

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ VE MODİFİYE
EDİLMİŞ KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMLERİNİN
PETROV-GALERKİN YÖNTEMİ İLE SAYISAL
ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan
Yusuf TATLISU

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2023

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ VE MODİFİYE
EDİLMİŞ KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMLERİNİN
PETROV-GALERKİN YÖNTEMİ İLE SAYISAL
ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Yusuf TATLISU**

**Tez Danışmanı
Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

Ağustos 2023

Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ danışmanlığında Yusuf TATLISU tarafından hazırlanan "**Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli ve Modifiye Edilmiş Korteweg-de Vries Denklemlerinin Petrov-Galerkin Yöntemi ile Sayısal Çözümleri**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

24/08/2023

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Ali DELİCEOĞLU

Üye : Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Üye : Prof. Dr. Yasin YAZLIK

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun.....tarih ve..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.../.../2023

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Yusuf TATLISU



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince bilgi ve tecrübesini benimle paylaşan Sayın Hocam Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ'a,

Süreçte bana enerji veren kızıma ve desteklerini esirgemeyen eşim ve aileme teşekkür ederim.



**GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ VE MODİFİYE EDİLMİŞ
KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMLERİNİN PETROV-GALERKİN
YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Yusuf TATLISU

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜŐÜ**

Ağustos 2023

ÖZET

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş eşit genişlikli ve modifiye edilmiş Korteweg-de Vries denklemlerinin sayısal çözümleri B-spline fonksiyonlar yardımıyla Petrov-Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluőtaktadır. Tezin birinci bölümünde, Petrov-Galerkin yöntemi, B-spline fonksiyonlar, genelleştirilmiş eşit genişlikli (GEW) denklem ve modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) denklemi hakkında bilgiler verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde, GEW denkleminin sayısal çözümleri Petrov-Galerkin yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, mKdV denkleminin sayısal çözümleri Petrov-Galerkin yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde ise, elde edilen sayısal deđerlerle ilgili sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar kelimeler: GEW denklemi, mKdV denklemi, B-spline, Petrov-Galerkin.

Tez Danıőtmanı: Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Sayfa sayısı: 53

**NUMERICAL SOLUTIONS OF GENERALISED EQUAL WIDTH AND
MODIFIED KORTEWEG-DE VRIES EQUATIONS BY PETROV-GALERKIN
METHOD**

(M. Sc. Thesis)

Yusuf TATLISU

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY GRADUATE SCHOOL OF
NATURAL AND APPLIED SCIENCE**

August 2023

ABSTRACT

In this thesis, numerical solutions of the generalised equal width and modified Korteweg-de Vries equations are obtained by using the Petrov-Galerkin finite element method with the help of B-spline functions.

This thesis consists of four chapters. In the first part of the thesis, Petrov-Galerkin method, B-spline functions, generalised equal width (GEW) equation and modified Korteweg-de Vries (mKdV) equation are given.

In the second part of the thesis, numerical solutions of the GEW equation are obtained using the Petrov-Galerkin method.

In the third part of the thesis, numerical solutions of the mKdV equation are obtained using the Petrov-Galerkin method.

In the fourth part of the thesis, conclusions and recommendations related to the obtained numerical values are given.

Keywords: GEW equation, mKdV equation, B-spline, Petrov-Galerkin.

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Page Number: 53

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLOLAR LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	xii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi	1
1.2. Ağırlıklı Kalan Yöntemleri	2
1.1. Petrov-Galerkin Yöntemi	3
1.3. Spline Fonksiyonlar	4
1.4. B-Spline Fonksiyonlar	5
1.4.1. Lineer B-Spline Fonksiyonlar	7
1.4.2. Kuadratik B-Spline Fonksiyonlar	7
1.4.3. Kübik B-Spline Fonksiyonlar	8
1.5. Eşit Genişlikli (EW) Denklemi	10
1.6. Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli (GEW) Denklem	11
1.7. Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi	12
1.8. Modifiye Edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) Denklemi	13

BÖLÜM 2

GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DENKLEMİN PETROV-GALERKİN YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ.....	14
2.1. Yöntemin Denkleme Uygulanması.....	14
2.2. Kararlılık Analizi.....	17
2.3. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar	18
2.4. Tek Soliter Dalga Hareketi.....	19
2.5. İki Soliter Dalganın Etkileşimi.....	26
2.6. Solitonların Oluşumu	28

BÖLÜM 3

MODİFİYE EDİLMİŞ KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN PETROV-GALERKİN YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	31
3.1. Kübik B-Spline Petrov-Galerkin Yöntemi.....	31
3.2. Kararlılık Analizi.....	36
3.3. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar	36
3.4. Tek Soliter Dalga Hareketi.....	37
3.5. İki Soliter Dalganın Etkileşimi.....	40
3.6. Üç Soliter Dalganın Etkileşimi	42
3.7. Solitonların Oluşumu	44

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER	47
KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ	53

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 1.1.	Kübik B-spline fonksiyonlar ve türevlerinin x_m düğüm noktalarındaki değerleri	9
Tablo 2.1.	Tek soliter dalganın $p = 2, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.5, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri için bulunan hata normları ve değişmezler	19
Tablo 2.2.	Tek soliter dalga için $t = 20$ zamanında $p = 2, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.5, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri ile bulunan sonuçların Karşılaştırılması	20
Tablo 2.3.	Tek soliter dalganın $p = 3, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.3, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri için bulunan hata normları ve değişmezler	22
Tablo 2.4.	Tek soliter dalga için $t = 20$ zamanında $p = 3, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.3, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri ile bulunan sonuçların karşılaştırılması	22
Tablo 2.5.	Tek soliter dalganın $p = 4, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.2, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri için bulunan hata normları ve değişmezler	24
Tablo 2.6.	Tek soliter dalga için $t = 20$ zamanında $p = 4, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.2, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri ile bulunan sonuçların karşılaştırılması	24
Tablo 2.7.	$p = 3$ için iki soliter dalganın etkileşiminden elde edilen değişmezlerin değerleri	26
Tablo 2.8.	$p = 4$ için iki soliter dalganın etkileşiminden elde edilen değişmezlerin değerleri	28
Tablo 2.9.	Farklı μ değerleri için Maxwellian başlangıç koşulu ile elde edilen değerler	29

Tablo 3.1.	Tek soliter dalganın $\varepsilon = 3, \mu = 1, c = 0.845, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için bulunan hata normları ve değişmezlerin değerleri 38
Tablo 3.2.	İki soliter dalganın $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, x_1 = 15,$ ve $x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için hesaplanan değişmezlerin değerlerinin karşılaştırılması 41
Tablo 3.3.	Üç soliter dalganın $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 0.5, x_1 = 15, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için hesaplanan değişmezlerin değerlerinin karşılaştırılması 43
Tablo 3.4.	Gauss başlangıç koşulu ile $\mu = 0.1$ ve $\mu = 0.04, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $-50 \leq x \leq 50$ parametreleri için $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ zamanlarındaki değişmezlerin değerleri 45

ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 1.1. Sıfırıncı Dereceden B-Spline Fonksiyon 6
- Şekil 2.1. Tek soliter dalganın $p = 2, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.5, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80], t = 0,10,20$ parametreleri için hareketi 21
- Şekil 2.2. $t = 20$ zamanında $p = 2, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.5, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri için hata grafiği 21
- Şekil 2.3. Tek soliter dalganın $p = 3, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.3, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80], t = 0,10,20$ parametreleri için hareketi 23
- Şekil 2.4. $t = 20$ zamanında $p = 3, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.3, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri için hata grafiği 23
- Şekil 2.5. Tek soliter dalganın $p = 4, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.2, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80], t = 0,10,20$ parametreleri için hareketi 25
- Şekil 2.6. $t = 20$ zamanında $p = 4, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.2, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri için hata grafiği 25
- Şekil 2.7. $p = 3$ için (a) $t = 0$, (b) $t = 50$, (c) $t = 70$, (d) $t = 100$ zamanlarında iki soliter dalga etkileşimi 27
- Şekil 2.8. $p = 4$ için (a) $t = 0$, (b) $t = 60$, (c) $t = 80$, (d) $t = 120$ zamanlarında iki soliter dalganın etkileşimi 28
- Şekil 2.9. $p = 2$ için, (a) $\mu = 0.1$, (b) $\mu = 0.05$, $t = 12$ zamanında Maxwellian başlangıç koşulu ile solitonların oluşumu 29
- Şekil 2.10. $p = 3$ için, (a) $\mu = 0.1$, (b) $\mu = 0.05$, $t = 12$ zamanında Maxwellian başlangıç koşulu ile solitonların oluşumu 29
- Şekil 2.11. $p = 4$ için, (a) $\mu = 0.1$, (b) $\mu = 0.05$, $t = 12$ zamanında Maxwellian başlangıç koşulu ile solitonların oluşumu 30
- Şekil 3.1. Tek soliter dalganın $\varepsilon = 3, \mu = 1, c = 0.845, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için hareketi 39
- Şekil 3.2. Tek soliter dalganın $\varepsilon = 3, \mu = 1, c = 0.845, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0,4,8,12,16,20$ zamanlarındaki hareketi..39

Şekil 3.3.	$\varepsilon = 3, \mu = 1, c = 0.845, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 20$ zamanında hatanın dağılımı	40
Şekil 3.4.	İki soliter dalganın $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, x_1 = 15$, ve $x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 4, 6, 7, 8, 12, 16, 20$ zamanlarındaki etkileşimi	42
Şekil 3.5.	Üç soliter dalganın $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 0.5, x_1 = 15, x_2 = 25$, ve $x_3 = 35, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 6, 7, 8, 10, 12, 16, 20$ zamanlarındaki etkileşimi	44
Şekil 3.6.	Gauss başlangıç koşulu ile $\varepsilon = 3, \mu = 0.1, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $-50 \leq x \leq 50$ parametreleri için $t = 0, 2, 6, 10$ zamanlarındaki solitonların oluşumu	45
Şekil 3.7.	Gauss başlangıç koşulu ile $\varepsilon = 3, \mu = 0.04, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $-50 \leq x \leq 50$ parametreleri için $t = 0, 2, 6, 10$ zamanlarındaki solitonların oluşumu	46

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

EW	Eşit genişlik
GEW	Genelleştirilmiş eşit genişlik
KdV	Korteweg-de Vries
mKdV	Modifiye edilmiş Korteweg-de Vries
U_N	Sayısal çözüm
L_2 ve L_∞	Hata normları
I_1	Kütle
I_2	Momentum
I_3	Enerji

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde, sonlu elemanlar yöntemi, ağırlıklı kalan yöntemlerinden Petrov-Galerkin yöntemi, B-spline fonksiyonlar, GEW denklemi ve mKdV denklemi hakkında bilgiler verilecektir.

1.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar terimi ilk defa 1960 yılında Ray William Clough tarafından yayımlanan düzlem esnekliğindeki uygulamaları adlı makalesinde incelenmiş ve literatüre kazandırılmıştır [1]. Sonlu elemanlar yöntemi ile ilgili 1967 yılında yazılan ilk kitapta Zienkiewicz ve Cheung bu yöntemi geliştirmeyi amaçlamışlardır [2-3]. Sonrasında uygulamalı matematikçiler, fizikçiler, mühendisler ve diğer bilim adamları sonlu elemanlar yöntemini geliştirmek için çok sayıda çalışma yapmışlardır [4].

Sonlu elemanlar yöntemi yapı ve havacılık mühendisliği, uzay bilimleri, nükleer enerji, ısı iletim problemleri gibi pek çok mühendislik alanında uygulanabilmektedir.

Karşılaşılan karmaşık problemlerin çözümünü sağlamak zordur. Sonlu elemanlar yönteminde karmaşık problemlerin çözümüne ulaşabilmek için, problemlerin çözüm bölgesi basit alt bölgelere ayrılır ve sonraki aşamada ayrılan bu alt bölgeleri birleştirerek problemin sayısal çözümü elde edilir. Sonlu elemanlar yöntemi bilgisayar ortamında kullanılmaya uygun bir yöntemdir. Bu sayede teknolojiye gelişmeler bu yöntemin de hızlı bir şekilde gelişmesini sağlamıştır.

Diğer sayısal yöntemler gibi sonlu elemanlar yönteminin de avantajlı ve dezavantajlı yönleri vardır. Sonlu elemanlar yönteminin bazı avantajları şu şekilde sıralanabilir [5];

- Şekilleri düzgün ve düzgün olmayan geometrik alanlarda iyi sonuçlar vermektedir,
- Sınır şartları aynı kalmassa bile sonlu eleman metodunun değişmemesi,
- Sonlu eleman metodu ile üretilen modelin gerektiğinde rahatlıkla değiştirilebilmesi,
- Uygulanması kolay ve bilgisayar programlama diline uygun bir metot olması.

Sonlu elemanlar metodunun bazı dezavantajları da aşağıdaki gibidir [6];

- Çözüm bölgesini daha küçük alt bölgelere ayırırken tecrübe gerektirmesi,
- Ayrılan daha küçük alt bölgelerde süreklilik şartlarının sağlanmasında zorluklar yaşanması,
- Bilgisayar programı ile kullanılırken veri girişinde hata yapılma ihtimalidir.

Sonlu elemanlar metodu bir probleme uygulanırken uygulanacak adımlar şu şekildedir [7];

- Problemin çözüm bölgesi daha basit alt bölgelere ayrılır.
- Ayrılan basit alt bölgelerdeki her bir tipik eleman için eleman denklemleri oluşturulur.
- Türetilen eleman denklemleri bir araya getirilerek verilen probleme uygun denklemler elde edilir.
- Problem için belirlenen sınır şartları uygulanır.
- Elde edilen denklem sistemleri çözülür.

1.2 Ağırlıklı Kalan Yöntemleri

Ağırlıklı kalan yaklaşımı, bir diferansiyel denklemin tam çözümü ile sayısal çözümü arasındaki farkın, sifıra eşit olmayan bir ağırlık fonksiyonuyla çarpılarak elde edilen toplamların minimum yapılması işlemidir. Bu yaklaşıma bağlı yöntemler, ağırlıklı kalan yöntemleri olarak adlandırılır. Ağırlıklı kalan metodunda Ω bölgesinde operatör denklemleri;

$$A(u) = f \quad (1.1)$$

biçimindedir. Bu denklemde A lineer veya lineer olmayan operatör, u bağımlı değişken ve f bağımsız değişken içeren fonksiyondur. (1.1) denkleminde verilen u çözümüne,

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (1.2)$$

biçimindeki yaklaşım ile ulaşılmaya çalışılır. (1.1) denkleminde (1.2) ile verilen u_N sayısal çözümü yerine yazıldığında $f_N = A(u_N)$ fonksiyonu elde edilir. Elde edilen bu fonksiyon çoğunlukla f ye eşit değildir.

$A(u_N)$ ile f fonksiyonu arasındaki fark;

$$R = A(u_N) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \quad (1.3)$$

biçiminde ağırlıklı kalan yaklaşımının kalanı olarak ifade edilir. Burada R kalan fonksiyonu c_j parametrelerine bağlı olduğundan dolayı konuma da bağlıdır. Bu metotlarda c_j parametrelerini hesaplayabilmek için;

$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) R(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1.4)$$

integralinde R kalanı sıfır olarak seçilir. Burada Ω iki boyutlu bölge ve ψ_i ağırlıklı kalan fonksiyonları (1.4) ile verilen integralin hesaplanması sonucu elde edilen denklemlerin çözülebilmesi için, tercih edilen ψ_i ağırlıklı kalan fonksiyonlar kümesi lineer bağımsız olmalıdır [6].

Bu tezde ağırlıklı kalan yöntemlerinden Petrov-Galerkin yöntemi kullanılacaktır.

1.2.1 Petrov-Galerkin Yöntemi

ψ_i ağırlık fonksiyonları, ϕ_i yaklaşım fonksiyonları olmak üzere bu yöntemde $\psi_i \neq \phi_i$ olarak seçilir. A lineer operatörüne Ω bölgesinde (1.4) yaklaşımı uygulanırsa;

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) dx dy \right] = \int_{\Omega} \psi_i [f - A(\phi_0)] dx dy$$

denklemini elde edilir ve bu denklem daha sade bir formda yazılırsa,

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} = F_i$$

biçiminde olur. Bu yöntem ile ulaşılan A_{ij} katsayılar matrisi simetrik değildir. Bundan dolayı,

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) dx dy \neq A_{ji}$$

biçiminde olur [7].

1.3 Spline Fonksiyonlar

Sayısal yaklaşım yöntemleri, temel bilimler ve mühendislik alanlarında olduğu kadar matematik alanında da sıkça kullanılan bir yöntemdir. Genel anlamda iki tip yaklaşım vardır. Bu yaklaşımlardan ilki, eldeki verileri kullanarak bilinmeyen fonksiyonların sayısal çözümlerini bulabilmek amacıyla kullanılır. Bu tip problemlere veri uydurma problemleri denir. Bu yaklaşımlardan ikincisi ise, operatör denklem yardımıyla ulaşılan fiziksel problemlerin matematiksel modellemelerinden elde edilen yöntemdir. Bu tarz problemler, özdeğer ve özvektör problemleri, integro-diferansiyel denklemleri, adi ve kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerini kapsamaktadır. Verilen iki problem tipi için de, en iyi çözüme ulaşırken iki sorun ortaya çıkmaktadır;

- Yaklaşım koşullarına uygun fonksiyonları seçmek,
- Etkili bir yaklaşım için uygun yöntemi seçmek.

Polinom yaklaşımları, yaklaşım yöntemleri arasında önemli bir yer tutmaktadır. Ancak yüksek dereceden polinomlar çoğunlukla gerekli hassasiyette sonuçlar vermeyebilir. Bu sorunu aşmak için yüksek dereceden polinomlar parçalı polinom olarak yazılabilir. Bu yöntemde Spline interpolasyon yöntemi adı verilir. Bu yöntemde veri aralıkları sonlu farklı alt aralıklara bölünür ve her bir alt aralık daha küçük dereceden polinomlar kullanılarak yazılır. Bu sayede hem işlem kolaylığı sağlanır hem de daha hassas sonuçlar elde edilir. Yani Spline fonksiyonlar, parçalı polinomlardır ve polinomların süreklilik özelliklerini içeren dizilişlerinden türemektedir [6].

Spline fonksiyonlar, interpolasyon, veri uydurma, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde oldukça yoğun kullanılırlar. Spline kavramı ilk kez Schoenberg tarafından 1946 yılında kullanıldı [8]. 1960 lı yılların başına kadar hızlı bir gelişim gösteremeyen Spline fonksiyon teorisine, bu yıldan sonra her geçen yıl ilgi artmıştır. Dijital ortama uyumlu olan Spline fonksiyonlar bilgisayardaki gelişme ile daha sık kullanılmaya başlanmıştır [9].

Reel sayılarda monoton artan bir dizi;

$$-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = \infty$$

biçiminde olmak şartıyla x_1, x_2, \dots, x_n e bağlı ve reel bir doğru üzerinde tanımlı m . dereceden bir $s(x)$ spline fonksiyon aşağıda verilen iki özelliğe sahiptir:

- $s(x)$ spline fonksiyonu (x_i, x_{i+1}) ($i = 0, 1, \dots, n$) aralığında m . dereceden veya daha küçük dereceden polinomdur. Burada $x_0 = -\infty, x_{n+1} = \infty$ şeklindedir.
- $s(x)$ fonksiyonu ve $s(x)$ fonksiyonunun $1, 2, \dots, (m - 1)$. mertebeden türevi tanımlanan aralıklarda ve $x_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ düğüm noktalarında süreklidir.

Verilen tanımdan anlaşılacağı üzere parçalı polinom fonksiyonlarının süreklilik durumlarında ve türevlerinin belirli şartları sağlaması durumunda, spline fonksiyonlar elde edilir [6].

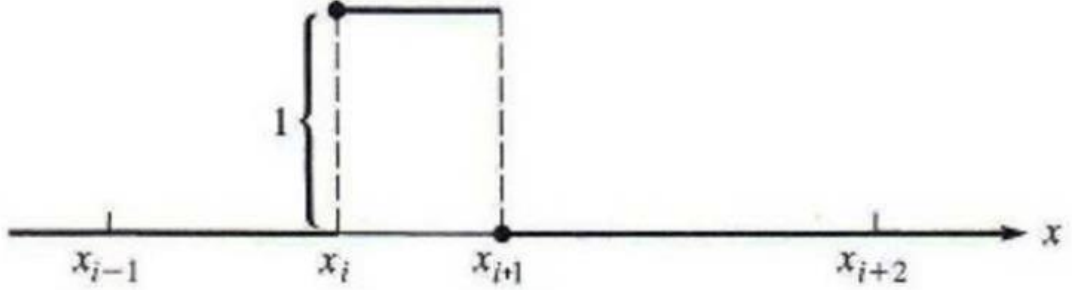
Spline fonksiyonların bazı özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar uygun bazlarla beraber kullanıldığında sonlu boyutlu lineer uzay oluşturur.
- Spline fonksiyonların integralleri ve türevleri alındığında yine spline fonksiyonlar elde edilir.
- Spline fonksiyonlar dijital ortama uygundur yani bilgisayar ile kolaylıkla hesaplamalar yapılır.
- Spline fonksiyonlar kullanılarak elde edilen matrislerin, işaretleri ve determinant özellikleri açısından rahatlıkla hesaplamalar yapılır.
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar polinomlar kadar keskin salınım yapmazlar.
- Problemlerde spline yaklaşımlar kullanıldığında, yakınsaklık ile kararlılığın incelenmesi kolaylıkla yapılır.

1.4 B-Spline Fonksiyonlar

Problemlerin çözümünde spline yaklaşımları kullanıldığında, lineer veya lineer olmayan sistemler elde edilir. Bu sistemler elde edilmek istenilen parametrelerin hesaplanması için iyi şartlı olmayabilir. Aynı zamanda spline yaklaşımlar ile yapılan hesaplamalarda sayısal kararsızlıkla karşılaşılabilir. Karşılaşılan bu tip zorlukları aşmak için B-Spline adı verilen spline fonksiyon sınıfı kullanılabilir. B-Spline fonksiyonlar tüm spline fonksiyonlar için baz oluştururlar. Bu yüzden B-Spline (basis spline) olarak isimlendirilmiştir. B-Spline fonksiyonlar sayısal hesaplamalar için elverişli

fonksiyonlardır [10]. Sıfırıncı dereceden B-Spline fonksiyonun grafiği Şekil 1.1 ile verilmiştir [6].



Şekil 1.1. Sıfırıncı Dereceden B-Spline Fonksiyon

Sıfırıncı dereceden B-Spline fonksiyon,

$$B_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Tanıma göre $B_i^0(x_i) = 1$ ve $B_i^0(x_{i+1}) = 0$ dır. Sıfırıncı dereceden B-Spline fonksiyonun özellikleri aşağıda verilmiştir:

- $B_i^0(x)$ B-spline fonksiyonu $[x_i, x_{i+1})$ aralığında tanımlıdır.
- $\forall x$ ve i için $B_i^0(x) \geq 0$ eşitsizliği mevcuttur.
- B_i^0 fonksiyonu sıçramanın olduğu tüm düğüm noktalarında sağdan süreklidir.
- $\forall x \in R$ için $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1$ eşitliğini sağlar.
- 0. dereceden spline fonksiyonların tamamı düğüm noktaları üzerinde bir baz oluşturur.

Yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar 0. dereceden B-spline fonksiyonlar yardımıyla elde edilebilir. $k = 1, 2, \dots$ ve $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olmak üzere;

$$B_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x)$$

biçiminde tümevarım yöntemi kullanılarak yüksek derecen B-spline fonksiyonlar oluşturulabilir [10,11].

1.4.1 Lineer B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ sonlu aralığının düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$, $m = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında $L_m(x)$ lineer B-spline fonksiyonlar ($m = 0(1)N$) noktaları için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [12]:

$$L_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x), & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.5)$$

$\{L_0, L_1, \dots, L_{N-1}, L_N\}$ fonksiyon kümesi $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için bir baz oluşturur. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu aralığı, $h\eta = x - x_m$, ($0 \leq \eta \leq 1$) lokal koordinat dönüşümü kullanılarak $[0, 1]$ kapalı aralığına dönüştürülür. Böylece lineer B-spline L_m ;

$$\begin{aligned} L_m S &= 1 - \eta, \\ L_{m+1} &= \eta \end{aligned} \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlanır.

1.4.2 Kuadratik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ sonlu aralığının düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$, $m = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonlar ($m = -1(1)N$) noktaları için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [12]:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases} \quad (1.7)$$

$\{\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_{N-1}, \phi_N\}$ fonksiyon kümesi $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Bu spline fonksiyonları baz fonksiyon olarak kullanan $U(x, t)$ tam çözümüne denk gelen $U_N(x, t)$ sayısal çözümü,

$$U(x, t) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (1.8)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\delta_j(t)$ bilinmeyen parametreleri sınır ve ağırlıklı kalan koşulları kullanılarak hesaplanacaktır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında $h\eta = x - x_m$, $(0 \leq \eta \leq 1)$ lokal koordinat dönüşümü kullanılarak, $[0,1]$ aralığı boyunca (1.7) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonlar aşağıdaki gibi yeniden formüle edilmiştir:

$$\begin{aligned}\phi_{m-1} &= (1 - \eta)^2, \\ \phi_m &= 1 + 2\eta - 2\eta^2, \\ \phi_{m+1} &= \eta^2.\end{aligned}\tag{1.9}$$

$\phi_{m-1}(x), \phi_m(x)$ ve $\phi_{m+1}(x)$ hariç diğer kuadratik B-spline fonksiyonlar $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında sıfırdır. Dolayısıyla bu eleman üzerinden (1.8) ile verilen sayısal fonksiyon, (1.9) ile verilen baz fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$U_N(\eta, t) = \sum_{j=m-1}^{m+1} \delta_j \phi_j\tag{1.10}$$

(1.7) ile verilen Kuadratik B-spline fonksiyonlar ve (1.10) ile verilen sayısal çözüm fonksiyonu kullanılarak, düğüm noktalarındaki U_m ve türevi olan U'_m değerleri, δ_m eleman parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}U_m &= U(x_m) = \delta_{m-1} + \delta_m, \\ U'_m &= U'(x_m) = 2(\delta_m - \delta_{m-1})\end{aligned}\tag{1.11}$$

biçiminde yazılır.

1.4.3 Kübik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ sonlu aralığının düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$, $m = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonlar ($m = -1(1)N + 1$) noktaları için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [12]:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}\tag{1.12}$$

$\{\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}\}$ fonksiyon kümesi $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için bir baz oluşturur. $U(x, t)$ tam çözümüne denk gelen $U_N(x, t)$ sayısal çözümü,

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (1.13)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\delta_j(t)$ zamana bağlı bilinmeyen parametreler olup ağırlıklı rezidü ve sınır şartlarından hesaplanacaktır. $[x_m, x_{m+1}]$ kapalı aralığı $h\eta = x - x_m$, ($0 \leq \eta \leq 1$) lokal koordinat dönüşümü kullanılarak $[0,1]$ sonlu aralığına dönüşür. Böylece η ya bağlı olan kübik B-spline fonksiyonları $[0,1]$ kapalı aralığında;

$$\begin{aligned} \phi_{m-1} &= (1 - \eta)^3, \\ \phi_m &= 1 + 3(1 - \eta) + 3(1 - \eta)^2 - 3(1 - \eta)^3, \\ \phi_{m+1} &= 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3, \\ \phi_{m+2} &= \eta^3 \end{aligned} \quad (1.14)$$

şeklinde tanımlanır. $\phi_{m-1}(x), \phi_m(x), \phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ hariç diğer kübik B-spline fonksiyonlar $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında sıfırdır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında $U_N(x, t)$ sayısal çözümü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$U_N(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (1.15)$$

burada $\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}$ ve δ_{m+2} eleman parametreleri ve $\phi_{m-1}(x), \phi_m(x), \phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ eleman şekil fonksiyonlarıdır. $\phi_j(x)$ değerleri ve türevleri Tablo 1.1 ile gösterilmiştir.

Tablo 1.1. Kübik B-spline fonksiyonlar ve türevlerinin x_m düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_m(x)$	0	1	4	1	0
$\phi'_m(x)$	0	$\frac{3}{h}$	0	$-\frac{3}{h}$	0
$\phi''_m(x)$	0	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	0

(1.14) ile verilen kübik B-spline fonksiyonlar ve (1.15) ile verilen sayısal çözüm fonksiyonu kullanılarak, x_m düğüm noktalarındaki U, U' ve U'' değerleri, δ_m eleman parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_m &= U'(x_m) = \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\ U''_m &= U''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

biçiminde yazılır.

1.5. Eşit Genişlikli (EW) Denklem

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, plazma fiziği, akışkanlar mekaniği, hidrodinamik, uygulamalı matematik, katı hal fiziği ve optik fiberler gibi bilimin farklı alanlarındaki karmaşık olayları açıklamak için yaygın olarak kullanılmıştır. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin önemli konularından biri de tam çözümler aramaktır. Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin karmaşıklığı nedeniyle tam çözümleri çoğunlukla türetilemez. Bu denklemlerin yalnızca belirli sınıflarının analitik yollarla çözülebilmesinden dolayı, bu lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri, fiziksel olayları araştırmak için çok işlevseldir. Morrison ve çalışma arkadaşları tarafından türetilen EW denklem,

$$U_t + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (1.17)$$

biçiminde bir kısmi diferansiyel denklemdir [13,14]. Burada ε ve μ pozitif parametreler, t zaman, x konum koordinatı ve $U(x, t)$ dalga genliğidir. Fiziksel sınır koşulları $U \rightarrow 0$ ve $|x| \rightarrow \infty$ olarak belirlenmiştir. $U U_x$ ve U_{xxt} terimleri sırasıyla lineer olmayan dalganın yayılmasını ve yükselmesini ifade etmektedir. EW denkleminin tam çözümü elde edilmiş ve literatürde EW denkleminin sayısal çözümü ile ilgili çok sayıda çalışma mevcuttur. Zaki, tek soliter dalganın hareketini ve undular bore gelişimini incelemiş ve lineer B-spline fonksiyonlar kullanarak, en küçük kareler yöntemi ile EW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmiştir [15]. Raslan, tek soliter dalganın hızını, konumunu ve genliğini, solitonların etkileşimini ve bir undular bore gelişimini incelemek için kuintik B-spline kollokasyon sonlu elemanlar yöntemini kullanmıştır [16]. Doğan, tek soliter dalga hareketini ve undular bore gelişimini araştırmak için EW denkleminin çözümünde lineer

B-spline şekil fonksiyonları ile birlikte Galerkin metodunu kullanmıştır [17]. Saka ve çalışma arkadaşları ise soliter dalganın oluşumunu ve gelişimini inceleyerek, EW denkleminin kübik B-spline kollokasyon yöntemi ile sayısal çözümünü elde etmişlerdir [18].

1.6. Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli (GEW) Denklem

Pozitif x yönünde yayılan uzun dalgalar için elde edilen GEW denklemi;

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (1.18)$$

şeklinindedir. (1.18) ile verilen denklemde p pozitif bir tam sayı, ε ve μ pozitif parametreler, t zaman, x konum koordinatı ve $U(x, t)$ dalga genliğidir. Fiziksel sınır koşulları $U \rightarrow 0$ ve $|x| \rightarrow \infty$ olarak belirlenmiştir. Başlangıç koşulları ise aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$$\begin{aligned} U(a, t) &= 0 & U(b, t) &= 0 \\ U(x, 0) &= f(x) & a \leq x \leq b. \end{aligned}$$

Burada $f(x)$, dikkate alınan aralık içine yerleştirilmiş, test problemlerine bağlı olarak sonraki bölümlerde tanımlanacak olan bir fonksiyondur. Bilindiği gibi akışkanlar problemlerinde, U miktarı su yüzeyinin dikey yer değiştirmesi ile ilişkilidir, ancak plazma uygulamalarında U , elektrostatik potansiyelin negatifidir. Bu nedenle (1.18) ile verilen denklemin soliter dalga çözümü, sıg suda doğrusal olmayan enine dalgalar, plazmadaki iyon-akustik ve manyeto-hidrokinamik dalgalar gibi zayıf doğrusal olmayan ve dağılım dalgaları olan birçok fiziksel olayın bulunmasına yardımcı olmuştur [19]. GEW denklemi, EW denklemine dayanmaktadır. Bu genel denklemler, $(p + 1)$. dereceden lineer olmayan dalga denklemleridir ve nabız benzeri soliter dalga çözümlerine sahiptir. Bu denklemin bir su kanalında yayılan tek yönlü dalgalar, kıyıya yakın bölgelerdeki uzun dalgalar gibi birçok fiziksel uygulaması vardır [20]. (1.18) ile verilen denklemde p yerine 1 yazılırsa EW denklemi [20-22] elde edilir ve yine (1.18) ile gösterilen denklemde p yerine 2 yazılırsa elde edilen denklem modifiye edilmiş EW denklemi [23-26] olarak adlandırılır. Son yıllarda GEW denkleminin çözümü için çeşitli sayısal yöntemler kullanılarak çalışmalar yapılmıştır. Hamdi GEW denkleminin tek soliter dalga için tam çözümünü üretmiştir [27]. Evans ve Raslan, tek soliter dalganın hareketi, soliter dalgaların etkileşimi ve solitonların oluşumunun sayısal çözümlerini elde etmek için kuadratik B-spline fonksiyonlara dayalı kollokasyon yöntemini kullanarak, GEW

denkleminin sayısal çözümlerini araştırmışlardır [28]. Raslan, B-spline kollokasyon yöntemini kullanarak GEW denkleminin sayısal çözümünü elde etmiştir [29]. Taghizadeh ve arkadaşları GEW denkleminin tam hareketli dalga çözümlerini oluşturmak için homojen denge yöntemini kullanmışlardır [30]. Denklem, Panahipour'un standart tip radyal tabanlı fonksiyonlarla global bir kollokasyon yöntemine dayalı ağırsız bir yöntemle sayısal olarak çözülmüştür [20]. Sırasıyla Karakoç ve Zeybek tarafından, GEW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için iki farklı lineerleştirme tekniğine sahip kuintik B-spline kollokasyon yöntemi ile B-spline fonksiyonlarına dayalı bir lumped Galerkin yöntemleri sunulmuştur. Roshan, GEW denklemi için sırasıyla test ve deneme fonksiyonları olarak lineer B-spline fonksiyonu ve kuadratik B-spline fonksiyonlarını kullanarak Petrov-Galerkin yöntemini uygulamıştır [31].

1.7. Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi

Bağımsız dalgalar ilk olarak 1834 yılında Scott Russel [32] tarafından gözlemlenmiştir. Scott Russel'dan sonraki ilk teorik çalışmalar 1895 yılında D. J. Korteweg ve öğrencisi G. de Vries ismindeki bilim insanları tarafından yapılmıştır [33]. Sığ sularda dalganın yayılımının gözlemlenmesiyle oluşturulan Korteweg-de Vries (KdV) denklemi;

$$U_t + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxx} = 0 \quad (1.19)$$

biçimindedir. KdV denklemi, sığ su dalgaları gibi çeşitli lineer olmayan olayları modellemekte çokça kullanılan bir denklemdir.

Lineer olmayan KdV kısmi diferansiyel denkleminde, U_t terimi tek yönde yayılan dalganın zaman gelişimini, lineer olmayan terim olan $U U_x$ dalganın formunu korumasını ve lineer terim olan U_{xxx} dalganın ayrılmasını ve yayılmasını belirtir. Denkleminde bulunan ε ve μ keyfi pozitif parametrelerdir.

Farklı fiziksel sistemlerde ortaya çıkan KdV denklemi önemli bir denklem türüdür. KdV denkleminin tam çözümleri sınırlı birkaç başlangıç değeri için hesaplanabilmiştir. Bundan dolayı başlangıç değerlerinin farklı seçilebildiği sayısal çözümlere ihtiyaç duyulmuştur.

Literatürde KdV denkleminin çözümleri ile ilgili çok sayıda çalışma vardır. KdV denkleminin tam çözümü ilk olarak Zabusky, Fornberg ve Whitham tarafından elde edilmiştir [34-36]. 1968 de ise Lax, KdV denklemi tarafından yönlendirilen lineer olmayan etkileşim altında iki farklı çözümün korunduğunun analitik ispatını yapmıştır

[37]. Bilim insanları KdV denklemini çözebilmek amacıyla farklı sayısal yöntemler kullanmıştır. M. E. Alexander ve J. L. Morris [38] ile A. H. A. Ali [39] KdV denklemini sonlu elmanlar yöntemiyle, İ.Dağ [40] kollokasyon yöntemi ile, D.Kaya [41] Adomian ayrıştırma metodu ile KdV denkleminin sayısal çözümlerini araştırmışlardır. A. C. Vliengenhart [42] ve K. Goda [43] ise sonlu fark yöntemiyle KdV denklemini sayısal olarak çözmüşlerdir.

1.8. Modifiye Edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) Denklemi

mKdV denklemi KdV tipindeki önemli denklemlerden biridir. Miura [11] tarafından keşfedilen mKdV denklemi;

$$U_t + \varepsilon U^2 U_x - \mu U_{xxx} = 0 \quad (1.20)$$

biçimindedir. Burada, ε ve μ keyfi pozitif parametrelerdir. U_t terimi bir yönde yayılan dalganın zaman gelişimini, $U^2 U_x$ lineer olmayan terimi dalga dikleşmesini ve U_{xxx} lineer terimi de dalganın yayılımını temsil etmektedir.

mKdV denkleminin elektrodinamik ve elektromanyetik dalgalar, akışkanlar mekaniği gibi oldukça geniş fiziksel uygulama alanları vardır.

Lineer olamayan mKdV denkleminin sayısal ve tam çözümleri ile ilgili literatürde sınırlı sayıda çalışma vardır. Kaya Adomian ayrıştırma yöntemini kullanarak yüksek dereceli mKdV denkleminin sayısal çözümlerini elde etmiştir [44]. Biswas ve arkadaşları kuartik B-spline Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile mKdV denklemini çözmüşlerdir [45]. Raslan ve Bağdady tarafından mKdV denklemi sonlu farklar yöntemi kullanılarak çözülmüş ve çözümün doğruluğu ve kararlılığı gösterilmiştir. Aynı zamanda mKdV denklemi tarafından modellenen göl kıyıları ve plajlar boyunca sığ su dalgalarının dinamiklerinin sayısal özelliklerini elde etmişlerdir [46,47]. Wazwaz (3 + 1) boyutlu mKdV denkleminin çoklu soliton çözümlerini elde etmiştir [48,49]. Karakoç ve çalışma arkadaşları mKdV denklemine, Lumped Petrov-Galerkin ve Galerkin yöntemlerini uygulamışlardır [50,51].

BÖLÜM 2

GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DENKLEMİN PETROV- GALERKİN YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde S.K. Bhowmik ve S.B.G Karakoç' un [55] ile verilen referanstaki çalışmaları incelenmiştir.

2.1. Yöntemin Denkleme Uygulanması

$[a, b]$ sonlu aralığının düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$, $m = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonlar ($m = -1(1)N$) noktaları için (1.7) ile verilmiştir.

Bu B-spline fonksiyonları baz fonksiyon olarak kullanan $U(x, t)$ tam çözümüne denk gelen $U_N(x, t)$ sayısal çözümü (1.8) ile verilmiştir. Burada $\delta_j(t)$ bilinmeyen parametreleri sınır ve ağırlıklı kalan koşulları kullanılarak hesaplanacaktır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında $h\eta = x - x_m$, ($0 \leq \eta \leq 1$) lokal koordinat dönüşümü kullanılarak, $[0, 1]$ aralığı boyunca (1.7) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonlar (1.9) deki gibi yeniden formüle edilmiştir.

$\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$ ve $\phi_{m+1}(x)$ hariç diğer tüm kuadratik B-spline fonksiyonlar $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında sıfırdır. Dolayısıyla bu eleman üzerinden (1.8) ile verilen sayısal fonksiyon, (1.9) ile verilen baz fonksiyonları cinsinden (1.10) deki gibi tanımlanmıştır.

(1.7) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonlar ve (1.10) ile verilen sayısal çözüm fonksiyonu kullanılarak, düğüm noktalarındaki U_m ve türevi olan U'_m değerleri, δ_m eleman parametreleri cinsinden (1.11) ile verilmiştir. Burada L_m ağırlık fonksiyonları lineer B-spline fonksiyonlardır. x_m düğüm noktalarında L_m lineer B-spline fonksiyonlar (1.5) ile verilmiştir. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu aralığı, $h\eta = x - x_m$, ($0 \leq \eta \leq 1$) lokal koordinat dönüşümü kullanılarak $[0, 1]$ aralığına dönüştürülür. Böylece lineer B-spline L_m (1.6) deki gibi tanımlanmıştır.

(1.18) ile verilen denkleme Petrov-Galerkin yöntemi uygulanırsa;

$$\int_a^b L(U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt}) dx = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde (1.18) ile verilen denklemin zayıf formu elde edilir. $x \rightarrow \eta$ şeklindeki değişken değiştirme işlemi (2.1) ile verilen denkleme uygulanırsa,

$$\int_0^1 L \left(U_t + \frac{\varepsilon}{h} \widehat{U}^p U_\eta - \frac{\mu}{h^2} U_{\eta t} \right) d\eta = 0 \quad (2.2)$$

bulunur. Burada integral alma işlemini daha basite indirgemek için \widehat{U} bir eleman üzerinde sabit olarak alınmıştır. (2.2) ile verilen denklemdeki her bir elemanın ayrı ayrı integrali alınır ve (1.18) ile verilen denklem kullanılırsa;

$$\int_0^1 [L(U_t + \lambda U_\eta) + \beta L_\eta U_{\eta t}] d\eta = \beta L U_{\eta t} \Big|_0^1 \quad (2.3)$$

integrali elde edilir. Burada $\lambda = \varepsilon \widehat{U}^p / h$ ve $\beta = \mu / h^2$ dir. (1.6) ile verilen B-spline şekil fonksiyonları olan L_m , ağırlık fonksiyonları olarak seçilir ve (1.10) ile verilen yaklaşım (2.3) ile verilen integral denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{j=m-1}^{m+1} \left[\left(\int_0^1 L_i \phi_j + \beta L_i' \phi_j' \right) d\eta - \beta L_i \phi_j \Big|_0^1 \right] \delta_j^e + \sum_{j=m-1}^{m+1} \left(\lambda \int_0^1 L_i \phi_j' d\eta \right) \delta_j^e = 0 \quad (2.4)$$

formu elde edilir. (2.4) ile verilen denklem matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$[A^e + \beta(B^e - C^e)] \delta^e + \lambda D^e \delta^e = 0. \quad (2.5)$$

Yukarıdaki denklemlerde ‘.’ t ye göre türevi gösterir ve $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$ eleman parametreleridir. $A_{ij}^e, B_{ij}^e, C_{ij}^e$ ve D_{ij}^e 2×3 tipinde dikdörtgensel eleman matrisleri aşağıdaki integraller ile hesaplanmıştır:

$$A_{ij}^e = \int_0^1 L_i \phi_j d\eta = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \int_0^1 L_i' \phi_j' d\eta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = L_i \phi_j \Big|_0^1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^e = \int_0^1 L_i \phi_j' d\eta = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Burada $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında $i; m, m + 1$ ve $j; m - 1, m, m + 1$ değerlerini alır. U için bir lumped değeri $\lambda = \frac{\varepsilon}{2^p h} (\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})^p$ olarak $(U_m + U_{m+1}/2)^p$ ifadesinden elde edilir. Tüm integrallerden gelen değerler bir araya toplanırsa,

$$[A + \beta(B - C)]\dot{\delta} + \lambda D \delta = 0 \quad (2.6)$$

matris denklemi elde edilir. Burada $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$ global eleman parametreleridir. 2×3 tipindeki A, B, C ve λD dikdörtgensel matrislerinin her birinin m . satırı aşağıdaki forma sahiptir;

$$A = \frac{1}{12} (1, 11, 11, 1, 0),$$

$$B = \frac{1}{3} (-1, 1, 1, -1, 0),$$

$$C = (0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\lambda D = \frac{1}{3} (-\lambda_1, -\lambda_1 - 2\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2, 0)$$

burada λ_1, λ_2 değerleri:

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon}{2^p h} (\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})^p,$$

$$\lambda_2 = \frac{\varepsilon}{2^p h} (\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^p$$

biçimindedir. (2.5) ile verilen denklemde δ ve $\dot{\delta}$ parametreleri yerine sırasıyla ileri fark yaklaşımı,

$$\delta = \frac{1}{2} (\delta^n + \delta^{n+1})$$

ile Crank-Nicolson formülü,

$$\dot{\delta} = \delta^{n+1} - \frac{\delta^n}{\Delta t}$$

yazılırsa;

$$\left[A + \beta(B - C) + \frac{\lambda \Delta t}{2} D \right] \delta^{n+1} = \left[A + \beta(B - C) - \frac{\lambda \Delta t}{2} D \right] \delta^n \quad (2.7)$$

matris sistemi elde edilir. Burada Δt zaman adıdır. (2.7) ile verilen matris sisteminde GEW denkleminin sınır koşulları uygulanırsa karesel matris denklemi elde edilir. Bu sistem Thomas algoritmasının bir varyantı ile etkili bir şekilde çözülür. Ancak çözüm sürecinde, lineer olmama durumuyla başa çıkmak için her zaman adımında iki veya üç kez $\delta^{n*} = \delta^n + \frac{1}{2}(\delta^n - \delta^{n-1})$ yaklaşımı uygulanmıştır. Sonuç olarak (2.7) ile verilen matris sisteminin tipik bir elemanı δ^n ve δ^{n+1} düğüm parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılır;

$$\gamma_1 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_2 \delta_m^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+2}^{n+1} = \gamma_4 \delta_{m-1}^n + \gamma_3 \delta_m^n + \gamma_2 \delta_{m+1}^n + \gamma_1 \delta_{m+2}^n, \quad (2.8)$$

burada,

$$\gamma_1 = \frac{1}{12} - \frac{\beta}{3} - \frac{\lambda \Delta t}{6},$$

$$\gamma_2 = \frac{11}{12} + \frac{\beta}{3} - \frac{3\lambda \Delta t}{6},$$

$$\gamma_3 = \frac{11}{12} + \frac{\beta}{3} + \frac{3\lambda \Delta t}{6},$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{12} - \frac{\beta}{3} + \frac{\lambda \Delta t}{6}$$

biçimindedir. Bilinmeyen parametreleri hesaplamak ve iterasyonu başlatmak için, başlangıç ve sınır şartlarını kullanarak başlangıç vektörü δ^0 hesaplanmalıdır. Bunun için $U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0)$ ile $U'_N(x_0, 0) = U'_N(x_N, 0) = 0$, $m = 0, 1, \dots, N$ eşitlikleri kullanılarak δ^0 başlangıç vektörü,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & -2 & 2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^0 \\ \delta_0^0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^0 \\ \delta_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(x_0, 0) \\ U(x_1, 0) \\ \vdots \\ U(x_N, 0) \\ hU'(x_0, 0) \end{bmatrix}$$

matris denklemden kolaylıkla elde edilir.

2.2. Kararlılık Analizi

Sayısal şemanın lineer kararlılığını göstermek için, Von-Neumann teorsine dayalı Fourier analizi kullanılmıştır. (1.18) ile verilen denklemin lineer olmayan $U^p U_x$ terimindeki U^p ifadesi lokal olarak sabit olduğu kabul edilmiştir. k mod numarası ve h eleman büyüklüğü

olmak üzere $\delta_j^n = g^n e^{ijkh}$, ($i = \sqrt{-1}$) Fourier açılımı (2.8) ile verilen denklemde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$g = \frac{a - ib}{a + ib} \quad (2.9)$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} a &= (11 + 4\beta) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) h + (1 - 4\beta) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right), \\ b &= 2\lambda\Delta t \left[3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) h + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) h \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

olup $|g| = 1$ bulunur, bundan dolayı lineerleştirilmiş şema koşulsuz olarak kararlıdır.

2.3. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar

Bu bölümde, tek soliter dalğanın hareketi, iki soliter dalğanın etkileşimi ve solitonların oluşumu ile ilgili farklı test problemleri kullanılarak ele alınan algoritmanın etkinliği araştırıldı. Test problemleri için homojen sınır koşulları ve farklı başlangıç koşulları kullanılarak $p = 2, 3$ ve 4 için GEW denkleminin sayısal çözümleri hesaplandı. Tam çözüm kullanılarak hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları,

$$\begin{aligned} L_2 &= \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{\sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2}, \\ L_\infty &= \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j| \end{aligned}$$

biçimindedir. Hata normları, sayısal şemanın doğruluğunu ve etkinliğini göstermek için hesaplanmıştır. GEW denkleminin tam çözümü [28,52],

$$U(x, t) = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\mu}} (x - ct - x_0) \right]} \quad (2.11)$$

biçimindedir. Burada c , x ekseninde pozitif yönde ilerleyen dalğanın hızı, $\frac{p}{2\sqrt{\mu}}$ genlik ve x_0 keyfi sabittir. Homojen sınır koşullarıyla verilen GEW denkleminin çözümleri hareketin üç değişmezine sahiptir. Sırasıyla kütle, momentum ve enerjinin korunmasına denk gelen bu üç değişmez,

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu U_x^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b U^{p+2} dx, \quad (2.12)$$

biçimindedir.

2.4. Tek Soliter Dalga Hareketi

Sayısal hesaplamalar için ilk olarak daha önceden yapılan çalışmalara ait sonuçlarla karşılaştırma yapabilmek için $0 \leq x \leq 80$ aralığında $x_0 = 30$ alınmış ve $p = 2, c = 0.5, h = 0.1, \Delta t = 0.2, \varepsilon = 3, \mu = 1$ parametreleri seçilmiştir [19,31,52]. Bu parametreler genliği 1.0 olan tek soliter dalganın hareketini temsil eder ve tek dalganın hareketi çözüm aralığı boyunca $t = 0$ ile $t = 20$ zamanları arasında hesaplanmıştır. Korunum miktarlarının tam değerleri $I_1 = 3.1415927, I_2 = 2.6666667, I_3 = 1.3333333$ şeklindedir. Sayısal hesaplamada üç değişmezin yanı sıra L_2 ve L_∞ hata normlarının değerleri hesaplanmış ve Tablo 2.1 de gösterilmiştir. Tablo 2.1 e bakıldığında L_2 ve L_∞ hata normlarının sırasıyla $1.286582 \times 10^{-2}, 8.31346 \times 10^{-2}$ değerlerinden küçük olduğu görülmektedir. I_1, I_2 ve I_3 değişmezleri başlangıç değerlerinden sırasıyla $9.8 \times 10^{-6}, 3.2 \times 10^{-5}$ ve 1.3×10^{-5} den daha az değişmiştir. Ayrıca bu tablo değişmezlerin değişimlerinin tam değerleri ile uyumlu olduğunu teyit etmektedir. Dolayısıyla yöntemin makul ölçüde tutarlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Daha önce hesaplanan değerlerin yanı sıra tam çözüm ile sonuçlar karşılaştırılmış ve Tablo 2.2 de gösterilmiştir [19,31,52]. Bu tablo ile kullanılan yöntemin elde ettiği hata normlarının diğerlerinden daha az olduğu gösterilmiştir.

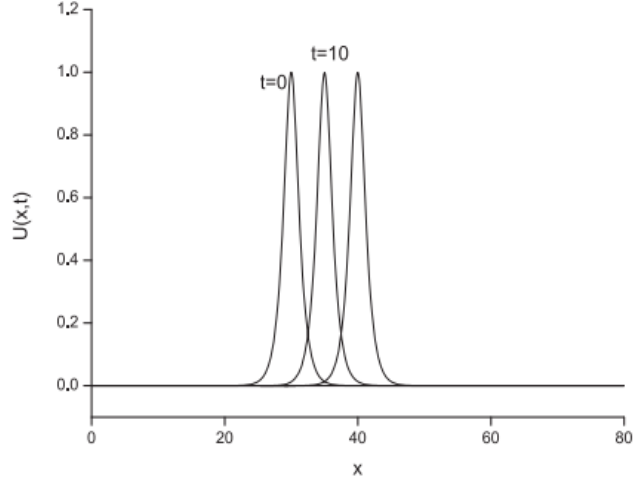
Tablo 2.1. Tek soliter dalganın $p = 2, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.5, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri için bulunan hata normları ve değişmezler

t	0	5	10	15	20
I_1	3.1415863	3.1415916	3.1415934	3.1415948	3.1415961
I_2	2.6682242	2.6682311	2.6682352	2.6682434	2.6682568
I_3	1.3333283	1.3333406	1.3333413	1.3333413	1.3333413
L_2	0.00000000	0.00395289	0.00704492	0.00995547	0.01286582
L_∞	0.00000000	0.00294851	0.00473785	0.00651735	0.00831346

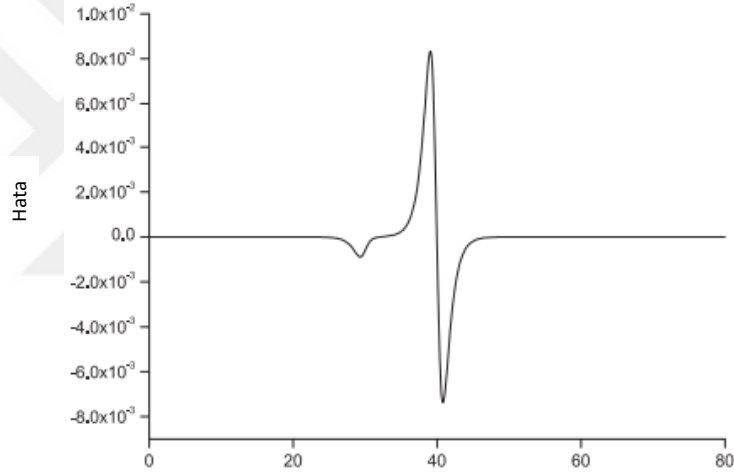
Tablo 2.2. Tek soliter dalga için $t = 20$ zamanında $p = 2, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.5, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri ile bulunan sonuçların karşılaştırılması

Yöntem	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
Tam çözüm	3.1415927	2.6666667	1.3333333	0.00000000	0.00000000
Mevcut Yöntem	3.1415961	2.6682568	1.3333413	0.01286582	0.00831346
Kübik Galerkin [19]	3.1589605	2.6902580	1.3570299	0.03803037	0.02629007
Kuintik Kollok [52]	3.1250343	2.6445829	1.3113394	0.05132106	0.03416753
Kuintik Kollok [52]	3.1416722	2.6669051	1.3335718	0.01675092	0.01026391
Petrov–Galerkin [31]	3.14159	2.66673	1.33341	0.0123326	0.0086082

Soliter dalganın hareketi $t = 0,10,20$ zamanında Şekil 2.1 de gösterilmiştir. Buna göre, tek soliton dalga değişmeyen bir hızla sağa doğru hareket etmekte ve saçılıcı olmayan bir şekilde artan zamanla genliğini ve şeklini korumaktadır. $t = 0$ zamanında soliter dalganın genliği 1.00000 ve tepe noktası $x = 30$ bulunmuştur. $t = 20$ de ise genliği, $x = 40$ merkezi ile 0.999416 olarak hesaplanmıştır. Böylece $[0,20]$ zaman aralığı boyunca genlikler arasındaki mutlak fark 5.84×10^{-4} olarak gözlemlenmiştir. Ayrık zamanlarda hata yüzdesi Şekil 2.2 ile gösterilmiştir. Hata sapması -8×10^{-3} ile 1×10^{-2} arasında değişmekte ve hataların alabileceği en yüksek ve en düşük değerler soliter dalganın merkezi konumu çevresinde oluşmuştur.



Şekil 2.1. Tek soliter dalganın $p = 2, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.5, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80], t = 0,10,20$ parametreleri için hareketi



Şekil 2.2. $t = 20$ zamanında $p = 2, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.5, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri için hata grafiği

İkinci sayısal çalışma için daha önceden yapılan çalışmalara ait sonuçları karşılaştırmak amacıyla $0 \leq x \leq 80$ aralığında $x_0 = 30$ alınmış ve $p = 3, c = 0.3, h = 0.1, \Delta t = 0.2, \varepsilon = 3, \mu = 1$ parametreleri seçilmiştir [19,31,52]. Bu parametreler genliği 1.0 olan tek soliter dalganın hareketini temsil eder ve tek dalganın hareketi çözüm aralığı boyunca $t = 0$ ile $t = 20$ zamanları arasında hesaplanmıştır. L_2 ve L_∞ hata normları ve I_1, I_2, I_3 korunum miktarları hesaplanmış Tablo 2.3 te verilmiştir. Tablo 2.3 e göre hata normlarının sırasıyla $4.48357 \times 10^{-3}, 3.37609 \times 10^{-3}$ değerlerinden küçük olduğu görülmektedir. I_1, I_2 ve I_3 değişmezleri başlangıç değerlerinden sırasıyla $1.78 \times 10^{-5}, 2.52 \times 10^{-5}$ ve 3.55×10^{-5} den daha az değişmiştir. Dolayısıyla yöntemin yeterince tutarlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Daha

önce hesaplanan değerler ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış ve Tablo 2.4 de gösterilmiştir [19,31,52]. Mevcut yöntemin hatalarının daha önceki yöntemlerle elde edilen hatalardan önemli ölçüde daha küçük olduğu görülmüştür.

Tablo 2.3. Tek soliter dalganın $p = 3, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.3, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri için bulunan hata normları ve değişmezler

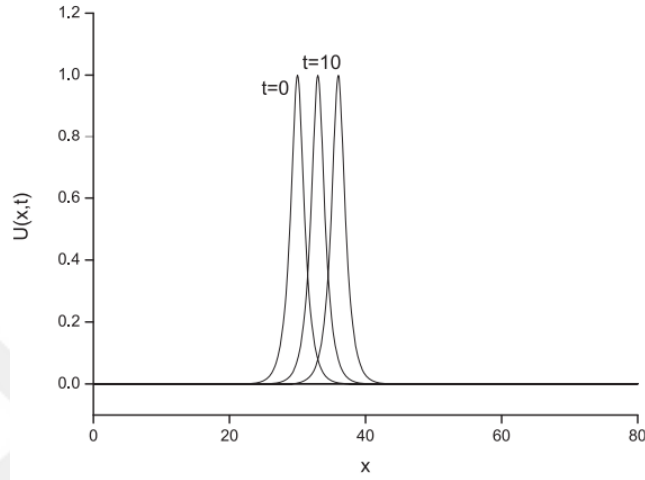
t	0	5	10	15	20
I_1	2.8043580	2.8043723	2.8043747	2.8043753	2.8043758
I_2	2.4664883	2.4665080	2.4665108	2.4665119	2.4665135
I_3	0.9855618	0.9855942	0.9855973	0.9855973	0.9855973
L_2	0.00000000	0.00183258	0.00291958	0.00372417	0.00448357
L_∞	0.00000000	0.00177948	0.00233283	0.00285444	0.00337609

Tablo 2.4. Tek soliter dalga için $t = 20$ zamanında $p = 3, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.3, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri ile bulunan sonuçların karşılaştırılması

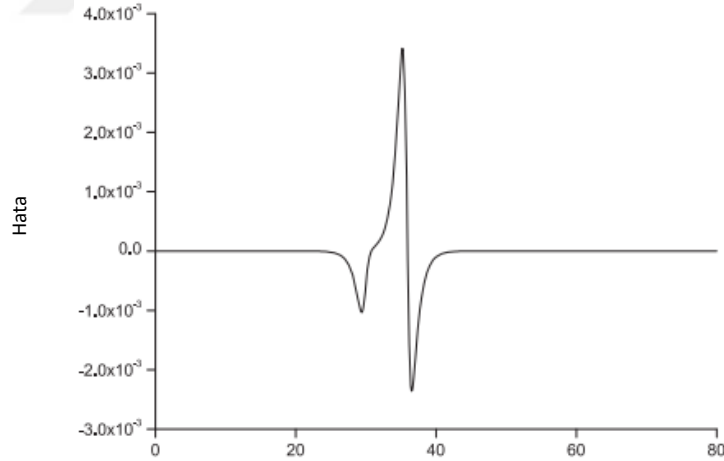
Yöntem	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
Mevcut Yöntem	2.8043758	2.4665135	0.9855973	0.00448357	0.00337609
Kübik Galerkin[19]	2.8187398	2.4852249	1.0070200	0.01655637	0.01370453
Kuintik Kollok [52]	2.8043570	2.4639086	0.9855602	0.00801470	0.00538237
Kuintik Kollok [52]	2.8042943	2.4637495	0.9854011	0.00708553	0.00480470
Petrov–Galerkin [31]	2.80436	2.46389	0.98556	0.00484271	0.00370926

Soliter dalganın $t = 0,10,20$ zamanlarındaki hareketi Şekil 2.3 te gösterilmiştir. Buna göre, tek soliton dalga değişmeyen bir hızla sağa doğru hareket etmekte ve tahmin edildiği gibi artan zamanla genliğini ve şeklini korumaktadır. $t = 0$ da soliter dalganın genliği 1.00000 ve tepe noktası $x = 30$ bulunmuştur. $t = 20$ de ise genliği 0.999522, $x = 36$ şeklinde elde edilmiştir. Bu nedenle $[0,20]$ zaman aralığı boyunca genlikler arasındaki mutlak fark 4.78×10^{-4} olarak gözlemlenmiştir. Ayrık zamanlarda hatanın sapması Şekil

2.4 ile gösterilmiştir. Hata sapması -3×10^{-3} ile 4×10^{-3} arasında değişmekte ve hataların alabileceği en yüksek ve en düşük değerler soliter dalganın merkezi konumu çevresinde oluşmuştur.



Şekil 2.3. Tek soliter dalganın $p = 3, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.3, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80], t = 0,10,20$ parametreleri için hareketi



Şekil 2.4. $t = 20$ zamanında $p = 3, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.3, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri için hata grafiği

Sayısal hesaplamalar için son olarak daha önceden yapılan çalışmalara ait sonuçlarla karşılaştırabilmek amacıyla $0 \leq x \leq 80$ aralığında $x_0 = 30$ alınmış ve $p = 4, c = 0.2, h = 0.1, \Delta t = 0.2, \varepsilon = 3, \mu = 1$ parametreleri seçilmiştir [19,31,52]. Bu parametreler genliği 1.0 olan tek soliter dalganın hareketini temsil etmekte ve tek dalganın çözüm aralığı boyunca $t = 0$ ile $t = 20$ zamanları arasında hesaplanmıştır. L_2

ve L_∞ hata normları ve I_1, I_2, I_3 korunum miktarları hesaplanarak Tablo 2.5 te verilmiştir. Tablo 2.5 e göre hata normları sırasıyla $1.96046 \times 10^{-3}, 1.33416 \times 10^{-3}$ değerlerinden küçük olduğu görülmektedir. I_1, I_2 ve I_3 değişmezleri başlangıç değerlerinden sırasıyla $4.07 \times 10^{-5}, 5.80 \times 10^{-5}$ ve 6.32×10^{-5} den daha az değişmiştir. Dolayısıyla yöntemin kabul edilebilir ölçüde tutarlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Daha önce hesaplanan değerler ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış ve Tablo 2.6 da gösterilmiştir [19,31,52]. Mevcut yöntemin hatalarının daha önceki yöntemlerle elde edilen hatalardan çok daha az olduğu açıkça görülmektedir.

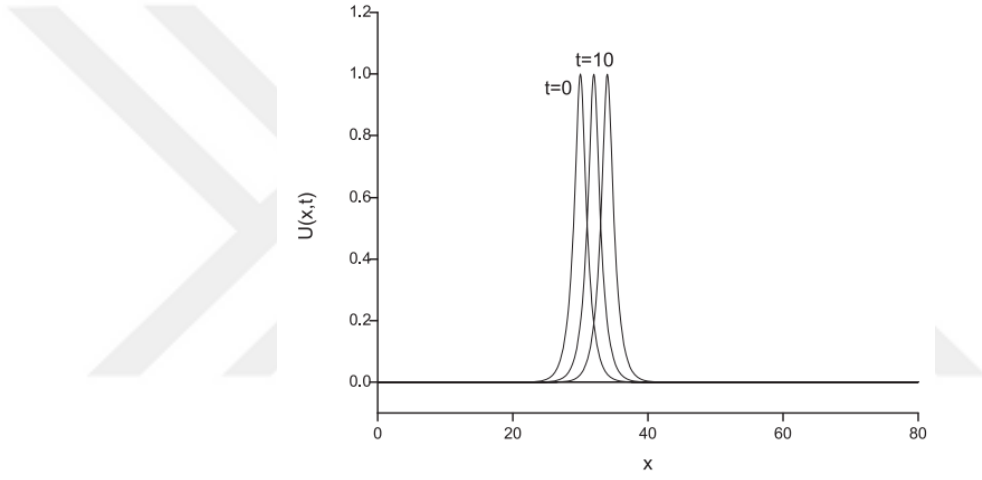
Tablo 2.5. Tek soliter dalganın $p = 4, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.2, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri için bulunan hata normları ve değişmezler

t	0	5	10	15	20
I_1	2.6220516	2.6220846	2.6220915	2.6220920	2.6220923
I_2	2.3598323	2.3598808	2.3598891	2.3598898	2.3598903
I_3	0.7853952	0.7854675	0.7854783	0.7854785	0.7854785
L_2	0.00000000	0.00125061	0.00178634	0.00193428	0.00196046
L_∞	0.00000000	0.00141788	0.00147002	0.00139936	0.00133416

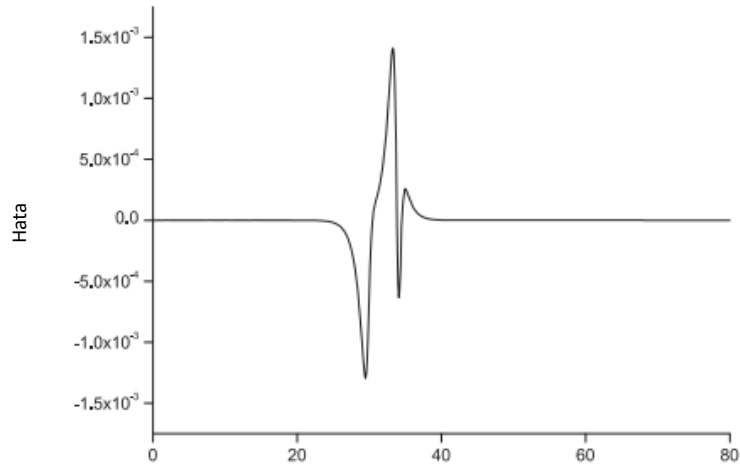
Tablo 2.6. Tek soliter dalga için $t = 20$ zamanında $p = 4, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.2, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri ile bulunan sonuçların karşılaştırılması

Yöntem	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
Mevcut Yöntem	2.6220923	2.3598903	0.7854785	0.00196046	0.00133416
Kübik Galerkin [19]	2.6327833	2.3730032	0.8023383	0.00890617	0.00821991
Kuintik Kollok [52]	2.6220508	2.3561901	0.7853939	0.00421697	0.00297952
Kuintik Kollok [52]	2.6219284	2.3559327	0.7851364	0.00339086	0.00247031
Petrov–Galerkin [31]	2.62206	2.35615	0.78534	0.00230499	0.00188285

Soliter dalganın $t = 0,10,20$ zamanlarındaki hareketi Şekil 2.5 te gösterilmiştir. Buna göre, tek soliton dalga neredeyse değişmeyen bir hızla sağa doğru hareket etmekte ve artan zamanlarda genliğini ve şeklini koruyarak ilerlediği görülmektedir. $t = 0$ da soliter dalganın genliği 1.00000 ve tepe noktası $x = 30$ olarak bulunmuştur. $t = 20$ de ise genliği 0.999475, $x = 34$ olarak hesaplanmıştır. Bu nedenle $[0,10]$ zaman aralığı boyunca genlikler arasındaki mutlak fark 5.25×10^{-4} olarak gözlemlenmiştir. Ayrık zamanlarda hatanın sapması Şekil 2.6 ile gösterilmiştir. Hata sapması -1.5×10^{-3} ile 1.5×10^{-3} arasında değişmiş ve hataların alabileceği en yüksek ve en düşük değerler soliter dalganın merkezi konumu çevresinde oluşmuştur.



Şekil 2.5. Tek soliter dalganın $p = 4, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.2, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80], t = 0,10,20$ parametreleri için hareketi



Şekil 2.6. $t = 20$ zamanında $p = 4, h = 0.1, \varepsilon = 3, c = 0.2, \mu = 1, \Delta t = 0.2, x \in [0,80]$ parametreleri için hata grafiği

2.5. İki Soliter Dalganın Etkileşimi

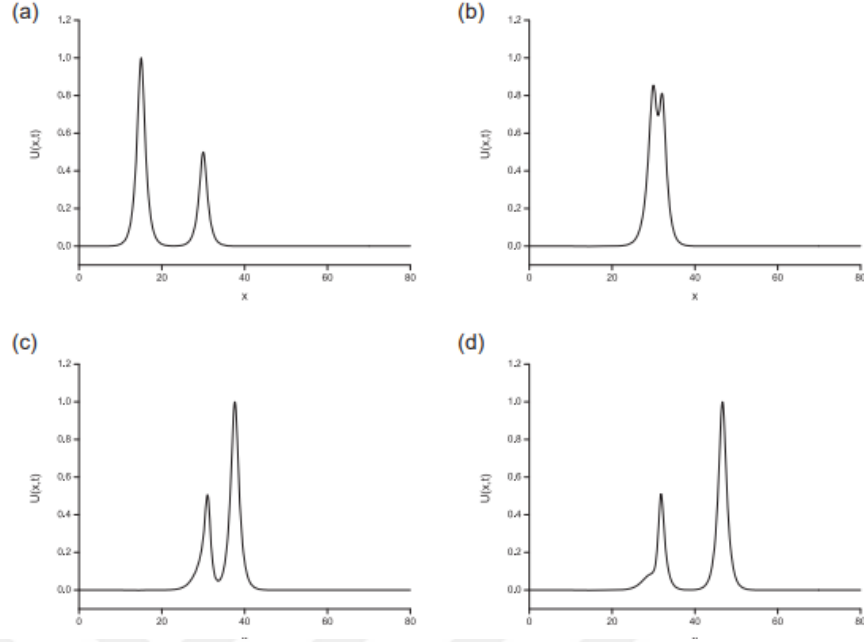
İkinci test probleminde, farklı genliklere sahip ve aynı yönde hareket eden iki soliter dalga etkileşimi incelenmiştir. Farklı genliklere sahip iki soliter dalganın başlangıç koşulu,

$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^2 p \sqrt{\frac{c_j(p+1)(p+2)}{2\varepsilon} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\mu}} (x - x_j) \right]}, \quad (2.13)$$

biçimindedir. Burada $j = 1, 2$ olmak üzere c_j ve x_j keyfi sabitlerdir. Yapılan çalışmada, $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\mu = 1$ olarak alınmıştır. p ve c_i nin farklı değerleri ve aynı $h = 0.1, \Delta t = 0.025, \varepsilon = 3$ değerleri seçilerek iki parametre ailesi üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Öncelikle $p = 3, c_1 = 0.3$ ve $c_2 = 0.0375$ alınmış ve sayısal hesaplamalar $t = 100$ zamanına kadar yapılmıştır. Bu durumda üç değişmez için elde edilen değerler Tablo 2.7 ile gösterilmiştir. Sonuçların tahmin edildiği gibi sabit ve daha önceki yapılan çalışmalarla uyumlu olduğu açıkça görülmektedir [19,31,52]. İki pozitif soliter dalga etkileşiminin davranışı Şekil 2.7 ile gösterilmiştir.

Tablo 2.7. $p = 3$ için iki soliter dalganın etkileşiminden elde edilen değişmezlerin değerleri

	t	0	30	60	90	100
I_1	Mevcut Yöntem	4.20653	4.20657	4.20622	4.20502	4.20517
	[19]	4.20653	4.20653	4.20616	4.20490	4.20503
	[52] Birinci	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653
	[52] İkinci	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653
	[31]	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655
I_2	Mevcut Yöntem	3.08311	3.08318	3.08309	3.08220	3.08251
	[19]	3.07987	3.07991	3.07947	3.07777	3.07797
	[52] Birinci	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988
	[52] İkinci	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988
	[31]	3.97977	3.07980	3.07987	3.07974	3.07972
I_3	Mevcut Yöntem	1.01636	1.01644	1.01664	1.01632	1.01634
	[19]	1.01636	1.01638	1.01654	1.01616	1.01616
	[52] Birinci	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636
	[52] İkinci	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636
	[31]	1.01634	1.01634	1.01634	1.01633	1.01634

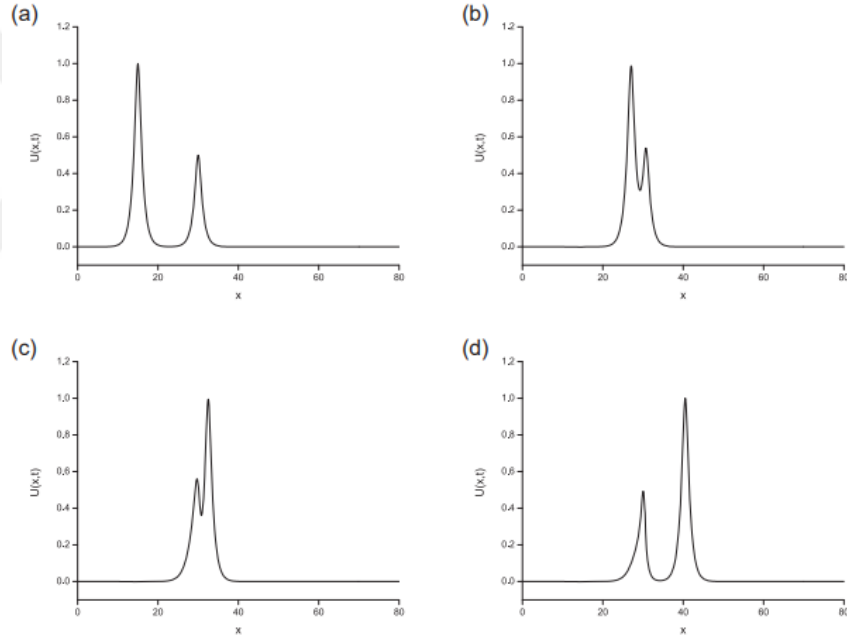


Şekil 2.7. $p = 3$ için (a) $t = 0$, (b) $t = 50$, (c) $t = 70$, (d) $t = 100$ zamanlarında iki soliter dalga etkileşimi

$t = 100$ de küçük dalga $x = 31.8$ konumuna ulaşırken genliği 0.510619 dur ve $x = 46.7$ konumuna sahip daha büyük dalganın genliği ise 0.999364 olarak gözlemlenmiştir. Böylece genlikler arasındaki fark küçük dalga için 0.010619 ve büyük dalga için 0.000636 olmuştur. İkinci sayısal çalışma için, $p = 4, c_1 = 0.2$ ve $c_2 = 1/80$ parametreleri alınmış ve $t = 120$ zamanına kadar iki soliter dalganın etkileşimi incelenmiştir. Bu durumda üç değişmez için elde edilen değerler Tablo 2.8 ile gösterilmiştir. Bu tablo ile verilen değerlerin daha önceki yapılan çalışmalarla uyumlu olduğu açıkça görülmektedir [19,31,52]. İki soliter dalganın etkileşiminin gelişimi Şekil 2.8 ile gösterilmiştir.

Tablo 2.8. $p = 4$ için iki soliter dalganın etkileşiminden elde edilen değişmezlerin değerleri

t		0	30	60	90	100
I_1	Mevcut Yöntem	3.93307	3.93311	3.93393	3.93229	3.93037
	[19]	3.93307	3.93309	3.93388	3.93222	3.93026
	[52] Birinci	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307
	[52] İkinci	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307
	[31]	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93308
I_2	Mevcut Yöntem	2.94979	2.94985	2.95122	2.94939	2.94801
	[19]	2.94521	2.94527	2.94703	2.94436	2.94212
	[52] Birinci	2.94524	2.94524	2.94524	2.94524	2.94524
	[52] İkinci	2.94524	2.94523	2.94523	2.94523	2.94523
	[31]	2.94512	2.94510	2.94505	2.94520	2.94511
I_3	Mevcut Yöntem	0.79766	0.79775	0.79952	0.79824	0.79811
	[19]	0.79766	0.79770	0.79942	0.79812	0.79794
	[52] Birinci	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766
	[52] İkinci	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766
	[31]	0.79761	0.79761	0.79762	0.79761	0.79761



Şekil 2.8. $p = 4$ için (a) $t = 0$, (b) $t = 60$, (c) $t = 80$, (d) $t = 120$ zamanlarında iki soliter dalganın etkileşimi

2.6. Solitonların Oluşumu

Son olarak GEW denklemi için bir başka başlangıç değer problemi, soliter dalgalarda

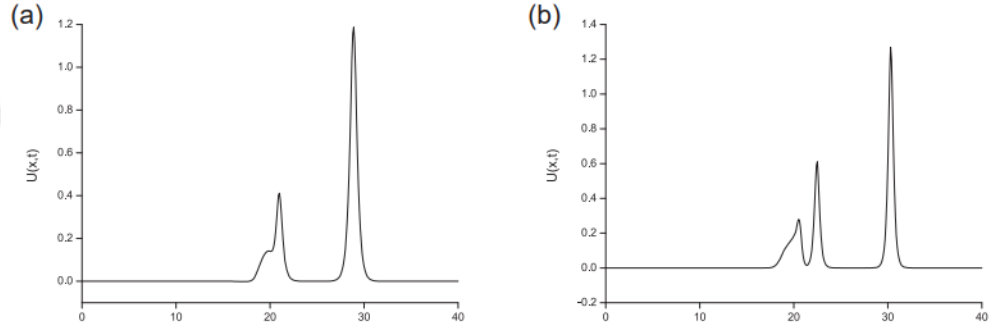
$$U(x, 0) = \exp(-x^2) \quad (2.14)$$

Gaussian başlangıç koşulu kullanılarak, solitonların oluşumuyla ilgili çalışmalar yapılmıştır. Solitonların oluşumu μ değerine bağlı olduğundan, $p = 2,3,4$ için farklı $\mu = 0.1$ ve $\mu = 0.05$ değerleri seçilmiştir. Sayısal hesaplamalar $t = 12$ ye kadar yapılmıştır.

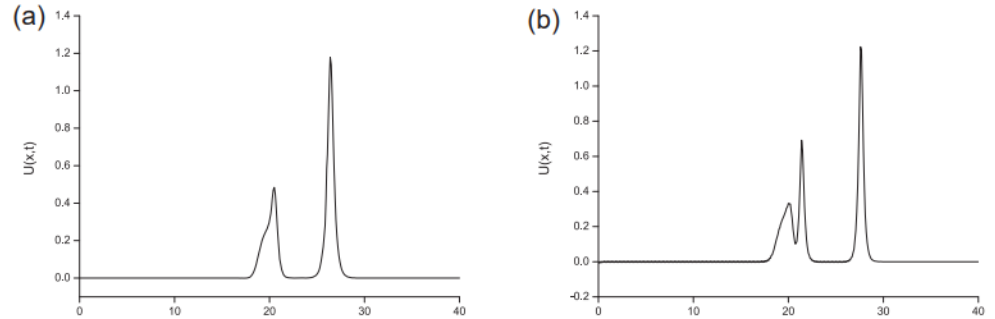
Farklı zamanlarda hesaplanan değişmezlerin değerleri Tablo 2.9 ile gösterilmiştir. Tabloya göre, μ değeri arttıkça değişmezlerin değerlerinin küçüldüğü ve hesaplanan değerlerin kabul edilebilir bir şekilde sabit olduğu kolayca görülür. Solitonların oluşumunun gelişimi Şekil (2.9-2.11) ile gösterilmiştir.

Tablo 2.9. Farklı μ değerleri için Maxwellian başlangıç koşulu ile elde edilen değerler

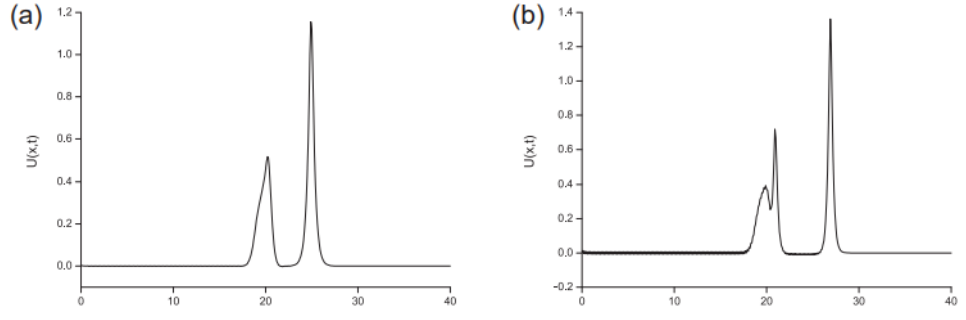
μ	t	$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
	0	1.7724537	1.3792767	0.8862269	1.7724537	1.3792767	0.7926655	1.7724537	1.3792767	0.7236013
0.1	4	1.7724537	1.5760586	0.8862269	1.7724537	1.6168691	0.7926655	1.7724537	1.6360543	0.7236013
	8	1.7724537	1.5838481	0.8862269	1.7724537	1.6245008	0.7926655	1.7724537	1.6481131	0.7236013
	12	1.7724537	1.5920722	0.8862269	1.7724537	1.6325922	0.7926655	1.7724537	1.6531844	0.7236013
[52]	12	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7928	1.7725	1.3786	0.7243
[31]	12	1.7724	1.3785	0.8861	1.7724	1.3787	0.7926	1.7734	1.3836	0.7224
	0	1.7724537	1.3162954	0.8862269	1.7724537	1.3162954	0.7926655	1.7724537	1.3162954	0.7236013
	4	1.7724537	1.5406812	0.8862269	1.7724537	1.5766908	0.7926655	1.7724537	1.6243519	0.7236013
0.05	8	1.7724537	1.6342604	0.8862269	1.7724537	1.6367952	0.7926655	1.7724537	1.6554614	0.7236013
	12	1.7724537	1.6835979	0.8862269	1.7724537	1.6372439	0.7926655	1.7724537	1.7079133	0.7236013
[52]	12	1.7724	1.3159	0.8864	1.7725	1.3160	0.7940	1.7735	1.3188	0.7345
[31]	12	1.7724	1.3160	0.8861	1.7724	1.3156	0.7922	1.7724	1.3177	0.7245



Şekil 2.9. $p = 2$ için, (a) $\mu = 0.1$, (b) $\mu = 0.05$, $t = 12$ zamanında Maxwellian başlangıç koşulu ile solitonların oluşumu



Şekil 2.10. $p = 3$ için, (a) $\mu = 0.1$, (b) $\mu = 0.05$, $t = 12$ zamanında Maxwellian başlangıç koşulu ile solitonların oluşumu



Şekil 2.11 $p = 4$ için, (a) $\mu = 0.1$, (b) $\mu = 0.05$, $t = 12$ zamanında Maxwellian başlangıç koşulu ile solitonların oluşumu



BÖLÜM 3

MODİFİYE EDİLMİŞ KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN PETROV-GALERKİN YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde T. Ak, S.B.G Karakoç ve A. Biswas' ın [51] ile verilen referanstaki çalışmaları incelenmiştir.

3.1. Kübik B-Spline Petrov-Galerkin Yöntemi

mKdV denklemi (1.20) ile verilmiştir. Denklemden ε ve μ pozitif parametreler, t indisi zamana göre türevi, x indisi ise konuma göre türevi belirtmektedir. Fiziksel sınır koşulları $U \rightarrow 0$ ve $|x| \rightarrow \infty$ olarak belirlenmiştir.

Sayısal yöntemi uygulamak için çözüm aralığı $a \leq x \leq b$ olarak sınırlandırılmıştır.

$[a, b]$ aralığı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = \frac{b-a}{N} = x_{m+1} - x_m$, $m = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında, eşit alt aralıklara bölünmüştür.

Homojen sınır şartları,

$$\begin{aligned} U(a, t) = 0 & \quad U(b, t) = 0 \\ U_x(a, t) = 0 & \quad U_x(b, t) = 0, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklinde olup, başlangıç koşulu ise;

$$U(x, 0) = f(x) \quad a \leq x \leq b \quad (3.2)$$

biçiminde seçilmiştir. Burada $f(x)$ önceden belirlenmiş bir fonksiyondur.

x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ ($m = -1(1)N$) kübik B-spline fonksiyonlar (1.12) deki gibi tanımlanmıştır [12]. $\{\phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ fonksiyon kümesi $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde tanımlanan fonksiyonlar için bir baz oluşturur. $U(x, t)$ tam çözümüne denk gelen $U_N(x, t)$ sayısal çözümü (1.13) ile verilmiştir. Burada $\delta_j(t)$ zamana bağlı bilinmeyen parametreler olup ağırlıklı rezidü ve sınır şartlarından hesaplanacaktır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $h\eta = x - x_m$, ($0 \leq \eta \leq 1$) lokal koordinat dönüşümü kullanılarak $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece η bağlı olan kübik B-spline şekil fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında (1.14) deki gibi tanımlanmıştır.

$\phi_{m-1}(x), \phi_m(x), \phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ hariç diğer tüm kübik B-spline fonksiyonlar $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında sıfırdır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında $U_N(x, t)$ sayısal çözümü (1.15) ile verilmiştir. Burada $\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}$ ve δ_{m+2} eleman parametreleri ve $\phi_{m-1}(x), \phi_m(x), \phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ eleman şekil fonksiyonlarıdır. $\phi_j(x)$ değerleri ve türevleri Tablo 1.1 ile gösterilmiştir.

(1.14) ile verilen kübik B-spline fonksiyonlar ve (1.15) ile verilen sayısal çözüm fonksiyonu kullanılarak, x_m düğüm noktalarındaki U, U' ve U'' değerleri, δ_m eleman parametreleri cinsinden (1.3.4.5) deki gibi yazılır. Burada ' ve '' sembolleri x e göre sırasıyla birinci ve ikinci türevleri belirtmektedir. ψ_m ağırlık fonksiyonları kuadratik B-spline fonksiyonlar olarak belirlenmiştir. $[a, b]$ kapalı aralığında bulunan x_m düğüm noktalarında ψ_m kuadratik B-spline fonksiyonlar,

$$\psi_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu aralığı, $h\eta = x - x_m$, ($0 \leq \eta \leq 1$) lokal koordinat dönüşümü kullanılarak $[0,1]$ aralığına dönüştürülür. Böylece elde edilen kuadratik B-spline ψ_m fonksiyonlar;

$$\begin{aligned} \psi_{m-1} &= (1 - \eta)^2, \\ \psi_m &= 1 + 2\eta - 2\eta^2, \\ \psi_{m+1} &= \eta^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanır.

(1.20) ile verilen denkleme Petrov-Galerkin yöntemi uygulandığında denklemin zayıf formu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\int_0^1 \psi(U_t + \varepsilon U^2 U_x + \mu U_{xxx}) dx = 0. \quad (3.5)$$

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığında, (3.5) ile verilen denkleme $h\eta = x - x_m$ dönüşümü uygulanırsa;

$$\int_0^1 \psi \left(U_t + \varepsilon \left(\frac{U^2}{h} \right) U_\eta + \mu \left(\frac{1}{h^3} \right) U_{\eta\eta\eta} \right) d\eta = 0 \quad (3.6)$$

olarak bulunur. (3.6) ile verilen denklemdeki her bir elemanın ayrı ayrı integrali alınır ve (1.20) ile verilen denklem kullanılırsa;

$$\int_0^1 [\psi(U_t + \lambda U_\eta) + \xi \Psi_\eta U_{\eta t}] d\eta = \xi \Psi U_{\eta t} |_0^1 \quad (3.7)$$

integrali elde edilir. Burada $\lambda = \frac{U^2}{h}$ ve $\xi = \frac{\mu}{h^3}$ dir. (3.4) ile verilen kuadratik B-spline şekil fonksiyonları olan ψ_m , ağırlık fonksiyonları olarak seçilir ve (1.15) ile verilen yaklaşım (3.7) ile verilen integral denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_0^1 \psi_i \phi_j d\eta \right) \right] \delta_j^e + \sum_{j=m-1}^{m+1} [(\varepsilon \lambda \int_0^1 \psi_i \phi_j' d\eta) - \left(\xi \int_0^1 \psi_i \phi_j'' d\eta \right) + (\xi \psi_i \phi_j'' |_0^1)] \delta_j^e = 0 \quad (3.8)$$

formu elde edilir. (3.8) ile verilen denklem matris formunda aşağıdaki gibi yazılır:

$$[A^e] \delta^e + [\varepsilon \lambda B^e - \xi (C^e - D^e)] \delta^e \quad (3.9)$$

Burada $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$ eleman parametreleri ve yukarıdaki denklemlerde ‘.’ t ye göre türevi gösterir. $A_{ij}^e, B_{ij}^e, C_{ij}^e$ ve D_{ij}^e 3×4 tipinde dikdörtgenel eleman matrisleri aşağıdaki integraller ile hesaplanmıştır:

$$A_{ij}^e = \int_0^1 \psi_i \phi_j d\eta = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 10 & 71 & 38 & 1 \\ 19 & 221 & 221 & 19 \\ 1 & 38 & 71 & 10 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \int_0^1 \psi_i \phi_j' d\eta = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -6 & -7 & 12 & 1 \\ -13 & -41 & 41 & 13 \\ -1 & -12 & 7 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = \int_0^1 \psi_i \phi_j'' d\eta = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -6 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^e = \psi_i \phi_j'' |_0^1 = \begin{bmatrix} -6 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 18 & -18 & 6 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \end{bmatrix}.$$

Burada $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında, i sadece 1,2 ve 3 değerlerini alırken j ; $m-1, m, m+1$ ve $m+2$ değerlerini alır. λ için bir lumped değeri $\frac{1}{4}(U_m + U_{m+1})^2$ den aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\lambda = \frac{1}{4h} (\delta_{m-1} + 5\delta_m + 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2. \quad (3.10)$$

Tüm integrallerden gelen değerler bir araya toplanırsa;

$$[A]\dot{\delta} + [\varepsilon\lambda B - \xi(C - D)]\delta = 0, \quad (3.11)$$

matris denklemini elde edilir. Burada $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$ global eleman parametreleridir. $A, \lambda B, C$ ve D dikdörtgensel matrislerinin her birinin m . satırı aşağıdaki forma sahiptir;

$$A = \frac{1}{60}(1, 57, 302, 302, 57, 1),$$

$$\lambda B = \frac{1}{10}(\lambda_1, -12\lambda_1 - 13\lambda_2, 7\lambda_1 - 41\lambda_2 - 6\lambda_3, 6\lambda_1 + 41\lambda_2 - 7\lambda_3, 13\lambda_2 + 12\lambda_3, \lambda_3),$$

$$C = 2(1, 1, -8, 8, -1, -1),$$

$$D = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

burada,

$$\lambda_1 = \frac{1}{4h}(\delta_{m-2} + 5\delta_{m-1} + 5\delta_m + \delta_{m+1})^2,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4h}(\delta_{m-1} + 5\delta_m + 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2,$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4h}(\delta_m + 5\delta_{m+1} + 5\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^2$$

biçimindedir. (3.11) ile verilen denkleminde δ ve $\dot{\delta}$ parametreleri yerine sırasıyla ileri fark yaklaşımı,

$$\delta = \frac{1}{2}(\delta^n + \delta^{n+1})$$

ile Crank-Nicolson formülü,

$$\dot{\delta} = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t}$$

uygulanırsa,

$$\left[A + [\varepsilon\lambda B - \xi(C - D)] \frac{\Delta t}{2} \right] \delta^{n+1} = \left[A - [\varepsilon\lambda B - \xi(C - D)] \frac{\Delta t}{2} \right] \delta^n \quad (3.12)$$

matris sistemi elde edilir. Burada Δt zaman adıdır. (3.12) ile verilen matris sistemine (3.1) ile verilen sınır koşulları uygulanırsa karesel matris denklemi elde edilir. Bu sistem Thomas algoritmasının bir varyantı ile etkili bir şekilde çözülür. Ancak çözüm sürecinde, lineer olmama durumuyla başa çıkmak için her zaman adımında iki veya üç kez $\delta^{n*} = \delta^n + \frac{1}{2}(\delta^n - \delta^{n-1})$ yaklaşımı uygulanmıştır. Sonuç olarak (3.12) ile verilen matris sisteminin tipik bir elemanı δ^n ve δ^{n+1} düğüm parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} \gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+3}^{n+1} \\ = \gamma_4 \delta_{m-2}^n + \gamma_3 \delta_{m-1}^n + \gamma_2 \delta_m^n + \gamma_1 \delta_{m+1}^n + \gamma_1 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (3.13)$$

burada,

$$\gamma_1 = \frac{1}{60} - \frac{\varepsilon \lambda \Delta t}{20} - \xi \Delta t,$$

$$\gamma_2 = \frac{57}{60} - \frac{25 \varepsilon \lambda \Delta t}{20} - \xi \Delta t,$$

$$\gamma_3 = \frac{302}{60} - \frac{40 \varepsilon \lambda \Delta t}{20} + 8 \xi \Delta t,$$

$$\gamma_4 = \frac{302}{60} + \frac{40 \varepsilon \lambda \Delta t}{20} - 8 \xi \Delta t,$$

$$\gamma_5 = \frac{57}{60} - \frac{25 \varepsilon \lambda \Delta t}{20} + \xi \Delta t,$$

$$\gamma_6 = \frac{1}{60} - \frac{\varepsilon \lambda \Delta t}{20} + \xi \Delta t$$

biçimindedir. Bilinmeyen parametreleri hesaplamak ve iterasyonu başlatmak için, başlangıç ve sınır şartlarını kullanarak başlangıç vektörü δ^0 hesaplanmalıdır. Bu nedenle, (1.15) ile verilen denklem, başlangıç koşulu ile aşağıdaki gibi yeniden yazılır:

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0. \quad (3.14)$$

Burada, δ_m^0 parametreleri sonradan belirlenecektir. Bunun için,

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0)$$

$$U'_N(x_0, 0) = U'_N(x_N, 0) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (3.15)$$

eşitlikleri kullanılarak δ^0 başlangıç vektörü,

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^0 \\ \delta_0^0 \\ \vdots \\ \delta_N^0 \\ \delta_{N+1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'(x_0, 0) \\ U(x_0, 0) \\ \vdots \\ U(x_N, 0) \\ U'(x_0, 0) \end{bmatrix}$$

matris denkleminde kolaylıkla elde edilir.

3.2. Kararlılık Analizi

Sayısal algoritmanın lineer kararlılığını göstermek için Fourier yöntemi kullanılmıştır. mKdV denkleminde lineer olmayan $U^2 U_x$ terimindeki U ifadesi lokal olarak sabit olduğu kabul edilmiştir. k mod numarası ve h eleman büyüklüğü olmak üzere $\delta_m^n = p^n e^{ijkh}$, ($i = \sqrt{-1}$) Fourier açılımı (3.13) ile verilen denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$p = \frac{a - ib}{a + ib} \quad (3.16)$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} a &= 302 \cos\left(\frac{kh}{2}\right) + 57 \cos\left(\frac{3kh}{2}\right) + 302 \cos\left(\frac{5kh}{2}\right), \\ b &= [(120\varepsilon\lambda - 480\xi)\Delta t] \sin\frac{kh}{2} \\ &\quad + [(120\varepsilon\lambda - 480\xi)\Delta t] \sin\frac{3kh}{2} \\ &\quad + [(120\varepsilon\lambda - 480\xi)\Delta t] \sin\frac{5kh}{2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

olup $|p| = 1$ bulunur, bundan dolayı lineerleştirilmiş şema koşulsuz olarak kararlıdır.

3.3. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar

mKdV denkleminin sayısal sonuçları tek soliter dalganın hareketi, iki ve üç soliter dalganın etkileşimi ve solitonların oluşumu olmak üzere dört test problemi ile elde edilmiştir. Tam çözüm kullanılarak hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları,

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{\sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2}, \quad (3.18)$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|, \quad (3.19)$$

$$j = 1, 2, \dots, N - 1,$$

biçimindedir. Böylece belirli zamanlarda tam ve sayısal çözümler arasındaki fark hesaplanabilmektedir. mKdV denkleminin için sırasıyla kütle, momentum ve enerjinin korunmasına denk gelen üç değişmez,

$$I_1 = \int_a^b U dx \simeq h \sum_{j=1}^N U_j^n,$$

$$I_2 = \int_a^b U^2 dx \simeq h \sum_{j=1}^N (U_j^n)^2,$$

$$I_3 = \int_a^b [U^4 - \frac{6\mu}{\varepsilon} (U_x)^2] dx \simeq h \sum_{j=1}^N [(U_j^n)^4 - \frac{6\mu}{\varepsilon} (U_x)_j^n] \quad (3.20)$$

şeklinde [53,54]. Soliter dalganın hareketinde I_1, I_2 ve I_3 değişmezleri sayısal algoritmayı kontrol etmek için izlenmektedir.

3.4. Tek Soliter Dalga Hareketi

Sayısal hesaplamalar için öncelikle, (1.20) ile verilen denklemin sınır koşulları $|x| \rightarrow \infty$ iken $U \rightarrow 0$ ve başlangıç koşulu;

$$U(x, 0) = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}} \operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{c}{\mu}}(x - x_0)\right] \quad (3.21)$$

olarak belirlenmiştir. mKdV denkleminin tam çözümü;

$$U(x, t) = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}} \operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{c}{\mu}}(x - ct - x_0)\right] \quad (3.22)$$

biçimindedir. Burada ε, μ, c ve x_0 keyfi sabitlerdir. Tek soliter dalga için genlik $\sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ ve genliğe bağlı olarak dalga sayısı $\sqrt{\frac{c}{\mu}}$ ile temsil edilmektedir. Ek olarak, üç değişmezin tam değerleri,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \pi \sqrt{\frac{6\mu}{\varepsilon}} \\
I_2 &= \frac{12\sqrt{\mu c}}{\varepsilon} \\
I_3 &= -\frac{64c^2}{\varepsilon^2} \sqrt{\frac{\mu}{c}}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

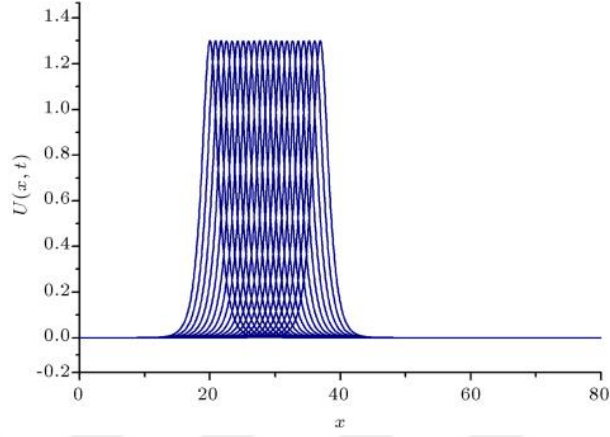
eşitlikleri ile elde edilir [45]. Elde edilen veriler ile daha önceden yapılan çalışmalarını kıyaslayabilmek için, $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $c = 0.845$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ parametreleri ile hesaplamalar yapılmıştır [45]. Bu parametreler kullanılarak elde edilen soliter dalganın genliği $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}} = 1.3$ tür. Sayısal hesaplamalar $t = 20$ zamanına kadar yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.1 ile gösterilmiştir. Üç değişmez ile L_2 ve L_∞ hata normları, belirlenen zamanlarda Tablo 3.1 ile verilmiştir. Bu tablo aynı zamanda mevcut yöntem ile elde edilen değişmezlerin değerlerini ve hata normlarının değerlerini [45] ile verilen referanstaki yöntemle elde edilen değerler ile karşılaştırılmasını içermektedir. Tablodan da açıkça görülebileceği gibi, sayısal çalışma sırasında değişmezlerin değerleri neredeyse sabit kalmıştır. Tabloda gösterilen hata normları ise [45] ile verilen referanstaki hata normlarından daha küçüktür.

Tablo 3.1. Tek soliter dalganın $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $c = 0.845$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için bulunan hata normları ve değişmezlerin değerleri

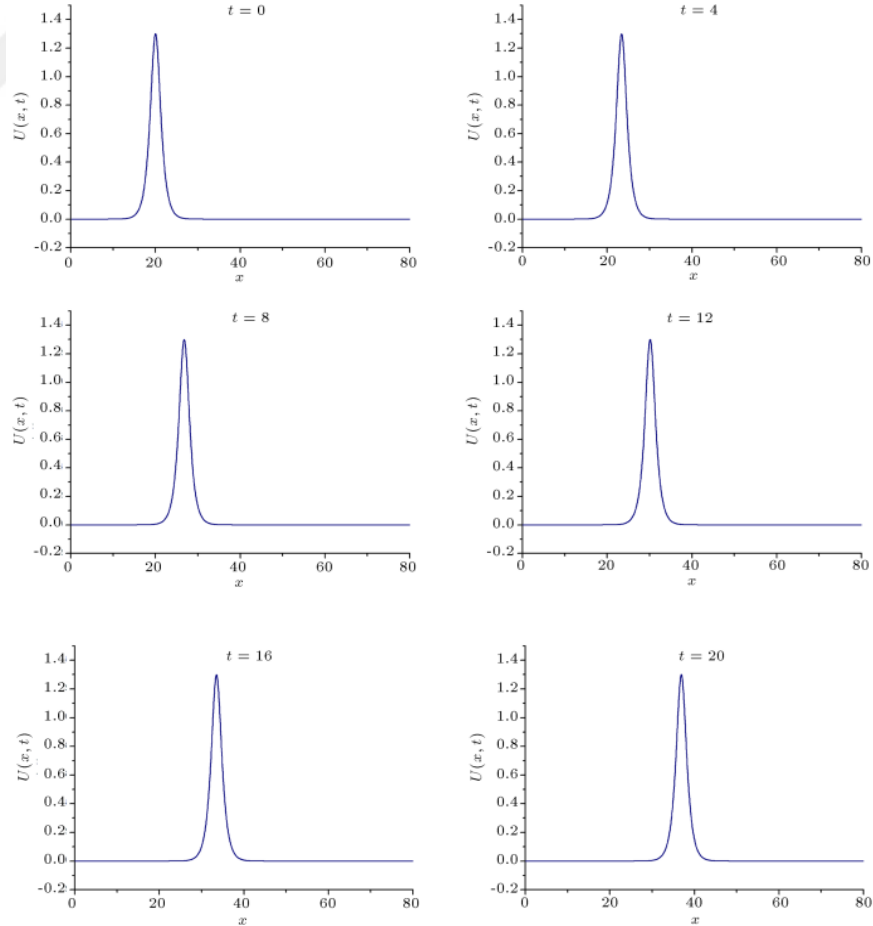
t		1	5	10	15	20
I_1	Mevcut Yöntem	4.442866	4.442866	4.442866	4.442866	4.442866
	[45]	4.443000	4.443138	4.444142	4.443420	4.443171
I_2	Mevcut Yöntem	3.676941	3.676941	3.676941	3.676941	3.676941
	[45]	3.677069	3.677535	3.678094	3.678642	3.679192
I_3	Mevcut Yöntem	2.072795	2.073537	2.073699	2.073776	2.073846
	[45]	2.073575	2.074357	2.075303	2.076232	2.077161
L_2	Mevcut Yöntem	6.286951e-04	1.249516e-03	2.131860e-03	2.949376e-03	3.641638e-03
	[45]	-	-	-	-	-
L_∞	Mevcut Yöntem	3.630992e-04	8.397466e-04	1.399503e-03	1.880855e-03	2.285638e-03
	[45]	1.206756e-03	3.621519e-03	5.942047e-03	7.626772e-03	8.642137e-03

Soliter dalganın $t = 0, 10, 20$ zamanlarındaki hareketi Şekil 3.1 de gösterilmiştir. Buna göre, tek soliton dalga neredeyse değişmeyen bir hızla sağa doğru hareket etmekte ve artan zamanla genliğini ve şeklini koruyarak ilerlediği görülmektedir. Şekil 3.2 de tek

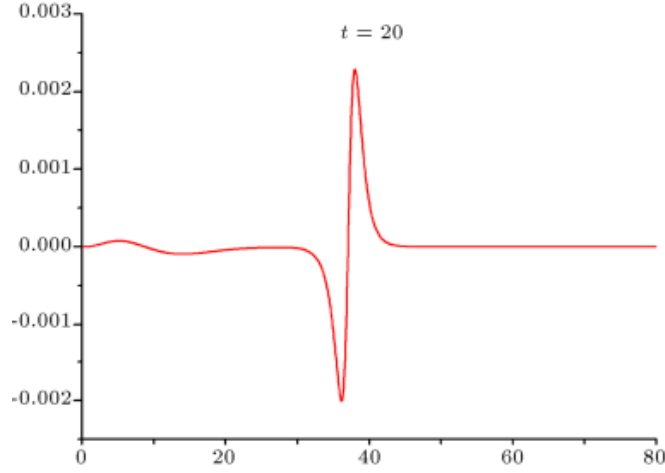
soliton dalganın hareketi $t = 0$ ile $t = 20$ zamanları arasında $\varepsilon = 3, \mu = 1, c = 0.845, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ parametreleri ile çizilmiştir. $t = 20$ zamanında dalganın 1.3 genliği için hata dağılımları Şekil 3.3 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Tek soliter dalganın $\varepsilon = 3, \mu = 1, c = 0.845, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için hareketi



Şekil 3.2. Tek soliter dalganın $\varepsilon = 3, \mu = 1, c = 0.845, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 4, 8, 12, 16, 20$ zamanlarındaki hareketi



Şekil 3.3. $\varepsilon = 3, \mu = 1, c = 0.845, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 20$ zamanında hatanın dağılımı

3.5. İki Soliter Dalganın Etkileşimi

İkinci test probleminde, farklı genliklere sahip ayrık iki soliter dalga etkileşimi incelenmiştir. Farklı genliklere sahip iki soliter dalganın lineer toplamı olarak verilen başlangıç koşulu,

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \operatorname{sech}[\beta_i(x - x_i)], \quad (3.24)$$

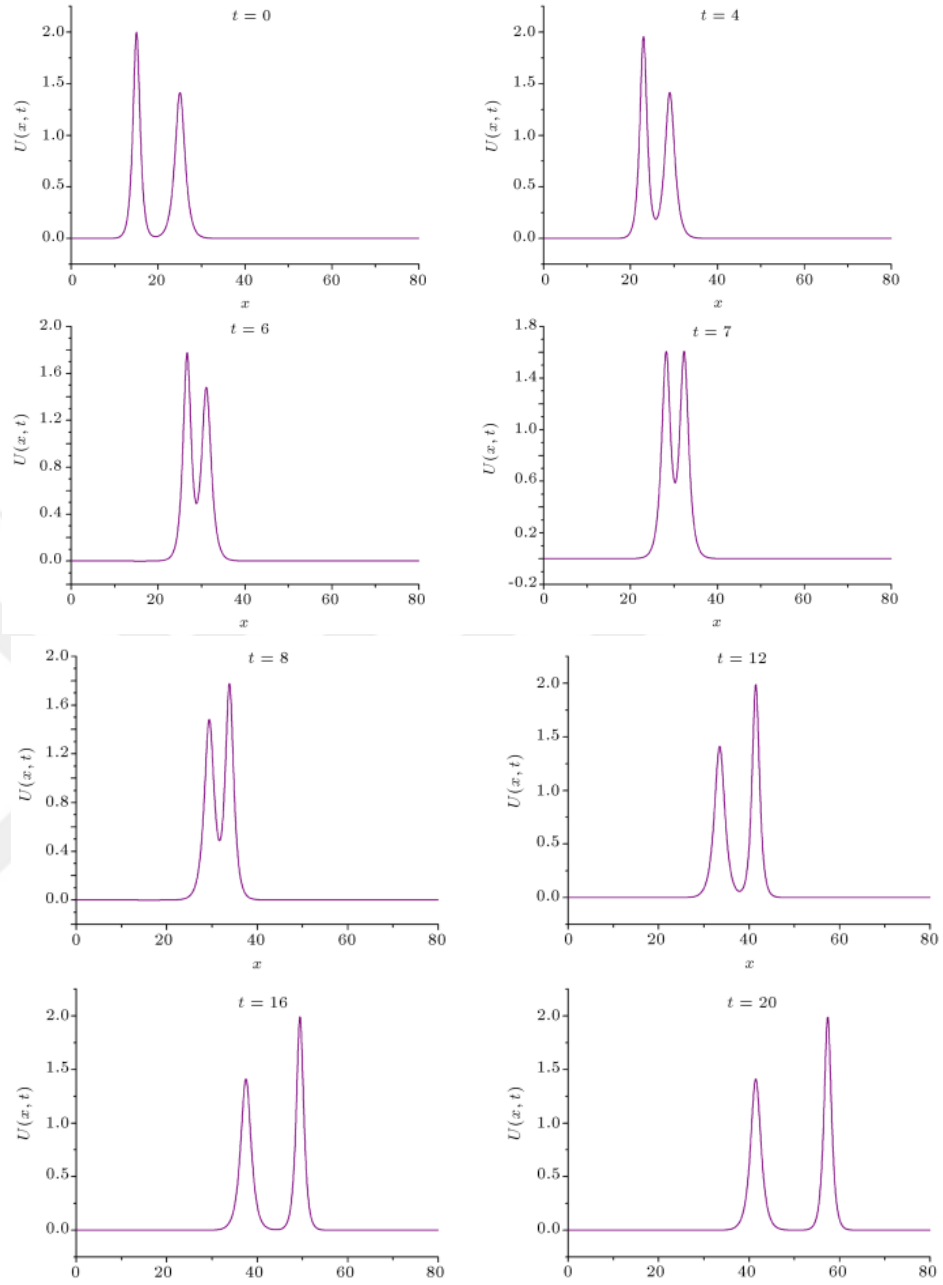
biçimindedir. Burada $i = 1, 2$ için $\alpha_i = \sqrt{\frac{6c_i}{\varepsilon}}, \beta_i = \sqrt{\frac{c_i}{\mu}}$ dir ve c_i, x_i keyfi sabitlerdir.

Sayısal çalışma için $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, x_1 = 15,$ ve $x_2 = 25$ parametreleri seçilmiştir [45]. Sayısal hesaplamalar $t = 0$ ile $t = 20$ zamanları arasında yapılmıştır. Sayısal çalışma sonucu ulaşılan I_1, I_2 ve I_3 değişmezlerinin değerleri, [45] ile verilen referanstaki çalışma ile karşılaştırılarak Tablo 3.2 de gösterilmiştir. Tablodan da açıkça görülebileceği gibi, sayısal çalışma esnasında değişmezlerin değerleri neredeyse sabit kalmıştır.

Tablo 3.2. İki soliter dalganın $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, x_1 = 15$, ve $x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için hesaplanan değişmezlerin değerlerinin karşılaştırılması

t		1	5	10	15	20
I_1	Mevcut Yöntem	8.885732	8.885732	8.885732	8.885732	8.885732
	[45]	8.886014	8.886776	8.889742	8.885983	8.884880
I_2	Mevcut Yöntem	9.659345	9.659345	9.659345	9.659345	9.659345
	[45]	9.659527	9.663714	9.662547	9.661071	9.661224
I_3	Mevcut Yöntem	10.270908	10.853235	10.954396	10.307195	10.338415
	[45]	10.239870	10.249000	10.246790	10.242580	10.242030

Şekil 3.4 iki soliter dalganın etkileşiminin gelişimini göstermektedir. Şekil 3.4 e göre, $t = 0$ anında büyük soliton dalga küçük soliton dalganın solunda yer almaktadır. Büyük soliton dalga küçük soliton dalgayı $t = 7$ zamanında yakalamakta ve içine çekmektedir. İç içe kalma durumu $t = 8$ zamanına kadar devam etmektedir. Daha sonra büyük soliton dalga küçük soliton dalgayı geçmekte ve ayrışma süreci başlamaktadır. $t = 16$ zamanından itibaren ayrışma süreci tamamlanmış ve her iki soliton dalga da hızını ve genliğini koruyarak yoluna devam etmiştir.



Şekil 3.4. İki soliter dalganın $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, x_1 = 15,$ ve $x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 4, 6, 7, 8, 12, 16, 20$ zamanlarındaki etkileşimi

3.6. Üç Soliter Dalganın Etkileşimi

Üçüncü test problemi olarak, farklı genliklere sahip ve aynı yönde hareket eden üç soliter dalganın etkileşimi incelenmiştir. Farklı genliklere sahip ayrık üç soliter dalganın lineer toplamı olarak verilen başlangıç koşulu,

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \operatorname{sech}[\beta_i(x - x_i)], \quad (3.25)$$

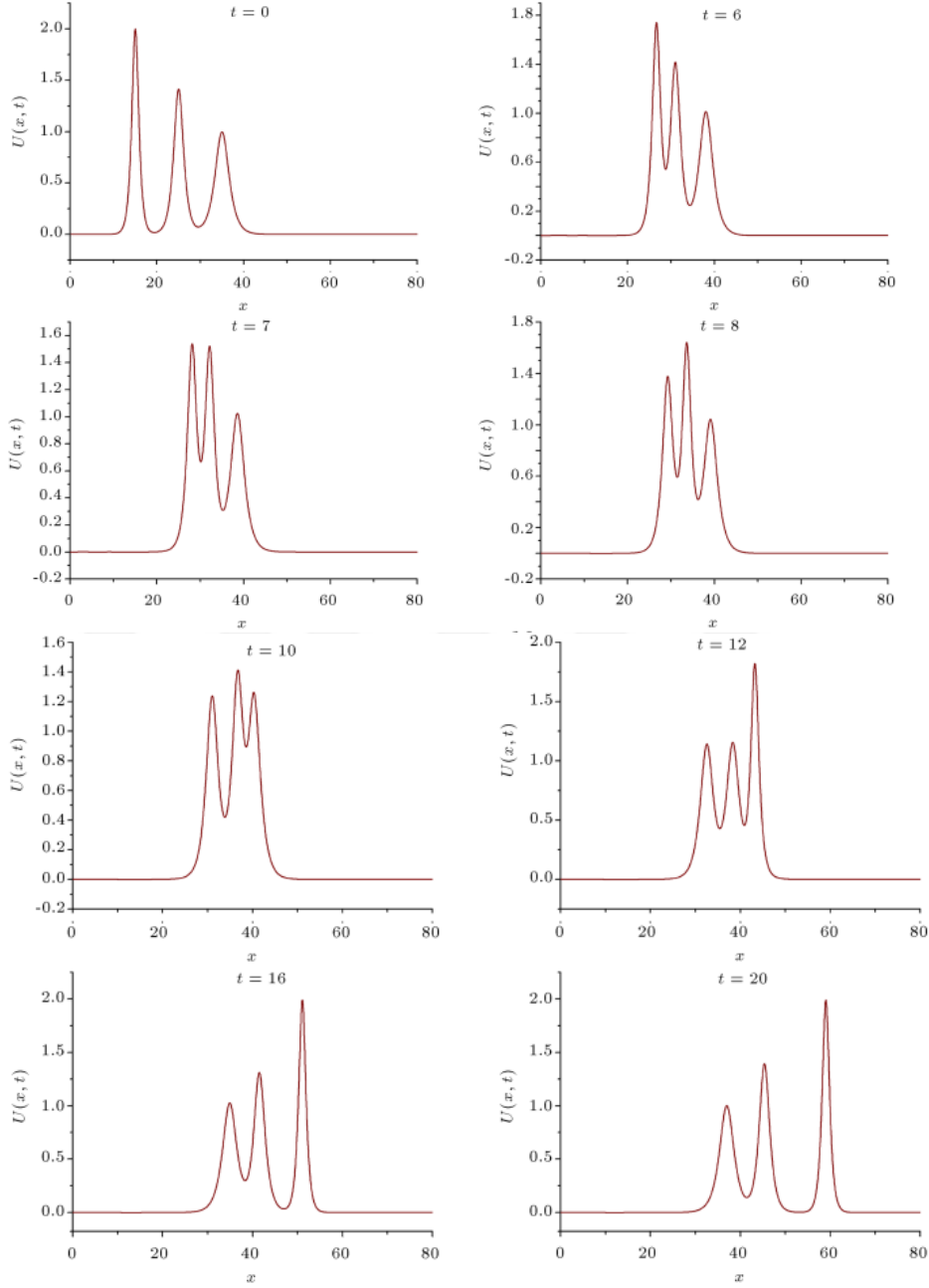
biçimindedir. Burada $i = 1, 2, 3$ için $\alpha_i = \sqrt{\frac{6c_i}{\varepsilon}}$, $\beta_i = \sqrt{\frac{c_i}{\mu}}$ dir ve c_i, x_i keyfi sabitlerdir.

Sayısal çalışma için $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 0.5, x_1 = 15, x_2 = 25, ve x_3 = 35$ parametreleri ile çalışmalar yapılmıştır. Sayısal hesaplamalar $t = 20$ zamanına kadar yapılmıştır. Sayısal çalışma sonucu ulaşılan I_1, I_2 ve I_3 değişmezlerinin değerleri, [45] ile verilen referanstaki çalışmalar ile karşılaştırmalı olarak Tablo 3.3 te gösterilmiştir. Tablodan da açıkça görülebileceği gibi, sayısal çalışma esnasında değişmezlerin değerleri neredeyse sabit kalmıştır.

Tablo 3.3. Üç soliter dalganın $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 0.5, x_1 = 15, x_2 = 25$ ve $x_3 = 35, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için hesaplanan değişmezlerin değerlerinin karşılaştırılması

t		1	5	10	15	20
I_1	Mevcut Yöntem	13.328677	13.328677	13.328677	13.328677	13.328677
	[45]	13.329060	13.330630	13.338780	13.332640	13.332060
I_2	Mevcut Yöntem	12.519943	12.519943	12.519943	12.519943	12.519943
	[45]	12.520280	12.526260	12.540860	12.526660	12.524900
I_3	Mevcut Yöntem	11.321264	12.452085	12.476293	12.413843	11.499239
	[45]	11.249790	11.261270	11.288040	11.259970	11.256730

Şekil 3.5 üç soliter dalganın etkileşiminin gelişimini göstermektedir. Şekil 3.5 e göre, $t = 6$ zamanında etkileşim başlamış $t = 6$ ile $t = 20$ zamanları arasında soliton dalgaların örtüşme süreçleri meydana gelmiş ve $t = 20$ zamanından itibaren soliton dalgalar orijinal şekillerini tekrardan alıp yollarına devam etmişlerdir.



Şekil 3.5. Üç soliter dalganın $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 0.5, x_1 = 15, x_2 = 25,$ ve $x_3 = 35, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 6, 7, 8, 10, 12, 16, 20$ zamanlarındaki etkileşimi

3.7. Solitonların Oluşumu

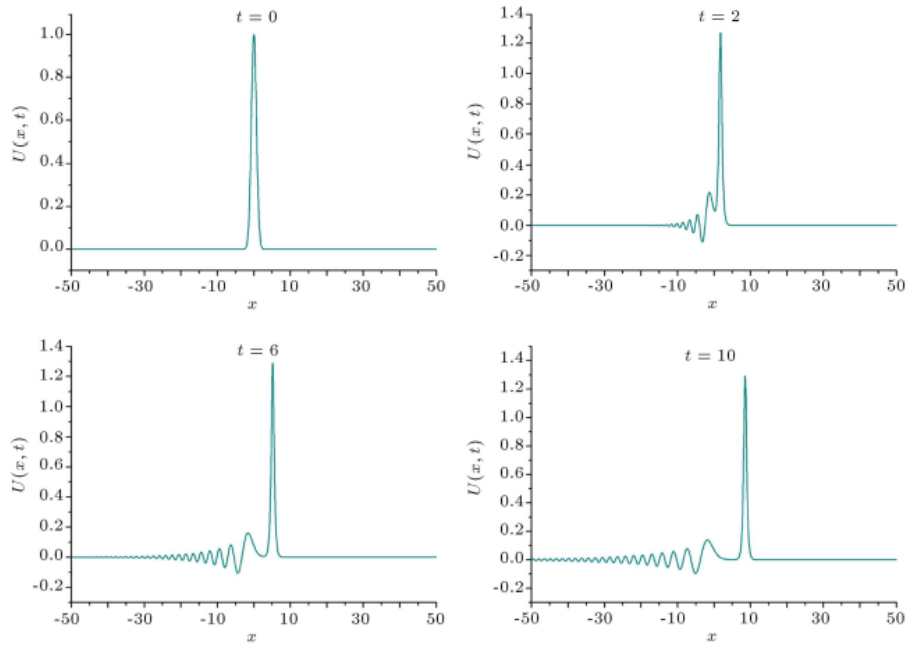
Son olarak, solitonların oluşumu μ nün farklı değerleri için Gauss başlangıç koşulu

$$U(x, 0) = \exp(-x^2) \quad (3.26)$$

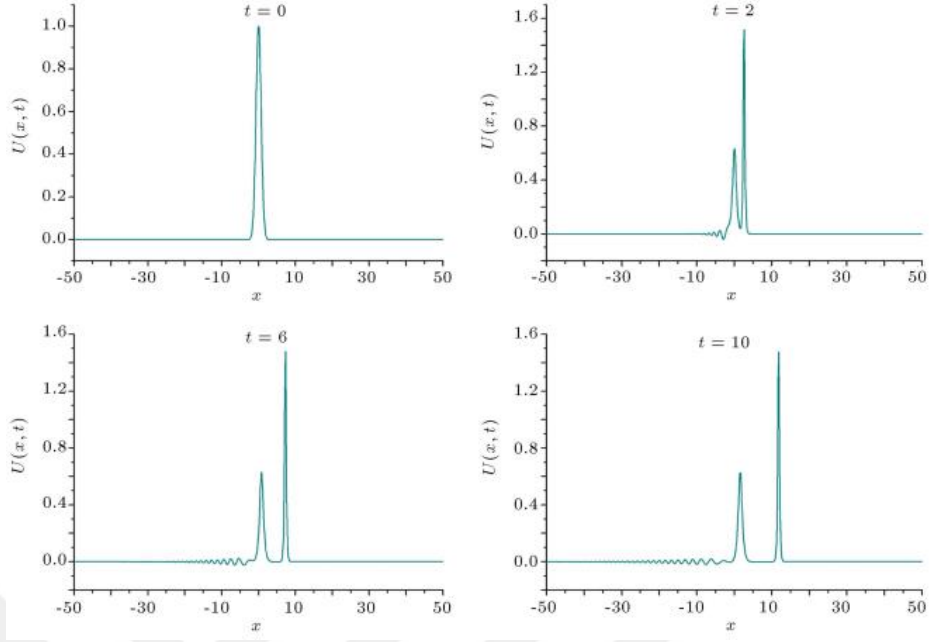
kullanılarak incelenmiştir. Bu durumda çözüm davranışları μ değerlerine bağlı olarak değişmektedir. Buna göre, $-50 \leq x \leq 50$ aralığında $\mu = 0.1$ ve $\mu = 0.04$ değerleri için hesapmalar yapılmıştır. Sayısal çalışmalar $t = 10$ zamanına kadar yapılmıştır. Çeşitli μ değerleri için üç değişmez değerleri Tablo 3.4 ile verilmiştir. Ayrıca Gauss başlangıç koşulu ile solitonların oluşumu Şekil 3.6 ve 3.7 ile gösterilmiştir.

Tablo 3.4. Gauss başlangıç koşulu ile $\mu = 0.1$ ve $\mu = 0.04$, $h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $-50 \leq x \leq 50$ parametreleri için $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ zamanlarındaki değişmezlerin değerleri

t	$\mu = 0.1$			$\mu = 0.04$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	1.772414	1.253314	1.2355683	1.772454	1.253314	0.1958645
2	1.772414	1.253314	1.2456447	1.772454	1.253314	0.1845277
4	1.772414	1.253314	1.2099601	1.772454	1.253314	0.1912904
6	1.772414	1.253314	1.2066328	1.772454	1.253314	0.2079808
8	1.772414	1.253314	1.2010120	1.772454	1.253314	0.2229795
10	1.772414	1.253314	1.1747070	1.772454	1.253314	0.2363841



Şekil 3.6. Gauss başlangıç koşulu ile $\varepsilon = 3, \mu = 0.1, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $-50 \leq x \leq 50$ parametreleri için $t = 0, 2, 6, 10$ zamanlarındaki solitonların oluşumu



Şekil 3.7. Gauss başlangıç koşulu ile $\varepsilon = 3, \mu = 0.04, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $-50 \leq x \leq 50$ parametreleri için $t = 0, 2, 6, 10$ zamanlarındaki solitonların oluşumu

BÖLÜM 4

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, genelleştirilmiş eşit genişlikli ve modifiye edilmiş Korteweg-de Vries denklemlerinin sayısal çözümleri Petrov-Galerkin yöntemi kullanılarak başarıyla elde edilmiştir. Denklemlere ayrı ayrı kararlılık analizi uygulanmış ve önerilen yöntemin koşulsuz kararlı olduğu gösterilmiştir.

GEW denklemi için sayısal algoritma oluşturulurken, tam çözümün bilindiği tek soliter dalga ile tam çözümün bilinmediği iki soliter dalganın etkileşimi ve solitonların oluşumu olmak üzere üç test problemi üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Tek soliter dalga için L_2 ve L_∞ hata normları ile I_1 , I_2 ve I_3 değişmezlerin değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlardan, hata normlarının yeterince küçük olduğu ve değişmezlerin kabul edilebilir bir şekilde sabit olduğu açıktır. GEW denklemi için algoritmamızın literatürde yer alan diğer algoritmalar gibi tutarlı olduğu görülmüştür.

mKdV denklemi için, sayısal şemanın performansını incelemek amacıyla tek soliter dalganın hareketi, iki ve üç soliter dalganın etkileşimi ve solitonların oluşumu olmak üzere dört test problemi üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Sayısal şemanın performansını göstermek için, tek soliter dalganın L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte I_1, I_2 ve I_3 değişmezleri ve diğer üç test problemi içinde I_1, I_2 ve I_3 değişmezleri hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar sonucunda elde edilen hata normlarının literatürdeki mevcut sayısal sonuçlardan daha küçük olduğu açıkça görülmektedir. Değişmezlerin miktarlarının tutarlı ve değişimlerinin yeterince küçük olduğu görülmüştür.

Dolayısıyla ele alınan yöntemin, GEW ve mKdV denklemleri gibi diğer lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere de uygulanabileceği ve literatürdeki diğer yöntemler gibi başarılı sonuçlar elde edilebileceği söylenebilir.

KAYNAKLAR

1. Clough, R.W., “The finite element in plane stress analysis”, *Proc.2nd A.S.C.E.Conf. on Elektronik Computation*, Pittsburg, s. 345-378, 1960.
2. Zienkiewicz, O.C., Cheung, Y.K., “The finite element method in structural and continuum mechanics”, *McGraw-Hill Publisher*, 1967.
3. Karaağaç, B., “Bousinesq tipi denklemlerin Galerkin sonlu eleman yöntemi ile Nümerik çözümleri”, *İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Doktora tezi*, s. 15, Malatya, 2016.
4. Davies, A.J., “The finite element method: a first approach”, *Oxford University Press*, Oxford, 1986.
5. Logan, D. L., “A first course in the finite element method (Fourth edition)”, s. 7-25, Thomson, 2007.
6. Karakoç, S. B. G., “Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri”, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 10-29, Malatya, 2011.
7. Reddy, J. N., “An introduction to nonlinear finite element analysis”, *Oxford University Press Inc.*, New York, 2004.
8. Walkley, M. A., “A numerical method for extended boussinesq shallow-water wave equations”, *The University of Leeds School of Computer Studies*, 1999.
9. Geyikli, T., “Finite element studies of the modified KdV Equation”, *University College of North Wales, Ph. D. Thesis*, Bangor, Gwynedd (UK),1994.
10. Dağ, İ., “Studies of B-spline finite elements” , *University College of North Wales, Ph. D. Thesis*, Bangor, Gwynedd (UK),1994.
11. Cheney, W., Kinaid, D., “Numerical mathematics and computing, sixth edition”, Thomson, 2008.
12. Prenter, P.M., “Splines and variational methods”, *John Wiley*, New York, USA ,1975.
13. Esen, A., “A numerical solution of the equal width wave equation by a lumped Galerkin method”, *Applied Mathematics and Computation*, s. 270-282, 2005.
14. Morrison, P. J., Meiss, J. D., Carey, J.R., “Scattering of RLW solitary waves”, *Physica D.*, 11 , 324-336, 1984.

15. Zaki, S.I., “A least-squares finite element scheme for the EW equation”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 189, 587-594, 2000.
16. Raslan, K.R., “A computational method for the equal width equation”, *Int. J. Comp. Math.*, 81, 63- 72, 2004.
17. Doğan, A., “Application of Galerkin’s method to equal width wave equation”, *Appl. Math. Comput.*, 160(1), 65-76, 2005.
18. Saka, B., Irk, D., Dağ, İ., “Numerical study of the equal width wave equation”, *Hadronic Journal of Supplementary*, 18, 99-116, 2003.
19. Karakoc, S.B.G., Zeybek, H., “A cubic B-spline Galerkin approach for the numerical simulation of the GEW equation”, *Stat. Optim. Inf. Comput.*, 4, 30–41, 2016.
20. Panahipour, H., “Numerical simulation of GEW equation using RBF collocation method”, *Commun. Numer. Anal.*, 2012, 1-28, 2012.
21. Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., “Solitary waves of the equal width wave equation”, *J Comput Phys* , 101(1), 218–223, 1991.
22. Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Ayoup, F.A., et al, “Simulations of the EW undular bore”, *Commun Numer Methods Eng*, 13, 583–592, 1997.
23. Karakoc, S.B.G., Geyikli, T., “Numerical solution of the modified equal width wave equation”, *Int J Differ Equations*, 2012, 1–15, 2012.
24. Geyikli, T., Karakoc, S.B.G., “Petrov-Galerkin method with cubic B-splines for solving the MEW equation”, *Bull Belg Math Soc Simon Stevin*, 19, 215–227, 2012.
25. Geyikli, T., Karakoc, S.B.G., “Septic B-spline collocation method for the numerical solution of the modified equal width wave equation”, *Appl Math*, 2, 739–749, 2011.
26. Geyikli, T., Karakoc, S.B.G., “Subdomain finite element method with quartic B-splines for the modified equal width wave equation”, *Comput Math Math Phys*, 55(3), 410–421, 2015.
27. Hamdi, S., Enright, W.H., Schiesser, W.E., et al, “Exact solutions of the generalized equal width wave equation”, *Proceedings of the International Conference on Computational Science and Its Applications*, 2668, 725–734, 2003.
28. Evans, D.J., Raslan, K.R., “Solitary waves for the generalized equal width (GEW) equation”, *Int J Comput Math*, 82(4), 445–455, 2005.

29. Raslan, K.R., “Collocation method using cubic B-spline for the generalised equal width equation”, *Int J Simul Process Modelling*, 2, 37–44, 2006.
30. Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., Akbari, M., et al, “Exact solutions for generalized equal width equation”, *Math Sci Lett*, 2, 99–106, 2013.
31. Roshan, T., “A Petrov–Galerkin method for solving the generalized regularized equal width (GEW) equation”, *J Comput Appl Math*, 235, 1641–1652, 2011.
32. Russell, J.S., “Report on Waves, Rep. 14th Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science”, *John Murray*, Londra, s. 311-390, 1844.
33. Korteweg, D.J., de Vries, G., “On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary wave”, *Phil. Mag.*, 39, 422-443, 1895.
34. Zabusky, N.J., “A synergetic approach to problem of nonlinear dispersive wave propagation and interaction”, *W. Ames (Ed.)*, Proc. Symp. Nonlinear Partial Diff. Equations, Academic Press, s. 223–258, 1967.
35. Fornberg, B., Whitham, G.B., “A numerical and theoretical study of certain nonlinear wavephenomena”, *Philos. Trans. Roy. Soc.*, 289, 373–404, 1978.
36. Zabusky, N.J., Kruskal, M.D., “Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states,” *Phys. Rev. Lett.*, 5(6), 240–243, 1965.
37. Lax, P. D., “Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves” *Commun. Pure Appl. Math.*, 21, 467-490, 1968.
38. Alexander, M.E., Morris J.L., “Galerkin methods for some model equations for nonlinear dispersive wave”, *J. Comput. Phys.*, 30, 428- 451, 1979.
39. Gardner, L.R.T., Ali, A.H.A., “A numerical solutions for the Korteweg-de Vries equation using Galerkins method with Hermite polynomial shape functions”, *in: Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation*, s. 81-93, İstanbul, 1988.
40. Dağ, İ., Dereli, Y., “Numerical solutions of KdV equation using radial basis functions”, *Applied Mathematical Modelling*, 32, 535-546, 2008.
41. Kaya, D., “An explicit and numerical solutions of some Öfth-order KdV equation by decomposition method”, *Applied Mathematical and Computation*, 144, 353- 363, 2003.
42. Vliegthart, A.C., “On finite-difference methods for The Korteweg-de Vries equation”, *J. Eng. Math.*, 5, 137- 155, 1971.

43. Goda, K., "On stability of some finite difference schemes for the Korteweg- de Vries equation", *Phys. Soc. Jpn.*, 39, 229- 236, 1975.
44. Kaya, D., "An application for the higher order modified KdV equation by decomposition method", *Commun. In Nonlinear Scienceand Num. Simul.*, 10, 693-702, 2005.
45. Biswas, A., Raslan, K.R., "Numerical simulation of the modified Korteweg-de Vries equation", *Physics of Wave Phenomena*, 19(2), 142-147, 2011.
46. Raslan, K.R., Baghdady, H.A., "A finite difference scheme for the modified Korteweg-de Vries equation", *General Mathematics Notes*, 27(1), 101- 113, 2015.
47. Raslan, K.R., Baghdady, H.A., "New algorithm for solving the modified Korteweg-de Vries (mKdV) equation", *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, 18(1), 59-64, 2014.
48. Wazwaz, A.M., "A variety of (3+1)-dimensional mKdV equations derived by using the mKdV recursion operator", *Computers and Fluids*, 93(10), 41-45, 2014.
49. Wazwaz, A.M., "New (3+1)-dimensional nonlinear evolution equations with mKdV equation constituting its main part: multiple soliton solutions", *Chaos, Solitons and Fractals*, 76, 93-97, 2015.
50. Ak, T., Karakoç, S.B.G., Biswas, A., "A New Approach for Numerical Solution of Modified Korteweg-de Vries Equation," *Iran J. Sci. Technol. Trans. Sci.*, 41, 1109–1121, 2017.
51. Ak T., Karakoc S.B.G., Biswas A., "Application of Petrov-Galerkin finite element method to shallow water waves model: Modified Korteweg-de Vries equation", *Scientia Iranica B.*, 24(3), 1148-1159, 2017.
52. Zeybek, H., Karakoç, S.B.G., "Application of the Collocation Method With B-Splines to the GEW Equation", *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 46, 71–88, 2017.
53. Miura, R.M., Gardner, C.S., Kruskal M.D., "Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion", *Journal of Mathematical Physics*, 9(8), 1204, 1968.
54. Miura, R.M., "The Korteweg-de Vries equation: A survey of results", *SIAM Review*, 18(3), 412-459, 1976.

55. Bhowmik, S.K., Karakoc, S.B.G. , ‘‘Numerical solutions of the generalized equal width wave equation using the Petrov–Galerkin method’’, *Applicable Analysis*, 100(4), 714-734, 2021.

