin bir parçalanışı $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ olsun. $\forall i, j \in \{1, \dots, k\}$ için eğer V_i kümesindeki her nokta V_j de aynı sayıda noktaya komşu ise bu parçalanışa G grafının bir eşit parçalanışı denir [7].

Tanım 2.3.8. $G = (V, E)$ grafi ve V kümesinin bir eşit parçalanışı $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ verilsin. Sonuç 2.3.1 deki gösterime uygun olarak elde edilen $B = [b_{ij}]$ matrisine bu parçalanışın bölüm matrisi denir [7].

Teorem 2.3.1. Bir grafın herhangi bir eşit parçalanışına ait bölüm matrisinin karakteristik polinomu, bu grafın komşuluk matrisinin karakteristik polinomunu böler [7].

Örnek



Şekil 2.28. G grafı ve bir eşit parçalanışı

Yukarıda verilen G grafının bir eşit parçalanışı; $\mathbb{III}: \{1,2\}, \{3,4,5,6,7,8\}$ olur. Bu G grafının komşuluk matrisi ve bu parçalanışın bölüm matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\mathbb{III}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{char}(A(G)) = (x - 1)(x + 1)^2(x^3 - 4x - 1)(x^2 - x - 3)$$

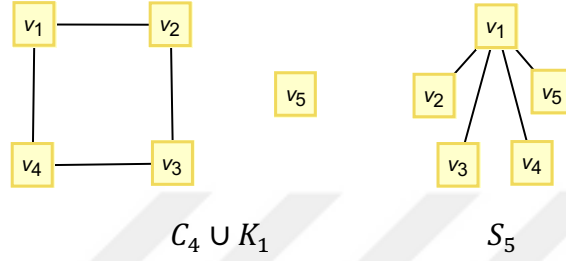
$$\text{char}(B_{\mathbb{III}}) = x^2 - x - 3$$

olur ve bu grafin eşit parçalanışına ait bölüm matrisinin karakteristik polinomu, bu grafin komşuluk matrisinin karakteristik polinomunu böldüğü görülür.

Tanım 2.3.9. G ve G' grafları verilsin. $\text{spec}(M(G)) = \text{spec}(M(G'))$ ise G ve G' graflarına, M matrisine göre ko-spektral graflar denir [9].

Örnek

Aşağıda komşuluk matrislerine göre ko-spektral olan bir graf çifti gösterilmiştir.



Şekil 2.29. Ko-spektral graflar

Bu grafların komşuluk spektrumu $\text{spec}(A(C_4 \cup K_1)) = \text{spec}(A(S_5)) = \{-2, 0^3, 2\}$ olur.

Tanım 2.3.10. G grafinin bir graf matrisi $M(G)$ olsun. $\text{spec}(M(G)) = \text{spec}(M(H))$ olacak biçimde $\forall H$ grafi için $G \cong H$ oluyorsa, G grafına $M(G)$ spektrumu ile belirlenebilir bir graf denir [9].

Lemma 2.3.2. Bir G grafinin negatif komşuluk özdeğerlerinin sayısı ρ_- ve $k = 1 + \rho_-$ olsun. G grafinin kesin olarak yalnızca 1 adet pozitif özdeğere sahip olması için gerek ve yeter koşul izole olmayan tüm noktalarının k -parçalı tam graf oluşturmasıdır [12].

Lemma 2.3.3. Sadece 1 adet nokta içeren parçaların sayısı k ve $k \geq 2$ olmak üzere; $K_{1, \dots, 1, m}$ grafi komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır [12].

Lemma 2.3.4. $n \times n$ tipindeki A ve B matrisleri için aşağıdaki ifadeler denktir [12].

- (i) A ve B aynı spektruma sahiptir.
- (ii) A ve B aynı karakteristik polinoma sahiptir.
- (iii) $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\text{iz}(A^i) = \text{iz}(B^i)$ dir

Lemma 2.3.5. s ve t pozitif tamsayılar olsun. İki parçalı tam $K_{s,t}$ grafinin komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $s + t$ toplamının en küçük değeri alması koşuluyla $n = st$ olacak biçimde s ve t çarpanlarına ayrılabilmesidir [12].

3. BÖLÜM

EN FAZLA 2 ÖZDEĞERİ -1 VE 0 DAN FARKLI OLAN GRAFLAR

En fazla iki adet özdeğeri (cebirsel katları da dahil olmak üzere) -1 ve 0 dan farklı olan tüm grafların kümesini S ile gösterelim. İzole bir nokta, bir grafin komşuluk spektrumunda sadece bir adet sıfır özdeğerin yer almasına yol açacağından aşağıdaki lemmada izole nokta içermeyen $S' \subseteq S$ kümesi incelenmiştir.

Lemma 3.1.1 Eğer $G \in S'$ ise G grafi aşağıdaki graflardan birine kesinlikle izomorftur. p, q, k, l, m, n pozitif tam sayılar için [12],

(i) $K_p \cup K_q$ öyle ki komşuluk spektrumu $\{p-1, q-1, -1^{p+q-2}\}$

(ii) $K_{l,n}$ öyle ki komşuluk spektrumu $\{\pm\sqrt{ln}, 0^{l+n-2}\}$

(iii) Bir adet nokta içeren parçaların sayısı k olmak üzere; $K_{1,\dots,1,m}$ öyle ki komşuluk

spektrumu $\left\{ \frac{k-1 \pm \sqrt{(k-1)^2 + 4km}}{2}, -1^{k-1}, 0^{m-1} \right\}$

Ispat

Eğer $G \in S'$ ise $a, b \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ olmak üzere $spec(G) = \{-1^f, 0^g, a, b\}$ biçimindedir. Burada f ve g sırasıyla -1 ve 0 özdeğerlerinin cebirsel katlarıdır. G en az bir pozitif komşuluk özdeğerine sahip olmak zorunda olduğundan, $a \geq b > 0$ ya da $a > 0 > b$ olmalıdır.

$a \geq b > 0$ iken inceleyelim. Bu durumda G grafinin en küçük komşuluk özdeğeri -1 e eşit olacaktır. 3 noktalı yol graf için $\lambda_3(P_3) \cong -1.42$ olduğu için, Lemma 2.3.1 den G grafinin herhangi bir bileşeni için P_3 grafi yasaklanmış bir alt graf olur. Dolayısıyla G grafinin herhangi bir bileşenindeki 3 adet nokta birbirine komşu olmak zorundadır. Bu da G nin tüm bileşenlerinin birer tam graf olmasını gerektirir. Aynı zamanda G de sadece 2 adet pozitif özdeğer bulunduğundan, $p = a + 1, q = b + 1, f = p + q - 2$ ve $g = 0$ olmak üzere $G \cong K_p \cup K_q$ dir. Böylece $spec(G) = \{p-1, q-1, -1^{p+q-2}\}$ olur. Şimdi de $a > 0 > b$ iken inceleyelim. Lemma 2.3.2 den G çok parçalı tam graftır. Eğer G iki parçalı tam graf ise $-b = a = \sqrt{ln}, f = 0$ ve $g = l + n - 2$ olmak üzere $spec(G) = \{\pm\sqrt{ln}, 0^{l+n-2}\}$ olur. $c \geq 3$ için, G c -parçalı tam graf olsun. $K_{1,2,2}$ grafinin negatif özdeğerleri $\{-2, -1.23607\}$ olduğundan bu graf G grafinin Lemma 2.3.1 e göre yasaklanmış bir altgrafıdır. Böylece G grafinin 1 den fazla noktaya sahip en fazla 1 adet parça içerebileceğini söyleriz. Buradan 1 adet nokta içeren parçaların sayısı k olmak

üzere $G \cong K_{1,\dots,1,m}$ olur. Bu durumda $spec(G) = \left\{ \frac{k-1 \pm \sqrt{(k-1)^2 - 4km}}{2}, -1^{k-1}, 0^{m-1} \right\}$ elde edilir öyle ki burada $a = \frac{k-1 + \sqrt{(k-1)^2 + 4km}}{2}$, $b = \frac{k-1 - \sqrt{(k-1)^2 + 4km}}{2}$, $c = k + 1$, $f = k - 1$ ve $g = m - 1$ dir.

Aşağıdaki sonuç yardımıyla S kümesi artık belirlenebilir.

Sonuç 3.1.1. $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olsun. O zaman $S = \{G \cup \alpha K_1 : G \in S'\}$ olur [12].

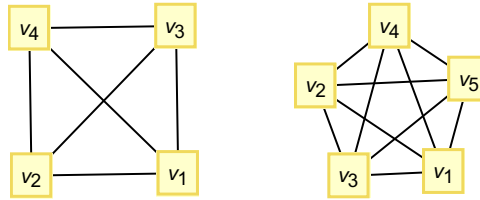
Lemma 2.3.3. ve Lemma 2.3.5. yardımıyla aşağıdaki sonuç açıktır.

Sonuç 3.1.2. $G \in S$ olsun [12].

- (i) Eğer G grafi iki parçalı tam bir grafi bileşen olarak içermiyorsa o zaman komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır.
- (ii) G grafinin bir bileşeni $K_{l,n}$ olsun. O zaman G grafinin komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir bir graf olması için gerek ve yeter koşul $l + n$ toplamının en küçük değeri alması koşuluyla $x = ln$ olacak biçimde l ve n çarpanlarına ayrılabilmesidir.

Örnek

Şekil 3.1. de $K_4 \cup K_5$ grafi ve Lemma 3.1.1. (i) şikkına bir örnek verilmiştir.



Şekil. 3.1. $K_4 \cup K_5$ grafi

Bu grafin karakteristik polinomu

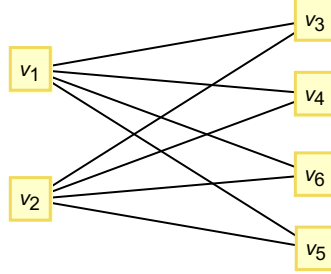
$$char(A(K_4 \cup K_5)) = x^9 - 16x^7 - 28x^6 + 42x^5 + 196x^4 + 280x^3 + 204x^2 + 77x + 12 = (x - 4)(x - 3)(x + 1)^7 \text{ şeklindedir}$$

ve komşuluk spektrumu

$$spec(A(K_4 \cup K_5)) = \{(-1)^7, 3, 4\} \text{ olup } \{p - 1, q - 1, -1^{p+q-2}\} \text{ formundadır.}$$

Örnek

Şekil 3.2. de $K_{2,4}$ grafi ve Lemma 3.1.1. (ii) şikkına bir örnek verilmiştir.



Şekil. 3.2. $K_{2,4}$ grafi

Bu grafin karakteristik polinomu

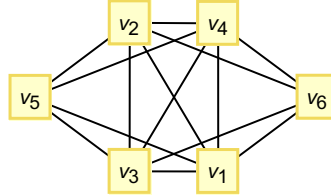
$$\text{char} \left(A(K_{2,4}) \right) = x^6 - 8x^4 = x^4(x^2 - 8)$$

şeklindedir ve komşuluk spektrumu

$$\text{spec} \left(A(K_{2,4}) \right) = \{\sqrt{8}, -\sqrt{8}, 0^4\} \text{ olup } \{\pm\sqrt{ln}, 0^{l+n-2}\} \text{ formundadır.}$$

Örnek

Şekil 3.3. de $K_{1,1,1,1,2}$ grafi ve Lemma 3.1.1. (iii) şikkına bir örnek verilmiştir.



Şekil. 3.3. $K_{1,1,1,1,2}$ grafi

Bu grafin karakteristik polinomu

$$\text{char} \left(A(K_{1,1,1,1,2}) \right) = x^6 - 14x^4 - 32x^3 - 27x^2 - 8x = x(x+1)^3 \left(x + \frac{3+\sqrt{41}}{2} \right) \left(x - \frac{3-\sqrt{41}}{2} \right)$$

şeklindedir ve komşuluk spektrumu

$$\text{spec} \left(A(K_{1,1,1,1,2}) \right) = \left\{ 0, 1^3, -\frac{3+\sqrt{41}}{2}, \frac{3-\sqrt{41}}{2} \right\} \text{ olup } \left\{ \frac{k-1 \pm \sqrt{(k-1)^2 + 4km}}{2}, -1^{k-1}, 0^{m-1} \right\}$$

formundadır.

4. BÖLÜM

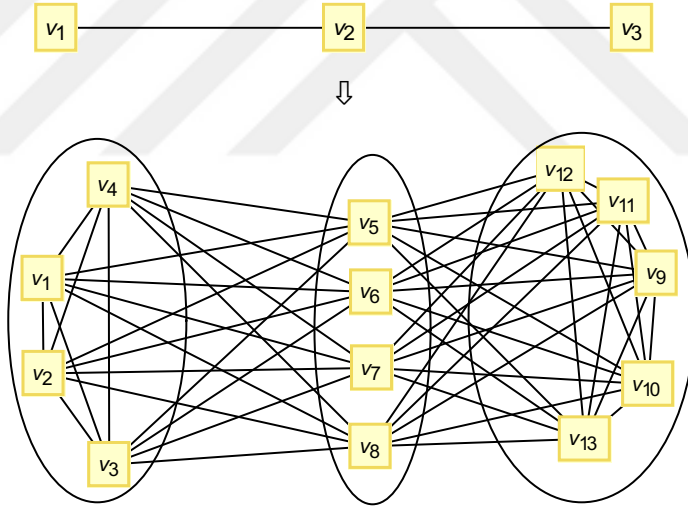
KARMA GENİŞLEME KAVRAMININ GRAF KARAKTERİZASYONUNDA KULLANIMI

4.1. Karma Genişleme

Tanım 4.1.1. Mertebesi n olan bir $G = (V, E)$ grafının nokta kümesi $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ olsun. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ için v_i noktasının dönüştürüldüğü klik yada ko-klik $\pm q_i$ ile gösterilsin. Buna göre, " $v_i \sim v_j \Leftrightarrow q_i \sim q_j$ " koşuluyla oluşturulan yeni grafa G nin bir *karma genişlemesi* denir. Özel olarak G bir yol graf ise G nin bir karma genişlemesi $(\pm q_1, \dots, \pm q_n)$ biçiminde n -li sıralılar ile gösterilir [7].

Örnek

P_3 grafının bir $(4, -4, 5)$ karma genişlemesi aşağıdaki gibi olur.



Şekil 4.1. P_3 grafının karma genişlemesi

Not: Verilen tanım gereği, herhangi bir G grafının bağlantılı olması için gerek ve yeter koşulun G nin herhangi bir karma genişlemesinin bağlantılı olması sonucu kolaylıkla görülebilir.

Örnek

K_2 grafının $(-p, -q)$ tipinde bir karma genişlemesi $K_{p,q}$ iki parçalı tam grafi oluşturur.

$(-p, q)$ tipinde bir karma genişlemesi ise $K_{p, \underbrace{1, \dots, 1}_{q \text{ tane}}}$ çok parçalı tam grafi oluşturur. P_3

grafının $(p, 1, -q)$ tipinde bir karma genişlemesi ise K_{p+1}^q ananas grafi oluşturur.

Önerme 4.1.1. Mertebesi n olan bir G grafi verilsin. G nin herhangi bir karma genişlemesi H ise, H grafinin en fazla n adet özdeğeri -1 ya da 0 dan farklı olabilir [7].

İspat

$\forall i, q_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olmak üzere H, G nin q_1, \dots, q_n tipinde bir karma genişlemesi olsun. G ve H nin komşuluk matrisleri sırasıyla A ve B olsun. A nın i -inci köşegen bileşeni $q_i > 0$ ise $J - I$ ile; $q_i < 0$ ise de sıfır bloğu ile yer değiştirmesi ve aynı zamanda A nın köşegen dışındaki bileşenlerinin de duruma göre sıfır ya da 1 lardan oluşan bloklarla yer değiştirilmesiyle B matrisi elde edilebilir. B nin bu durumdaki bloklamaya göre elde edilen $n \times n$ tipindeki bölüm matrisini Q ile gösterelim. Q nun oluşturulması için uygulanan bu bloklama, B nin bir bloğundan birlerden oluşan bir J bloğu çıkarıldığında, B nin özdeğerleri değişmeyecektir. Bu şekilde devam edilerek B deki bütün sıfırdan farklı bloklar köşegen matrisler haline getirildiğinde; köşegenin tamamı -1 ya da 0 lardan oluşan bir matrise dönüşmüş olur.

Lemma 4.1.1. Verilen bir G grafinin bağlantılı olması için gerekli ve yeter koşul G nin herhangi bir karma genişlemesinin bağlantılı olmasıdır [7].

4.2. Tam Olarak 3 Adet Özdeğeri -1 ve 0 dan Farklı Olan Bağlantısız Graflar

Tam olarak 3 adet özdeğeri -1 ve 0 dan farklı olan tüm grafların kümesini W ile gösterelim ve tam olarak 3 adet özdeğeri -1 ve 0 dan farklı olan ve izole nokta içermeyen tüm grafların kümesini W' ile gösterelim.

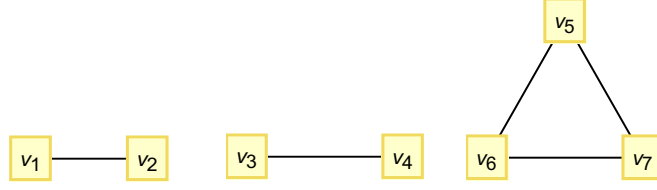
W' kümesindeki bağlantısız graflar ve karakteristik polinomları aşağıdaki tablo yardımıyla şematize edilir.

Tablo 4.1 W' kümesindeki bağlantısız graflar ve karakteristik polinomları [7]

W' kümesindeki bağlantısız graflar	
Graf Türü	Karakteristik Polinomu
Üç tam grafin ayrık birleşimi $K_p \cup K_q \cup K_r$ öyle ki $p, q, r \geq 2$	$(x - p + 1)(x - q + 1)(x - r + 1)(x + 1)^{p+q+r-3}$
Bir tam graf ve iki parçalı tam grafin ayrık birleşimi $K_p \cup K_{q,r}$ öyle ki $p, q \geq 2, r \geq 1$	$x^{q+r-2}(x + 1)^{p-1}(x^3 - (p - 1)x^2 - qrx + pqr - qr)$
Bir tam graf ve bir tam bölünmüş grafin ayrık birleşimi $K_p \cup CS_{q,r}$ öyle ki $p, q, r \geq 2$	$x^{r-1}(x + 1)^{p+q-2}(x^3 - (p + q - 2)x^2 + (qr - (p - 1)(q - 1))x + pqr - qr)$

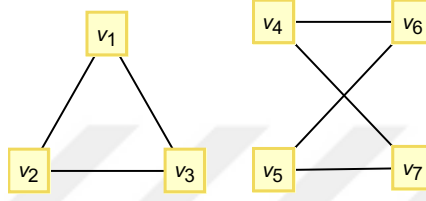
Şimdi bu tabloya bir örnek verelim.

Örnek



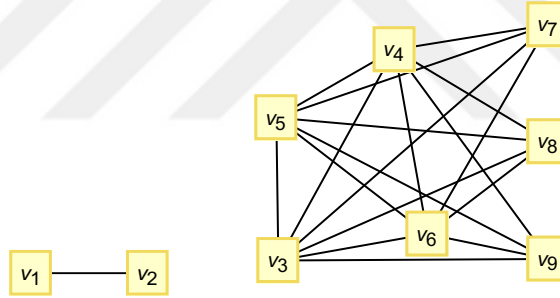
Şekil 4.2. $K_2 \cup K_2 \cup K_3$ grafi

$$\text{char}\left(A(K_p \cup K_q \cup K_r)\right) = \text{char}\left(A(K_2 \cup K_2 \cup K_3)\right) = (x-1)^2(x-2)(x+1)^4$$



Şekil 4.3. $K_3 \cup K_{2,2}$ grafi

$$\text{char}\left(A(K_p \cup K_{q,r})\right) = \text{char}\left(A(K_3 \cup K_{2,2})\right) = x^2(x+1)^2(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)$$



Şekil 4.4. $K_2 \cup CS_{4,3}$ grafi

$$\text{char}\left(A(K_p \cup CS_{q,r})\right) = \text{char}\left(A(K_2 \cup CS_{4,3})\right) = x^2(x+1)^4(x^3 - 4x^2 - 9x + 12)$$

Yukarıdaki Tablo 4.1 de verilen tüm yapılara örnek gösterilmiş olup bu yapılar yanlarında verilen karakteristik polinom yapılarını desteklemektedir. ■

Üç tam grafin ayrık birleşiminin spektrumuna göre belirlenebilir olduğu literatürde iyi bilinen bir durumdur. En küçük özdeğerinin -1 e eşit olması da durumun ispatı için yeterli bir veridir. İki parçalı tam graflar için Lemma 2.3.5 yardımıyla her zaman spektrumuyla belirlenebilir olmadığını söyleyebiliriz. Dolayısıyla bir tam graf ve iki parçalı tam grafin ayrık birleşimi de her zaman spektrumu ile belirlenebilir değildir. Bir tam graf ve bir tam bölünmüş grafin ayrık birleşimi için de benzer durum söz konusudur. Dolayısıyla bir tam graf ve bir tam bölünmüş grafin ayrık birleşimi de her zaman spektrumuna göre belirlenebilir değildir.

4.3. Tam Olarak 3 Adet Özdeğeri -1 ve 0 dan Farklı Olan Bağlantılı Graflar

W' kümesindeki bağlantılı graflar ve karakteristik polinomları aşağıdaki tablo yardımıyla şematize edilir.

Tablo 4.2. W' kümesindeki bağlantılı graflar ve karakteristik polinomları [7]

W' kümesindeki bağlantılı graflar	
Graf Türü	Karakteristik Polinomu
Üç Parçalı Tam Graf $K_{p,q,r}$ öyle ki $p, q, r \geq 2$	$x^{p+q+r-3}(x^3 - (pq + qr + pr)x - 2pqr)$
K_3 tam grafının $(-p, -q, r)$ tipinde bir karma genişlemesi öyle ki $p, q, r \geq 2$	$x^{p+q-2}(x+1)^{r-1}(x^3 - (r-1)x^2 - (pq + qr + pr)x - (r+1)pq)$
G^* kümesi (-1 ve 0 dışındaki üç özdeğerinin ikisi pozitif biri negatif olan tüm graflar)	Tablo 4.3 de detaylı biçimde verilmiştir.

Teorem 4.3.1. Herhangi bir H grafının G^* kümesine (-1 ve 0 dışındaki tüm üç özdeğerinin ikisi pozitif biri negatif olan graflar) ait iki parçalı bir graf ise H aşağıdakilerden biridir [13].

- i. $p, q > 0$ ve $r > 1$ olmak üzere P_3 grafının sırasıyla $(-p, -q, r)$, $(-p, q, r)$, $(p, -q, r)$ ve (p, q, r) karma genişlemeleri
- ii. $p, q, r > 0$ olmak üzere P_4 grafının sırasıyla $(p, -3, -2, -2)$, $(-2, q, r, -2)$ ve $(p, -2, r, -3)$ karma genişlemeleri
- iii. P_4 grafının $(p, q, -r, s)$ karma genişlemesi öyle ki burada $r > 0$ ve $(p, q, s) \in \{(3,3,6), (3,4,4), (3,6,3), (4,2,6), (4,3,3), (4,6,2), (5,2,4), (5,4,2), (7,2,3), (7,3,2)\}$
- iv. P_4 grafının (p, q, r, s) karma genişlemesi öyle ki burada $(p, q, r, s) \in \{(2,2,2,7), (2,2,3,4), (2,2,6,3), (2,3,2,5), (2,3,4,3), (2,5,2,4), (2,5,3,3), (3,2,2,3)\}$
- v. $p, q, r > 0$ olmak üzere P_5 grafının $(1, p, -q, r, 1)$ karma genişlemesi

Teorem yardımıyla G^* kümesi aşağıdaki tabloda iki parçalı olup olmama durumuna göre şematize edilir.

Tablo 4.3. G^* kümesi [7]

G^* kümesi	
İki Parçalı Olmayan Graflar	İki Parçalı Graflar
P_3 grafinin sırasıyla $(-l, -m, n), (-l, m, n), (l, -m, n)$ ve (l, m, n) karma genişlemeleri $p, q \geq 1, n \geq 2$	P_4 grafinin sırasıyla $(-2, 1, 1, -2), (1, -2, 1, -3), (1, -3, -2, -2)$ karma genişlemeleri
P_4 grafinin sırasıyla $(p, -3, -2, -2), (-2, q, r, -2), (p, -2, r, -3)$ karma genişlemeleri $p, q, r \geq 1$	
P_4 grafinin sırasıyla $(2, 2, 2, 7), (2, 2, 3, 4), (2, 2, 6, 3), (2, 3, 2, 5), (2, 3, 4, 3), (2, 5, 2, 4), (2, 5, 3, 3), (3, 2, 2, 3)$ karma genişlemeleri	P_5 grafinin $(1, 1, -r, 1, 1)$ karma genişlemesi $r \geq 2$
P_5 grafinin $(1, p, -q, r, 1)$ karma genişlemesi $p, r > 1, q \geq 1$	

4.3.1 $K_{p,q,r}$ Üç Parçalı Tam Graf ve $K_{p,q,1,\dots,1}$ Çok Parçalı Tam Grafi

[14] de çok parçalı tam graflar ile ilgili elde edilen sonuçlar Lemma 2.3.2 verilmiştir. [15] de çok parçalı tam grafların spektrumları üzerinde çalışmışlardır ve aşağıdaki teorem ve sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 4.3.2. Hiçbir G çok parçalı tam grafinin izole nokta içermeyen bir kospektral eşi yoktur [15].

Sonuç 4.3.1. Çok parçalı tam iki graf izomorf değilse, kospektral değildir [15].

Daha sonra [16] da çok parçalı tam grafların izole noktalarla birlikte oluşturdukları ayrık birleşimlerin spektral karakterizasyonu üzerine yaptıkları çalışmada Lemma 2.3.3 de verilen sonucu ve aşağıda verilen sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 4.3.3. $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}^+$ ve $s \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olsun. Buna göre $K_{n_1} \cup_s K_1$ grafinin spektrumuna göre belirlenebilir olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen denklemin $a = n_1 + \dots + n_k$ dışında uygun bir çözümünün olmamasıdır.

$$(x - n_1)(x - n_2) \dots (x - n_k) + (n_1 + \dots + n_k - a)x^{k-1} = 0 \quad \text{öyle ki}$$

$a \in \{k, k + 1, \dots, n_1 + \dots + n_k + s\}$ [16].

Teorem 4.3.4. p_1, \dots, p_s asal sayılar ve $t \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olsun. Buna göre, $K_{\underbrace{1, \dots, 1}_{t}, p_1, p_s}$ grafi spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır [16].

Sonuç 4.3.2. p_1, \dots, p_s asal sayılar olsun. Buna göre, K_{p_1, \dots, p_s} grafi spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır [16].

Teorem 4.3.5. $s, d \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Buna göre $0 \leq r < s$ olmak üzere $K_{\underbrace{d+1, \dots, d+1}_r, \underbrace{d, \dots, d}_{s-r}}$ grafi spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır [16].

Sonuç 4.3.3. $d, t \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Buna göre $K_{\underbrace{d, \dots, d}_t}$ grafi spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır [16].

[16] da iki parçalı tam grafların spektrumuna göre belirlenebilir olup olmadığı durumların incelenebilmesi için Teorem 4.3.2 te gerekli ifadeyi elde etmiştir. Fakat diğer elde ettikleri sonuçlar üç parçalı graflar için çok fazla netlik taşımamaktadır. Örneğin üç parçadaki nokta sayılarının her birinin asal sayı olması koşulu altında bu grafin spektrumu ile belirlenebileceğini söylemişlerdir. Bunun dışında diğer sonuç olarak ise bu üç parçada aynı sayıda (ya da bu sayılar arasındaki fark 1e eşit olduğunda) nokta bulunduğu takdirde spektrumu ile belirlenebileceğini söylemişlerdir. Ayrıca aşağıda verilen üç parçalı tam graflar ile ilgili gözlem de yine aynı çalışmada elde edilmiştir.

Sonuç 4.3.4. $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Buna göre $K_{n(2n-1)^2, (2n-1), (2n-1)}$ grafi ile $K_{n, (2n-1)^2, (2n-1)^2} \cup 4(n-1)^3 K_1$ grafi kospektraldir [16].

Önerme 4.3.1. r -parçalı bir tam graf G olsun. Buna göre, $n_1 = \dots = n_{r-2} = 1$ ise G spektrumuna göre belirlenebilir bir graftır [17].

Lemma 4.3.1. $k, p, q \in \mathbb{Z}^+$ ve $k, p, q > 1$ olmak üzere $K_{p, q, \underbrace{1, \dots, 1}_k}$ grafi spektrumu ile belirlenebilir bir graftır [7].

İspat

$K_{p, q, \underbrace{1, \dots, 1}_k}$ grafinin karakteristik polinomu $P(x)$ aşağıdaki gibidir.

$$P(x) = x^{p+q-2}(x+1)^{k-1}[x^3 - (k-1)x^2 - (kp + kq + pq)x - (k+1)pq]$$

$h(x) = x^3 - (k-1)x^2 - (kp + kq + pq)x - (k+1)pq$ diyelim. Buna göre -1 ,

$h(x)$ denkleminin bir kökü olamayacaktır. $K_{p, q, \underbrace{1, \dots, 1}_k}$ grafi ile $K_{b, c, \underbrace{1, \dots, 1}_a} \cup \alpha K_1$ grafinin

kospektral olduğunu varsayalım. Böylece,

$$p + q - 2 = b + c - 2 + \alpha$$

$$k - 1 = a - 1$$

$$kp + kq + pq = ab + ac + bc$$

$$(k + 1)pq = (a + 1)bc$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$k = a$$

$$\Rightarrow pq = bc$$

$$\Rightarrow p + q = b + c$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

olur. Bu da $K_{p,q,1,\dots,1}$ grafinin spektrumuna göre belirlenebilir bir graf olduğunu gösterir

[17].

4.3.2. G^* Kümesindeki Graflar

G^* kümesine ait tüm graf türlerinin karakteristik polinomları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.4. P_3 grafinin karma genişlemeleri ve karakteristik polinomları [7]

P_3 Grafinin Karma Genişlemeleri	Karakteristik Polinomları
$(-l, -m, n)$ karma genişlemesi	$x^{l+m-2}(x+1)^{n-1}[x^3 - (n-1)x^2 - (lm+mn)x + lmn - lm]$
$(l, -m, n)$ karma genişlemesi	$x^{m-1}(x+1)^{l+n-2}[x^3 - (l+n-2)x^2 - (mn - ln + lm + l + n - 1)x + 2lmn - lm - mn]$
$(-l, m, n)$ karma genişlemesi	$x^{l-1}(x+1)^{m+n-2}[x^3 - (m+n-2)x^2 - (m+n+lm-1)x + lmn - lm]$
(l, m, n) karma genişlemesi	$(x+1)^{l+m+n-2}[x^3 - (l+m+n-3)x^2 - (2l+2m+2n-ln-3)x + lmn + ln - l - m - n + 1]$

Tablo 4.5. P_4 grafinin karma genişlemeleri ve karakteristik polinomları [7]

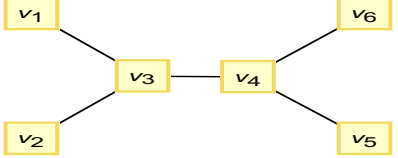
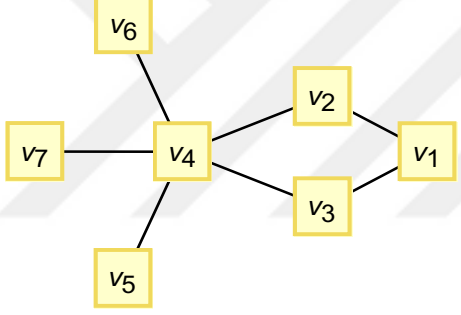
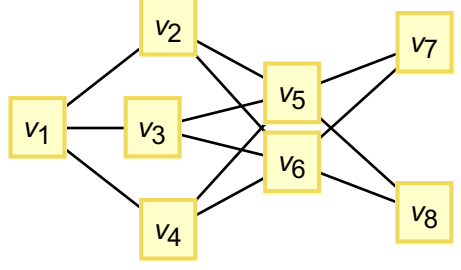
P_4 Grafinin Karma Genişlemeleri	Karakteristik Polinomları
$(m, -3, -2, -2)$ karma genişlemesi	$x^4(x+1)^m[x^3 - mx^2 - (2m+10)x + 12m]$
$(-2, m, n, -2)$ karma genişlemesi	$x^2(x+1)^{m+n-1}[x^3 - (m+n-1)x^2 - (2m+2n)x + 4mn]$
$(n, -2, m, -3)$ karma genişlemesi	$x^3(x+1)^{m+n-1}[x^3 - (m+n-1)x^2 - (5m+2n-mn)x + 6mn]$
$(3,3, -m, 6)$ karma genişlemesi	$x^m(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - (9m-15)x + 45m + 25]$
$(3,4, -m, 4)$ karma genişlemesi	$x^m(x+1)^8[x^3 - 8x^2 - (8m-9)x + 40m + 18]$
$(3,6, -m, 3)$ karma genişlemesi	$x^m(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - (9m-6)x + 45m + 16]$
$(4,2, -m, 6)$ karma genişlemesi	$x^m(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - (8m-15)x + 40m + 25]$
$(4,3, -m, 3)$ karma genişlemesi	$x^m(x+1)^7[x^3 - 7x^2 - (6m-4)x + 30m + 12]$
$(4,6, -m, 2)$ karma genişlemesi	$x^m(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - (8m+1)x + 40m + 9]$
$(5,2, -m, 4)$ karma genişlemesi	$x^m(x+1)^8[x^3 - 8x^2 - (6m-9)x + 34m + 18]$
$(5,4, -m, 2)$ karma genişlemesi	$x^m(x+1)^8[x^3 - 8x^2 - (6m+1)x + 34m + 8]$
$(7,2, -m, 3)$ karma genişlemesi	$x^m(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - (5m-6)x + 37m + 16]$
$(7,3, -m, 2)$ karma genişlemesi	$x^m(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - (5m+1)x + 37m + 9]$
$(2,2,2,7)$ karma genişlemesi	$x(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - x + 65]$
$(2,2,3,4)$ karma genişlemesi	$x(x+1)^7[x^3 - 7x^2 - 5x + 51]$
$(2,2,6,3)$ karma genişlemesi	$x(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - 9x + 73]$
$(2,3,2,5)$ karma genişlemesi	$x(x+1)^8[x^3 - 8x^2 - x + 68]$
$(2,3,4,3)$ karma genişlemesi	$x(x+1)^8[x^3 - 8x^2 - 7x + 74]$
$(2,5,2,4)$ karma genişlemesi	$x(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - x + 89]$
$(2,5,3,3)$ karma genişlemesi	$x(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - 6x + 94]$
$(3,2,2,3)$ karma genişlemesi	$x(x+1)^6[x^3 - 6x^2 - 3x + 40]$

Tablo 4.6. P_5 grafinin karma genişlemesi ve karakteristik polinomları [7]

P_5 Grafinin Karma Genişlemesi	Karakteristik Polinomu
$(1, l, -m, n, 1)$ karma genişlemesi	$x^m(x+1)^{l+n-1}[x^3 - (l+n-1)x^2 - (mn - ln + lm + l + n)x + 2lmn + ln]$

4.3.2.1 G^* Kümesindeki İki Parçalı Graflar

Tablo 4.7. G^* kümesindeki iki parçalı graflar ve karakteristik polinomları [7]

<p style="text-align: center;">S</p>  <p style="text-align: center;">Şekil 4.5. S grafi</p>	$x^6 - 5x^4 + 4x^2 = x^2(x + 1)(x^3 - x^2 - 4x + 4)$ $spec(S) = \{-2, -1, 0, 0, 1, 2\}$
<p style="text-align: center;">L</p>  <p style="text-align: center;">Şekil 4.6. L grafi</p>	$x^7 - 7x^5 + 6x^3 = x^3(x + 1)(x^3 - x^2 - 6x + 6)$ $spec(L) = \{-2.44, -1, 0, 0, 0, 1, 2.44\}$
<p style="text-align: center;">M</p>  <p style="text-align: center;">Şekil 4.7. M grafi</p>	$x^8 - 13x^6 + 12x^4 = x^4(x + 1)(x^3 - x^2 - 12x + 12)$ $spec(M) = \{-3.46, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 3.46\}$

<p style="text-align: center;">Şekil 4.8. H grafi</p>	<p> $r = 1$ için $x^5 - 4x^3 + 3x$ $spec(H) = \{-1.74, -1, 0, 1, 1.73\}$ $r = 2$ için $x^6 - 6x^4 + 5x^2$ $spec(H) = \{-2.23, -1, 0, 0, 1, 2.23\}$ $r = 3$ için $x^7 - 4x^6 + 8x^5 + 7x^3$ $spec(H) = \{-2.64, -1, 0, 0, 0, 1, 2.64\}$ $r = 4$ için $x^8 - 10x^6 + 9x^4$ $spec(H) = \{-3, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 3\}$ $r = 5$ için $x^9 - 12x^7 - 11x^5$ $spec(H) = \{-3.31, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 3.31\}$ $r = 6$ için $x^{10} - 14x^8 + 13x^6$ $spec(H) = \{-3.6, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 3.6\}$ Genel formu, $x^r(x+1)(x^3 - x^2 - (2r+2)x + 2r + 1)$ </p>
--	--

4.3.2.2. G^* Kümesindeki İki Parçalı Olmayan Graflar

- i. $p, q > 0$ ve $r > 1$ olmak üzere P_3 grafinin sırasıyla $(-p, -q, r)$, $(-p, q, r)$, $(p, -q, r)$ ve (p, q, r) karma genişlemeleri
- ii. $p, q, r > 1$ olmak üzere P_4 grafinin sırasıyla $(p, -3, -2, -2)$, $(-2, q, r, -2)$ ve $(p, -2, r, -3)$ karma genişlemeleri
- iii. P_4 grafinin karma genişlemeleri öyle ki burada $r > 0$ ve $(p, q, s) \in \{(3,3,6), (3,4,4), (3,6,3), (4,2,6), (4,3,3), (4,6,2), (5,2,4), (5,4,2), (7,2,3), (7,3,2)\}$
- iv. P_4 grafinin karma genişlemeleri öyle ki burada $(p, q, r, s) \in \{(2,2,2,7), (2,2,3,4), (2,2,6,3), (2,3,2,5), (2,3,4,3), (2,5,2,4), (2,5,3,3), (3,2,2,3)\}$
- v. $r > 0$ ve $p, q > 1$ olmak üzere P_5 grafinin $(1, p, -q, r, 1)$ karma genişlemeleri

5. BÖLÜM

P_3 YOL GRAFININ KARMA GENİŞLEMESİ

5.1. P_3 Grafının Karma Genişlemeleri

H , P_3 grafının t_1, t_2, t_3 tipinde bir karma genişlemesi olsun. Buna göre H grafının komşuluk matrisi aşağıdaki formda olur.

$$A(H) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(J_{|t_1|} - I_{|t_1|}) & J & 0 \\ J & \varepsilon_2(J_{|t_2|} - I_{|t_2|}) & J \\ 0 & J & \varepsilon_3(J_{|t_3|} - I_{|t_3|}) \end{bmatrix}$$

Burada $i = 1, 2, 3$ olmak üzere $t_i > 1$ ise $\varepsilon_i = 1$ aksi takdirde $\varepsilon_i = 0$ olur. $A(H)$ matrisinin formundan anlaşıldığı üzere, eşit parçalanışı yazılabilmesi mümkündür ve aşağıdaki gibidir.

$$Q = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(|t_1| - 1) & |t_2| & 0 \\ |t_1| & \varepsilon_2(|t_2| - 1) & |t_3| \\ 0 & |t_2| & \varepsilon_3(|t_3| - 1) \end{bmatrix}$$

Eğer $n = |t_1| + |t_2| + |t_3|$, H grafının mertebesi ise $q(x) = x^3 - bx^2 - cx + d$, Q matrisinin karakteristik polinomu olur. Böylece $A(H)$ matrisinin karakteristik polinomu $p(x) = q(x)(x+1)^b x^{n-b-3}$ olur. P_3 grafının bitim noktalarının birer ko-klik oluşturmasıyla elde edilen karma genişleme, aslında P_2 grafının bir karma genişlemesidir. Bu durumda elde edilen genişlemeye P_3 grafının düzgün olmayan karma genişlemesi denir ve burada $\det(Q) = 0$ olur. P_3 grafının diğer karma genişlemelerine de düzgün karma genişleme denir ve burada $\det(Q) \neq 0$ olur.

Önerme 5.1.1. P_3 grafının düzgün bir karma genişlemesinin kesin olarak iki pozitif özdeğeri ve -1 den küçük bir negatif özdeğeri vardır. [18]

İspat

Q matrisinin en az bir pozitif özdeğeri vardır ve $\det(Q) < 0$ olduğundan, Q matrisinin dolayısıyla da $A(H)$ matrisinin kesin olarak iki pozitif özdeğeri vardır. En küçük özdeğeri -1 e eşit olan bir graf yalnızca tam grafların ayırık birleşimi formunda olabileceğinden $A(H)$ matrisinin en küçük özdeğerinin -1 den küçük olduğunu söyleyebiliriz. ■

NOT: P_3 grafinin karma genişlemelerinin bazı özel formları vardır.

- $p, q > 0$ olmak üzere $(p, -1, q)$ tipinde bir karma genişleme bir ananas graf oluşturur.
- $p, q, r > 0$ olmak üzere (p, q, r) tipinde bir karma genişleme spektrumuna göre belirlenebilir.
- P_3 grafinin düzgün olmayan bir karma genişlemesi iki parçalı tam graf ya da bölünmüş bir graftır.

Önerme 5.1.2. P_3 grafinin aşağıda verilen türdeki karma genişlemeleri izole noktalar yardımıyla verilen graflar ile ko-spektral hale getirilebilir [18].

- $p \geq 2, q \geq 1$ olmak üzere $K_p \cup CS_{p,2q}$ ile $(p, -q, p)$ karma genişlemesi
- $p \geq 3$ olmak üzere, $K_{p(p-1)} \cup K_{p-1,p-1}$ ile $(p, (p-1)(p-2), p)$ karma genişlemesi
- $p \geq 2, q \geq 1$ ve $r = 1 + \frac{pq}{p+q-1}$ olmak üzere $K_p \cup CS_{p+q-1,r}$ ile (p, q, p) karma genişlemesi

Önerme 5.1.3. $p, q \geq 1$ ve $\frac{q(2q-p-1)}{q-p} \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, P_3 grafinin $(p, -q, \frac{q(2q-p-1)}{q-p})$ ve $(-q, 2q, \frac{p(2q-p-1)}{q-p})$ karma genişlemeleri izomorf olmayan kospektral graflardır [18].

Bu sonuçların elde edilmesinden sonra ise nokta sayısı 25 ile kısıtlanarak P_3 grafinin tüm karma genişlemeleri ile ko-spektral eşleri bilgisayar yardımıyla üretilmiştir. Elde edilen listede 10000 den fazla graf bulunmaktadır. Bu graflar ilk önce b, c, d katsayılarına göre alfabetik olarak sıralanmıştır. Sonrasında ise yukarıdaki önermelerde elde edilen sonuçların dışında kalan ve en az bir ko-spektral eşe sahip olan graflar tespit edilerek tablolar halinde aşağıda listelenmiştir.

Tablo 5.1. P_3 grafinin en fazla 25 noktaya sahip karma genişlemeleri ve ko-spektral eşleri [7]

b	c	d	TÜR	p	q	r	s	n
2	10	14	$(-p, q, r)$	7	1	3		11
2	10	14	$(1, p, -q, r, 1)$	1	3	2		8
3	8	12	$(-p, q, r)$	4	1	4		9
3	8	12	$(-p, q, r, -s)$	2	1	3	2	8
3	9	15	$(-p, q, r)$	5	1	4		10
3	9	15	$(1, p, -q, r, 1)$	1	2	3		8
3	10	12	$(-p, q, r)$	3	2	3		8
3	10	12	$K_p + CS_{q,r}$	2	3	4		9
3	14	18	$(-p, q, r)$	3	2	4		9
3	14	18	$(-p, q, -r, s)$	3	3	2	1	9
3	16	24	$(-p, -q, r)$	4	2	4		10
3	16	24	$(-p, q, r)$	6	2	3		11
3	16	36	$(-p, q, r)$	12	1	4		17
3	16	36	$(-p, -q, -r, s)$	2	2	3	3	10
3	16	36	$(1, p, -q, r, 1)$	2	4	2		10
3	16	36	$K_p + CS_{q,r}$	3	2	9		14
3	18	28	$(-p, q, r)$	7	2	3		12
3	18	28	$(p, -q, r)$	2	4	3		9
3	28	60	$(-p, -q, r)$	10	2	4		16
3	28	60	$(1, p, -q, r, 1)$	2	2	4		13
3	28	60	$K_p + CS_{q,r}$	3	2	15		20
3	40	72	$(-p, -q, r)$	6	4	4		14
3	40	72	$(-p, q, r)$	18	2	3		23
3	52	108	$(-p, -q, r)$	9	4	4		17
3	52	108	$(1, p, -q, r, 1)$	2	13	2		19
4	9	12	$(-p, q, r)$	2	2	4		8
4	9	12	$K_p + CS_{q,r}$	2	4	3		9
4	15	30	$(-p, q, r)$	5	2	4		11
4	15	30	$(-p, -q, r)$	2	3	4		9

4	21	24	$(-p, -q, r)$	2 3 5	10
4	21	24	$K_p + CS_{q,r}$	2 4 6	12
4	23	54	$(-p, q, r)$	9 2 4	15
4	23	54	$K_p + CS_{q,r}$	3 3 9	15
4	39	102	$(-p, q, r)$	17 2 4	23
4	39	102	$(1, p, -q, r, 1)$	2 8 3	15
5	14	40	$(-p, q, r)$	8 1 6	15
5	14	40	$K_p + CS_{q,r}$	3 4 5	12
5	16	20	$(-p, -q, r)$	2 2 6	10
5	16	20	$K_p + CS_{q,r}$	2 5 4	11
5	18	48	$(-p, q, r)$	6 2 5	13
5	18	48	$K_p + CS_{q,r}$	3 4 6	13
5	24	90	$(-p, q, r)$	18 1 6	25
5	24	90	$K_p + CS_{q,r}$	4 3 10	17
5	28	88	$(-p, q, r)$	11 2 5	18
5	28	88	$(1, p, -q, r, 1)$	2 5 4	13
5	30	72	$(-p, q, r)$	8 3 4	15
5	30	72	$K_p + CS_{q,r}$	3 4 9	16
5	36	90	$(-p, -q, r)$	6 3 6	15
5	36	90	$(-p, q, r)$	10 3 4	17
5	36	120	$(-p, -q, r)$	12 2 6	20
5	36	120	$(-p, q, r)$	15 2 5	22
5	42	144	$(-p, q, r)$	18 2 5	15
5	42	144	$K_p + CS_{q,r}$	4 3 16	12
5	16	20	$(-p, -q, r)$	2 2 6	25
5	16	20	$K_p + CS_{q,r}$	2 5 4	23
5	57	153	$(-p, q, r)$	17 3 4	19
5	57	153	$(p, -q, r)$	2 12 4	20
6	17	50	$(-p, q, r)$	5 2 6	13
6	17	50	$K_p + CS_{q,r}$	3 5 5	13
6	19	48	$(-p, q, r)$	4 3 5	12

6	19	48	$(p, -q, r)$	2 3 6	11
6	19	60	$(-p, q, r)$	6 2 6	14
6	19	60	$(-p, q, -r, s)$	3 5 2 2	12
6	22	60	$(-p, q, r)$	5 3 5	13
6	22	60	$K_p + CS_{q,r}$	3 5 6	14
6	25	90	$(-p, q, r)$	9 2 6	17
6	25	90	$(1, p, -q, r, 1)$	2 4 5	13
6	28	84	$(-p, -q, r)$	7 2 7	16
6	28	84	$(-p, q, r)$	7 3 5	15
6	31	120	$(p, -q, r)$	4 5 4	13
6	31	120	$(-p, q, r)$	12 2 6	20
6	40	132	$(-p, q, r)$	11 3 5	19
6	40	132	$(p, -q, r)$	3 6 5	14
6	44	180	$(-p, -q, r)$	15 2 7	24
6	44	180	$(1, p, -q, r, 1)$	3 7 4	16
6	50	90	$(-p, -q, r)$	3 5 7	15
6	50	90	$(1, p, -q, r, 1)$	1 7 6	16
6	51	180	$(-p, -q, r)$	10 3 7	20
6	51	180	$K_p + CS_{q,r}$	4 4 15	23
6	55	192	$(-p, q, r)$	16 3 5	24
6	55	192	$(p, -q, r)$	4 8 4	16
7	16	48	$(-p, q, r)$	4 2 7	13
7	16	48	$(-p, q, r, -s)$	2 2 6 2	12
7	20	60	$(-p, q, r)$	4 3 6	13
7	20	60	$K_p + CS_{q,r}$	3 6 5	14
7	20	84	$(-p, q, r)$	12 1 8	21
7	20	84	$(1, p, -q, r, 1)$	2 3 6	13
7	23	105	$(-p, q, r)$	15 1 8	24
7	23	105	$K_p + CS_{q,r}$	4 5 7	16
7	26	108	$(-p, q, r)$	9 2 7	18
7	26	108	$(p, -q, r)$	3 4 6	13

7	28	120	$(-p, q, r)$	10	2	7	19	
7	28	120	$K_p + CS_{q,r}$	4	5	8	17	
7	30	42	$(-p, -q, r)$	2	3	8	13	
7	30	42	$(-p, q, -r, s)$	3	7	2	1	13
7	33	63	$(-p, -q, r)$	3	3	8	14	
7	33	63	$(1, p, -q, r, 1)$	1	4	7	14	
7	35	135	$(-p, q, r)$	9	3	6	18	
7	35	135	$(p, -q, r)$	3	5	6	14	
7	38	150	$(-p, q, r)$	10	3	6	19	
7	38	150	$K_p + CS_{q,r}$	4	5	10	19	
7	64	224	$(-p, -q, r)$	8	4	8	20	
7	64	224	$(-p, q, r)$	14	4	5	23	
7	68	240	$(-p, q, r)$	15	4	5	24	
7	68	240	$K_p + CS_{q,r}$	4	5	16	25	
7	78	210	$(-p, -q, r)$	5	6	8	19	
7	78	210	$(-p, q, r)$	14	5	4	23	
8	8	64	$(p, -q, r)$	3	2	7	12	
8	8	64	$K_p + K_{q,r}$	9	2	4	15	
8	13	32	$(-p, q, r)$	4	1	9	14	
8	13	32	(p, q, r)	2	6	3	11	
8	16	56	$(-p, q, r)$	7	1	9	17	
8	16	56	$K_p + CS_{q,r}$	3	7	4	14	
8	19	40	$(-p, q, r)$	2	5	5	12	
8	19	40	$(1, p, -q, r, 1)$	1	2	8	13	
8	27	126	$(-p, q, r)$	9	2	8	19	
8	27	126	$K_p + CS_{q,r}$	4	6	7	17	
8	33	144	$(-p, q, r)$	8	3	7	18	
8	33	144	$K_p + CS_{q,r}$	4	6	8	18	
8	38	160	$(-p, -q, r)$	10	2	9	21	
8	38	160	$(p, -q, r)$	3	5	7	15	
8	45	180	$(-p, q, r)$	9	4	6	19	

8	45	180	$K_p + CS_{q,r}$	4 6 10	20
8	51	126	$(-p, q, r)$	7 6 4	17
8	51	126	$K_p + CS_{q,r}$	3 7 9	19
8	54	270	$(-p, q, r)$	15 3 7	25
8	54	270	$(1, p, -q, r, 1)$	3 7 6	18
8	57	240	$(-p, -q, r)$	10 3 9	22
8	57	240	$(-p, q, r)$	12 4 6	22
8	68	256	$(-p, -q, r)$	8 4 9	21
8	68	256	$(p, -q, r)$	3 8 7	18
8	128	448	$(-p, -q, r)$	7 8 9	24
8	128	448	$(p, -q, r)$	3 14 7	24
9	3	61	(p, q, r)	3 3 6	12
9	3	61	$(p, q, -r, s)$	3 6 1 3	13
9	4	90	$(p, -q, r)$	4 2 7	13
9	4	90	$(p, q, -r, s)$	7 2 2 3	14
9	9	49	(p, q, r)	2 4 6	12
9	9	49	$(p, q, -r, s)$	4 6 1 2	13
9	15	135	$(p, -q, r)$	4 3 7	14
9	15	135	$K_p + K_{q,r}$	10 3 5 5	18
9	18	64	$(-p, q, r)$	4 2 9	15
9	18	64	$K_p + CS_{q,r}$	3 8 4	15
9	24	112	$(-p, q, r)$	7 2 9	18
9	24	112	$(1, p, -q, r, 1)$	2 3 8	15
9	24	126	$(-p, q, r)$	14 1 10	25
9	24	126	$K_p + CS_{q,r}$	4 7 6	17
9	28	72	$(-p, q, r)$	3 6 5	14
9	28	72	$(-p, -q, r)$	4 2 10	16
9	31	63	$(-p, q, r)$	3 7 4	14
9	31	63	$(1, p, -q, r, 1)$	1 3 9	15
9	31	147	$(-p, q, r)$	7 3 8	18
9	31	147	$K_p + CS_{q,r}$	4 7 7	18

9	34	96	$(-p, q, r)$	4 6 5	15
9	34	96	$K_p + CS_{q,r}$	3 8 6	17
9	34	144	$(-p, q, r)$	6 4 7	17
9	34	144	$(1, p, -q, r, 1)$	2 4 8	16
9	38	168	$(-p, q, r)$	7 4 7	18
9	38	168	$K_p + CS_{q,r}$	4 7 8	19
9	49	273	$(-p, q, r)$	13 3 8	24
9	49	273	$(1, p, -q, r, 1)$	3 6 7	18
9	64	216	$(-p, -q, r)$	6 4 10	20
9	64	216	$(-p, q, r)$	9 6 5	20
10	20	72	$(-p, q, r)$	3 3 9	15
10	20	72	$K_p + CS_{q,r}$	3 9 4	16
10	27	144	$(-p, q, r)$	8 2 10	20
10	27	144	$K_p + CS_{q,r}$	4 8 6	18
10	29	90	$(-p, q, r)$	3 6 6	15
10	29	90	$K_p + CS_{q,r}$	3 9 5	17
10	32	168	$(-p, q, r)$	7 3 9	19
10	32	168	$(p, -q, r)$	3 4 9	16
10	35	168	$(-p, -q, r)$	6 4 8	18
10	35	168	$K_p + CS_{q,r}$	4 8 7	19
10	59	240	$(-p, q, r)$	8 6 6	20
10	59	240	$K_p + CS_{q,r}$	4 8 10	22
10	63	364	$(-p, q, r)$	13 4 8	25
10	63	364	$(p, -q, r)$	4 7 8	19
10	66	330	$(-p, -q, r)$	11 3 11	25
10	66	330	$(-p, q, r)$	11 5 7	23
11	-12	108	$(1, p, -q, r, 1)$	6 1 6	15
11	-12	108	$K_p + CS_{q,r}$	7 6 3	16
11	24	108	$(-p, q, r)$	4 3 10	17
11	24	108	$(-p, q, r, -s)$	2 3 9 2	16
11	30	162	$(-p, q, r)$	6 3 10	19

11	30	162	$K_p + CS_{q,r}$	4 9 6	19
11	45	297	$(-p, q, r)$	11 3 10	24
11	45	297	$(1, p, -q, r, 1)$	3 5 9	19
11	48	216	$(-p, q, r)$	6 6 7	19
11	48	216	$K_p + CS_{q,r}$	4 9 8	21
11	52	320	$(-p, q, r)$	10 4 9	23
11	52	320	$K_p + CS_{q,r}$	5 8 10	23
12	1	132	$(p, -q, r)$	4 2 10	16
12	1	132	$K_p + CS_{q,r}$	12 2 6	13
12	19	66	$(-p, q, r)$	3 2 12	17
12	19	66	(p, q, r)	2 9 4	15
12	33	180	$(-p, q, r)$	5 4 10	19
12	33	180	$K_p + CS_{q,r}$	4 10 6	20
12	43	210	$(-p, q, r)$	5 6 8	19
12	43	210	$K_p + CS_{q,r}$	4 10 7	21
12	49	324	$(-p, q, r)$	9 4 10	23
12	49	324	$K_p + CS_{q,r}$	5 9 9	23
12	57	396	$(-p, q, r)$	11 4 10	25
12	57	396	$(p, -q, r)$	4 6 10	20
12	58	360	$(-p, q, r)$	9 5 9	23
12	58	360	$K_p + CS_{q,r}$	5 9 10	24
13	-7	165	(p, q, r)	6 4 6	16
13	-7	165	$K_p + CS_{q,r}$	12 3 5	20
13	26	96	$(-p, q, r)$	2 6 9	17
13	26	96	$K_p + CS_{q,r}$	3 12 4	19
13	54	360	$(-p, q, r)$	8 5 10	23
13	54	360	$K_p + CS_{q,r}$	5 10 9	24
14	-17	176	(p, q, r)	6 3 8	17
14	-17	176	$K_p + CS_{q,r}$	12 4 4	20
14	39	216	$(-p, q, r)$	4 6 10	20
14	39	216	$K_p + CS_{q,r}$	4 12 6	22

15	32	192	$(-p, q, r)$	4	4	13	21	
15	32	192	$(-p, q, r, -s)$	2	4	12	2	20
15	52	252	$(-p, q, r)$	4	9	8	21	
15	52	252	$(1, p, -q, r, 1)$	2	4	14	22	
16	-37	198	(p, q, r)	8	2	9	19	
16	-37	198	$K_p + CS_{q,r}$	12	6	3	21	
16	-28	288	$(p, -q, r)$	9	2	9	20	
16	-28	288	$K_p + CS_{q,r}$	9	9	4	22	
16	-19	252	$(p, -q, r)$	6	2	12	20	
16	-19	252	(p, q, r)	6	4	9	19	
16	-10	252	(p, q, r)	5	5	9	19	
16	-10	252	$K_p + CS_{q,r}$	15	3	6	24	
16	31	210	$(-p, q, r)$	7	2	16	25	
16	31	210	$K_p + CS_{q,r}$	4	14	5	23	
16	38	210	$(-p, q, r)$	3	7	11	21	
16	38	210	$(1, p, -q, r, 1)$	2	3	15	22	
16	72	256	$(-p, q, r)$	5	11	7	23	
16	72	256	$(1, p, -q, r, 1)$	2	5	15	24	
17	33	225	$(-p, q, r)$	5	3	16	24	
17	33	225	$K_p + CS_{q,r}$	4	15	5	24	
18	36	270	$(-p, q, r)$	6	3	16	25	
18	36	270	$(-p, q, -r, s)$	3	15	2	3	23
18	-17	420	$(-p, q, -r, s)$	3	5	2	14	24
18	-17	420	$K_p + CS_{q,r}$	8	12	5	25	
18	35	240	$(-p, q, r)$	4	4	16	24	
18	35	240	$K_p + CS_{q,r}$	4	16	5	25	
19	40	300	$(-p, q, r)$	4	5	16	25	
19	40	300	$(-p, q, r, -s)$	2	5	15	2	24

5.2. Ananas Grafların Tam Spektral Karakterizasyonu

K_p^q grafinın mertebesi $p + q$, kenar sayısı $\binom{p}{2} + q$, üçgen sayısı ise $\binom{p}{3}$ olur. Bütün bileşenleri 1 e eşit olan vektör 1 ve yine bütün bileşenleri 1 e eşit olan $l \times l$ tipindeki matris J_l ile gösterilsin. Aynı zamanda I birim matris olsun. Bu durumda K_p^q grafinın komşuluk matrisi,

$$A(K_p^q) = \begin{bmatrix} 0 & 1^T & 1^T \\ 1 & J_{p-1} - I & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

formunda olur.

Önerme 5.2.1 K_p^q için,

$\text{char}(A(K_p^q))(x) = x^{q-1}(x+1)^{p-2}(x^3 - x^2(p-2) - x(p+q-1) + q(p-2))$ biçimindedir [9].

Ispat:

K_p^q grafinın aynı noktaya eklenmiş q adet sarkıt noktası bulunduğundan, $A(K_p^q)$ matrisinin q adet satırı aynı olur. Yani bu matrisin rankı en fazla $p + 1$ e eşit olur. Böylece bu matrisin karakteristik polinomunun bir çarpanı x^{q-1} dir. Benzer şekilde $A + I$ matrisinin $p - 1$ adet satırı olduğundan, karakteristik polinomunun bir diğer çarpanı $(x + 1)^{p-2}$ olur. Aşağıda $A(K_p^q)$ matrisinin bir eşit parçalanışının bölüm matrisi verilmiştir. Yani $A(K_p^q)$ matrisi satır toplamları sabit olan bloklara ayrılmış ve buna göre her bileşeni bu toplamı gösteren Q bölüm matrisi oluşturulmuştur.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & p-1 & q \\ 1 & p-2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Q matrisinin karakteristik polinomu,

$$q(x) = \det(xI - Q) = x^3 - x^2(p-2) - x(p+q-1) + q(p-2)$$

olur. $q(x)$ in, $A(K_p^q)$ matrisinin karakteristik polinomunu böldüğü Teorem 2.3.1 de verilmiştir. K_p^q grafinın mertebesi $p + q$ ya eşit olduğundan,

$\text{der}(\text{char}(A(K_p^q))(x)) = p + q$ olur. Böylece,

$$\text{der}(x^{q-1}) + \text{der}((x+1)^{p-2}) + \text{der}(q(x)) = q - 1 + p - 2 + 3 = p + q$$

oldüğundan

$$\text{char}\left(A(K_p^q)\right)(x) = x^{q-1}(x+1)^{p-2}(x^3 - x^2(p-2) - x(p+q-1) + q(p-2))$$

elde edilir.

Teorem 5.2.1. $\alpha \geq 0$ olmak üzere $G = G_1 \cup G_2 \cup \alpha K_1$ grafi α adet izole nokta içeren ve mertebesi 1 den büyük olan iki bileşene daha sahip bir graf olsun. $p \geq 4$ ve $q \geq 3$ iken eğer G grafi K_p^q ananas grafına kospektral ise aşağıdaki formda olmak zorundadır.

$$G = K_t \cup CS_{m,n} \cup \alpha K_1 \text{ öyle ki burada } m = \frac{t^2-2t+n}{n-t} \text{ ve } \alpha = t(t-2) [19].$$

İspat

Tablo 4.1 den $G_1 \cup G_2$ nin ya $K_c \cup K_{d,e}$ ya da $K_t \cup CS_{m,n}$ formunda olduğu açıktır. Eğer $G_1 \cup G_2$, $K_c \cup K_{d,e}$ formunda ise o halde,

$$\begin{aligned} \text{char}(G)(x) &= x^{\alpha+d+e-2}(x+1)^{c-1}[x^3 - (c-1)x^2 - dex + (c-1)de] \\ &= x^{q-1}(x+1)^{p-2}[x^3 - (p-2)x^2 - (p+q-1)x + q(p-2)] \\ &= \text{char}(K_p^q)(x) \end{aligned}$$

olur. Bu yüzden,

$$\left. \begin{array}{l} q-1 = \alpha + d + e - 2 \\ p-2 = c-1 \\ p+q-1 = de \\ q(p-2) = (c-1)de \end{array} \right\} \Rightarrow c = 0 \text{ bu bir çelişkidir.}$$

elde edilir.

Eğer $G_1 \cup G_2$, $K_t \cup CS_{m,n}$ formunda ise o halde,

$$\begin{aligned} \text{char}(G)(x) &= x^{\alpha+n-1}(x+1)^{m+t-2}(x-t+1)[x^2 + (1-m)x - mn] \\ &= x^{q-1}(x+1)^{p-2}[x^3 - (p-2)x^2 - (p+q-1)x + q(p-2)] \\ &= \text{char}(K_p^q)(x) \end{aligned}$$

olur. Öyleyse,

$$\left. \begin{array}{l} q-1 = \alpha + n - 1 \\ p-2 = m + t - 2 \\ p+q-1 = mn + (t-1)(1-m) \\ q(p-2) = (t-1)mn \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{t^2-2t+n}{n-t} \text{ ve } \alpha = t(t-2)$$

elde edilir

Teorem 5.2.2. K_p^q ananas grafinin 1 den büyük bir tamsayı özdeğeri α olsun. $m(n - \alpha - 1) = \alpha^2 + n - 1$ olacak biçiminde her $(m, n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ için $p = m + \alpha + 1$ ve $q = m(n - \alpha - 1)$ ise K_p^q ananas grafi spektrumuna göre belirlenebilen bir graf değildir [19].

Sonuç 5.2.1. $K_{2p}^{p^2}$ ananas grafi, P_3 yol grafinin $(p, -p, p)$ tipindeki karma genişlemesine $p(p - 1)$ adet izole nokta eklenmesiyle oluşan graf ile kospektraldir [18].

Teorem 5.2.4. $\alpha \geq 0$ olmak üzere $G = G_1 \cup \alpha K_1$ grafi α adet izole nokta içeren ve mertebesi 1 den büyük olan yalnızca bir bileşene daha sahip bir graf olsun. $p \geq 4$ ve $q \geq 3$ iken $l, m, n \in \mathbb{Z}^+$ için eğer G grafi K_p^q ananas grafına kospektral ise aşağıdaki formlardan birinde olmak zorundadır [18].

- G_1, P_3 yol grafinin $(l, -m, n)$ tipinde bir karma genişlemesidir öyle ki burada $m = \frac{\ln(l+n-2)}{l(l-1)+n(n-1)}$ ve $\alpha = 2\ln \frac{(l-1)(n-1)}{l(l-1)+n(n-1)}$ dir.
- G_1, P_3 yol grafinin (l, m, n) tipinde bir karma genişlemesidir öyle ki burada $lmn = (l + m + n - ln - 1)(l + m + n - 2)$ ve $\alpha = m + n - 3$ tür.
- G_1, P_4 yol grafinin $(-2, m, n, -2)$ tipinde bir karma genişlemesidir öyle ki burada $(m - n)^2 = m + n$ ve $\alpha = m + n - 3$ tür.
- G_1, P_5 yol grafinin $(1, l, -m, n, 1)$ tipinde bir karma genişlemesidir öyle ki burada $m = \frac{\ln(l+n-2)}{l(l-1)+n(n-1)}$ ve $\alpha = m(l + n - 1) - ln - 1$ dir.
- G_1, P_4 yol grafinin $(3, -3, -2, -2)$ tipinde bir karma genişlemesidir öyle ki burada $\alpha = 7$ dir; ya da $(7, 2, -20, 3)$ tipinde bir karma genişlemesidir ve $\alpha = 27$ dir.

Ispat

$G_1 \in G^*$ olduğu açıktır. Bu nedenle Teorem 4.3.1. nin tüm durumlarını dikkate alalım. Teorem 2.3.1 kullanılarak aşağıdaki durumlarda sırasıyla P_3, P_4 ve P_5 in karma genişlemelerinin karakteristik polinomları elde edilir.

Durum1: İlk olarak P_3 ün karma genişlemesini ele alalım.

$$\begin{aligned} \text{(a) } G_1, P_3 \text{ ün } (-l, -m, n) \text{ tipindeki bir karma genişlemesi olsun. Böylece,} \\ \text{char}(G)(x) &= x^{l+m-2+\alpha}(x+1)^{n-1}[x^3 - (n-1)x^2 - (lm+mn)x + lmn - lm] \\ &= x^{q-1}(x+1)^{p-2}[x^3 - (p-2)x^2 - (p+q-1)x + q(p-2)] \\ &= \text{char}(K_p^q)(x) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\left. \begin{array}{l} q-1 = \alpha + l + m - 2 \\ p-2 = n-1 \\ p+q-1 = lm + mn \\ q(p-2) = lmn - lm \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = 1 \\ l = q \\ \alpha = 0 \\ n = p-1 \end{array} \right\} \Rightarrow G \cong K_p^q.$$

(b) G_1, P_3 ün $(l, -m, n)$ tipindeki bir karma genişlemesi olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} \text{char}(G)(x) &= x^{m-1+\alpha}(x+1)^{l+n-2}[x^3 - (l+n-2)x^2 - (mn - ln + lm + n + l - 1)x + 2lmn \\ &\quad - lm - mn] \\ &= x^{q-1}(x+1)^{p-2}[x^3 - (p-2)x^2 - (p+q-1)x + q(p-2)] \\ &= \text{char}(K_p^q)(x) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\left. \begin{array}{l} q-1 = \alpha + m - 1 \\ p-2 = l + n - 2 \\ p+q-1 = lm + mn - ln + l + n - 1 \\ q(p-2) = 2lmn - lm - mn \end{array} \right\} m = \frac{\ln(l+n-2)}{l(l-1) + n(n-1)} \text{ ve}$$

$\alpha = m(l+n-1) - ln = 2ln \left[\frac{(l-1)(n-1)}{l(l-1) + n(n-1)} \right]$ olduğu açıktır. Burada $\alpha \in \mathbb{N}$ dir. Ayrıca

$p = l + n$ ve $q = \alpha + m = ln \left[\frac{2ln-l-n}{l(l-1) + n(n-1)} \right]$ olur.

Eğer $\alpha = 0$ ise burada $m(l+n-1) = ln$ dir. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} \frac{\ln(l+n-2)}{l(l-1) + n(n-1)}(l+n-1) = ln &\Rightarrow (l+n-2)(l+n-1) = l(l-1) + n(n-1) \\ &\Rightarrow l^2 + n^2 + 2ln - 3l - 3n + 2 = l^2 - l + n^2 - n \\ &\Rightarrow 2ln - 2l - 2n + 2 = 0 \\ &\Rightarrow l(n-1) - (n-1) = 0 \\ &\Rightarrow (l-1)(n-1) = 0 \\ &\Rightarrow l = 1 \text{ veya } n = 1 \\ &\Rightarrow m = 1 \\ &\Rightarrow G_1 \cong K_{n+1}^1. \end{aligned}$$

olur. $l+n = p \geq 4$ olduğundan l ve n aynı anda 1 e eşit olamaz.

(c) G_1, P_3 ün $(-l, m, n)$ tipindeki bir karma genişlemesi olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} \text{char}(G)(x) &= x^{l-1+\alpha}(x+1)^{m+n-2}[x^3 - (m+n-2)x^2 - (m+n+lm- \\ &\quad 1)x + lmn - lm] \\ &= x^{q-1}(x+1)^{p-2}[x^3 - (p-2)x^2 - (p+q-1)x + q(p-2)] \\ &= \text{char}(K_p^q)(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\left. \begin{array}{l} q-1 = \alpha + l - 1 \\ p-2 = m + n - 2 \\ p+q-1 = lm + m + n - 1 \\ q(p-2) = lmn - lm \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = 1 \\ l = q \\ \alpha = 0 \\ n = p - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow G \cong K_p^q \text{ olur.}$$

(d) G_1, P_3 ün (l, m, n) tipindeki bir karma genişlemesi olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} \text{char}(G)(x) &= x^\alpha (x+1)^{l+m+n-3} [x^3 - (l+m+n-3)x^2 - (2m+2n+2l - \\ &\quad ln-3)x + lmn + ln - l - m - n + 1] \\ &= x^{q-1} (x+1)^{p-2} [x^3 - (p-2)x^2 - (p+q-1)x + q(p-2)] \\ &= \text{char}(K_p^q)(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\left. \begin{array}{l} q-1 = \alpha \\ p-2 = l+m+n-3 \\ p+q-1 = 2m+2l+2n-ln-3 \\ q(p-2) = lmn + ln - l - m - n + 1 \end{array} \right\}$$

elde edilir. Buradan, $lmn = (l+m+n-ln-1)(l+m+n-2)$ ve $\alpha = l+m+n-ln-1$ olduğu açıktır. $q \geq 3$ olduğundan $\alpha \geq 2$ elde edilir. Ayrıca $p = l+m+n-1$ ve $q = l+m+n-ln-1$ olur.

Durum 2: Şimdi P_4 ün karma genişlemesini ele alalım.

(a) G_1, P_4 ün $(m, -3, -2, -2)$ tipindeki bir karma genişlemesi olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} \text{char}(G)(x) &= x^{4+\alpha} (x+1)^m [x^3 - (m)x^2 - (2m+10)x + 12m] \\ &= x^{q-1} (x+1)^{p-2} [x^3 - (p-2)x^2 - (p+q-1)x + q(p-2)] \\ &= \text{char}(K_p^q)(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\left. \begin{array}{l} q-1 = \alpha + 4 \\ p-2 = m \\ p+q-1 = 2m+10 \\ q(p-2) = 12m \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = 3 \\ q = 12 \\ \alpha = 7 \\ p = 5 \end{array} \right\}$$

elde edilir. Buradan $G = G_1 \cup 7K_1 \cong K_5^{12}$ öyle ki G_1, P_4 ün $(3, -3, -2, -2)$ tipindeki karma genişlemesidir.

(b) G_1, P_4 ün $(-2, m, n, -2)$ tipindeki bir karma genişlemesi olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} \text{char}(G)(x) &= x^{2+\alpha} (x+1)^{m+n-1} [x^3 - (m+n-1)x^2 - (2m+2n)x + 4mn] \\ &= x^{q-1} (x+1)^{p-2} [x^3 - (p-2)x^2 - (p+q-1)x + q(p-2)] \\ &= \text{char}(K_p^q)(x) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\left. \begin{array}{l} q - 1 = \alpha + 2 \\ p - 2 = m + n - 1 \\ p + q - 1 = 2m + 2n \\ q(p - 2) = 4mn \end{array} \right\} \Rightarrow m + n = (m - n)^2 \text{ ve } \alpha = m + n - 3$$

olur. $q \geq 3$ ve $m + n \neq 3$ olduğundan $\alpha > 0$ elde edilir. Ayrıca $p = m + n + 1$ ve $q = m + n$ olur.

(c) G_1, P_4 ün $(n, -2, m, -3)$ tipindeki bir karma genişlemesi olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} \text{char}(G)(x) &= x^{3+\alpha}(x+1)^{m+n-1}[x^3 - (m+n-1)x^2 - (5m+2n-mn)x + 6mn] \\ &= x^{q-1}(x+1)^{p-2}[x^3 - (p-2)x^2 - (p+q-1)x + q(p-2)] \\ &= \text{char}(K_p^q)(x) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\left. \begin{array}{l} q - 1 = \alpha + 3 \\ p - 2 = m + n - 1 \\ p + q - 1 = 5m + 2n - mn \\ q(p - 2) = 6mn \end{array} \right\} \Rightarrow (1 - m)(n^2 - 4m) = n(1 + m^2)$$

olur. Bu denklemin $(n, m) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ olacak şekilde bir çözümü yoktur. Bu yüzden G_1 bu tür bir karma genişleme olamaz.

(d) G_1, P_4 ün $m \geq 1$ olacak şekilde $(k, l, -m, n)$ tipinde bir karma genişlemesi ve

$$(k, l, n) \in \left\{ \begin{array}{l} (3,3,6), (3,4,4), (3,6,3), (4,2,6), (4,3,3), \\ (4,6,2), (5,2,4), (5,4,2), (7,2,3), (7,3,2) \end{array} \right\} \text{ olsun. Böylece,}$$

$$\begin{aligned} \text{char}(G)(x) &= x^\alpha p_i(x) \\ &= x^{q-1}(x+1)^{p-2}[x^3 - (p-2)x^2 - (p+q-1)x + q(p-2)] \\ &= \text{char}(K_p^q)(x) \end{aligned}$$

olur. Öyle ki $i \in \{1, \dots, 10\}$ için $p_i(x)$ aşağıdaki polinomlardan biridir.

$$p_1(x) = x^m(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - (8m-15)x + 40m - 25]$$

$$p_2(x) = x^m(x+1)^8[x^3 - 8x^2 - (6m-9)x + 34m + 18]$$

$$p_3(x) = x^m(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - (5m-6)x + 37m + 16]$$

$$p_4(x) = x^m(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - (9m-15)x + 45m + 25]$$

$$p_5(x) = x^m(x+1)^7[x^3 - 7x^2 - (6m-4)x + 30m + 12]$$

$$p_6(x) = x^m(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - (5m+1)x + 37m + 9]$$

$$p_7(x) = x^m(x+1)^8[x^3 - 8x^2 - (8m-9)x + 40m + 18]$$

$$p_8(x) = x^m(x+1)^8[x^3 - 8x^2 - (6m+1)x + 34m + 8]$$

$$p_9(x) = x^m(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - (9m-6)x + 45m + 16]$$

$$p_{10}(x) = x^m(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - (8m+1)x + 40m + 9]$$

Sadece $p_3(x)$ ve $p_5(x)$ için $char(G)(x) = char(K_p^q)(x)$ e eşittir. Yani sadece iki örnek olabilir. Bunlar, $G = G_1 \cup 63K_1 \cong K_{11}^{84}$ burada G_1, P_4 ün $(7,2,-20,3)$ tipindeki karma genişlemesi ve $G = G_1 \cup 27K_1 \cong K_9^{36}$ burada G_1, P_4 ün $(4,3,-8,3)$ tipindeki karma genişlemesidir.

(e) G_1, P_4 ün (k,l,m,n) tipindeki bir karma genişlemesi ve $(k,l,m,n) \in \{(2,2,2,7), (2,2,3,4), (2,2,6,3), (2,3,2,5), (2,3,4,3), (2,5,2,4), (2,5,3,3), (3,2,2,3)\}$ olsun. Burada $char(G)(x) = x^\alpha q_i(x)$ dir. Öyle ki $i \in \{1, \dots, 8\}$ için $q_i(x)$ aşağıdaki polinomlardan biridir.

$$q_1(x) = x(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - x + 65]$$

$$q_2(x) = x(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - 9x + 73]$$

$$q_3(x) = x(x+1)^7[x^3 - 7x^2 - 5x + 51]$$

$$q_4(x) = x(x+1)^8[x^3 - 8x^2 - x + 68]$$

$$q_5(x) = x(x+1)^8[x^3 - 8x^2 - 7x + 74]$$

$$q_6(x) = x(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - x + 89]$$

$$q_7(x) = x(x+1)^9[x^3 - 9x^2 - 6x + 94]$$

$$q_8(x) = x(x+1)^6[x^3 - 6x^2 - 3x + 40]$$

olur. Tüm $i \in \{1, \dots, 8\}$ için $q_i(x)$ in $char(G)(x) = char(K_p^q)(x)$ eşitliğini sağlamadığı görülür. Bu nedenle G_1 bu tür bir karma genişleme olamaz.

Durum 3: G_1, P_5 in $l, m, n \geq 1$ olacak şekilde $(1, l, -m, n, 1)$ tipinde bir karma genişlemesi olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} char(G)(x) &= x^{m+\alpha}(x+1)^{l+n-1}[x^3 - (l+n-1)x^2 - (mn - ln + lm + l + n)x + \\ &\quad 2lmn + ln] \\ &= x^{q-1}(x+1)^{p-2}[x^3 - (p-2)x^2 - (p+q-1)x + q(p-2)] \\ &= char(K_p^q)(x) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\left. \begin{aligned} q-1 &= \alpha + m \\ p-2 &= l + n - 1 \\ p+q-1 &= mn - ln + lm + l + n \\ q(p-2) &= 2lm + ln \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = \frac{ln(l+n)}{n(n-1) + l(l-1)} \text{ ve}$$

$\alpha = m(l+n-1) - ln - 1$ olur. Ayrıca $p = l + n + 1$ ve $q = m(l+n) - ln$ elde edilir. $l, m, n \geq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\alpha &= m(l+n-1) - ln - 1 \\
&= \frac{ln(l+n)(l+n-1)}{n(n-1)+l(l-1)} - ln - 1 \\
&= \frac{ln[(l+n)^2-l-n]}{(l+n)^2-l-n-2ln} - ln - 1 \\
&= ln + \frac{2l^2n^2}{(l+n)^2-l-n-2ln} - ln - 1 \\
&= \frac{2l^2n^2}{l^2-l+n^2-n} - 1 \\
&\geq \frac{l^2+n^2}{l^2-l+n^2-n} - 1 \\
&\geq \frac{l^2-l+n^2-n}{l^2-l+n^2-n} - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 5.2.2. $p \geq 4$ ve $q \geq 1$ olsun. Bağlantılı graflar arasında K_p^q ananas grafi spektrumuna göre belirlenebilen bir graftır [19].

Sonuç 5.2.3. $l, m, n \in \mathbb{Z}^+$ olsun [19].

- Eğer $m = \frac{ln(l+n-2)}{l(l-1)+n(n-1)}$ ise, $p = l + n$ ve $q = l(m - n) + mn$ olmak üzere K_p^q ananas grafi spektrumuna göre belirlenebilen bir graf değildir.
- Eğer $lmn = (l + m + n - ln - 1)(l + m + n - 2)$ ise, $p = l + m + n - 1$ ve $q = l + m + n - ln - 1$ olmak üzere K_p^q ananas grafi spektrumuna göre belirlenebilen bir graf değildir.
- Eğer $(m - n)^2 = m + n$ ise, $p = m + n + 1$ ve $q = m + n$ olmak üzere K_p^q ananas grafi spektrumuna göre belirlenebilen bir graf değildir.
- Eğer $m = \frac{ln(l+n-2)}{l(l-1)+n(n-1)}$ ise, $p = l + n + 1$ ve $q = m(l + n) - ln$ olmak üzere K_p^q ananas grafi spektrumuna göre belirlenebilen bir graf değildir.
- Eğer $(p, q) \in \{(5, 12), (11, 84), (9, 36)\}$ ise, K_p^q ananas grafi spektrumuna göre belirlenebilen bir graf değildir.

6. BÖLÜM

TARTIŞMA SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ele alınan küme -1 ve 0 dan farklı maksimum üç özdeğer içeren graf kümesidir. Literatürdeki mevcut olan çalışmalar derlenerek, maksimum iki özdeğer yerine maksimum üç özdeğer incelenmiştir. Bu nedenle bu küme parçalara bölünerek ele alınmıştır. İlk olarak -1 ve 0 dan farklı en fazla iki özdeğere sahip graf kümesine dair çalışmalar incelenmiştir. Üçüncü bölümde bu kümenin izole nokta içermeyen bir alt kümesinin sınıflandırma ve spektral belirlenebilirlik özelliklerine yer verilmiştir. [Topcu, 2020]. Sonrasında tam olarak 3 özdeğeri -1 ve 0 dan farklı bağlantısız ve bağlantılı graflar üzerinde literatür araştırması devam etmiştir. İlk olarak bağlantısız graflar ele alınmış ve üç tam grafin ayrık birleşimi, bir tam graf ve iki parçalı tam grafin ayrık birleşimi ve bir tam graf ve bir tam bölünmüş grafin ayrık birleşimi şeklindeki graf türleri ve karakteristik polinomları gösterilmiştir. Sonrasında bağlantılı graflar ele alınmış ve üç parçalı tam graf, K_3 tam grafinin $(-p, -q, r)$ tipindeki karma genişlemesi ve G^* kümesinin karakteristik polinomlarına yer verilmiştir. G^* kümesi sırasıyla 3, 4 ve 5 noktalı yol graflarının karma genişlemeleri yardımıyla belirlenmiştir. İlk olarak G^* kümesindeki parçalı olan graflar ele alınmıştır. Sonrasında parçalı olmayan graflar ile ilgili literatürde var olan bilgilere yer verilmiştir. Son bölümde öncelikle 3 noktalı yol grafin karma genişlemeleri ile ilgili bulgulara değinilmiştir. Daha sonra ise nokta sayısı 25 ile kısıtlanarak 3 noktalı yol grafin tüm karma genişlemeleri ve ko-spektral eşleri ile ilgili mevcut bulgular Tablo 5.1 de verilmiştir. Bu tabloda 1000 den fazla graf bulunmaktadır. Son olarak ananas grafların tam spektral karakterizasyonlarına dair bulgular ele alınmıştır. Ananas graflar G^* kümesi tarafından kapsanan özel bir graf türüdür ve ayrıca 3 noktalı yol grafin özel bir karma genişlemesi olarak da ifade edildiği görülür.

Bu tez çalışması literatürde var olan bilgiler bir araya getirilerek derlenmesiyle hazırlanmıştır.

KAYNAKLAR

1. Abiad, A., “ Spectral characterizations of graphs ”, *Tilburg University*, P.H. Thesis, 2015
2. van Dam, E.R., Haemers, W.H., “ Developments on spectral characterizations of graphs ”, *Discrete Mathematics*, 309(3), 576-586, 2009
3. McKay, B.D., “ On the spectral characterisation of trees ”, *Ars Combin.*, 47, 274-291, 1989
4. van Dam, E.R., Haemers, W.H., “ Which graphs are determined by their spectrum? ”, *Linear Algebra and its Applications*, 373, 241-272, 2003
5. Godsil, C., McKay, B.D., “ Constructing cospectral graphs ”, *Aequationes Math.*, 25, 257-268, 1982
6. Taşcı, D., “ Lineer Cebir ”, *Gazi Üniversitesi*, Ankara 2011
7. Topcu, H., 2020. “ En fazla 3 adet özdeğeri -1 ya da 0 dan farklı olan grafların tamamının sınıflandırılması ”, 3001 Tübitak 117F489 Nolu ARDEB Projesi
8. Küçük, H., “Çizgelerde Dışmerkezlik Matrisi ve Spektrasi ”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Doktora Tezi*, 2022
9. Topcu, H., “ Graf İzomorfizmi ve Ko-Spektral Graflar ”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Doktora Tezi*, 2016
10. Küçük, H., “Grafların Cebirsel Bağlantısallığı ”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi*, 2017
11. Chartrand, G., Zhang, P., “ A first course in graph theory ”, *Dover Publications*, Mineola, New York, 2012
12. Topcu, H., “ En fazla 2 adet komşuluk özdeğeri $-1, 0$ ya da $1, 0$ dan farklı olan graflar ”, *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 2, 302-305, 2020
13. Haemers, W.H., “ Spectral characterization of mixed extensions of small graphs ”, *Discrete Math.*, 342, 2760-2764, 2019
14. Smith, J.H., “ Some properties of the spectrum of a graph ”, *Combinatorial structures and their applications*, Gordon and Breach, New York, 403-406, 1970
15. Esser, F., Harrary, F., “ On the spectrum of a complete multipartite graph ”, *European Journal of Combin.*, 1, 211-218, 1980

16. Ma, H., Ren, H., “ On the spectral characterization of the union of complete multipartite graph and some isolated vertices ”, *Discrete Mathematics*, 310, 3648-3652, 2010
17. Abreu, N., Alencar, J., Brondani A., de Lima, L., Oliveira, C., “ Graph with all but two eigenvalues in $[-2,0]$ ”, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 40(2), 379-391, 2020
18. Haemers, W.H., Sorgun, S., Topcu, H., “ On the spectral characterization of mixed extensions of P_3 ”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 26(3), 3-16, 2019
19. Topcu, H., Sorgun, S., Haemers, W.H., “ The graphs cospectral with the pineapple graph ”, *Discrete Applied Math.*, 269, 52-59, 2019
20. Topcu, H., Sorgun, S., Haemers, W.H., “On the spectral characterization of pineapple graph ”, *Linear Algebra and Its Applications*, 507, 267-273, 2016
21. Ciaobă, S.M., Haemers, W.H., Vermette, J.R., “ The graph with all but two eigenvalues equal to ∓ 1 ”, *Journal of Algebraic Combin.*, 41, 887-897, 2015
22. Ciaobă, S.M., Haemers, W.H., Vermette, J.R., “ The graph with all but two eigenvalues equal to -2 or 0 ”, *Designs Codes and Cryptography*, 84, 153-163, 2016
23. Bapat, R.B., “ Graph and Matrices ”, *Springer – Hindustan Book Agency*, 2011
24. Cvetković, D., Doob, M., Sachs, H., “Spectra of graphs ”, *Academic Press*, 22s, 156s, New York, 1982
25. Camara, M., Haemers, W.H., “ Spectral characterization of almost complete graphs ”, *Discrete Appl. Math.*, 176, 19-23, 2014
26. Cardoso, C.M., Freitas, M.A.A, Martins, E.A., Robbiano, M., “ Spectra of graphs obtained by a generalization of the join operation ”, *Discrete Math.*, 313, 733-741, 2013
27. Wang, W., Xu, C.-X., “ A sufficient condition for a family of graphs being determined by their generalized spectra ”, *European J. Combin.*, 27, 826-840, 2006a
28. Wang, W., Xu, C.-X., “ An excluding algorithm for testing whether a family of graphs are determined by their generalized spectra ”, *Lin. Alg. App.*, 418, 62-74, 2006b

29. Wang, W., Xu, C.-X., “ Note: On the generalized spectral characterization of graph having an isolated vertex ”, *Lin. Alg. App.*, 425, 210-215, 2007
30. Wang, J.F., Belardo, F., Huang, Q.X., Borovicanin, B., “On the two largest Q -eigenvalues of graphs ”, *Discrete Mathematics*, 310, 2858-3652, 2010
31. de Lima, L.S., Mohammedian, A., Oliveria, C.S., “ The non-bipartite graphs with all but two eigenvalues in $[-1, 1]$ ”, *Linear and Multilinear Algebra*, 65(3), 526-544, 2017
32. Haemers, W.H., Liu, X., Zhang, Y., “ Spectral characterizations of lolipop graphs ”, *Linear Algebra and its Applications*, 428(11-12), 2415-2423, 2008
33. Godsil, C., Royle, G., “ Algebraic Graph Theory ”, *GTM. Springer*, 2001
34. Gross, J., Yellen, J., “ Graph Theory and its Applications ”, *CRC Press*, 2000