T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİPOLAR FUZYY SOFT KÜMELERDE BENZERLİK ÖLÇÜSÜ VE ÇOK ÖZELLİKLİ KARAR VERME YÖNTEMİNE UYGULAMASI

Tezi Hazırlayan

Gözde SEVER

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2023

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİPOLAR FUZYY SOFT KÜMELERDE BENZERLİK ÖLÇÜSÜ VE ÇOK ÖZELLİKLİ KARAR VERME YÖNTEMİNE UYGULAMASI

Tezi Hazırlayan

Gözde SEVER

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2023

ZARİFE ZARARSIZ danışmanlığında **Gözde SEVER** tarafından hazırlanan **“Bipolar Fuzzy Soft Kümelerde Benzerlik Ölçüsü ve Çok Özellikli Karar Verme Yöntemine Uygulaması ”** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

23/08/2023

JÜRİ

BAŞKAN : Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Üye : Prof. Dr. Alattin URAL

Üye : Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun………….. tarih ve …………………… sayılı kuralı ile onaylanmıştır.

…./…./2023

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Gözde SEVER

TEŞEKKÜR

Başarı bir süreçtir. Engin bilgi denizinde başarı elde etmek geminin dümeninde yer almayı gerektirir. Özveri, çaba ve iradeyle çıkılan her yol doğru limanlara demir attırır.

Eğitim-öğretim yıllarımdaki başarımın mimarı, en büyük destekçilerim, ilk öğretmenlerim Sevgili Annem Nergiz SEVER'e ve Sevgili Babam Sabahittin SEVER'e, sürece katkı sağlayan, başarı yolunda ilerlememe yardımcı olan Sevgili Ablam Türkçe Öğretmeni, Bilim Uzmanı Pelin SEVER'e ve sevgili kardeşlerime teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimimin başından sonuna kadar her bir adımında bana desteğini her zaman hissettiren, inanarak ve güvenerek yola devam etmemde engin bilgileriyle fikirlerimi aydınlatan, kültür ve hoşgörüsüyle örnek olan Değerli Danışmanım Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ'a sonsuz teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Yüksek lisans öğrenim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, bu çalışmayı bana vererek yöneten, çalışma süresince yardımını benden esirgemeyen, her zaman bana inanan ve beni destekleyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ' a ve her zaman desteğini hissettiren sevgili aileme teşekkür ederim.

BİPOLAR FUZYY SOFT KÜMELERDE BENZERLİK ÖLÇÜSÜ VE ÇOK ÖZELLİKLİ KARAR VERME YÖNTEMİNE UYGULAMASI

(Yüksek Lisans Tezi)

Gözde SEVER

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2023

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bu çalışma hakkında literatür bilgisi verildi.

İkinci bölümde interval sayıların aritmetiği anlatıldı. İnterval sıfır tanımı verildi. İnterval dizileri ve interval katsayılı denklem sistemleri tanımı verildi. İnterval matris ve bu matrislerin özelliklerinden bahsedildi. Ayrıca bu bölümde Cesàro interval matrisi tanımları yapıldı.

Üçüncü bölümde fuzzy küme teorisi verildi. Ayrıca fuzzy kümelerin özellikleri incelendi. Gerekli olan tanım ve örneklere yer verildi.

Dördüncü bölümde tez çalışması için gerekli olan benzerlik ölçüsünün günlük yaşamdaki kullanım alanlarına ve temel kavramlara ait literatür bilgisine yer verildi. Ayrıca benzerlik ölçüsüyle ilgili tanım ve teoremlere yer verildi. Bipolar fuzzy küme tanımından bahsedildi. (Bipolar fuzzy soft kümeler) BFSS'lerin uzaklık ve benzerlik ölçüleri tanımlarına ve örneklerine verildi. BFSS'ler için ağırlıklı benzerlik ölçüsü tanımları yapılarak örnekler verildi. Bipolar soft kümeler için genişletilmiş benzerlik ölçütlerine yer verildi. BFSS'lerin matris gösterim örneği verildi. Önerilen (Benzerlik ölçüsü) SM'nin mevcut SM'lerle karşılaştırma analizi yapıldı. Son olarak SM'lerin uygulaması yapıldı.

Anahtar kelimeler: ***İntervaller, fuzzy kümeler, soft kümeler, benzerlik ölçüsü.***

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ

Sayfa Adedi: 60

SIMILARITY MEASURE IN BIPOLAR FUZZY SETS AND ITS APPLICATION TO MULTI-ATTRIBUTE DECISION MAKING METHOD

Gözde SEVER

NEVSEHIR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCES

August 2023

ABSTRACT

This thesis consists of four parts. In the first chapter, literature information about this study was given.

In the second part, the arithmetic of interval numbers is explained. The definition of interval zero is given. Definitions of interval sequences and systems of equations with interval coefficients are given. Interval matrix and properties of these matrices are mentioned. Also in this section, Cesàro interval matrix definitions are made.

In the third chapter, fuzzy set theory is given. In addition, the properties of fuzzy sets were examined. Necessary definitions and examples are given. In the fourth chapter, the usage areas of the similarity measure required for the thesis work in daily life and the literature information about the basic concepts are given. In addition, definitions and theorems related to the similarity measure were given. Bipolar fuzzy set definition was mentioned. Distance and similarity measures of BFSSs are given in their definitions and examples. Weighted similarity measure definitions were made for BFSSs and examples were given. Extended similarity criteria are included for bipolar soft sets. An example of matrix representation of BFSS is given. Comparative analysis of the proposed SM with the existing SMs was performed. Finally, the application of SMs was made.

Keywords: ***İntervals, fuzzy sets, soft sets, measure of similarity.***

Thesis Supervisor: Zarife ZARARSIZ

Page Number: 60

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
M	Evrensel küme
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
S	İnterval sayılar kümesi
$\mathcal{F}$	Tüm dizilerin kümesi
T	Fuzzy kümeler
$A = (a_{mn})$	Reel terimli sonsuz matris
$C = c_{nk}$	Cesàro matrisi
c^i	İnterval yakınsak dizi uzayı
c_0^i	Sıfıra yakınsak dizi uzayı
ℓ_∞^i	Sınırlı dizi uzayı
Υ_A	Soft küme
Ω_A	Bipolar fuzzy soft küme
$\text{Sim}(B_1, B_2)$	Benzerlik ölçüsü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Pazara gideriz ve hazır giysi satan bir mağazadan kendimize bir giysi alırız. Çoğunlukla bu giysilerin kolları, bacakları veya beli vs. bizim ölçülerimize uymaz. Onu bir terziye götürüp kollarını, bacaklarını gerektiriyorsa kısalttırırız, belini daralttırırız. Sonuçta şekli bozulabilir ve üzerimizde iyi durmayabilir. Fakat bir terziye gidip kendi üzerimize göre baştan bir elbise diktirirsek bu sorunlar en baştan yaşanmayacaktır. Matematikte de durum böyledir. Yeni matematiksel düşünceler her bedene uymaz! Yeni bir küme inşa edildiğinde bu kümenin daha önce bildiğimiz kümelerin özelliklerini taşımalarını bekleriz. Eğer olmuyorsa hemen endişeleniriz. Örneğin, "Fuzzy saylar kümesinde fuzzy 0, fuzzy 1 vs. kaç tanedir? Neye ve kime göredir?" diye sorduğumuzda kesinlik ve teklik kaybolur. İşte klasik anlamdaki matematik bilgilerimizi bu tip kümelere giydirmeye çalışırsak kollar, bacaklar veya belden yana uyumsuzluklar ortaya çıkacaktır. O zaman terzinin yolunu tutmalıyız. Bu ne demektir? Bu şu demektir: Her duruma karşılık bir 0, her duruma karşılık yeni bir sistem kurmalıyız ve bu sistemi kendi içinde ele almalıyız. Örneğin A tip mühendislik problemler için A tip fuzzy kümeler veya fuzzy sayılar geliştirmeliyiz ve bu sistemi kendi içinde tutarlı kılacak aksiyomatik yapıları oluşturmalıyız. A tip disiplin için geliştirilen yapı B tip disiplin için geliştirilen yapı ile uyuşmayabilir. Bunun önemi yok. Bu düşünceler çeşitli bilimlerin uygulamalarında oldukça işe yararlar. Fuzzy kümelerin amacı belirsizliğe ilişkin fikir oluşturmaktadır. Klasik küme kavramını da içine alacak biçimde küme kavramı genişletilmiş ve bu küme yapısına uygun küme işlemleri tanımlanarak Zadeh tarafından 1965 yılında ortaya fuzzy kümeler adı altında yeni bir teori ortaya atılmıştır. Bu teoriye yıllarca devam edilmiş ve bununla birlikte birçok uygulama yapılmıştır. Günümüzde de teorik ve uygulamalı bilimlerin dildeki fuzzy kavramların modellenmesinde sunduğu kolaylık nedeni ile ilgi alanı olmuş, bu anlamda birçok makaleler yazılmış, hatta sadece fuzzy kümeler ve uygulama alanlarına dair dijital veya basılı yayınlar yapan birçok dergi çıkarılmakta, kitaplar basılmaktadır. Bunun sonucu olarak matematiğin bilinen anabilim dallarına ek olarak fuzzy kümeler ve uygulamalar adı, matematik anabilim dalları arasında yeni bir anabilim dalı olmaya hak kazanmıştır. Fuzzy kümeler teorisi her ne kadar birçok anlamda standart bir yapıya kavuşturulmuş olmasa bile gelecekte bu ve buna benzer soru lar ortadan kalkacaktır. Fuzzy küme ile karmaşık bir problemi kendi ifadelerimiz ve terimlerimizle anlatılabilir. Günümüzde çoğu matematikçi, fuzzy kümeleri bir teori olarak görmese bile bu haklı bir yaklaşım değildir. Bazen matematikçiler fuzzy kümeler üzerinde çalışırken öteden beri alıştıkları iki değerli mantık sisteminin ortaya koyduğu katı disiplini fuzzy kümelerde de görmek isterler. Üstelik bunu yaparken bir vasıta ile fuzzy kümeler klasik anlamdaki kümelere dönüştürülür ve bu şekilde elde edilen matematiksel yapılarda sözü edilen disiplini ararlar. Daha sonra buradan elde edilen sonuçlar yeniden fuzzy kümelere taşınır. Halbu ki fuzzy matematik de klasik anlamda olduğu gibi kendi içinde değerlendirilmeli, dönüşüm, değişim vasıtaları kullanılmamalıdır. Örneğin; fuzzy sayıların kümesinde alınan iki elemanı toplamak için onun α- kesimleri klasik kümelerden faydalanılır. Bunlar çoğunlukla reel sayıların kapalı sınırlı alt kümeleri yani kapalı intervaller olarak ortaya çıkarlar. İnterval aritmetiğinden bilinen iki intervalin toplama işleminden faydalanıp fuzzy sayıların cebirsel özellikleri hakkında yorumlar yapılır, sonuçlar çıkarılır. İnterval aritmetiğinin özellikleri bir genetik özellik gibi fuzzy kümelere geçer. Bu durumda yapılması gereken şey başka bir yol bulmaktır ki bu ileri bölümlerde verilecektir.

Meşhur ve çok eski bir interval örneği Arşimet'e bağlı yöntemle verilmektedir. Arşimet, yarıçapı 1 olan bir dairenin kirişler çokgenlerini ve teğetler çokgenlerini ele almış ve ilgili diskin alanı için artan bir alt sınırlar dizisi ve aynı zamanda azalan bir üst sınırlar dizisi elde etmiştir. Böylece her bir n için, kirişler çokgenleri ve teğetler çokgenleri ile süreci durdurmak amacıyla π sayısını içeren bir interval elde etmiştir. n yeterince büyük seçilerek, keyfi küçük genişlikte bir interval bulunabilmektedir. Ayrıca, bu yolla n' yi yeterince büyük seçerek, π içeren rasgele küçük genişlikte bir interval bulunabilmektedir. İnterval aritmetiğinin gelişimi için yazılan en önemli makalelerden biri Japon bilim adamı Teruo Sunaga tarafından yayınlanmıştır [1]. Bu yayında sadece interval sayılar için temel cebirsel işlem kuralları değil, aynı zamanda interval sayıların sağladıkları kuralların sistematik bir incelemesi de yapılmıştır. Buna ek olarak, interval vektörleri tanıtılmış (çok boyutlu intervaller olarak) ve bu intervallere karşılık gelen işlemler araştırılmıştır.

Bugün Newton interval yöntemi olarak adlandırılan yöntemle reel tanımlı bir fonksiyonun sıfırı için geliştirilmiş bir kapsama hesaplama fikri, Sunaga'nın makalesinde sunulmuştur.

İntervallerin bağımsız nesneler olarak rolü, çeşitli matematiksel problemlerin çözümlerini doğrularken veya bu tür problemlerin belirli bir tanım kümesi üzerinde bir çözümü olamayacağını kanıtlarken sayısal analizde sürekli olarak artmıştır. Bu durumu mümkün kılan şey intervalleri gerçek (reel) veya karmaşık sayıların bir genelleştirmesi (uzantıları) olarak görerek, interval fonksiyonlarını ve interval aritmetiğini inceleyerek ve uygun sabit nokta teoremlerini uygulayarak mümkün olmuştur.

Benzerlik iki birim ya da nesnenin ne ölçüde benzer olduklarını sayısal derece olarak ifade edilmesidir. Yakınlık ve ilişki kavramları ortaklık ile bağlantılıdır. İki birimin benzerliğini sayısal olarak tahmin etmek amacıyla benzerlik ölçüleri ortaya atılmıştır. İki durum ya da birimin ilişkisinin miktarını yansıtan benzerliktir ve genel olarak -1 ile $+1$ arasında veya normalleştirilerek 0 ile 1 arasında değer ile gösterilir.

Benzerlik ölçümleri bir gözlemin diğerlerinden ayırt edilmesini sağlar. Bunun için gözlemler benzerlik veya farklılıklarına dayalı olarak gruplara ayrılabilir. Gözlemler alt gruplara veya kümelere bir kere atandıktan sonra her grubun karakteristikleri anlaşılabilir ve kümelerin özellikleri açıklanabilir. Gruplama ile bilginin düzenlenmesi ve sonuçların elde edilmesi daha etkin sağlanır. Yeni gözlemler bu alt grup veya kümelere sınıflandırılabilir ve özellikleri tahmin edilebilir. Veri bu sayede basitleştirilerek daha etkin değişkenler üzerinde çalışılabilir. Veri kümesi içerisindeki belirgin olmayan gizli yapı bulunabilir. Verinin içerisindeki kümelenme yapısına ve bu kümelerin parametre tahminine dayalı olarak plan ve kararlar alınabilir.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda, tez çalışması boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. İnterval Sayılar Kümesi ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.1.1. $S = \{[u^-, u^+]: u^-, u^+ \in \mathbb{R},\ u^- \leq u^+ \}$

ile tanımlı kümeye interval sayılar veya kısaca intervallerin kümesi, S'nin her bir elemanına da interval adı verilir [2]. Bazen S elemanları interval sayı olarak adlandırılır ve interval sayı denilince $\mathbb{R}$ de $[a, b]$, $(a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \leq b)$ gibi kapalı alt intervalleri akla gelir. Fakat örneğin "üç aşağı beş yukarı 7" için [5,9] kapalı intervalini kullanmak teorik olarak herhangi bir sorun teşkil etmese bile pratikte anlamsızdır. Hem teorik hesaplamalara uygunluğu hem de pratik anlamda bir sorun teşkil etmeyecek ise interval sayı denildiğinde Tanım 2.1.1. de verilen S kümesinin bir elemanından söz ediliyor olunacaktır.

$\varepsilon > 0$ olmak üzere S kümesinin $[u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon]$ formundaki bir elemanı için

$[u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon] = u_0 + \varepsilon[-1,1]$ olduğundan

$$u_0 \pm \varepsilon \tag{2.1}$$

kısaltması uygun yerlerde kullanılacaktır.

Her $[u^-, u^+] \in S$ için eğer $u^- > 0$ ise u ya pozitif interval; $u^+ < 0$ ise u negatif interval sayı denir [3]. Eğer $u^- < 0 < u^+$ ise u ne pozitif ne de negatiftir. Açık ve yarı açık intervallerin olduğu bilgi dahilinde olsa da bu çalışmada kapalı intervaller kullanılmıştır. Genel olarak u^- ye u interval sayısının başlangıç noktası, u^+ ya da u interval sayısının bitiş noktası denir. Hemen anlaşılacağı gibi eğer $u^- = u^+$ ise u interval sayısı bir reel sayıyı temsil eder. Dolayısıyla her bir reel sayı; başlangıç noktası ve bitiş noktası aynı olan bir interval sayı olarak düşünülebilir.

Tanım 2.1.2. $u = [u^-, u^+]$ ve $v = [v^-, v^+]$ interval sayıları verilsin. Eğer $u^- = v^-$ ve $u^+ = v^+$ ise $u = v$ dir. Mesela, 2 ± 0.5 interval sayısı $v = v_0 \pm \varepsilon_1$ interval sayısına eşit ise açık olarak $v_0 = 2$ ve $\varepsilon = 0.5$ dir.

Tanım 2.1.3 u ve v interval sayıları için $u^- \leq v^-$ ve $u^+ \leq v^+$ ise u, v den küçüktür veya eşittir denir ve $u \preccurlyeq v$ ile gösterilir. Bu tip bir sıralamanın S'nin her elemanını karşılaştıramayacağı açıktır. Mesela, $u = [0,8]$ ve $v = [-1,9]$ interval sayıları karşılaştırılamaz. Kısaca $u \subset v$ veya $v \subset u$ ise u ve v sayıları arasındaki büyüklük küçüklük ilişkisi belirlenemez. S' nin ancak ve ancak overlap ve Tanım 2.1.3 şartlarını sağlayan elemanları karşılaştırılabilir. Buradan anlaşılıyor ki S intervallerin kümesinin $\mathbb{R}$ de olduğu gibi tam olarak sıralanmasından söz edilemez.

Her $u, v, z \in S$ için aşağıdaki sıralama özellikleri geçerlidir;

1. $u \preccurlyeq u$ dir.

2. $v \preccurlyeq u$ ve $u \preccurlyeq v$ ise $u = v$ dir.

3. $u \preccurlyeq v$ ve $v \preccurlyeq z$ ise $u \preccurlyeq z$ dir.

4. $u \preccurlyeq v$ veya $v \preccurlyeq u$ dir.

S interval sayılar kümesinin tam sıralı alt kümesini S^* ile gösterilsin. $A \subset S^*$ olmak üzere A kümesi 1., 2. ve 3. şartları sağlıyorsa A ya kısmi sıralı interval sayı kümesi, eğer ilave olarak 4. şart da sağlanıyorsa A ya tam sıralı interval sayıların kümesi denir [4].

$\mathbb{R}$ de olduğu gibi $\preccurlyeq$ bağıntısına S^* üzerinde eşitsizlik bağıntısı adı verilir. Bir kümenin herhangi iki elemanı karşılaştırılabiliyorsa bu kümeye lineer sıralı küme denir. S interval sayılar kümesinin rastgele iki elemanı daima, başlangıç ve bitiş noktalarını kullanarak karşılaştırılamadığı için lineer sıralı değildir. Örneğin, $u = -3 \pm 0.7$ ve $v = 0 \pm 0.1$ interval sayılarını Tanım 2.1.2'yi kullanarak karşılaştıramayız.

Tanım 2.1.4. $+: S \times S \to S, +(u, v) = u + v = [u^- + v^-, u^+ + v^+]$

ile tanımlı toplama,

$\cdot: \mathbb{R} \times S \to S$, eğer $\alpha \geq 0$ ise $\alpha u = [\alpha u^-, \alpha u^+]$ ve eğer $\alpha < 0$ ise $\alpha u = [\alpha u^+, \alpha u^-]$

ile tanımlı skalerle çarpma işlemlerini göz önüne alalım. Yukarıdaki işlemlerin anlamı sırasıyla; $u + v = \{x + y: x \in u, y \in v\}$ ve $\alpha u = \{\alpha x: x \in u\}$ ile tanımlı kümelerin toplamı ve skalerle çarpımından başka bir şey değildir. Gerçekten, $x \in u$ ise $u^- \leq x \leq u^+$ ve $y \in v$ ise $v^- \leq y \leq v^+$ olduğunda açık olarak

$u^- + v^- \leq x + y \leq u^+ + v^+$ yani $u + v = [u^- + v^-, u^+ + v^+]$ dir.

Aynı düşünce ile $x \in u$ ise $u^- \leq x \leq u^+$ ise $\alpha \geq 0$ için $\alpha u^- \leq \alpha x \leq \alpha u^+$ ve $\alpha < 0$ ise $\alpha u^+ \leq \alpha x \leq \alpha u^-$ olacağı açıktır. Bu toplama ve skalerle çarpma işlemlerine sırasıyla S üzerindeki standart toplama ve skalerle çarpma işlemleri denir.

Örnek 2.1.1. $u = [-4,7], v = [0,2]$ ve $\alpha = 3$ olsun. Bu durumda standart toplama ve skalerle çarpmaya göre

$u + v = [-4,7] + [0,2] = [-4,9]$ ve $\alpha u = 3[-4,7] = [-12,21]$

olur.

Örnek 2.1.2. $u \in S$ olmak üzere,

$u + \theta = [u^-, u^+] + [0,0] = [u^- + 0, u^+ + 0] = [u^-, u^+]$

olduğundan $\theta = [0,0]$, S birim elemanıdır. İnterval sayılar kümesi üzerinde S de bir tek birim elemanı vardır. Gerçekten eğer θ ve $\theta_1 S$ nin farklı iki birim elemanı ise

$\theta = \theta + \theta_1 = \theta_1 + \theta = \theta_1$ olur. (2.2)

$u = [u^-, u^+], v = [v^-, v^+]$ ve $z = [z^-, z^+]$

interval sayıları verilsin.

$u + v = [u^- + v^-, u^+ + v^+]$

olup interval sayı tanımından $u^- \leq u^+$ ve $v^- \leq v^+$ ifadeleri yazılabilir. Bu iki ifade taraf tarafa toplanırsa $u^- + v^- \leq u^+ + v^+$ elde edilir. $u^- + v^-, u^+ + v^+$ birer reel sayı ve $u^- + v^- \leq u^+ + v^+$ olduğundan,

$[u^- + v^-, u^+ + v^+]'$ nin birer interval sayı olduğu sonucuna varılır. O halde S, interval sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

u ve v interval sayıları için,

$([u^-, u^+] + [v^-, v^+]) + [z^-, z^+] = [u^-, u^+] + ([v^-, v^+] + [z^-, z^+])$

eşitliği (toplamanın birleşme özelliği) geçerlidir.

Ayrıca

$[u^-, u^+] + [v^-, v^+] = [v^-, v^+] + [u^-, u^+]$

değişme özelliği sağlanır.

İnterval sayılar kümesi üzerinde tanımlı skalerle çarpma işleminde $\alpha = -1$ ve iki interval sayının toplaması göz önüne alınırsa,

$u + (-1)u = [u^-, u^+] + (-1)[u^-, u^+] = [u^-, u^+] + [-u^+, -u^-] = [u^- - u^+, u^+ - u^-] \neq \theta$

olduğundan interval sayının toplama işlemine göre tersi yoktur. Bu durum $x, u \in S$ olmak üzere $x + u = \theta$ biçimindeki interval denklemlerinin çözümünü imkânsız kılar. Fakat bu çalışmada tanımlanan interval sayılardaki yeni toplama işlemine göre

$$x + u = \theta \tag{2.3}$$

denkleminin çözümü mümkün hale getirilmiştir. Şu halde $(S,+)$ ikilisi bir grup değildir. Fakat $(S,+)$ ile verilen cebirsel yapı, kapalılık, birleşme, değişme ve birim eleman özelliklerine sahip olduğundan Abel monoiddir.

Tanım 2.1.5. u ve v interval sayılarının farkı;

$-: S \times S \to S, -(u,v) = u - v = u + (-1)v$

Örnek 2.1.3. $u = [-1,3]$ ve $v = [3,5]$ olsun.

$u - v = [-1,3] - [3,5] = [-1,3] + (-1)[3,5] = [-1,3] + [-5,-3] = [-1-5, 3-3] = [-6,0]$ 'dir.

Tanım 2.1.6. u ve v interval sayılarının çarpımı;

$\cdot: S \times S \to S, \cdot(u,v) = u \cdot v = [u^-,u^+] \cdot [v^-,v^+] = [minR, max\mathrm{R}]$,

$R = \{u^-v^-, u^-v^+, u^+v^-, u^+v^+\}$ olarak tanımlanır. (2.4)

Tanım 2.1.7. Bir u interval sayısının v interval sayısına bölümü $v \neq 0$ olmak üzere

$$\div: S \times S \to S; (u,v) = \frac{u}{v} = u.\frac{1}{v}$$

şeklindedir.

Örnek 2.1.4. $u = [7,9]; v = [-3,5]$ olduğunda $u.v$ ve $\frac{u}{v}$ değerleri;

$R = \{7.(-3), 7.5, 9.(-3), 9.5\} = \{-21, 35, -27, 45\}$

olduğundan $u.v$ =$[minR, maxR]$= [-27,45] elde edilir. Benzer şekilde

$\frac{u}{v} = u.\frac{1}{v} = [7,9].\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right]$ için

$R = \left\{7.\left(-\frac{1}{3}\right), 7.\left(\frac{1}{5}\right), 9.\left(-\frac{1}{3}\right), 9.\left(\frac{1}{5}\right)\right\} = \left\{-\frac{7}{3},\frac{7}{5},-\frac{9}{3},\frac{9}{5}\right\}$

olduğundan işlemin sonucu

$\frac{u}{v} = u.\frac{1}{v} = \left[-\frac{9}{3},\frac{9}{5}\right]$ şeklinde bulunur.

Tanım 2.1.8. $u = [u^-,u^+]$ intervali verilsin. Eğer $u^- = u^+ = r \in \mathbb{R}$ ise u interval sayısına **dejenere interval sayı** denir [5].

2.2. İnterval Sıfır Tanımı

İnterval aritmetiğinde tanımlanan toplama işlemine farklı bir yaklaşım getirerek interval sayıların tersiyle toplamı sonucunda interval sıfır etkisiz elemanı geliştirilmiştir. Böylece interval sayılar kümesi grup olma aksiyomlarını sağlamış olur.

Tanım 2.2.1. İki interval sayının toplamı $+ : S \times S \to S$, her $u,v \in S$ için $u + v = [minS, maxS]$ $S = \{u^- + v^+, u^+ + v^-\}$ ile tanımlanmıştır. Burada iki interval sayının toplamı tanımı; birinci interval sayının başlangıç noktası ve ikinci interval sayının bitiş noktası, birinci interval sayının bitiş noktası ile ikinci interval sayının başlangıç noktasının toplam sonuçlarının eleman olarak kabul edildiği küme S ile gösterildi. Elde edilen interval sayının başlangıç noktası, S kümesinin minimum elemanı iken bitiş noktası, S kümesinin maksimum noktası olarak tanımlandı.

Örnek 2.2.1. $u = [1, 2]; v = [7,9]$ olsun. Bu durumda $u + v$ interval sayısı için

S= { 1+9, 2+7} = {10, 9} olup

u + v = [9, 10] elde edilir.

Tanım 2.2.2. Her $u \in S$ için $u + e = e + u = u$ olacak şekilde $e \in S$ vardır.

Burada $u = [u^- , u^+]$ ve $e = [0,0]$ olmak üzere

$$u + e = [u^- , u^+] + [0 , 0] = [u^- + 0 , u^+ + 0] = [0 + u^+ , 0 + u^-]$$

$$= [0 , 0] + [u^- , u^+] = [u^- , u^+] \quad (2.5)$$

olur.

Örnek 2.2.2. u = [-1, 6] ve e = [0 ,0] olmak üzere,

[-1,6] + [0,0] = [-1 + 0 , 6+0] = [-1,6] elde edilir.

Tanım 2.2.3. Her $u \in S$ için $u + (-u) = (-u) + u = b$ olacak şekilde $(-u) \in S$ vardır.

Burada $u = [u^- , u^+]$ ve $(-u) = [-u^+ , -u^-]$ olmak üzere

$$u + (-u) = [u^- , u^+] + [-u^+ , -u^-] = [u^- + (-u^-) , u^+ + (-u^+)] = [0,0] \quad (2.6)$$

Örnek 2.2.3. u = [-2, 5] olmak üzere $u + (-u) = [-2, 5] + [-5, 2]$ için

$S = \{-2 + 2, \ 5 + (-5)\} = \{0, 0\}$

olduğundan $u + (-u) = [0, 0]$ elde edilir.

Böylelikle interval sayılar kümesi üzerinde etkisiz eleman ve ters eleman tanımlanmış olur.

Not: Tanım 2.1.1. ile verilen interval sayılar kümesi üzerinde tanımlı toplama işlemi ne göre birleşme özelliği sağlanmadığından S İnterval sayılar kümesi toplama işlemine göre bir grup belirtmez. Fakat interval sayıların bilinen toplama işlemi ile yapılamayan $u + v = x$ denkleminin mümkün olmayan çözümü, bu kısımda yaptığımız interval sayılar kümesindeki yeni toplama işlemi tanımıyla elde ettiğimiz sıfır ve toplama işlemine göre ters eleman özellikleri ile artık mümkün hale gelmiştir.

2.3 İnterval Matrisleri ve Özellikleri

Tanım 2.3.1. $\mathbb{N}_n = \{0,1,2, \dots , n\}$ ve $\mathbb{N}_m = \{0,1,2, \dots , m\}$ olmak üzere

$f: \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m \to S, i, j \to f(i,j) = a_{ij}, (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$

olmak üzere $a_{ij} = [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$ elemanlarının oluşturduğu

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m} = \begin{bmatrix} [a_{11}^-, a_{11}^+] & \cdots & [a_{11}^-, a_{11}^+] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{n1}^-, a_{n1}^+] & \cdots & [a_{nm}^-, a_{nm}^+] \end{bmatrix}_{n\times m} = [[a_{ij}^-, a_{ij}^+]]_{n\times m}$$

ile verilen tabloya intervallerin matrisi denir [6].

Açık olarak $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için $a_{ij}^- = a_{ij}^+$ alınırsa $\tilde{A}$ interval matrisi reel sayıların $n \times m$ boyutlu matrisine indirgenir.

Tanım 2.3.2. $n \times m$ tipindeki bütün interval matrislerin kümesini $S^{n\times m}$ ile gösterilsin. Yani $S^{n\times m} = \{\tilde{A} : \tilde{A}\ , n \times m \text{ tipinde interval matris}\}$olsun.

$\tilde{A},\ \tilde{B},\ \tilde{C} \in E^{n\times m},\ \lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda\tilde{A}$ skalerle çarpımı, $\tilde{A} + \tilde{B}$ toplamı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\lambda\tilde{A} = \begin{cases} \left[[\lambda a_{ij}^-, \lambda a_{ij}^+]\right]_{n\times m}, & \lambda \geq 0 \ ise \\ \left[[\lambda a_{ij}^+, \lambda a_{ij}^-]\right]_{n\times m}, & \lambda < 0 \ ise \end{cases}$$

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \left[[a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right]_{n\times m} + \left[[b_{ij}^-, b_{ij}^+]\right]_{n\times m} = \left[\left[a_{ij}^- + b_{ij}^-, a_{ij}^+ + b_{ij}^+\right]\right]_{n\times m}$$

$$= \left[[c_{ij}^-, c_{ij}^+]\right]_{n\times m}. \tag{2.7}$$

$\tilde{A}$ interval matrisi $n \times m$ ve $\tilde{B}$ interval matrisi $m \times r$ boyutlu matrisler olsunlar. $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ çarpımı $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq r$ ve

$$c_{ij}^- = \sum_{k=1}^{m} min\left\{a_{ik}^- b_{kj}^-, a_{ik}^- b_{kj}^+, a_{ik}^+ b_{kj}^-, a_{ik}^+ b_{kj}^+\right\}$$

ve

$$c_{ij}^+ = \sum_{k=1}^{m} max\left\{a_{ik}^- b_{kj}^-, a_{ik}^- b_{kj}^+, a_{ik}^+ b_{kj}^-, a_{ik}^+ b_{kj}^+\right\}$$

olmak üzere

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \left[\left[a_{ij}^-, a_{ij}^+\right]\right]_{n\times m} \cdot \left[\left[b_{ij}^-, b_{ij}^+\right]\right]_{m\times r} = \left[[c_{ij}^-, c_{ij}^+]\right]_{n\times r} \tag{2.8}$$

olarak tanımlanır [6].

Şimdi interval matrislerin sağladığı bazı özellikleri inceleyelim.

Teorem 2.3.1. $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in S^{n\times m}$olsun. $+: S^{n\times m} \times S^{n\times m} \to S$ ile tanımlı $+$ işlemi

1. $\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{B} + \tilde{A}$

2. $(\tilde{A} + \tilde{B}) + \tilde{C} = \tilde{A} + (\tilde{B} + \tilde{C})$

3. $\tilde{A} + \theta = \tilde{A}$

özelliklerini sağlar. Burada θ ile gösterilen matris, Ã matrisi ile aynı boyutlu olan her $1 \le i \le n,\ 1 \le j \le r$ için $\theta_{ij} = [0,0]$ ile verilen $S^{n\times m}$ nin bir elemanıdır.

İspat: $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere (1) in ispatı aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \left[[a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right]_{n\times m} + \left[[b_{ij}^-, b_{ij}^+]\right]_{n\times m} = \left[[a_{ij}^- + b_{ij}^-, a_{ij}^+ + b_{ij}^+]\right]_{n\times m}$$

$$= \left[[b_{ij}^- + a_{ij}^-, b_{ij}^+ + a_{ij}^+]\right]_{n\times m} = \left[[b_{ij}^-, b_{ij}^+]\right]_{n\times m} + \left[[a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right]_{n\times m} = \tilde{B} + \tilde{A}$$

$\lambda\tilde{A}$ çarpımı

$$\lambda\tilde{A} = \lambda\left[[a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right]_{n\times m} = \begin{cases} \left[[\lambda a_{ij}^-, \lambda a_{ij}^+]\right]_{n\times m}, & \lambda \ge 0 \ ise \\ \left[[\lambda a_{ij}^+, \lambda a_{ij}^-]\right]_{n\times m}, & \lambda < 0 \ ise \end{cases}$$

ile tanımlanır. S de bir $u = [u^-, u^+]$ intervalini de bir interval skaler olarak göz önüne alırsa bu durunda $u\tilde{A}$ çarpımı

$$c_{ij}^- = min\{a_{ij}^- u^-, a_{ij}^+ u^-, a_{ij}^- u^+, a_{ij}^+ u^+\},$$

$$c_{ij}^+ = max\{a_{ij}^- u^-, a_{ij}^+ u^-, a_{ij}^- u^+, a_{ij}^+ u^+\}$$

ve $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ olmak üzere her $[a_{ij}^-, a_{ij}^+] \in \tilde{A}$ için

$[u^-, u^+][a_{ij}^-, a_{ij}^+] = [c_{ij}^-, c_{ij}^+]$ olduğundan,

$[u^-, u^+]\left[[a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right]_{n\times m} = \left[[c_{ij}^-, c_{ij}^+]\right]_{n\times m}$ dir.

Tanım 2.3.3. $A = \left[[a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right]_{n\times m}$ intervallerin matrisi ise

$$\|A\| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{k} M([a_{ij}^-, a_{ij}^+])$$

ile verilen reel sayıya A matrisinin normu denir. Eğer A interval matrisi $\infty \times \infty$ bir matris ise A normu

$$\|A\| = \sup_i \sum_j M\left(\left[a_{ij}^-, a_{ij}^+\right]\right) \tag{2.9}$$

ile hesaplanır.

Burada $M\left(\left[a_{ij}^-, a_{ij}^+\right]\right) = max\left\{\left|a_{ij}^-\right|, \left|a_{ij}^+\right|\right\}$ şeklindedir [7].

Örnek 2.3.1. $A = \begin{bmatrix} [-1,3] & [2,3] \\ [-2,0] & [0,1] \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ise interval matrisinin normunu hesaplayınız.

A interval matrisinin normunu hesaplayabilmek için her bir satır ve sütundaki intervallerin ayrı ayrı mutlak değerce maksimum elemanları bulunur. Bu interval matrisin mutlak değerlerce maksimum elemanlarından yeni bir matris elde edilir. Daha sonra elde edilen bu mutlak değerce maksimum matrisinin her biri kendi satırındaki mutlak değerce maksimum elemanlarla toplanır. Bu toplamdan sonra yeniden maksimum eleman belirlenir ve işlemin sonucu hesaplanmış olur.

$$\|A\| = \begin{bmatrix} [|-1|, |3|] & [|2|, |3|] \\ [|-2|, |0|] & [|0|, |1|] \end{bmatrix},$$

$$\|A\| = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\|A\| = max\{3 + 3, 2 + 1\} = max\{6, 3\} = 6$ olarak elde edilir.

Tanım2.3.4 X interval sayıların boştan farklı bir kümesi olsun. Her $u, v \in X$ $için$, aşağıdaki şartları sağlayan $d: X \times X \to S$ fonksiyonuna interval metrik fonksiyon, (X, d) ikilisine ise interval metrik uzay adı verilir [8].

1. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,

2. $d(u, v) = d(v, u)$,

3. $d(u, z) \leq d(u, v) + d(v, z)$.

2.4. İntervallerin Dizileri

Tanım 2.4.1. Terimleri $\mathbb{R}$ de kompakt alt kümelerinden oluşan bir diziye interval sayıların dizisi denir. Bütün intervallerin dizilerinin kümesini $\mathcal{F}$ ile gösterelim. Yani, her $k \in \mathbb{N}$ için intervallerin dizisi

$$\mathcal{F} = \{([u_k^-, u_k^+]): f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(k) = u_k^-, g(k) = u_k^+, u_k^- \leq u_k^+\} \tag{2.10}$$

kümesinin bir elemanıdır. $\curlywedge \subset \mathcal{F}$ olsun. $d: \curlywedge \times \curlywedge \to \mathbb{R}$ bir metrik olsun. Verilen bir $(u_k) \in \mathcal{F}$ için

1. Her $\epsilon > 0$ için $\exists k_0 \in \mathbb{N} \ni$ her $k, n \geq k_0$ için $d([u_k^-, u_k^+].[u_n^-, u_n^+]) < \epsilon$ ise bu takdirde $(u_k) = ([u_k^-, u_k^+])$ intervallerin Cauchy dizisi denir [9].

2. Her $\epsilon > 0$ için $\exists k_0 \in \mathbb{N} \ni$ her $k \geq k_0$ için $d([u_k^-, u_k^+].[u_0^-, u_0^+]) < \epsilon$ ise bu takdirde $([u_k^-, u_k^+])$ ya S deki d metriğine göre $[u_0^-, u_0^+]$ yakınsaktır denir ve $\lim_k [u_k^-, u_k^+]$=$[u_0^-, u_0^+]$ veya $[u_k^-, u_k^+] \to [u_0^-, u_0^+]$, $k \to \infty$ ile gösterilir.
Eğer $\lim_k [u_k^-, u_k^+]$=$[u_0^-, u_0^+]$ ise açık olarak $\lim_k u_k^- = u_0^-$ ve $\lim_k u_k^+ = u_0^+{}'$ dir.

3. Eğer S de alınan her $(u_k) = ([u_k^-, u_k^+])$ intervallerin Cauchy dizisi, S üzerinde göz önüne alınan d metriğine göre bir $u_0 = [u_0^-, u_0^+] \in S$ intervaline yakınsıyorsa S ye intervallerin tam metrik uzayı denir.

$$([u_k^-, u_k^+]) = ([u_0^-, u_0^+], [u_1^-, u_1^+], [u_2^-, u_2^+], \dots, [u_k^-, u_k^+], \dots) \tag{2.11}$$

ifadesinde $[u_k^-, u_k^+]$ ve $u = (u_k)$ interval değerli dizisinin genel terimi denir.
$(u_k) = ([u_k^-, u_k^+]), (v_k) = ([v_k^-, v_k^+]) \in \mathcal{F}$ ve $r \in \mathbb{R}$ olsun.
(u_k) ve (v_k) interval değerli dizilerin dizilerin toplama ve skalerle çarpımları aşağıdaki gibi tanımlanır:
1. $u + v = ([u_k^-, u_k^+]) + ([v_k^-, v_k^+]) = ([u_k^- + v_k^-, u_k^+ + v_k^+])$ ve
2. Eğer $r \geq 0$ ise $ru = [ru_k^-, ru_k^+]$; eğer $r < 0$ ise $ru = [ru_k^+, ru_k^-]$ dir.
$u = (u_k) = ([u_0^-, u_0^+], [u_1^-, u_1^+], [u_2^-, u_2^+], \dots, [u_k^-, u_k^+], \dots)$
dizisi verilsin. Bu takdirde $\|u\| = \sup_k M(u_k)$ u interval dizisinin normu denir. Eğer u intervallerin sonlu bir dizisi ise u interval sayısının normu $\|u\| = \max_k M(u_k)$ olarak alınır. İnterval sayıların dizisi ise u nun normu $\|u\| = \max_k M(u_k)$ olarak alınır [10].

Örnek 2.4.1 $u = ([1,2], [-3,0])$ için $\|u\| = \max_{1 \leq k \leq 2} M(u_k) = \max_{1 \leq k \leq 2} \{\max\{|1|, |2|\}, \max\{|-3|, |0|\}\} = 3$ olur.

Tanım 2.4.2. $\mathcal{F}_c = \left\{u = (u_k) = ([u_k^-, u_k^+]) : \lim_k [u_k^-, u_k^+] = [u_0^-, u_0^+]\right\}$

ve

$$\mathcal{F}_0 = \left\{u = (u_k) = ([u_k^-, u_k^+]) : \lim_k [u_k^-, u_k^+] = [0,0]\right\}$$

ile tanımlı kümelere sırasıyla $u_0 = [u_0^-, u_0^+]$ ve $\theta = [0,0]$ intervallerine yakınsak interval dizilerin kümesi adı verilir.

Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k^- = u_k^+$ ise bu durumda $\mathcal{F}_c$ ve $\mathcal{F}_0$ ile tanımlı kümeler reel sayıların yakınsak ve sıfıra yakınsak dizilerine karşılık gelirler. Bu ise interval yakınsak veya sıfıra yakınsayan dizilerinin, reel sayıların yakınsak veya sıfıra yakınsayan dizilerinin kümelerinin doğal bir genişlemesi olduğu sonucuna ulaşılır [11].

$S = \left\{u = (u_k) = ([u_k^-, u_k^+]): \sup_k M(u_k) < \infty\right\}$ ile tanımlı (u_k) intervallerinin kümesine sınırlı interval dizilerinin kümesi adı verilir.

Aşağıda verilen interval dizi uzayları, sırasıyla, interval yakınsak, sıfıra interval yakınsak ve sınırlı interval dizi uzayları olarak adlandırılmıştır [12]. Eğer burada her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k^- = u_k^+$ alınırsa yukarıda belirtilen dizi uzayları, sırasıyla, reel sayıların yakınsak, sıfıra yakınsak ve sınırlı dizi uzaylarına indirgenmiş olur.

$$c^i = \left\{u_k = ([u_k^-, u_k^+]): \lim_k [u_k^-, u_k^+] = [u_0^-, u_0^+]\right\}$$

$$c_0^i = \left\{u_k = ([u_k^-, u_k^+]): \lim_k [u_k^-, u_k^+] = [0,0]\right\}$$

$$\ell_\infty^i = \left\{u_k = ([u_k^-, u_k^+]): \sup_k M([u_k^-, u_k^+]) < \infty\right\}.$$

2.5. İnterval Katsayılı Denklem Sistemleri

Tanım 2.5.1. Elemanları intervallerden oluşan $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ya sonlu boyutlu interval vektörü denir.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

interval matrisi ve $B = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ vektörü verilsin.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}_{k\times 1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}_{k\times 1} \tag{2.12}$$

sistemine interval katsayılı denklem sistemi denir.

2.6. İntervallerin Sonsuz Matrisleri

$1 \times n$ tipindeki interval matrisler, intervallerin vektörü olarak adlandıracağız.

Tanım 2.5.1 de verilen $n \times m$ tipindeki interval matrisler $\infty \times \infty$ tipindeki sonsuz boyutlu intervallere genişletilebilir.

Tanım 2.6.1

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nm} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{\infty\times\infty}$$

$$= \begin{bmatrix} [a_{11}^-, a_{11}^+] & \cdots & [a_{1m}^-, a_{1m}^+] & \cdots \\ [a_{21}^-, a_{21}^+] & \cdots & [a_{2m}^-, a_{2m}^+] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [a_{n1}^-, a_{n1}^+] & \cdots & [a_{nm}^-, a_{nm}^+] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{\infty\times\infty}$$

formundaki matrislere sonsuz boyutlu interval matrisi denir.

$u = (u_k) = ([u_1^-, u_1^+], [u_2^-, u_2^+], \dots, [u_k^-, u_k^+], \dots)$ bir interval sayıların dizisi (veya interval vektör) ise

$$= \begin{bmatrix} [a_{11}^-, a_{11}^+] & \cdots & [a_{1m}^-, a_{1m}^+] & \cdots \\ [a_{21}^-, a_{21}^+] & \cdots & [a_{2m}^-, a_{2m}^+] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [a_{n1}^-, a_{n1}^+] & \cdots & [a_{nm}^-, a_{nm}^+] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{\infty\times\infty} \begin{bmatrix} [u_1^-, u_1^+] \\ [u_2^-, u_2^+] \\ \vdots \\ [u_k^-, u_k^+] \\ \vdots \end{bmatrix}_{\infty\times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_k [a_{1k}^-, a_{1k}^+][u_k^-, u_k^+] \\ \sum_k [a_{2k}^-, a_{2k}^+][u_k^-, u_k^+] \\ \vdots \\ \sum_k [a_{nk}^-, a_{nk}^+][u_k^-, u_k^+] \\ \vdots \end{bmatrix}_{\infty\times 1}$$

(2.13)olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k [a_{nk}^-, a_{nk}^+][u_k^-, u_k^+]$ serileri yakınsak ise $\tilde{A}u = v$ ye u interval sayı dizisinin Ã dönüşümü denir. Eğer $n, k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk}^- = a_{nk}^+$ ve $u_k^- = u_k^+$ olacak şekilde seçilirse (2.6.1) eşitliği klasik anlamda dizilerin matris dönüşümlerine indirgenir [13]. Skalerlerin (x_n) dizisi $n = 1,2,3, \dots$ için x ile gösterilsin. $(xy) = \sum_k x_k y_k$ ve $A = (a_{nk})$ bir matris olsun. $y = Ax$ in anlamı her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = (Ax)_n = \sum_k a_{nk} x_k \qquad (2.14)$$

şeklinde olmasıdır. Burada $\sum_k a_{nk} x_k$ serilerinin her birinin yakınsak olduğu kabul edilmektedir. $w_A = \{x: Ax \text{ mevcut}\}$ kümesi A nın etki alanı olarak adlandırılır. Eğer A matrisi satır sonlu ise o zaman $w_A = w$ dir.

A sonsuz matris, λ bir dizi uzayı olsun. $\lambda = \{x \in: Ax \in \lambda\}$ ile tanımlı kümeye A lineer dönüşümünün veya daha genel olarak A matrisinin λ üzerindeki etki alanı denir.
Burada w ile bütün dizilerin kümesi gösterilmiştir. c yakınsak dizilerin kümesi olmak üzere $c_A = \{x: Ax \in c\}$ olsun. Bu küme A'nın yakınsaklık alanı olarak tanımlanır [5,14].

Tanım 2.6.2. (Cesàro Matrisi)
Cesàro matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanır ve $n, k \in \mathbb{N}$ için $C = (c_{nk})$ ile gösterilir [15].

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & k \leq n \text{ ise} \\ 0, & k > n \text{ ise} \end{cases} \tag{2.15}$$

2.7. Cesàro İnterval Matris

Tanım 2.7.1. $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $C^+ = (C_{nk}^+)$ ve $C^- = (C_{nk}^-)$ matrisleri sırasıyla, aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$C^+ = (C_{nk}^+) = \begin{cases} \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right], & k \leq n \text{ ise} \\ [0,0], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$C^- = (C_{nk}^-) = \begin{cases} \left[\dfrac{-1}{n+1}, 0\right], & k \leq n \text{ ise} \\ [0,0], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Burada, C^+ya sağ Cesàro interval matris, C^- ye sol Cesàro interval matris denir.

$$C = (C_{nk}) = \begin{cases} \left[\frac{-1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right], & k \leq n \text{ ise} \\ [0,0], & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.16}$$

matrisine ise Cesàro interval matris adı verilir [16].

BÖLÜM 3

3.1. Fuzzy Küme ve İşlemleri

Tanım 3.1.1. T boş olmayan bir küme ve $X_A : T \longrightarrow [0,1]$ olsun. $T \times [0,1]$ boş olmayan $\{(x, X_A(x)) : x \in T\}$ ile tanımlı alt kümesine T de bir fuzzy küme denir [17] Fuzzy kümelerde X_A fonksiyonu A fuzzy kümesi yerine kullanılır ve kısaca $A(x)$ ile gösterilir. Bu gösterim A fuzzy kümesi ile onun karakteristik fonksiyonu X_Anın dolayısıyla $A(x)$ in özdeş olarak görülmesi demektir. Burada $A(x)$ fonksiyonuna A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu adı verilir. Her bir fuzzy küme, bir üyelik fonksiyonu yardımı ile tek olarak belirlenmektedir. Bir $A(x)$ üyelik fonksiyonu A fuzzy kümesini belirlerken $A(x)$ $[0,1]$ aralığında alacağı değere $x \in T$ nin A daki üyeliğinin derecesi denir. Bir $x \in T$ nin üyeliğinin derecesi yani $A(x)$, 1 e ne kadar yakınsa A ya eleman olma özelliğini o kadar kaybettirmektedir.

Örnek 3.1.1. $\mathrm{M} = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4\}$ evrensel kümesi üzerin de bir A fuzzy kümesi $\mathrm{A} = \{(\mathrm{x}_1, 0.5), (\mathrm{x}_2, 0.7), (\mathrm{x}_3, 0.9), (\mathrm{x}_4, 1)\}$ ile verilebilir. $(\mathrm{x}_1, 0.5)$ ifadesi bize $\mathrm{x}_1$in A kümesine üyeliğinin (eleman olmasının) derecesinin 0.5 kadar olduğunu $(\mathrm{x}_4, 1)$ ile x_4 ün A ya üyeliğinin derecesi 1 yani tam üyeliğe sahip olduğu anlaşılmaktadır.

$\mathrm{A} = \{(\mathrm{x}_1, 0.5), (\mathrm{x}_2, 0.7), (\mathrm{x}_3, 0.9), (\mathrm{x}_4, 1)\}$ kümesi

$$A = \frac{0.5}{\mathrm{x}_1} + \frac{0.7}{\mathrm{x}_2} + \frac{0.9}{\mathrm{x}_3} + \frac{1}{\mathrm{x}_4}$$

biçiminde ifade edilir. A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu,

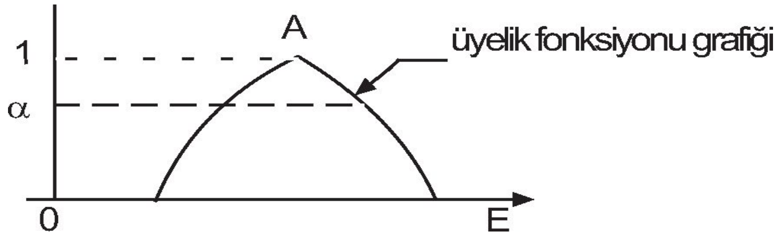
$$\mathrm{A} : \mathbb{R} \to [0,1],\ \mathrm{A}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0.5, & \mathrm{x} = \mathrm{x}_1 \\ 0.7, & \mathrm{x} = \mathrm{x}_2 \\ 0.9, & \mathrm{x} = \mathrm{x}_3 \\ 1, & \mathrm{x} = \mathrm{x}_4 \end{cases}$$

olur.

$M = \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}$ de bir B fuzzy kümesi $B : \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$\mathrm{B}(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x \in (0,1] \\ 0, & x > 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

üyelik fonksiyonu ile verilebilir. B fuzzy kümesi “$1'$den büyük reel sayılar” ile ifade edilen fuzzy küme olarak düşünülmektedir.



Şekil 3.1 Fuzzy küme ve üyelik fonksiyonu

Fuzzy kümeler çoğunlukla üyelik fonksiyonlarının şekline göre isim alır. Eğer $X_A : T \to [0,1]$ ile tanımlı üyelik fonksiyonunun grafiği üçgen ise fuzzy kümeye üçgensel, yamuk ise yamuk fuzzy küme adı verilir.

Tanım 3.1.2 $A, B \in F(T)$ olsun. Her $x \in T$ için

1. $(A \cup B)(x) = max\{A(x), B(x)\}$ (A fuzzy kümesi ile B fuzzy kümesinin birleşimi,

2. $(A \cap B)\ (x) = min\{A(x), B(x)\}$ (A fuzzy kümesi ile B fuzzy kümesinin kesişimi,

3. $A = B$ ancak ve ancak $A(x) = B(x)$ ise

4. $A \subseteq B$ ancak ve ancak $A(x) < B(x)$ ise

5. Her $x \in T\ için\ A(x) = 0\ ise\ A = \emptyset$

6. Her $x \in T\ için\ A(x) = 1$ ise A klasik kümedir.

7. $A \cup A\ = A\ ve\ A \cap A = A$ (Etkisiz eleman özelliği)∀∀

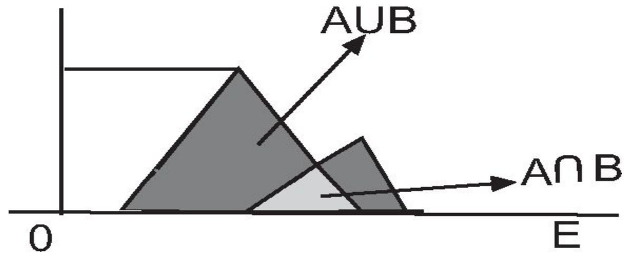
8. $A \cup (A \cap B) = A\ ve\ A \cap (A \cup B) = A$ (Yutma özelliği)

9. $A\ \cap\ \emptyset = \emptyset\ ve\ A\ \cup\ \emptyset = A$ (Özdeşlik Özelliği)

10. Genel olarak $A \cap A \neq \emptyset\ ve\ A \cup A \neq M\ '$dir.

11. $(A \cup B) = A \cup B\ ve\ (A \cap B) = A \cap B$ (De Morgan Kuralı)

Burada max, maksimum; min, minimum ve $\bar{A}$ de A fuzzy kümesinin tümleyeni, $\emptyset$ de boş küme anlamında kullanılmaktadır. (1) de verilen $\cup$, (2) de verilen $\cap$ ve (3) te verilen işlemler fuzzy kümeler üzerindeki standart küme işlemleri olarak adlandırılmaktadır. Klasik anlamda bir küme verildiğinde,



Şekil 3.2 $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümelerinin üyelik fonksiyonları ile gösterimi

Şekil 3.2 gibi gösterilmektedir. Bu kümenin evrensel kümeye göre tümleyeni olan küme ilk başta verilen kümeye ait olmayan elemanlardan oluşan bir kümedir. Örneğin,

$A = \{x | x, A$ sokağında okul$\}$ ise A nın klasik anlamda tümleyeni

$\bar{A} = \{x | x, A$ sokağında okul değil$\}$ ile verilir.

Fuzzy kümelerde tümleme işlemi bir x elemanının bir A fuzzy kümesine üyeliği olan $A(x)$ değerinin 1 den çıkarılması ile elde edilmektedir.

Yani $A \in F(M)$ ise her $x \in M$ için $\bar{A}(x) = 1 - A(x)'$tir. (3.2)

Tanım 3.1.3. (Dağılma özelliği)

$\mathrm{A, B, C} \in \mathrm{F(T)}$ olsun.

$(A \cap B) \cup \mathrm{C} = (\mathrm{A} \cap B) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$ ve $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{C} = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$

Her $\mathrm{x} \in \mathrm{T}$ için;

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})](\mathrm{x}) &= min\{\mathrm{A(x)}, (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})(\mathrm{x})\} = min\{\mathrm{A(x)}, \max\{\mathrm{B(x)}, \mathrm{C(x)}\}\} \\
&= max\{min\{\{A(x), \mathrm{B}(x)\}, min\{A(x), \mathrm{C}(x)\}\} \\
&= max\{(A \cap \mathrm{B})(\mathrm{x}), (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})(\mathrm{x})\} = [(A \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})](x)
\end{aligned}
$$

dağılma özelliği elde edilmektedir.

Örnek 3.1.2. $\mathrm{X} = \{\mathrm{a, b, c, d, e}\}$ evrensel kümesi üzerinde

$\mathrm{A} = \frac{0.7}{\mathrm{a}} + \frac{0.4}{\mathrm{b}} + \frac{0.6}{\mathrm{c}} + \frac{1}{\mathrm{d}} + \frac{0.8}{\mathrm{e}}$

ve

$B = \frac{1}{a} + \frac{0.9}{b} + \frac{0.6}{c} + \frac{0.3}{d} + \frac{0.8}{e}$

fuzzy kümeleri verilsin. A ve B fuzzy kümeleri üzerindeki standart birleşim, kesişim ve tümleme işlemlerine göre;

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \frac{1}{\mathrm{a}} + \frac{0.9}{\mathrm{b}} + \frac{0.6}{\mathrm{c}} + \frac{1}{\mathrm{d}} + \frac{0.8}{\mathrm{e}}$

$A \cap B = \frac{0.7}{\mathrm{a}} + \frac{0.4}{\mathrm{b}} + \frac{0.6}{\mathrm{c}} + \frac{0.3}{\mathrm{d}} + \frac{0.8}{\mathrm{e}}$

$\bar{A} = \frac{0.3}{\mathrm{a}} + \frac{0.6}{\mathrm{b}} + \frac{0.4}{\mathrm{c}} + \frac{0}{\mathrm{d}} + \frac{02}{\mathrm{e}}$.

Örnek 3.1.3. M={a, b, c, d} evrensel kümesi üzerinde bir A fuzzy kümesi

$A = \{(a, 0.5), (b, 0.7), (c, 0.9), (d, 1)\}$ ile verilsin. A kümesinin tümleyeni,

$\bar{A} = \{(0.5, a), (0.3, a), (0.1, a), (0, a)\} = \frac{0.5}{a} + \frac{0.3}{b} + \frac{0.1}{c} + \frac{0}{d}$ dir.

BÖLÜM 4

4.1. İki Kutuplu Fuzzy Kümeler için Mesafe ve Benzerlik Ölçüleri ile İlaç Lojistiği ve Tedarik Zinciri Yönetimine Bir Uygulaması

Benzerlik ölçümü (SM) ilkesi, yaratıcılığın, bilimin ve teknolojinin tüm alanlarında gereklidir. Genellikle belirli bir örneğin, kişinin, ürünün, nesnenin veya sistemin güvenilirliğini belirlemek için kullanılır. SM ilkesi, iki veya daha fazla bilgi sistemi arasındaki benzerlik derecesini değerlendirmek için kullanılan önemli bir yöntemdir. İki bileşen arasındaki SM değeri bu iki bileşen arasındaki benzerlikle birebir orantılıdır. Örneğin bir iş firmasının işe alımlarında işe başvuru yapan kişilerin özgeçmişleri ile iş tanımları eşleştirilmesinde SM kullanılabilir ve bu durum işe alan kişiye önemli ölçüde zaman kazandırır. Benzer şekilde, tıbbi müdahalede bulunulan bir hasta için mevcut semptomlar ile şüphelenilen hastalığın semptomları arasında SM den yararlanılması, hastaya doğru teşhis konulmasını ve beraberinde daha iyi bir tedavi yöntemi uygulanmasını sağlayabilmektedir. Ayrıca, belirli bir lojistik firması için seçim yöntemi, firmanın maliyet ve zaman faktörünü azaltabilir ve lojistik hizmetlerinin güvenlik ve memnuniyetini artırabilir.

Zadeh, belirsizliği ele almak için fuzzy küme (FS) kavramını geliştiren önemli bir araştırmacıdır [17]. Belirsizlikleri modellemek için sezgisel fuzzy küme (IFS) [18,19] soft küme (SS) [20], bipolar fuzzy küme (BFS) [21,22] başta olmak üzere Pisagor fuzzy küme (PyFS) [23-24], q basamaklı bipolar fuzzy küme (q-ROFS) [25], nötrosofik küme (NS) [26], hipersoft küme ve plitojenik hipersoft küme [27], küresel fuzzy küme (SFS) [28-31], vb. bir dizi teori ve model geliştirilmiştir.

Molodtsov, klasik kümelerin soyut bir kavramını, yani soft kümenin belirsizliklerini parametrik bir şekilde ele alan sağlam bir model tanımını vermiştir [20]. Parametreler, klasik kümeler ya da küme değerli dönüşüm sınıfı yardımıyla değerlendirilir. Burada karar analizinde objelerin değerlendirilmesi aşamasında temel bileşen klasik kümeler ya da küme değerli fonksiyon sınıflarıdır. Kısacası, soft küme teorisi, mevcut hipotezlerin uygulanmasında birçok bilim adamlarının karşılaştığı pek çok problemi başarılı bir şekilde çözüme kavuşturmuştur. Teorik ve bilimsel alanda soft küme teorisi büyük bir popülerlik kazanmıştır.

Pek çok problemin matematik yapısının inşasında bilginin pek çok şeklinin analizinde bilginin çok kutuplu olması kritik bir faktördür. Çok kutupluluk özel bir konunun pozitif ve negatif etkilerini yansıtır. Örneğin, karar analizinin iki farklı yönü mutluluk ve üzüntü, tatlı ve ekşi, etkiler ve yan etkiler şeklindedir. Zhang hem klasik hem de fuzzy kümelerde bipolar kavramını sırasıyla bipolar kümeleri ve bipolar fuzzy kümeyi (FS) tanıtmıştır [21,22]. Wei ve diğerleri interval değerli bipolar fuzzy küme (IVFS) fikrini önermiş ve gelişmekte olan teknoloji ticarileştirme değerlendirmesi için çok kriterli karar verme (ÇKKV) konusunu ele almıştır [32]. Bipolar fuzzy küme ve bipolar fuzzy soft küme soyutlamaları son yıllarda birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir (bkz. [33-37]).

Lee bipolar fuzzy kümelerin (BVFS), temel işlevlerini incelemiş ve interval değerli fuzzy kümelerin (IVFS), IFS lerin ve BVFS lerin karşılaştırmasını vermiştir [38,39]. Batyrshin benzerlik ve benzerlik ölçüleri, benzer olmama, benzerlik fonksiyonları ve korelasyon fonksiyonları için genel bir teori önermiştir [40,41]. Bu kavramlar bilgi edinme ve bilgi ölçümleri, istatistik, veri bilimi, tavsiye sistemleri, makine öğrenimi ve karar verme süreçlerinde önemli bir rol oynamaktadır. Akram yeni bipolar fuzzy grafikler kavramı ve uygulamalarını önermiştir [42]. Alghamdi ve diğerleri bipolar fuzzy ortam için yeni bir MCDM yaklaşımı önermiştir [43]. Riaz tıbbi teşhis ve bipolar bozuklukta karar verme ile bipolar fuzzy soft topoloji (BUS-topoloji) ve bipolar fuzzy soft kümelerde fonksiyonlar kavramını önermişlerdir [44,45] .

Alcantud ve diğerleri [46] ikili genişletilmiş kararsızlık fuzzy küme kavramını ve bunların ilgili sonuçlarını önermişlerdir. Zhang ve Xu [47] Pisagor fuzzy sayılar (Pfns) ve bunların temel işlemleri fikri ile PyFS lere dayalı TOPSIS in yeni bir uzantısı ile MCDM yaklaşımını önermişlerdir. Bununla beraber yerli hava yolları arasında hizmet kalitesini incelemek için önerilen MCDM yaklaşımının bir uygulamasını geliştirdiler.

Benzerlik ölçüleri ve uzaklık ölçüleri ile karar verme birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır: Soft kümeler (SS ler) için (bkz. [48-52]), çeşitli fuzzy kümeler ve belirsiz kümeler için (bkz. [53-56]), IFS ler için (bkz. [57-63]), PyFS ler için (bkz. [64-69]), qrung orthopair fuzzy kümeler (qROFS) için (bkz. [70-73]), bipolar fuzzy küme ve bipolar nötrosofik küme için (bkz. [74-76]) ve soft kümeler ve cebirsel yapıları (bkz. [77,81]). Zararsız [82,83] fuzzy sayılar dizisinin benzerlik ölçülerini, fuzzy sayıların cebirsel yapısını ve fuzzy risk analizini önermiştir. Zararsız ve Şengönül fuzzy sayılar dizisinin ağırlık merkezini incelemişlerdir [84]. Ancak, bipolar fuzzy soft kümeler için uzaklık ve benzerlik ölçütleri araştırmacılar tarafından çalışılmamıştır. Bu araştırma boşluğunu doldurmak amacıyla bipolar fuzzy soft kümeler için yeni bazı uzaklık ve benzerlik ölçütleri tanıtılmış ve ardından karar vermede belirsizlikleri modellemek için bir algoritma geliştirilmiştir.

Tezin geri kalanı aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir: BFS ve BFSS lerin bazı temel kavramları hatırlatılmıştır. BFSS lerin uzaklık ve benzerlik ölçütleri tanımlanmıştır. Ayrıca BFSS ler için ağırlıklı benzerlik ölçütleri önerilmiştir. İlaç lojistiği ve tedarik zinciri yönetimine sağlam bir uygulama sunulmuştur.

Tanım 4.1.1. M evrensel küme ve P parametreler kümesi ve $A \subseteq P$ olsun. O halde, M üzerinde Υ_A soft kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır [20]:

$$\Upsilon_A = \{(p, \Upsilon(p)) : p \in A, \Upsilon(p) \in \mathbb{P}(M)\} \tag{4.1}$$

$\mathbb{P}(M)$, M nin özalt kümesidir ve $\Upsilon, A\ yı\ \mathbb{P}(M)$ ye eşler.

Tanım 4.1.2. (Bipolar Fuzzy Küme)

M evrensel küme olsun. M üzerindeki bipolar fuzzy küme (BFS) şu şekilde tanımlanır [21]:
$B = \{(\ell, \mu_B^+(\ell), \mu_B^-(\ell)) : \ell \in M\}$ olsun. Burada $\mu_B^+(\ell) \in [0,1]$ ve $\mu_B^-(\ell) \in [-1,0]$ sırasıyla pozitif üyeliği ve negatif üyeliği temsil eder. M üzerindeki tüm BFS kümeler $BF(M)$ veya BF^M şeklinde gösterilmektedir.

Tanım 4.1.3. B, B_1 ve $B_2 \in BF(M)$ BFS ler olsun. O halde,

1. Boş BFS: Bir $BFS\ B \in BF(M)$, her $\ell_i \in$ M için $\mu_B^+(\ell_i)$=0 ve $\mu_B^-(\ell_i)$=0 ise boş BFS olarak adlandırılır ve φ_B veya $\tilde{\varphi}$ olarak gösterilir ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir [38]:

$$\varphi_B = \{(\ell, 0,0) : \ell \in M\} \tag{4.2}$$

2. Mutlak BFS: $BFS\ B \in BF(M)$, her $\ell_i \in E$ için $\mu_B^+(\ell_i) = 1$ ve $\mu_B^-(\ell_i) = -1$ ise mutlak BFS olarak adlandırılır ve M_B veya $\widetilde{M}$ olarak gösterilir ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$M_B = \{(\ell, 1, -1) : \ell \in M\} \tag{4.3}$$

3. Tümleyen: BFS nin tümleyeni, $B \in BF(M)$ ile tanımlanır.

$$\bar{B} = B^c = \{(\ell_i, 1 - \mu_B^+(\ell_i), -1 - \mu_B^-(\ell_i)) : \ell_i \in M\} \tag{4.4}$$

4. Kapsama: İki BFS B_1 ve $B_2 \in BF(M)$ olsun, o zaman $B_1 \subseteq B_2$, ancak ve ancak $\mu_{B_1}^+(\ell_i) \le \mu_{B_2}^+(\ell_i)$ ve $\mu_{B_1}^-(\ell_i) \ge \mu_{B_2}^-(\ell_i)$. (4.5)

5. Kesişim: B_1 ve $B_2 \in BF(M)$ olsun, o halde B_1ve B_2 nin kesişimi, aşağıdaki gibi verilen bir BFS dir.

$$B_1 \cap B_2 = \left\{\ell_i, min\left(\mu_{B_1}^+(\ell_i), \mu_{B_2}^+(\ell_i)\right), max\left(\mu_{B_1}^-(\ell_i), \mu_{B_2}^-(\ell_i)\right)\right\}. \tag{4.6}$$

6. Birleşim: B_1ve $B_2 \in BF(M)$ olsun, o halde B_1 ve B_2 nin birleşimi aşağıdaki şekilde verilen bir BFS dir:

$$B_1 \cup B_2 = \left\{\ell_i, max\left(\mu_{B_1}^+(\ell_i), \mu_{B_2}^+(\ell_i)\right), min\left(\mu_{B_1}^-(\ell_i), \mu_{B_2}^-(\ell_i)\right)\right\}. \tag{4.7}$$

Tablo 4.1 Bipolar fuzzy soft küme Ω_A

Ω_A	p_1	p_2	$\cdots$	p_n
ℓ_1	(μ_{11}^+, μ_{11}^-)	(μ_{12}^+, μ_{12}^-)	$\dots$	(μ_{1n}^+, μ_{1n}^-)
ℓ_2	(μ_{21}^+, μ_{21}^-)	(μ_{22}^+, μ_{22}^-)	$\dots$	(μ_{2n}^+, μ_{2n}^-)
	.	.		.
	.	.		.
	.	.		.
ℓ_m	(μ_{m1}^+, μ_{m1}^-)	(μ_{m2}^+, μ_{m2}^-)	$\dots$	(μ_{mn}^+, μ_{mn}^-)

Tanım 4.1.4. M evrensel küme, P parametreler kümesi, $A \subseteq P$ ve $\Omega: A \rightarrow BF^M$ bir fonksiyon olsun. O halde bipolar bir fuzzy soft küme ($BFSS$) (Ω, A) veya Ω_A ile tanımlanır [44]:

$$(\Omega, A) = \{(p, \Omega(p)) : p \in A, \Omega(p) \in BF^M\}$$

$$= \{(p, \{\ell, \mu_B^+(\ell), \mu_B^-(\ell)\}) : p \in A, \ell \in M\} \tag{4.8}$$

Eğer $M = \{\ell_1, \dots, \ell_m\}$, $A = \{p_1, \dots, p_n\}$ ise tablo formundaki $BFSS$ Ω_A, Tablo 4.1 de ifade edilmiştir ve buna karşılık gelen bipolar fuzzy soft matris (kısaca BFS matrisi) aşağıdaki şekilde verilir:

$$(\Omega, A) = \left[(\mu_{ij}^+, \mu_{ij}^-)\right]_{m\times n}$$

$$
= \begin{bmatrix} (\mu_{11}^{+}, \mu_{11}^{-}) & (\mu_{12}^{+}, \mu_{12}^{-}) & \dots & (\mu_{1n}^{+}, \mu_{1n}^{-}) \\ (\mu_{21}^{+}, \mu_{21}^{-}) & (\mu_{22}^{+}, \mu_{22}^{-}) & \dots & (\mu_{2n}^{+}, \mu_{2n}^{-}) \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ (\mu_{m1}^{+}, \mu_{m1}^{-}) & (\mu_{m2}^{+}, \mu_{m2}^{-}) & \dots & (\mu_{mn}^{+}, \mu_{mn}^{-}) \end{bmatrix}.
$$

Tanım 4.1.5. Her $\Omega_A \in BF^M$ için $\mu_{\Omega_A}^{+}(\ell) = 0$ ve $\mu_{\Omega_A}^{-}(\ell) = 0$ ise, BFSS $\Omega_A \in BF(M)$ boş BFSS olarak adlandırılır. Aşağıdaki gibi ifade edilebilir [44]:

$$
\widetilde{\varphi_A} = \{(p, \{\ell, 0, 0\}) : p \in P, \ell \in M\} \tag{4.9}
$$

Tanım 4.1.6. Her $\ell \in M$ için, $\mu_{\Omega C}^{+}(\ell) = 1$ ve $\mu_{\Omega C}^{-}(\ell) = -1$ ise, bir $BFSS\ \Omega_A \in BF^M$ mutlak BFSS olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir [44]:

$$
\widetilde{M_A} = \{(p, \{\ell, 1, -1\}) : p \in P, \ell \in M\} \tag{4.10}
$$

Tanım 4.1.7. BFSS' ler üzerinde M evrensel küme olarak alınsın,

$\Omega_{A_1}^{(1)} = (\Omega_1, A_1)$ ve $\Omega_{A_2}^{(2)} = (\Omega_2, A_2)$, burada $A_1, A_2 \subseteq P$.

O zaman, $\Omega_{A_1}^{(1)}$, $\Omega_{A_2}^{(2)}$ nin BFS altkümesidir yani $\Omega_{A_1}^{(1)} \,\tilde{\subseteq}\, \Omega_{A_2}^{(2)}$ ise aşağıdaki durumlar geçerlidir [44]:

(i) $A_1 \subseteq A_2$

(ii) $\Omega_1(p)$, tüm $p \in A_1$ için $\Omega_2(p)$ nin BF nin altkümesidir.

İki BFSS $\Omega_{A_1}^{(1)}$ ve $\Omega_{A_2}^{(2)}$ eşittir ancak ve ancak $\Omega_{A_1}^{(1)} \,\tilde{\subseteq}\, \Omega_{A_2}^{(2)} \,\tilde{\subseteq}\, \Omega_{A_1}^{(1)}$ dır ve $\Omega_{A_1}^{(1)} = \Omega_{A_2}^{(2)}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.1.8. (Ω_1, A_1) ve (Ω_2, A_2) M üzerinde iki BFSS olsun. O zaman $(\Omega, A) = (\Omega_1, A_1) \,\tilde{\cup}\, (\Omega_2, A_2)$, burada $A = A_1 \cup A_2$ ve tüm $p \in A$ için,

$$
\Omega_{(p)} = \begin{cases} \Omega_1(p), & \text{eğer } p \in A_1/A_2 \text{ ise} \\ \Omega_2(p), & \text{eğer } p \in A_2/A_1 \text{ ise} \\ \Omega_1(p) \cup \Omega_2(p), & \text{eğer } p \in A_1 \cap A_2 \text{ ise} \end{cases}
$$

burada $\Omega_1(p) \cup \Omega_2(p)$ iki BFS nin birleşimidir [44].

Tanım 4.1.9. (Ω_1, A_1) ve (Ω_2, A_2) iki BFSS nin kesişimi bir BFS kümesidir, eğer her $p \in A$ için $(\Omega, A) = (\Omega_1, A_1) \,\tilde{\cap}\, (\Omega_2, A_2)$ burada $A = A_1 \cap A_2 \neq \varphi$ ve $\Omega(p) = \Omega_1(p) \cap \Omega_2(p)$ [44].

Tanım 4.1.10. $\Omega_A = \{(p, \{\ell, \mu^+_{\Omega_A}(\ell), \mu^-_{\Omega_A}(\ell)\}) : p \in A, \ell \in M\}$ BFSS nin tümleyeni,

$$\overline{\Omega_A} = \Omega^c_A = \{(p, \{\ell, 1 - \mu^+_{\Omega_A}(\ell), -1 - \mu^-_{\Omega_A}(\ell)\}) : p \in A, \ell \in M\} \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlıdır [44]. .

Örnek 4.1.1. $M = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4\}$, dört meyve sıkacağı makinesini temsil eden küme olsun ve

$P = \{p_1 = \text{Yüksek Hız},\ p_2 = \text{Verimli},\ p_3 = \text{Modern Teknoloji},\ p_4 = \text{Garanti}\}$

Burada $A = \{p_2, p_3\} \subseteq P$ dır. Daha sonra, M evrensel kümesi üzerinden $BFSS$ aşağıdaki gibi yazılır:

$\Omega_A = (p_1, \{(\ell_1, 0{,}0), (\ell_2, 0{,}0), (\ell_3, 0{,}0), (\ell_4, 0{,}0)\}),$

$(p_2, \{(\ell_1, 0{,}0), (\ell_2, 0.42, -0.79), (\ell_3, 0.72, -0.21), (\ell_4, 0.21, -0.59)\}),$

$(p_3, \{(\ell_1, 0{,}0), (\ell_2, 0{,}0), (\ell_3, 0{,}0), (\ell_4, 0{,}0)\}),$

$(p_4, \{(\ell_1, 0.59, -0.41), (\ell_2, 0{,}0), (\ell_3, 0.92, -0.11), (\ell_4, 0.69, -0.23)\}).$

Kısaca şu şekilde yazılır:

$\Omega_A = (p_2, \{(\ell_2, 0.42, -0.79), (\ell_3, 0.72, -0.21), (\ell_4, 0.21, -0.59)\}),$

$(p_4, \{(\ell_1, 0.59, -0.41), (\ell_3, 0.92, -0.11), (\ell_4, 0.69, -0.23)\}).$

Daha sonra buna karşılık gelen BFS matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$(\Omega, A) = \begin{bmatrix} (0{,}0) & (0{,}0) & (0{,}0) & (0.59, -0.41) \\ (0{,}0) & (0.42, -0.79) & (0{,}0) & (0{,}0) \\ (0{,}0) & (0.72, -0.21) & (0{,}0) & (0.92, -0.11) \\ (0{,}0) & (0.21, -0.59) & (0{,}0) & (0.69, -0.23) \end{bmatrix}$$

Tanım 4.1.11. B_1, B_2 iki BFS olsun. $Sim(B_1, B_2)$ ölçüsü aşağıdaki gereklilikleri yerine getiriyorsa benzerlik ölçüsü (SM) olarak adlandırılır:

1. $0 \leq Sim(B_1, B_2) \leq 1$

2. $Sim(B_1, B_2) = 1 \Leftrightarrow B_1 = B_2$

3. $Sim(B_1, B_2) = Sim(B_2, B_1)$.

Tanım 4.1.12. $(\Upsilon_1,\ P_1)$ ve $(\Upsilon_2,\ P_2)$ iki soft küme olsun. Eğer P_1 ve P_2 çakışıyorsa (aynı parametre kümesi) o zaman $(\Upsilon_1,\ P_1)$ ve $(\Upsilon_2,\ P_2)$ arasındaki benzerlik şu şekilde ifade edilir [44]:

$$S(Y_1, Y_2) = \frac{\sum_i \vec{F}_1(p_i).\vec{F}_2(p_i)}{\sum_i \vec{F}_1(p_i)^2 \vee \vec{F}_2(p_i)^2}. \tag{4.12}$$

P_1 ve P_2 çakışıyorsa ve farklıysa yukarıdaki formülü kullanarak $S(Y_1, Y_2)$ hesaplanabilir. İlk tanım dikkate alınarak $p \in P_2 \setminus (P_1 \cap P_2)$ için $\vec{F}_1(p) = \emptyset$ ve $p \in P_1 \setminus (P_1 \cap P_2)$ için $\vec{F}_2(p) = \emptyset$ olur. Burada $\emptyset$ boş kümeyi ifade etmektedir.

Tanım 4.1.13. $M = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ evrensel küme ve $w_i \in [0, 1]$ (hepsi sıfır değil) ℓ_i nin ağırlığı olsun.

M üzerinde tanımlı iki soft kümenin (Y_1, P_1) ve (Y_2, P_2) ağırlıklı benzerliği şöyledir [50]:

$$W(Y_1, Y_2) = \frac{1}{\sum_i w_i} \times \frac{\sum_i w_i \left(\overrightarrow{Y_1}(p_i).\overrightarrow{Y_2}(p_i)\right)}{\sum_i \overrightarrow{Y_1}(p_i)^2 \vee \overrightarrow{Y_2}(p_i)^2}. \tag{4.13}$$

Tanım 4.1.14. $M = \{\ell_i : i = 1, \cdots, m\}$ evrensel, $P = \{p_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$ parametrelerinin toplandığı klasik bir küme olsun. $P_1, P_2 \subseteq P$ ise, sezgisel fuzzy soft kümeler (IFSS ler) (N, P_1) ve (K, P_2) arasındaki SM aşağıdaki şekilde verilir [51]:

$$S(N, K) = \frac{\sum_i [\vec{N}_\mu^+(p_i)\vec{K}_\mu^+(p_i) + \vec{N}_\mu^-(p_i)\vec{K}_\mu^-(p_i)]}{\sum_i [\{\vec{N}_\mu^+(p_i)^2 \vee \vec{K}_\mu^+(p_i)^2\} + \{\vec{N}_\mu^-(p_i)^2 \vee \vec{K}_\mu^-(p_i)^2\}]}. \tag{4.14}$$

4.2 BFSS'lerin Uzaklık ve Benzerlik Ölçüleri

Bu bölümde BFSS ler için uzaklık ve benzerlik ölçüleri sunulmaktadır. Bipolar fuzzy kümeler ile soft kümeler arasındaki uzaklık ölçümleri için [23-43-50] kaynaklarına bakılacaktır. Yine bu bölümde, M evrensel küme ve P parametreler kümesi olarak alınacaktır.

Tanım 4.2.1. $M = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$, B_1 ve B_2 sırasıyla pozitif üyelik fonksiyonu $\mu_{B_1}^+$ ve $\mu_{B_2}^+$ ve negatif üyelik fonksiyonu $\mu_{B_1}^-$ ve $\mu_{B_2}^-$ ile M üzerinde iki BFS olsun. Daha sonra Han ve diğerleri B_1 ve B_2 arasındaki uzaklığı aşağıdaki gibi tanımlamışlardır [23-43]:

1. Hamming Uzaklığı:
$$d_h(B_1, B_2) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left(\left|\mu_{B_1}^+(\ell_i) - \mu_{B_2}^+(\ell_i)\right| + \left|\mu_{B_1}^-(\ell_i) - \mu_{B_2}^-(\ell_i)\right| \right)$$

2. Kutup Ağırlıklı Hamming Uzaklığı:
$$d_{ph}(B_1, B_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(K^p \left|\mu_{B_1}^+(\ell_i) - \mu_{B_2}^+(\ell_i)\right| + K^N \left|\mu_{B_1}^-(\ell_i) - \mu_{B_2}^-(\ell_i)\right| \right)$$
$\kappa^p + \kappa^N = 1.$

3. Alghamdi ve ark. Öklid uzaklığı [43]:

$$d_p(B_1, B_2) = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\mu_{B_1}^{+}(\ell_i) - \mu_{B_2}^{+}(\ell_i)\right|^2 + \left|\mu_{B_1}^{-}(\ell_i) - \mu_{B_2}^{-}(\ell_i)\right|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Tanım 4.2.2. P_1 ve P_2, $P_1 \neq P_2$ olacak şekilde parametreler kümesi olsun ve (G_1, P_1) ve (G_2, P_2) iki fuzzy soft küme olsu. Bu kümeler arasındaki benzerlik ölçüsü aşağıdaki şekilde verilir [50]:

$$S(G_1, G_2) = \frac{\sum_i G_1(p_i).G_2(p_i)}{\sum_i max[G_1(p_i)^2, G_2(p_i)^2]} \tag{4.15}$$

Burada $p \in P_2 \setminus (P_1 \cap P_2)$ için $G_1(p) = \underline{0}$ ve $p' \in P_1 \setminus (P_1 \cap P_2)$ için $G_2(p') = \underline{0}$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Tanım 4.2.3 $M = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3 \ldots\}$, bir evrensel küme, $P = \{p_1, p_2, p_3, \cdots\}$ parametreler kümesi, $A_1, A_2 \subseteq P$ ve $\Upsilon_{A_1}, \Upsilon_{A_2}$ sırasıyla f_{A_1}ve k_{A_2} fonksiyonları ile M iki soft küme olsun. Daha sonra, Υ_{A_1}ve Υ_{A_2}nin uzaklığı şu şekilde tanımlanır [50]:

1. Hamming Uzaklığı:

$$d^1(\Upsilon_{A_1}, \Upsilon_{A_2}) = \frac{1}{m}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|f_{A_1}(p_i)(\ell_j) - k_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right|\right\}$$

2. Normaleştirilmiş Hamming Uzaklığı:

$$d^2(\Upsilon_{A_1}, \Upsilon_{A_2}) = \frac{1}{mn}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|f_{A_1}(p_i)(\ell_j) - k_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right|\right\}$$

3. Öklid Uzaklığı:

$$d^3(\Upsilon_{A_1}, \Upsilon_{A_2}) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(f_{A_1}(p_i)(\ell_j) - k_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right)^2}$$

4. Normalleştirilmiş Öklid Uzaklığı:

$$d^4(\Upsilon_{A_1}, \Upsilon_{A_2}) = \sqrt{\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(f_{A_1}(p_i)(\ell_j) - k_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right)^2}$$

Tanım 4.2.4. Υ_{A_1} ve Υ_{A_2}, M üzerinde iki soft küme olsun. O zaman Υ_{A_1} ve Υ_{A_2} nin benzerlik ölçüsü, Öklid uzaklığı kullanılarak tanımlanabilir [54]:

$$Sim^1\left(\Upsilon_{A_1}, \Upsilon_{A_2}\right) = \frac{1}{1+d^3\left(\Upsilon_{A_1}, \Upsilon_{A_2}\right)} \tag{4.16}$$

Başka bir benzerlik ölçüsü şu şekilde tanımlanabilir:

$$Sim^2\left(\Upsilon_{A_1}, \Upsilon_{A_2}\right) = e^{-\sigma d^3\left(\Upsilon_{A_1}, \Upsilon_{A_2}\right)}$$

burada σ, diklik ölçüsü olarak adlandırılan pozitif bir reel sayıdır.

Mevcut bazı uzaklık ölçüleri aşağıdaki tanımda BFSS lere genişletilmiştir.

Tanım 4.2.5. $M = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_n\}$ evrensel küme ve $P = \{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_m\}$ parametreler kümesi olsun. $A_1, A_2 \subseteq P$ ve $\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}$ M üzerinde BF fonksiyonu olan iki $BFSS$ olsun.

$$\delta_{A_1}(p_i) = \left\{\left(\ell, \mu^+_{A_1}(\ell), \mu^-_{A_1}(\ell)\right) : \ell \in M\right\}$$

ve

$$\delta_{A_2}(p_i) = \left\{\left(\ell, \mu^+_{A_2}(\ell), \mu^-_{A_2}(\ell)\right) : \ell \in M\right\}$$

sırasıyla, Ω_{A_1} ve Ω_{A_2} nin uzaklıkları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

1. Hamming Uzaklığı:

$$d^H_{BFS}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) =$$

$$\frac{1}{2mn}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\left|\mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j) - \mu^+_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right| + \left|\mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j) - \mu^-_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right|\right)\right\}$$

2. Kutup Ağırlıklı Hamming Uzaklığı:

$$d^{PH}_{BFS}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) =$$

$$\frac{1}{mn}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(K^p\left|\mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j) - \mu^+_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right| + K^N\left|\mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j) - \mu^-_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right|\right)\right\}$$

Burada $K^p + K^N = 1$.

3. Öklid Uzaklığı:

$d_{BFS}^{P}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) =$

$$= \left(\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\left| \mu_{A_1}^{+}(p_i)(\ell_j) - \mu_{A_2}^{+}(p_i)(\ell_j) \right|^2 + \left| \mu_{A_1}^{-}(p_i)(\ell_j) - \mu_{A_2}^{-}(p_i)(\ell_j) \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

4. Normalleştirilmiş Öklid Uzaklığı:

$d_{BFS}^{NE}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) =$

$$\left(\frac{1}{2mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[\left| \mu_{A_1}^{+}(p_i)(\ell_j) - \mu_{A_2}^{+}(p_i)(\ell_j) \right|^2 \right] + \left[\left| \left| \mu_{A_1}^{-}(p_i)(\ell_j) - \mu_{A_2}^{-}(p_i)(\ell_j) \right|^2 \right| \right] \right)^{\frac{1}{2}}$$

Teorem 4.2.1. $D\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right)$, iki BFSS $\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}$ arasındaki uzaklık ölçüsü olsun. d_{BFS}^{H}, d_{BFS}^{PH}, d_{BFS}^{P} ve d_{BFS}^{NE} özel uzaklık ölçüleri olmak üzere $D(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2})$ aşağıdaki koşulları sağlar:

(i) $D\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) \geq 0$ ve $D\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) = 0 \Leftrightarrow \Omega_{A_1} = \Omega_{A_2}$ (Negatif olmama),

(ii) $D\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) = D\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right)$ (Simetri)

(iii) $D(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}) \leq D(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_3}) + D(\Omega_{A_3}, \Omega_{A_2})$(Üçgen eşitsizliği)

İspat: Sadece d_{BFS}^{H} için ispat verilecektir. $\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}, \Omega_{A_3} \in BFS(M)$ ise, o halde

(i) $d_{BFS}^{H}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) \geq 0$ $\forall i = 1,2,3 \dots, m,$ $j = 1,2,3 \dots,$ n eğer $d_{BFS}^{H} = 0$ ise

$\Rightarrow \left| \mu_{A_1}^{+}(p_i)(\ell_j) - \mu_{A_2}^{+}(p_i)(\ell_j) \right| + \left| \mu_{A_1}^{-}(p_i)(\ell_j) - \mu_{A_2}^{-}(p_i)(\ell_j) \right|$

$\Rightarrow \mu_{A_1}^{+}(p_i)(\ell_j) = \mu_{A_2}^{+}(p_i)(\ell_j) \wedge \mu_{A_1}^{-}(p_i)(\ell_j) = \mu_{A_2}^{-}(p_i)(\ell_j)$

$\Rightarrow \Omega_{A_1} = \Omega_{A_2}$

Tersine izin verildiğinde,

$\Omega_{A_1} = \Omega_{A_2} \Rightarrow \mu_{A_1}^{+}(p_i)(\ell_j) = \mu_{A_2}^{+}(p_i)(\ell_j) \wedge \mu_{A_1}^{-}(p_i)(\ell_j) = \mu_{A_2}^{-}(p_i)(\ell_j)$

$\Rightarrow \left| \mu_{A_1}^{+}(p_i)(\ell_j) - \mu_{A_2}^{+}(p_i)(\ell_j) \right| + \left| \mu_{A_1}^{-}(p_i)(\ell_j) - \mu_{A_2}^{-}(p_i)(\ell_j) \right| = 0$

$\Rightarrow d_{BFS}^{H}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) = 0$

(ii) Açıkça $d_{BFS}^{H}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) = d_{BFS}^{H}\left(\Omega_{A_2}, \Omega_{A_1}\right)$

(iii) Üçgen eşitsizliği, herhangi üç BFS kümesi $\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}$ve Ω_{A_3} için kolayca gözlemlenebilir.

Her $i = 1,2,3 \dots, m,$ $j = 1,2,3 \dots, n$

$\left|\mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_j) - \mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right| + \left|\mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j) - \mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right| = \left|\mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_j) - \mu^{+}_{A_3}(p_i)(\ell_j) + \mu^{+}_{A_3}(p_i)(\ell_j) - \mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right| + \left|\mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j) - \mu^{-}_{A_3}(p_i)(\ell_j) + \mu^{-}_{A_3}(p_i)(\ell_j) - \mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right| \leq \left|\mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_j) - \mu^{+}_{A_3}(p_i)(\ell_j)\right| + \left|\mu^{+}_{A_3}(p_i)(\ell_j) - \mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right| + \left|\mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j) - \mu^{-}_{A_3}(p_i)(\ell_j)\right| + \left|\mu^{-}_{A_3}(p_i)(\ell_j) - \mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right|$

Bu nedenle,

$d^{H}_{BFS}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) \leq d^{H}_{BFS}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_3}\right) + d^{H}_{BFS}\left(\Omega_{A_3}, \Omega_{A_2}\right)\ olur.$

Diğer ispatlar da benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.2.2. BFS(M), M üzerindeki tüm BFSS'lerin bir kümesi olsun. Ohalde d^{H}_{BFS}, d^{PH}_{BFS}, $d^{P}_{BFS}\ ve\ d^{NE}_{BFS}$ uzaklık fonksiyonlarının her biri BFS(M) üzerinde bir metriktir.

Tanım 4.2.6. Ω_{A_1} ve Ω_{A_2}, M üzerinde iki BFSS olsun. Daha sonra Hamming uzaklığı kullanılarak Ω_{A_1}ve Ω_{A_2}nin benzerlik ölçüleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$Sim^{1}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) = \frac{1}{1+d^{H}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right)}.$

Başka bir benzerlik ölçüsü aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$Sim^{2}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) = e^{-\sigma d^{H}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right)} \qquad (4.17)$$

burada σ, diklik ölçüsü olarak adlandırılan pozitif bir reel sayıdır.

Tanım 4.2.7. $M = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \cdots, \ell_n\}$ evrensel kümesi, $P = \{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_m\}$ parametreler kümesi, $A_1, A_2 \subseteq P$ ve $\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}$ M üzerinde bipolar fuzzy yaklaşık fonksiyonu olan iki BFSS olsun.

$\delta_{A_1}(\mathrm{p_i}) = \left\{\left(\ell, \mu^{+}_{A_1}(\ell), \mu^{-}_{A_1}(\ell)\right) : \ell \in M\right\}$

ve

$\delta_{A_2}(\mathrm{p_i}) = \left\{\left(\ell, \mu^{+}_{A_2}(\ell), \mu^{-}_{A_2}(\ell)\right) : \ell \in M\right\}$

sırasıyla $A_1 = A_2\ ve\ \mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_j) - \mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j) \neq 0$ veya $\mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_j) - \mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_j) \neq 0$ en az biri için $i \in \{1,2, \dots, n\}$ ve $j \in \{1,2, \dots, m\}$,

daha sonra arasındaki benzerlik ölçüsü $\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}$tarafından tanımlanmıştır.

$$Sim_{BFS}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\left(\mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_j) + \mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j)\right).\left(\mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_j) + \mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right)\right|}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} max\left\{\left|\left|\mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_j) + \mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j)\right|\right|^{2}, \left|\left|\mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_j) + \mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right|\right|^{2}\right\}}$$

burada

$$\mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_j) = \left(\mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_1), \mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_2), \dots, \mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_n)\right)$$

$$= \mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j) = \left(\mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_1), \mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_2), \dots, \mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_n)\right)$$

$$= \mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_j) = \left(\mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_1), \mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_2), \dots, \mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_n)\right)$$

$$= \mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_j) = \left(\mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_1), \mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_2), \dots, \mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_n)\right)$$

Eğer $A_1 = A_2$ ve $\mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_j) + \mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j) = 0$ ve $\mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_j) + \mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_j) = 0$ ise $i \in \{1,2,\dots,n\}$ ve $j \in \{1,2,\dots,m\}$,

$Sim_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}) = 1.$

Örnek 4.2.1. $M = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ evrensel kümesi, $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ parametreler kümesi olduğu varsayılsın. $A_1 = \{p_1, p_2, p_3\}$ ve $A_2 = \{p_1, p_2, p_3\}$ P nin altkümeleri olsun. M üzerinde tanımlı BFSS'leri ele alalım.

$$\Omega_{A_1} = \begin{Bmatrix} (p_1, \{(\ell_1, 0.110, -0.871), (\ell_2, 0.76, -0.500), (\ell_3, 0.571, -0.211)\}), \\ (p_2, \{(\ell_1, 0.811, -0.211), (\ell_2, 0.790, -0.122), (\ell_3, 0.711, -0.002)\}), \\ (p_3, \{(\ell_1, 0.920, -0.321), (\ell_2, 0.530, -0.530), (\ell_3, 0.560, -0.231)\}) \end{Bmatrix}$$

ve

$$\Omega_{A_2} = \begin{Bmatrix} (p_1, \{(\ell_1, 0.240, -0.670), (\ell_2, 0.333, -0.551), (\ell_3, 0.521, -0.281)\}), \\ (p_2, \{(\ell_1, 0.870, -0.100), (\ell_2, 0.571, -0.570), (\ell_3, 0.290, -0.221)\}), \\ (p_3, \{(\ell_1, 0.821, -0.283), (\ell_2, 0.981, -0.022), (\ell_3, 0.511, -0.421)\}) \end{Bmatrix}.$$

Tanım 4.2.5 kullanılarak Ω_{A_1} ve Ω_{A_2} BFSS'lerinin uzaklıkları aşağıdaki gibi hesaplanır:

$d^{H}_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}) = 0.47$

$d^{PH}_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}) = 0.32$

$d^{E}_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}) = 0.381$

$d^{NE}_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}) = 0.213$

ve

$$Sim^1(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}) = \frac{1}{1 + d^H(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2})} = 0.670$$

ve

$$Sim^2(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}) = e^{-\sigma d^H(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2})} = 0.6866$$

Şeklinde benzerlik ölçümleri hesaplanabilir. Buna göre aşağıdaki hesaplamalar elde edilir:

$\mu^{+}_{A_1}(p_1)(\ell_j) = (0.110, 0.760, 0.571)$

$\mu^{-}_{A_1}(p_1)(\ell_j) = (-0.871, -0.500, -0.211\ )$

$\mu^{+}_{A_1}(p_2)(\ell_j) = (0.811, 0.790, 0.711)$

$\mu^{-}_{A_1}(p_2)(\ell_j) = (-0.211, -0.122, -0.002)$

$\mu^{+}_{A_1}(p_3)(\ell_j) = (0.920, 0.530, 0.560)$

$\mu^{-}_{A_1}(p_3)(\ell_j) = (-0.321, -0.530, -0.231)$

$\mu^{+}_{A_2}(p_1)(\ell_j) = (0.240, 0.333, 0.521)$

$\mu^{-}_{A_2}(p_1)(\ell_j) =(-0.670,\ -0.551,\ -0.281)$

$\mu^{+}_{A_2}(p_2)(\ell_j) = (0.870, 0.571, 0.290)$

$\mu^{-}_{A_2}(p_2)(\ell_j) = (-0.100, -0.570, -0.221)$

$\mu^{+}_{A_2}(p_3)(\ell_j) = (0.821, 0.981, 0.511)$

$\mu^{-}_{A_2}(p_3)(\ell_j) = (-0.283, -0.022, -0.421)$

ve

$\mu^{+}_{A_1}(p_1)(\ell_j) + \mu^{-}_{A_1}(p_1)(\ell_j) = (-0.761, 0.260, 0.360)$

$\mu^{+}_{A_1}(p_2)(\ell_j) + \mu^{-}_{A_1}(p_2)(\ell_j) = (0.600, 0.668, 0.709)$

$\mu^{+}_{A_1}(p_3)(\ell_j) + \mu^{-}_{A_1}(p_3)(\ell_j) = (-0.401, 0.000, -0.371)$

$\mu^{+}_{A_2}(p_1)(\ell_j) +\ \mu^{-}_{A_2}(p_1)(\ell_j) = (-0.430, -0.221, 0.240)$

$\mu^{+}_{A_2}(p_2)(\ell_j) + \mu^{-}_{A_2}(p_2)(\ell_j) = (0.770, 0.001, 0.069)$

$\mu^{+}_{A_2}(p_3)(\ell_j) + \mu^{-}_{A_2}(p_3)(\ell_j) = (0.538, 0.959, -0.110)$

$$Sim^{+}_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\{\mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_j).\,\mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_j)\} + \{\mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j).\,\mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_j)\}\right]}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\left\{\mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_j)^2\right\} + \left\{\mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_j)^2\right\}\right]}$$

Böylece Ω_{A_1} ve Ω_{A_2} arasındaki benzerlik ölçüsü $Sim_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}) = 0.630$ olarak hesaplanır.

Teorem 4.2.3. P parametreler kümesi, $A_1, A_2 \subseteq P$ ve Ω_{A_1}, Ω_{A_2}, M üzerinde iki BFSS olsun. Buna göre aşağıdaki durum geçerlidir:

$$Sim^{+}_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}) = \frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\left\{\mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right\} + \left\{\mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right\}\right]}{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\left\{\mu^{+}_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^{+}_{A_2}(p_i)(\ell_j)^2\right\} + \left\{\mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_j)^2\right\}\right]}$$

1. $Sim_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}) = Sim_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2})$

2. $0 \leq Sim_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}) \leq 1$

3. $Sim_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_1}) = 1.$

İspat: İspat, Tanım 4.2.7 kullanılarak açıkça görülebilir.

Teorem 4.2.4. P parametreler kümesi, $A_1, A_2, A_3 \subseteq P$ ve Ω_{A_1}, Ω_{A_2} ve Ω_3 M üzerinden üç BFSS olsun, öyle ki Ω_{A_1} Ω_{A_2}'nin BFS-alt kümesi ve Ω_{A_2} Ω_3'ün BFS-alt kümesi olsun. O zaman, $Sim_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_3}) \leq Sim_{BFS}(\Omega_{A_2}, \Omega_{A_3})$ bağıntısı mevcuttur.

Tanım 4.2.8 $M = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \cdots\}$ evrensel küme, $P = \{p_1, p_2, p_3, \cdots\}$ parametreler kümesi, $A_1, A_2 \subseteq P$ ve Ω_{A_1}, Ω_{A_2} BF fonksiyonu ile M üzerinde iki BFSS olsun.

$\delta_{A_1}(\mathrm{p_i}) = \left\{\left(\ell, \mu^{+}_{A_1}(\ell), \mu^{-}_{A_1}(\ell)\right) : \ell \in M\right\}$

ve

$\delta_{A_2}(\mathrm{p_i}) = \left\{\left(\ell, \mu^{+}_{A_2}(\ell), \mu^{-}_{A_2}(\ell)\right) : \ell \in M\right\}$

sırasıyla, A_1=A_2 ise, Ω_{A_1}ile Ω_{A_2}arasındaki SM şu şekilde tanımlanır:

$A_1 \neq A_2$ ve $P = A_1 \cap A_2 \neq \varphi$ ise $\delta_{A_1}(p) = \underline{0}$ için $p \in A_2 \setminus P$ ve $\delta_{A_2}(p) = \underline{0}$ için $p \in A_1 \setminus P$ tanımlanır sonra $Sim^{+}_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2})$ hesaplanır.

Not: Eğer $P = A_1 \cap A_2 \neq \varphi$ ise $Sim^{+}_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2})$ = 0' dır.

Örnek 4.2.2. Örnek 4.2.1'de verilen bilgiler dikkate alınır ve Ω_{A_1} ile Ω_{A_2} arasındaki $Sim^{+}_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2})$ hesaplanır.

Burada,

$\mu^{+}_{A_1}(p_1)(\ell_j).\mu^{+}_{A_2}(p_1)(\ell_j)$ =(0.110, 0.760, 0.571).(0.240, 0.330, 0.521) = 0.5747

$\mu^{+}_{A_1}(p_2)(\ell_j).\mu^{+}_{A_2}(p_2)(\ell_j)$ =(0.811, 0.790, 0.711).(0.870, 0.571, 0.290) = 1.362

$\mu^{+}_{A_1}(p_3)(\ell_j).\mu^{+}_{A_2}(p_3)(\ell_j)$ =(0.220, 0.530, 0.560).(0.821, 0.981, 0.511) = 1.771

$\mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^-_{A_2}(p_i)(\ell_j)$ =(−0.871,−0.500− 0.211).(−0.670,−0.551,−0.281) = 0.9081

$\mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^-_{A_2}(p_i)(\ell_j)$ =(−0.211,−0.122,− 0.002).(−0.100,−0.570,−0.281) = 0.0912

$\mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^-_{A_2}(p_i)(\ell_j)$ =(−0.621,−0.530,− 0.931).(−0.283,−0.022,−0.621) = 0.7655

Şimdi Ω_{A_1}ve Ω_{A_2}arasındaki benzerlik $Sim^+_{BFS}(\Omega_{A_1},\Omega_{A_2}) = 0.6774$ olarak hesaplanır:

Not: Teorem 4.2.5 ve 4.2.6, Tanım 4.2.8 de verilen benzerlik ölçüsü içinde geçerlidir.

Teorem 4.2.5. P parametreler kümesi, $A_1, A_2 \subseteq P$ ve Ω_{A_1} ve Ω_{A_2}, M üzerinde iki BFSS olsun. O halde aşağıdaki kurallar geçerlidir:

1. $Sim^+_{BFS}(\Omega_{A_1},\Omega_{A_2}) = Sim^+_{BFS}(\Omega_{A_1},\Omega_{A_2})$

2. $0 \leq Sim^+_{BFS}(\Omega_{A_1},\Omega_{A_2}) \leq 1$

3. $Sim^+_{BFS}(\Omega_{A_1},\Omega_{A_2}) = 1 \Leftrightarrow \Omega_{A_1} = \Omega_{A_2}$

İspat: Koşul (1) ve (2) , Tanım 4.2.7 den basit bir şekilde kanıtlanabilir. (3) ü kanıtlamak için $\Omega_{A_1} = \Omega_{A_2}$ olduğunda $Sim^+_{BFS}(\Omega_{A_1},\Omega_{A_2}) = 1$ olduğu varsayılırsa Sim_{BFS} nin tanımı dikkate alınarak aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{\left[\left\{\mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^+_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right\}+\left\{\mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^-_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right\}\right]}{\left[\left\{\mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2\right\}+\left\{\mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2\right\}\right]} = 1$$

$$\Rightarrow \left[\left\{\mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^+_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right\} + \left\{\mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^-_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right\}\right]$$

$$= \left[\left\{\mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^+_{A_1}(p_1)(\ell_j)^2\right\} + \left\{\mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2\right\}\right].$$

Buradan

$$\mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^+_{A_2}(p_i)(\ell_j) = \mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2$$

ve

$$\mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^-_{A_2}(p_i)(\ell_j) = \mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2$$

elde edilir. Ayrıca

$$\mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^+_{A_2}(p_i)(\ell_j) \neq \mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_i)^2 \vee \mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2$$

şeklinde olmasının nedeni,

$\mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^+_{A_2}(p_i)(\ell_j) \leq \mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2$ dir.

Buradan hareketle $\sigma \geq 0$ öyle bir değerdir ki

$$\left[\mu^{+}_{A_1}(p_1)(\ell_j).\mu^{+}_{A_2}(p_1)(\ell_j)\right] + \sigma = \left[\mu^{+}_{A_1}(p_1)(\ell_j)^2 \vee \mu^{+}_{A_1}(p_1)(\ell_j)^2\right].$$

Benzer şekilde $\varsigma \ \geq \ 0$ vardır, öyle ki

$$\left[\mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^{-}_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right] + \ \varsigma = \left[\mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^{-}_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2\right].$$

Böylece $\sigma + \varsigma = 0$ olur. Bu da $\sigma = -\varsigma$ anlamına gelir ki bu doğru değildir. $\Omega_{A_1} = \Omega_{A_2}$ ise, $Sim^{+}_{BFS} = 1$ olduğu kanıtlanmış olur.
Tersi, Tanım 4.12 den basit bir şekilde kanıtlanabilir.
Teorem 4.2.6. P parametreler kümesi, $A_1, A_2, A_3 \subseteq \ P$ ve Ω_{A_1} , Ω_{A_2}ve Ω_3 M üzerinde üç BFSS olsun, öyle ki Ω_{A_1} Ω_{A_2}nin BFS-alt kümesi ve Ω_{A_2} Ω_3'ün BFS-alt kümesi olsun. O zaman,

$$Sim^{+}_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_3}) \leq \ Sim^{+}_{BFS}(\Omega_{A_2}, \Omega_{A_3}) \tag{4.18}$$

Tanım 4.2.9. P parametre kümesi ve Ω_{A_1}ve Ω_{A_2}iki BFSS olsun. Eğer $Sim_{BFS}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2})$ $\geq \ \gamma$ ise $\Omega_{A_1} ve\ \Omega_{A_2}$ γ-benzer olarak adlandırılır ve $\Omega_{A_1} \ \approx^{\gamma} \Omega_{A_2}$olarak gösterilir.
Burada$0 < \gamma < \ 1$ dir.
Önerme 4.2.1. γ-benzer olan iki BFSS'nin arasındaki ilişki yansımalı ve simetriktir ancak geçişken değildir.
İspat: Yansımalı ve simetrik özellikler Tanım 4.2.1 den kaynaklanmaktadır ve verilen Örnek 4.2.1, $\approx^{\gamma}$'nın geçişken olmadığını göstermektedir.
Örnek 4.2.3 $M = \{\ell_1 , \ell_2, \ell_3\}$ ve $P = \{p_1, p_2,\ p_3\}$ olduğu varsayılsın. Aşağıda verilen BFS matrisleri şu şekildedir:

$$\Omega_{A_1} = \begin{bmatrix} (0.270, -0.391)(0.421, -0.512)(0.611, -0.431) \\ (0.251, -0.562)(0.580, -0.491)(0.920, -0.361) \\ (0.762, -0.233)(0.462, -0.480)(0.540, -0.212) \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{A_2} = \begin{bmatrix} (0.451, -0.212)\ (0.260, -0.891)\ (0.542, 0.390) \\ (0.290, -0.281)\ (0.460, -0.440)\ (0.641, -0.310) \\ (0.272, 0. -543)\ (0.280, -0.331)\ (0.890, -0.163) \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{A_3} = \begin{bmatrix} (0.931, -0.150)\ (0.451, -0.590)\ (0.332, -0.144) \\ (0.390, -0.282)\ (0.512, -0.551)\ (0.642, -0.272) \\ (0.714, -0.323)\ (0.332, -0.184)\ (0.091, -0.560) \end{bmatrix}.$$

$\gamma = 0.8415$ olsun. O zaman, $Sim_{\text{BFS}}(\Omega_{A_2}, \Omega_{A_1}) = 0{,}9123 > 0{,}8415$ ve $Sim_{\text{BFS}}(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_3})$= 0,8492 $> 0{,}8415$. Ancak $Sim_{BFS}(\Omega_{A_2}, \Omega_{A_3}) = 0{,}8390$ >0,8415. Bu durum, Tanım 4.2.7'de verilen benzerlik ölçüsü kullanılarak γ −benzer ilişkinin geçişken olmadığını göstermektedir.

Tanım 4.2.10. $M = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots\}$ bir evrensel kümesi, $P = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ parametre kümesi ve $\overline{w}i$, p_i nin ağırlıkları olsun. A_1, $A_2 \subseteq$ P ve $\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}$ sırasıyla aşağıda tanımlanan BFS fonksiyonları ile M üzerindeki iki BFS küme olsun.

$$\delta_{A_1}(\mathrm{p_i}) = \left\{\left(\ell, \mu^+_{A_1}(\ell), \mu^-_{A_1}(\ell)\right) : \ell \in M\right\}$$

ve

$$\delta_{A_2}(\mathrm{p_i}) = \left\{\left(\ell, \mu^+_{A_2}(\ell), \mu^-_{A_2}(\ell)\right) : \ell \in M\right\}$$

$A_1 = A_2$ ise Ω_{A_1}ile Ω_{A_2}arasındaki ağırlıklı benzerlik ölçüsü (WSM) şu şekilde tanımlanır:

$$WSM_{BFS}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) =$$

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \overline{w}i} \times \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_i \left[\left\{\mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^+_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right\} + \left\{\mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j).\mu^-_{A_2}(p_i)(\ell_j)\right\}\right]}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[\left\{\mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^+_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2\right\} + \left\{\mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2 \vee \mu^-_{A_1}(p_i)(\ell_j)^2\right\}\right]} \tag{4.19}$$

Örnek 4.2.4. Örnek 4.2.1'de p_1, p_2 ve p_3 için sırasıyla $\overline{w}_1$= 0,5, $\overline{w}_2$= 0,1 ve $\overline{w}_3$= 0,4 ağırlıklarını göz önünde bulundurulsun. Ardından, Ω_{A_1}ve Ω_{A_2}arasındaki WSM değeri $WSM_{BFS}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) = 0.6785$ olarak hesaplanır.

Teorem 4.2.7. P parametre kümesi, A_1, $A_2 \subseteq$ P ve Ω_{A_1}, Ω_{A_2} M üzerinde iki $BFSS$ olsun. O halde aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

1. $WSM_{BFS}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) = WSM_{BFS}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right)$
2. $0 \leq WSM_{BFS}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) \leq 1$
3. $WSM_{BFS}\left(\Omega_{A_1}, \Omega_{A_2}\right) = 1 \Leftrightarrow \Omega_{A_1} = \Omega_{A_2}$.

İspat: İspat, Tanım 4.2.1 kullanılarak kolayca yapılabilir

Tanım 4.2.11. $M = \{\ \ell_i : i = 1, \cdot\cdot\cdot, m\}$ ve $P = \{p_j : j = 1, \cdot\cdot\cdot, n\}$ olsun.

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} (\mu^+_{11}, \mu^-_{11})_{\Omega_1} & (\mu^+_{12}, \mu^-_{12})_{\Omega_1} & \cdots & (\mu^+_{1n}, \mu^-_{1n})_{\Omega_1} \\ (\mu^+_{21}, \mu^-_{21})_{\Omega_1} & (\mu^+_{12}, \mu^-_{12})_{\Omega_1} & \cdots & (\mu^+_{2n}, \mu^-_{2n})_{\Omega_1} \\ & \vdots & & \\ (\mu^+_{m1}, \mu^-_{m1})_{\Omega_1} & (\mu^+_{m2}, \mu^-_{m2})_{\Omega_1} & \cdots & (\mu^+_{mn}, \mu^-_{mn})_{\Omega_1} \end{bmatrix}$$

ve

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} (\mu_{11}^{+},\mu_{11}^{-})_{\Omega_2} & (\mu_{12}^{+},\mu_{12}^{-})_{\Omega_2} & \cdots & (\mu_{1n}^{+},\mu_{1n}^{-})_{\Omega_2} \\ (\mu_{21}^{+},\mu_{21}^{-})_{\Omega_2} & (\mu_{22}^{+},\mu_{22}^{-})_{\Omega_2} & \cdots & (\mu_{2n}^{+},\mu_{2n}^{-})_{\Omega_2} \\ & \vdots & & \\ (\mu_{m1}^{+},\mu_{m1}^{-})_{\Omega_2} & (\mu_{m2}^{+},\mu_{m2}^{-})_{\Omega_2} & \cdots & (\mu_{mn}^{+},\mu_{mn}^{-})_{\Omega_2} \end{bmatrix}$$

BFSS'lerin BFS matrisleri Ω_1= (Ω_1, P) ve Ω_2= (Ω_2, P) olarak verilsin. O zaman $\Omega_1$ve Ω_2 arasında önerilen benzerlik ölçüsü Sim^R aşağıdaki şekilde verilir:

$Sim^R(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{<\Omega_1,\Omega_2>}{\|\Omega_1\|\|\Omega_2\|}$. Burada

$$< \Omega_{A_1}, \Omega_{A_2} >= \sum_{i,j}\left(\mu_{ij}^{+}, \mu_{ij}^{-}\right)_{\Omega_1}.\left(\mu_{ij}^{+}, \mu_{ij}^{-}\right)_{\Omega_2}$$

$$= tr(\Omega_1^T, \Omega_2), \qquad (4.20)$$

$\|\Omega_1\| = \sqrt{< \Omega_1, \Omega_2 >}$ eşitlikleri mevcuttur.

Burada $tr(\Omega_1^T, \Omega_2), \Omega_1^T.\Omega_2$ matrisinin ana köşegenindeki elemanların toplamıdır ve Ω_1^T, Ω_2 matrisinin izi olarak bilinmektedir.

Örnek 4.2.5. Örnek 4.2.1 dikkate alındığında ilgili BFS matrisleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} (0.110, -0.871) \ (0.811, -0.211) \ (0.920, -0.321 \\ (0.760, -0.500)(0.790, -0.122)(0.530, -0.530) \\ (0.571, -0.211)(0.711, -0.002)(0.560, -0.231) \end{bmatrix},$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} (0.240, -0.670) \ (0.870, -0.100) \ (0.821, -0.283) \\ (0.330, -0.551) \ (0.571, -0.570) \ (0.981, -0.022) \\ (0.521, -0.281) \ (0.290, -0.221) \ (0.511, -0.421) \end{bmatrix}$$

Buna göre aşağıdaki hesaplama elde edilir:

$< \Omega_{A_1}, \Omega_{A_2} >$ = (0.110,–0,871).(0.240,–0.670) + (0.811,–0,211).(0.870,–0.100)+ · · ·

+(0.560,–0,231).(0.511,–0.421)= 3.3853,

$\|\Omega_1\| = \sqrt{(0.110)^2 + (-0.871)^2 + (0.811)^2 + \cdots + (-0.231)^2}$= 2.1943,

$\|\Omega_2\| = \sqrt{(0.240)^2 + (-0.670)^2 + (0.870)^2 + \cdots + (-0.421)^2}$= 2.2093.

$\therefore Sim^R(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{<\Omega_1,\Omega_2>}{\|\Omega_1\|\|\Omega_2\|}$= 0.6983.

Önerme 4.2.2. Tanım 4.2.1'de tanımlanan benzerlik ölçüsü aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

1. $0 \leq Sim^R(\Omega_1, \Omega_2) \leq 1$

2. $Sim^R(\Omega_1, \Omega_2) = 1 \Leftrightarrow \Omega_1 = \Omega_2$

3. $Sim^R(\Omega_1, \Omega_2) = Sim(\Omega_2, \Omega_1)$

İspat: M üzerinde tanımlanan BFSS'ler (Ω_1, P) ve (Ω_2, P) sadece pozitif üyelik ve negatif üyelik fonksiyonlarına sahip P parametre kümesi için ispatlanır. Koşul 1 ve 3, verilen Tanım 4.2.1 den doğrudan kanıtlanabilir. Varsayalım ki

$Sim^R(\Omega_1, \Omega_2) = 1.$

$\frac{<\Omega_1, \Omega_2>}{\|\Omega_1\| \|\Omega_2\|} = 1$

ℓ ve m'nin tüm değerleri için $\left(\mu_{ij}^+, \mu_{\ell m}^-\right)_{\Omega_1} = \left(\mu_{\ell m}^+, \mu_{ij}^-\right)_{\Omega_2}$ sağlar. Dolayısıyla $\Omega_1 = \Omega_2$ olduğu açıktır. Tersine, $\Omega_1 = \Omega_2$ olduğu varsayılsın. Daha sonra,

$< \Omega_1, \Omega_2 > = < \Omega_1, \Omega_1 > = \|\Omega_1\|^2 = \|\Omega_1\| \|\Omega_2\|.$

$\therefore Sim^R(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{<\Omega_1, \Omega_2>}{\|\Omega_1\| \|\Omega_2\|} = 1.$

Teorem 4.2.8. (Ω_1, P), (Ω_2, P) ve (Ω_3 , P) nin M üzerinde tanımlanan üç BFSS olduğu varsayılsın. O halde $(\Omega_1, P) \widetilde{\subseteq} (\Omega_2, P)$ ve $(\Omega_2, P) \widetilde{\subseteq} (\Omega_3, P)$ ise $Sim^R(\Omega_1, \Omega_3) \leq Sim^R(\Omega_2, \Omega_3)$ bağıntısı mevcuttur.

Tanım 4.2.12. (M, P) üzerinde tanımlanan iki BFSS (Ω_1, P) ve (Ω_2, P) olsun.Eğer $(\Omega_1, P_1) \approx^{\gamma} (\Omega_2, P_2)$ ise $Sim^R(\Omega_1, \Omega_2) \geq \gamma$ dir. Burada $0 < \gamma < 1$ olarak alınır.

Teorem 4.2.9. γ benzer olan iki BFSS nin yapısı yansımalı ve simetriktir ancak geçişken değildir.

İspat: Önerme 4.2.1 ve Teorem 4.2.1, BPSS lerin simetrik ve yansıma özelliklerini kanıtıdır ve Örnek 4.2.1, BPFSS lerin geçişsizliğini doğrulamaktadır.

Sonuç: İki BFSS'nin γ- benzer olma bağınıtısı bir denklik bağıntısı değildir.

Örnek 4.2.6. $M = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$'ün klasik bir küme ve $P = \{p_1, p_2, p_3\}$'ün parametre kümesi olduğu varsayılsın. BFS matrisleri aşağıdaki şekilde göz önünde bulundurulsun ve $\gamma = 0.8515$ olsun.

$$(\Omega_1, P) = \begin{bmatrix} (0.270, -0.391) & (0.421, -0.512) & (0.611, -0.431) \\ (0.251, -0.562) & (0.580, -0.491) & (0.920, -0.361) \\ (0.762, -0.233) & (0.462, -0.480) & (0.540, -0.212) \end{bmatrix},$$

$$(\Omega_2, P) = \begin{bmatrix} (0.451, -0.212) & (0.260, -0.891) & (0.542, -0.390) \\ (0.290, -0.281) & (0.460, -0.440) & (0.641, -0.310) \\ (0.272, -0.543) & (0.280, -0.331) & (0.890, -0.163) \end{bmatrix},$$

$$(\Omega_3, P) = \begin{bmatrix} (0.931, -0.150) & (0.451, -0.590) & (0.332, -0.144) \\ (0.390, -0.282) & (0.512, -0.551) & (0.642, -0.272) \\ (0.714, -0.323) & (0.332, -0.184) & (0.091, -0.560) \end{bmatrix}$$

O halde $Sim^R(\Omega_2, \Omega_1) = 0{,}9012 > 0{,}8515$ ve $Sim^R(\Omega_1, \Omega_3) = 0{,}8571 > 0{,}8515.$ Ancak $Sim^R(\Omega_2, \Omega_3)$= 0,8417 > 0,8515 eşitsizliği mevcuttur. Bu durum Tanım 4.2.1 de verilen benzerlik ölçüsü kullanılarak γ −benzer bağıntısının geçişken olmadığını gösterir.

4.3. BFSS'ler için Ağırlıklı Benzerlik Ölçüsü

Burada, iki BFSS için ağırlıklı olarak SM den ve SM nin bazı ayırt edici özelliklerinden söz edilecektir.

Tanım 4.3.1. $\Omega_1$ve Ω_2 iki BFSS olsun. p_j parametrelerinin ağırlıklarının $\overline{w}_i \in [0, 1]$ olduğu varsayılır. Ω_1 ve Ω_2 arasındaki ağırlıklı benzerlik ölçüsü Sim_W^R aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$Sim_W^R(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{<\Omega_1, \Omega_2>}{\|\Omega_1\|\|\Omega_2\|}.$$

Burada

$$< \Omega_1, \Omega_2 >= \frac{\sum_{i,j} \overline{w}_i \left(\mu_{ij}^+, \mu_{ij}^-\right)_{\Omega_1} \cdot \left(\mu_{ij}^+, \mu_{ij}^-\right)_{\Omega_2}}{\sum_j \overline{w}_i},$$

$$\|\Omega_1\| = \sqrt{< \Omega_1, \Omega_1 >}. \tag{4.21}$$

Örnek 4.3.1. Örnek 4.2.1'de açıklanan BFSS ler kullanılır ve p_1 , p_2 ve p_3 öz niteliklerinin ağırlıkları olarak $\overline{w}_1$ = 0.22, $\overline{w}_2$= 0.51 ve $\overline{w}_3$= 0.42 olsun.

$< \Omega_1, \Omega_2 >$=2.0672,

$\|\Omega_1\|$= 1.9020,

$\|\Omega_2\|$= 1.5479,

$\therefore Sim_W^R(\Omega_1, \Omega_2)$= 0.6962.

Önerme 4.3.1. Tanım 4.3.1 de önerilen ağırlıklı benzerlik ölçüsü aşağıdaki koşulları sağlar:

1. $0 \leq Sim_W^R(\Omega_1, \Omega_2) \leq 1$

2. $Sim_W^R(\Omega_1, \Omega_2) = 1 \Leftrightarrow \Omega_1 = \Omega_2$

3. $Sim_W^R(\Omega_1, \Omega_2) = Sim_W(\Omega_2, \Omega_1)$.

İspat: İspat, Tanım 4.3.1 ile açıktır.

4.4. Karşılaştırma Analizi

Muthukumar ve Krishnan [55] sezgisel fuzzy soft kümeler için bazı benzerlik ölçütleri geliştirmiştir. Burada, bu benzerlik ölçülerini, mevcut benzerlik ölçülerindeki bazı iyileştirmelerle bipolar fuzzy soft kümelere genişletmiştir. Bipolar fuzzy soft kümeler için genişletilmiş benzerlik ölçüleri aşağıdaki şekilde verilmiştir:

1. $A_C(\Omega_1, \Omega_2) = 1 - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} \left|\left(\mu_{\Omega_1}^{+}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{+}(\ell_i)\right) - \left(\mu_{\Omega_1}^{-}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{-}(\ell_i)\right)\right|$
2. $A_H(\Omega_1, \Omega_2) = 1 - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} \left|\left(\mu_{\Omega_1}^{+}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{+}(\ell_i)\right) + \left(\mu_{\Omega_1}^{-}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{-}(\ell_i)\right)\right|$
3. $A_L(\Omega_1, \Omega_2) = 1 - \frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n} \left|\left(\mu_{\Omega_1}^{+}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{+}(\ell_i)\right) + \left(\mu_{\Omega_1}^{-}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{-}(\ell_i)\right)\right| - \frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n} \left|\left(\mu_{\Omega_1}^{+}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{+}(\ell_i)\right) + \left(\mu_{\Omega_1}^{-}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{-}(\ell_i)\right)\right|$
4. $A_O(\Omega_1, \Omega_2) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} \left\{\left(\mu_{\Omega_1}^{+}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{+}(\ell_i)\right)^2 - \left(\mu_{\Omega_1}^{-}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{-}(\ell_i)\right)^2\right\}}$
5. $A_{DC}(\Omega_1, \Omega_2) = 1 - \sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\mu_{\Omega_1}^{+}(\ell_i)+1-\mu_{\Omega_2}^{+}(\ell_i)}{2} - \frac{\mu_{\Omega_1}^{-}(\ell_i)+1-\mu_{\Omega_2}^{-}(\ell_i)}{2}\right|^p}$
6. $A_{HB}(\Omega_1, \Omega_2) = \begin{cases} \dfrac{\left(1-\sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_{\Omega_1}^{+}(\ell_i)+1-\mu_{\Omega_2}^{+}(\ell_i)\right|^p}\right)+\left(1-\sqrt[p]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_{\Omega_1}^{-}(\ell_i)+1-\mu_{\Omega_2}^{-}(\ell_i)\right|^p}\right)}{2}, \\ A_H(\Omega_1, \Omega_2) \end{cases}$

   $p \neq 1, p = 1$

7. $A_{HY}^{1}(\Omega_1, \Omega_2) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} max\left(\left|\mu_{\Omega_1}^{+}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{+}(\ell_i)\right|, \left|\mu_{\Omega_1}^{-}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{-}(\ell_i)\right|\right)$
8. $A_{HY}^{2}(\Omega_1, \Omega_2) =$

$$\frac{exp\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} max\left(\left|\mu_{\Omega_1}^{+}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{+}(\ell_i)\right|, \left|\mu_{\Omega_1}^{-}(\ell_i) - \mu_{\Omega_2}^{-}(\ell_i)\right|\right)\right) - exp(-1)}{1 - exp(-1)}$$

9. $A_{HY}^{3}(\Omega_1,\Omega_2)=\frac{1-max\left(\left|\mu_{\Omega_1}^{+}(\ell_i)-\mu_{\Omega_2}^{+}(\ell_i)\right|,\left|\mu_{\Omega_1}^{-}(\ell_i)-\mu_{\Omega_2}^{-}(\ell_i)\right|\right)}{1+max\left(\left|\mu_{\Omega_1}^{+}(\ell_i)-\mu_{\Omega_2}^{+}(\ell_i)\right|,\left|\mu_{\Omega_1}^{-}(\ell_i)-\mu_{\Omega_2}^{-}(\ell_i)\right|\right)}$

10. $S(\Omega_1,\Omega_2)=\frac{\sum_i\left[\mu_{\Omega_1}^{+}(\ell_i)\mu_{\Omega_2}^{+}(\ell_i)+\mu_{\Omega_1}^{-}(\ell_i)\mu_{\Omega_2}^{-}(\ell_i)\right]}{\sum_i\left[\left\{\mu_{\Omega_1}^{+}(\ell_i)^2\vee\mu_{\Omega_2}^{+}(\ell_i)^2\right\}+\left\{\mu_{\Omega_1}^{-}(\ell_i)^2\vee\mu_{\Omega_2}^{-}(\ell_i)^2\right\}\right]}$

Örnek 4.4.1. $M=\{\ell_1,\ell_2,\ell_3\}$ evrensel küme ve $P=\{p_1,p_2,\ p_3\}$ parametrelerin kümesi olsun. BFSS' lerin matris gösterimi aşağıdaki gibi verilecektir:

$$(\Omega_1,P)=\begin{bmatrix}(0.62,-0.21) & (0.42,-0.52) & (0.81,-0.12)\\ (0.51,-0.32) & (0.71,-0.11) & (0.64,0.34)\\ (0.83,-0.42) & (0.63,0.0) & (0.92,0.0)\end{bmatrix}$$

$$(\Omega_2,P)=\begin{bmatrix}(0.54,-0.32) & (0.71,0.0) & (0.62,0.31)\\ (0.62,-0.22) & (0.42,0.0) & (0.56,-0.11)\\ (0.92,0.0) & (0.54,-0.11) & (0.81,0.0)\end{bmatrix}$$

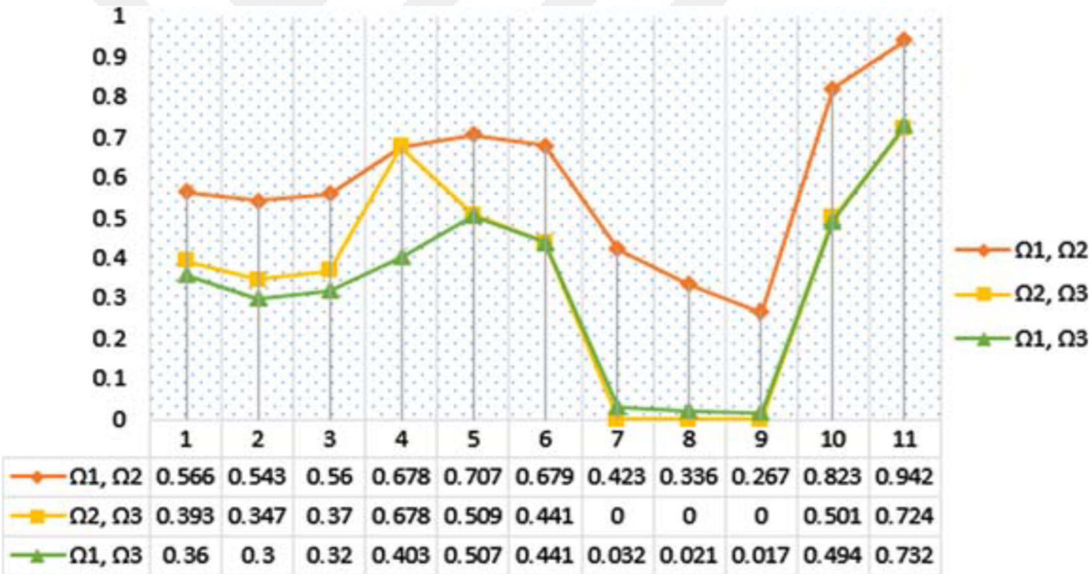
$$(\Omega_3,P)=\begin{bmatrix}(0.44,-0.42) & (0.61,-0.22) & (0.54,-0.11)\\ (0.32,-0.32) & (0.74,0.11) & (0.54,0.41)\\ (0.21,0.0) & (0.52,0.0) & (0.11,-0.82)\end{bmatrix}$$

Şekil 4.1 ve Tablo 4.2 şunu göstermektedir:

Önerilen Sim^R, mevcut SM lere kıyasla önemli bir derecelendirme sağlamaktadır.

Tablo 4.2 Önerilen SM nin mevcut SM lerle karşılaştırmalı analizi

	(Ω_1, Ω_2)	(Ω_2, Ω_3)	(Ω_1, Ω_3)
A_C	0.5657	0.3933	0.3600
A_H	0.5433	0.3467	0.300
A_L	0.5600	0.3700	0.3200
A_O	0.6783	0.4383	0.4031
A_{DC}	0.7072	0.509	0.507
A_{HB}	0.6793	0.4406	0.441
S_{HY}^1	0.4233	0.0000	0.03233
S_{HY}^2	0.3356	0.0000	0.0208
S_{HY}^3	0.2666	0.0000	0.0170
S	0.8229	0.5007	0.4943
Sim^R	**0.9420**	**0.7237**	**0.73172**



Şekil 4.1 Karşılaştırma Grafiği

Önerilen SM nin mevcut SM lerle karşılaştırmalı analizinde elde edilen benzerlik ölçüsü bulunan sonuçlarla uyumlu olduğu gözlemlenmiştir. Çizgi grafiğinde ise sonuçların uyumu verilmiştir.

4.5. İlaç Lojistiği ve Tedarik Zinciri Yönetimine Bir Uygulama

COVID-19 salgını sağlık alanında hem de ekonomik alanda krizler yarattı. COVID-19 salgının lojistik firmaları üzerindeki etkisi çok büyüktür. Bu önemli zamanlarda, ilaç lojistiği zorlu koşullarla karşı karşıya kaldı çünkü endüstrinin doğası, etkilenen bölgelerdeki ulusal kapanmalar nedeniyle satışları yavaşlattı. İlaç ithalatı ve ihracatının yanı sıra malzeme ve stok tedariği ciddi şekilde etkilenmiştir. Aktif olmayan üretim faaliyetleri nedeniyle, malların teslimindeki gecikmeler, ana yönetim pozisyonlarını olumsuz etkilemiştir. Lojistik boyutundaki tüm bu belirsizlikleri gidermek için, şirket stratejisi müşterilerin talebi ile güncellenmeli ve karakteristik özelliklerini özenle belirleyerek her zaman gelişmek için çalışmalıdır.

Her lojistik firmasının temel amacı, iş ortakları ve müşteriler arasında güçlü bir ortaklık elde etmek, onların beklentilerini ve hatta artan rekabet sonucunda müşterilerinin yardım sürecinde standart gereksinimlerini aşmaktır. İlaç endüstrisinin özgüllüğü, özellikle COVID 19 salgını sırasında sağlık ve yaşamla olan önemli ilişkisi nedeniyle farmasötik ürünlerin korunması ve sürekli gözetimi gibi üst düzey nakliye ve lojistik tesisler gerektiren bir sektördür, bu da son derece önemlidir. Sağlık hizmet kalitesi ve ilaç kullanımı hayati önem taşıdığından üretimden hastalara kadar tüm etkenleri son derece dikkatli bir şekilde takip etmek kritik öneme sahiptir.

Üretim faaliyetleri üründen hastaya doğru gerçekleşmektedir. İlaç tedarik zincirinde birçok aşama vardır. Hammaddeler, ilaçların satılmadan önce üretildiği ve paketlendiği ilaç fabrikasına gönderilir. Bunu takiben, hasta ilaçlarının yerel depolara tedarik edilmesi için geniş bir sevkiyat gerçekleştirilir. Yani, farmasötik bakımın lojistiği söz konusu olduğunda, insan hayatında büyük bir anlam taşır. Tedarik zinciri görünürlüğü gibi ilaç lojistiğinin karşılaşması gereken birçok sorun vardır. En büyük güvenlik sorunu, ilaçların çalınması ve yanlış yerleştirilmesidir. Şirket bu tür tedarik zinciri sızıntılarını ortadan kaldıramazsa, ilaç endüstrisi bütünlüğünü korumakta zorluklarla karşılaşacaktır. Yüksek Kalite Standardı (HQS) kriterlerine uymak için lojistik hizmet sağlayıcısı tutarlı ve güvenilir olmalıdır. Bu nitelik, lojistik hizmet sağlayıcı seçim sürecinde (LSP) güvenilirlikten daha kritik bir öneme sahiptir.

Kuruluşun genel pazar planının büyük bir kısmı ilaç dağıtımıdır. Ürün ve hizmetlerin kalitesini ve güvenilirliğini göstermek için LSP güvenilir olmalıdır. Ayrıca ilaç tedarik zincirinde düzenliliğin sağlanması ilaç sektörünün verimliliğine de yardımcı olmaktadır. Bölgeye ilaç dağıtımındaki aşama kritiktir. Farmasötik ürünlerin zamanında tedarik edilmesi, artan talebi karşılamaya ve temel ilaç gereksinimlerinin eksikliğini gidermeye yardımcı olur.

İnovasyon, performansı artıran, maliyetleri düşüren ve rekabet avantajı yaratan bir araçtır. Sonuç olarak ilaç endüstrisi, değişikliklere daha fazla dikkat etmek için en iyi LSP' yi aramaktadır. Sıcaklığın düzenlenmesi, farmasötik ürünler için tedarik zincirlerini diğer tedarik zinciri ağlarından ayıran önemli bir faktördür. Farmasötik ürünlerin nakliye ve depolama sürecinde kalite standardını sağlamak için sıcaklığı optimize etmek zorunludur. Farmasötik ürünlerin satış hacimlerindeki hızlı artış nedeniyle, depolama için yer genişletmeye gerek yoktur. Lojistik firmaları mevcut durumda olmasa da ilaç sektörünün artan taleplerini karşılamak için önemlidir. Artan talep ve genel maliyet tasarrufu gereksinimlerini karşılamak için lojistik firmaları uygun altyapıya sahip değillerdir. Sıcaklık kontrolü gerektiren bölgelere sahip yerlerde bu tür özel depolar için çok büyük yatırımlar gerekmektedir. Daha gelişmiş bir yapıyla, bu pazarda zaten büyük şirketler bulunmakta ve bu da yeni işletmelerin girmesini son derece zorlaştırmaktadır. Ayrıca, lojistikte üreticiler ve firmalar arasında paylaşılan veri, bilgi ve uzmanlığın güvenilirliği ve gizliliği esastır.

Algoritma

1.Adım: Lojistik şirketleri kümesi $L = \{L_1, L_2 ,\cdot\cdot\cdot, L_n\}$, parametre kümesi $P = \{p_1 , p_2 \ldots, p_m\}$, ölçüt kümesi $C = \{C_1, C_2,\cdot\cdot\cdot, C_t\}$ ve karar verici $D = \{D_1, D_2,\cdot\cdot\cdot, D_k\}$ kümesi olsun. Burada t, m, k pozitif tamsayılardır.

2.Adım: BFSS modeli olarak ilaç firmasının gereksinimlerine uygun standart bir BFSS (Ω , P) yazılır.

3.Adım: Her lojistik şirketinin profiline karşılık gelen BFSS ler (Ω_i, P) cinsinden DM lerin değerlendirilmesine karşılık gelen BFS karar matrislerini yazılır.

4.Adım: Oybirliğiyle alınan karar matrisini (Ω_i, P) ve standart BFSS (Ω, P) cinsinden yazılır.

5.Adım: Tanım 4.2.1 'i kullanarak BFSS (Ω, P) modeliyle her bir BFSS (Ω_i, P) için SM bulunur.

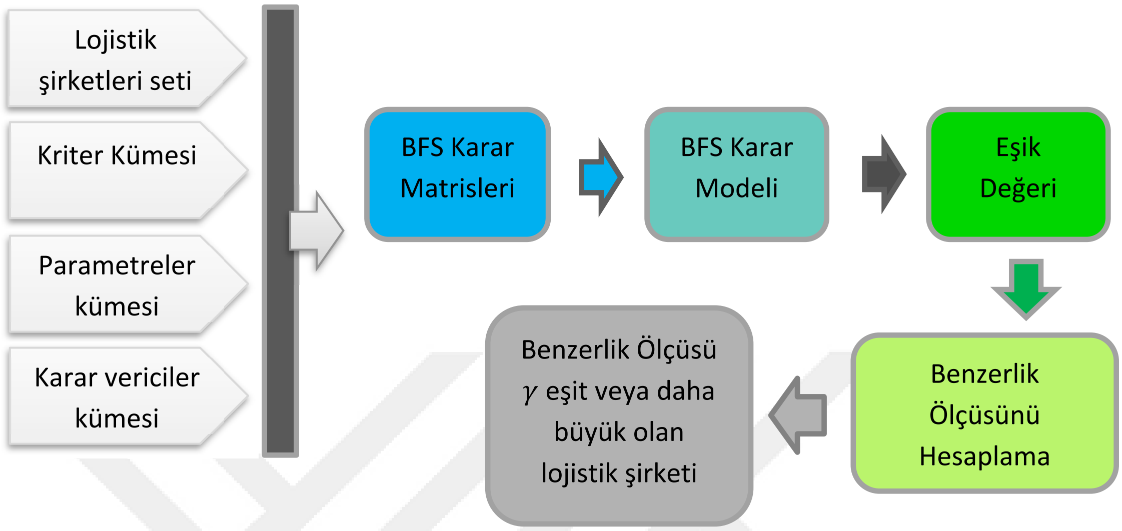
6.Adım: $\gamma \in]0, 1[$ eşik değeri seçilir.

7.Adım: Benzerlik ölçüsü ≥ γ olan lojistik şirketi seçilecek en iyi şirkettir.

8.Adım: Nihai sıralama ve optimal karar yazılır.

Sayısal örnek:

Bir ilaç firması, ürünlerinin nakliyesi için bir lojistik firma seçimi yapmak istiyor.



Şekil 4.2 Algoritmanın akış şeması

Şirket, aşağıdaki gibi bir dizi $C = \{C_1, C_2, C_3\}$ kriterine sahip beş lojistik şirketi L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 arasından belirli kriterleri sağlayan en iyi lojistik şirketini seçmek için iki karar vericiye danışmıştır:

C_1= Tutarlılık ve güvenilirlik
C_2= Zamanında tedarik ve iyi dağıtım uygulamaları
C_3= İnovasyon, çevrimiçi takip sistemi.
Parametre kümesi göz önünde bulundurulduğunda

$P = \{\mathrm{p}_1 = \text{memnun değilim}, \mathrm{p}_2 = \text{memnunum}, \mathrm{p}_3 = \text{çok memnunum}\}$

lojistik şirketi seçiminde karar vermenin memnuniyet düzeyini tanımlamak için kullanılan dilsel etiketlerdir.

(Ω, P)'nin, ilaç şirketinin gereksinimlerine karşılık gelen model BFSS olarak işlenen standart BFSS olduğu varsayılsın. Lojistik firması, müşterinin beklenti seviyesinden daha verimli ise, o zaman mümkün olduğu kadar olumlu not verilir. Aynı şekilde, lojistik firması müşterinin beklenti seviyesinden daha az verimli ise, o zaman mümkün olduğu kadar düşük negatif not verilir. Farmasötik ürünleri taşıyacak en iyi lojistik şirketini seçmek için şirket iki karar vericiye danışır, burada D_k, $(k = 1, 2)$ olarak ele alınacaktır. Lojistik şirketlerinin L_i, $(i = 1, 2, \cdots, 5)$, p_m, $(m = 1, 2, 3)$ parametreleriyle BFSS profili C_t, $(t = 1, 2, 3)$ kriterleri altında (Ω_i, P) olsun. Ardından, ihtiyaç duyulan kritere göre uygun BFSS karar kümesi bulunmuştur. Bu BFSS ler arasında SM yi elde etmek için lojistik şirketlerinin özelliklerini Tablo 4.5'teki modelle eşleştireceğiz.

Tablo 4.3 ve Tablo 4.4, BFS karar matrislerini vermektedir. $\gamma = 0{,}7$ eşik değer olsun. Bu değer Tablo 4.5'te hesaplanan SM değeri ile karşılaştırıldığında BFSS (Ω, P) modelinin (Ω_2, P) ve (Ω_5, P) modeline önemli ölçüde benzer olduğunu görülecektir. Diğer BFSS lerin bu modele benzemediği görülmektedir. Böylece L_2 ve L_5 lojistik firmalarının belirli kriterleri karşılayan en iyi lojistik firmaları olduğu sonucuna varılmıştır.

Tablo 4.3 Karar Matrisi 1

BFS Karar Matris 1									
	(p_1,C_1)	(p_1,C_2)	(p_1,C_3)	(p_2,C_1)	(p_2,C_2)	(p_2,C_3)	(p_3,C_1)	(p_3,C_2)	(p_3,C_3)
(Ω_1, P)	(0.381, -0.845)	(0.380, -0.842)	(0.542, -0.681)	(0.570, -0.391)	(0.681, -0.271)	(0.740, -0.512)	(0.311, -0.521)	(0.911, -0.382)	(0.890, -0.415)
(Ω_2, P)	(0.542, -0.291)	(0.121, -0.760)	(0.482, -0.719)	(0.823, -0.291)	(0.562, -0.551)	(0.342, -0.634)	(0.861, -0.252)	(0.991, -0.132)	(0.814, -0.531)
(Ω_3, P)	(0.425, -0.261)	(0.152, -0.391)	(0.331, -0.824)	(0.858, -0.046)	(0.091, -0.331)	(0.382, -0.425)	(0.132, -0.942)	(0.258, -0.910)	(0.110, -0.970)
(Ω_4, P)	(0.212, -0.512)	(0.526, -0.367)	(0.632, -0.110)	(0.730, -0.411)	(0.290, -0.281)	(0.536, -0.431)	(0.551, -0.821)	(0.821, -0.552)	(0.501, -0.492)
(Ω_5, P)	(0.542, -0.210)	(0.333, -0.490)	(0.121, -0.621)	(0.932, -0.152)	(0.661, -0.453)	(0.122, -0.302)	(0.133, -0.561)	(0.160, 0.931)	(0.262, -0.480)

Tablo 4.4 Karar Matrisi 2

BFS Karar Matris 2									
	(p_1,C_1)	(p_1,C_2)	(p_1,C_3)	(p_2,C_1)	(p_2,C_2)	(p_2,C_3)	(p_3,C_1)	(p_3,C_2)	(p_3,C_3)
(Ω_1, P)	(0.322, –0.321)	(0.433, -0.352)	(0.429, –0.071)	(0.228, –0.451)	(0.115, -0.518)	(0.471, –0.228)	(0.588, –0.129)	(0.661, –0.428)	(0.317, -0.191)
(Ω_2, P)	(0.117, –0.225)	(0.342, -0.521)	(0.192, –0.810)	(0.261, –0.517)	(0.451, -0.284)	(0.622, –0.344)	(0.251, –0.177)	(0.153, –0.462)	(0.163, -0.544)
(Ω_3, P)	(0.295, –0.610)	(0.175, -0.721)	(0.313, –0.531)	(0.426, –0.522)	(0.627, -0.215)	(0.221, –0.613)	(0.214, –0.519)	(0.814, –0.013)	(0.625, -0.352)
(Ω_4, P)	(0.113, –0.024)	(0.641, -0.643)	(0.112, –0.359)	0.329, –0.525)	(0.454, -0.513)	(0.512, –0.054)	(0.880, –0.036)	(0.172, –0.604)	(0.351, 0.652)
(Ω_5, P)	(0.100, –0.515)	(0.261, -0.356)	(0.820, –0.544)	(0.414, –0.152)	(0.803, -0.251)	(0.190, –0.470)	(0.251, –0.809)	(0.103, –0.055)	(0.941, -0.281)

Tablo 4.5 BFS Karar Matrisi 3

BFS Karar Matris 3									
	(p_1,C_1)	(p_1,C_2)	(p_1,C_3)	(p_2,C_1)	(p_2,C_2)	(p_2,C_3)	(p_3,C_1)	(p_3,C_2)	(p_3,C_3)
(Ω, P)	(0.532, -0.251)	(0.364, -0.800)	(0.510, -0.759)	(0.320, -0.547)	(0.500, -0.294)	(0.642, -0.354)	(0.321, -0.207)	(0.253, -0.462)	(0.263, -0.534)
(Ω_1, P)	(0.381, -0.845)	(0.433, -0.842)	(0.542, -0.681)	(0.570, -0.451)	(0.681, -0.271)	(0.740, -0.512)	(0.588, -0.521)	(0.991, -0.428)	(0.890, -0.415)
(Ω_2, P)	(0.542, -0.291)	(0.342, -0.760)	(0.482, -0.719)	(0.261, -0.517)	(0.451, -0.284)	(0.622, -0.344)	(0.251, -0.177)	(0.153, -0.462)	(0.163, -0.544)
(Ω_3, P)	(0.295, -0.610)	(0.175, -0.721)	(0.313, -0.531)	(0.426, -0.522)	(0.627, -0.215)	(0.221, -0.613)	(0.214, -0.519)	(0.814, -0.013)	(0.625, -0.352)
(Ω_4, P)	(0.113, -0.024)	(0.641, -0.643)	(0.112, -0.359)	(0.329, -0.525)	(0.454, -0.513)	(0.512, -0.054)	(0.880, -0.036)	(0.172, -0.604)	(0.351, 0.652)
(Ω_5, P)	(0.100, -0.515)	(0.261, -0.356)	(0.820, -0.544)	(0.414, -0.152)	(0.803, -0.251)	(0.190, -0.470)	(0.251, -0.809)	(0.103, -0.055)	(0.941, -0.281)

Tablo 4.6 BFSS Modeli ile SM arasında ilaç lojistiği

Lojistik şirketleri	$Sim^R(\Omega, \Omega_i)$
L_1	0.6092
L_2	0.8108
L_3	0.6678
L_4	0.6903
L_5	0.7993

Tablo 4.7 BFSS modeli arasında ağırlıklı SM ve ilaç lojistiği

Lojistik şirketi	$Sim_W^R(\Omega, \Omega_i)$
L_1	0.6292
L_2	0.8308
L_3	0.6578
L_4	0.6913
L_5	0.7893

L_2 esas modele en çok benzediği için bu durumda ilaç firması lojistik hizmet sağlayıcısı olarak L_2 yi seçmelidir.

BFS modeli ve lojistik şirketleri arasındaki SM ler Tablo 4.6 da verilmiştir.

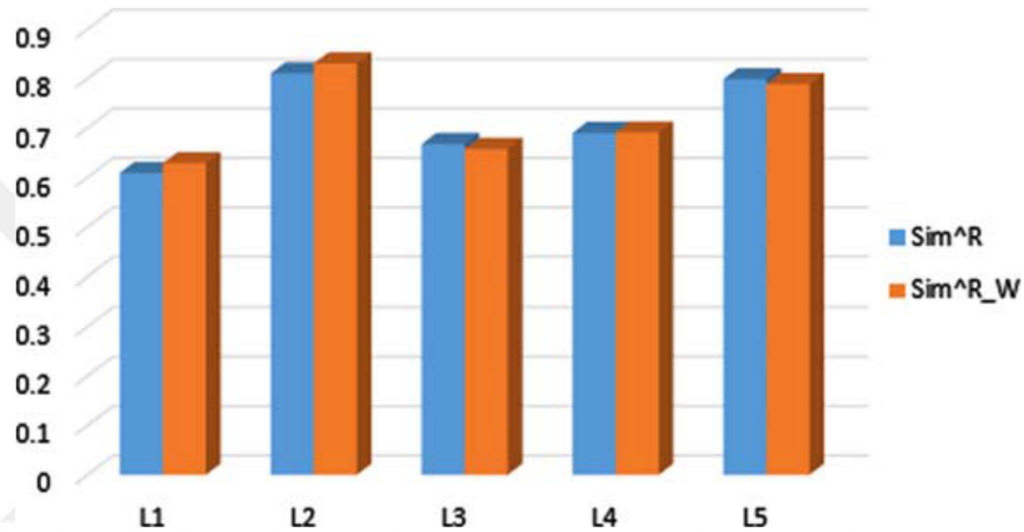
Tablo 4.6 ya göre ilaç lojistiği firmalarının benzerlik sıralaması şu şekildedir:

$$L_2 \succ L_5 \succ L_4 \succ L_3 \succ L_1.$$

BFSS modeli ile ilaç lojistiği arasındaki ağırlıklı SM Tablo 4.7 ile ifade edilmiştir. Şimdi, ağırlıklı SM leri hesaplamak için sırasıyla p_1, p_2 ve p_3 değerine karşılık gelen $w_1 = 0.321$, $w_2 = 0.524$ ve $w_3 = 0.812$ ağırlıkları dikkate alınacaktır. Tablo 4.6, her bir farmasötik lojistik şirketinin ağırlıklı benzerlik ölçüsünü göstermektedir. Ağırlıklı benzerlik ölçüsü kullanılarak lojistik firmalarının sıralamasının aşağıdaki gibi olduğu görülmektedir:

$$L_2 \succ L_5 \succ L_4 \succ L_3 \succ L_1.$$

Burada Şekil 4.3, her bir ilaç lojistiği şirketi için bu iki ölçümün sıralamasını göstermektedir. Lojistik şirketlerinin bu iki sıralaması, L_2 nin daha verimli olduğunu göstermektedir. En çok tercih edilen lojistik sıralamasının L_5, L_4, L_3 ve L_1 olduğunu ve önerilen her iki SM ye, yani Sim^R ve Sim_W^R ye benzer olduğu sonucu elde edilebilir.



Şekil 4.3 İlaç lojistiğinin Sim^R ve Sim_W^R grafiği

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında intervallerin genel özelliklerinden bahsedilerek interval sıfır tanımı verildi. Böylece interval sayılar kümesi grup olma aksiyomlarını sağlamış oldu. Fuzzy kümelerle ilgili önemli özellikler anlatıldı.

Bipolar fuzzy soft kümeler (BFSS ler) için uzaklık ve benzerlik ölçüsü, çeşitli ve belirsiz gerçek hayat problemlerini çözmek için geliştirilmiştir. Bu amaçla, kosinüs benzerliği, matrislerin iç çarpımı ve bipolar fuzzy soft kümeler (BFSS ler) için ağırlıklı ölçüler yardımıyla yeni bir uzaklık ölçüsü ve benzerlik ölçüleri (SM'ler) geliştirilmiştir. Birim elemana eşit olan iki benzer BFSS nin ölçümünü içeren ölçümlerin bazı temel özellikleri incelenmiştir. Bu SM de iki BFF arasında bir $\approx^{\curlyvee}$ ilişkisi kullanılmaktadır. Ek olarak, COVID-19 da ilaç lojistiği ve tedarik zinciri yönetimi için gelişmiş birçok özellikli karar verme (MADM) algoritması tasarlanmıştır. Ayrıca, önerilen MADM yönteminin geçerliliği, en iyi ilaç lojistiği şirketinin seçimi için oluşturulmuş ve önerilen benzerlik ölçütlerinin mevcut bazı benzerlik ölçütleriyle karşılaştırmalı bir analizi gösterilmiştir. Önerilen ölçümler, fuzzy kümelerin diğer uzantılarında küçük değişikliklerle etkili bir şekilde uygulanabilir.

KAYNAKLAR

1. Sunaga T., Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis, RAAG Memoirs, 2 (1958) 29-46.
2. Moore R.E., Yang C.T.,"Interval analysis I", LMSD-285875, Lockheed Missiles and Spaces Company, (1962).
3. Dawood H., "Theories of interval arithmetic: mathematical foundations and applications", LAP Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, Germany, (2011).
4. Costa M., Cholco-Cano Y., Lodwick W.A., Silva G.N., "Generalized interval vector spaces and interval optimization", Information Sciences, (2015).
5. Aydın C., Başar F., "On the new sequence spaces which include the spaces c_0 and c", Hokkaido Math. *J.*, 33(2), 383–398, 2004.
6. "Or A., Savaşkan G.S., "A new game value approach for infinite interval matrix games", Sakarya University Journal of Science , 25 (6) , 1343-1351, (2021).
7. Kirişçi M., Başar F.,"Some new sequence spaces derived by the domain of generalized difference matrix", Comput. Math. Appl., 60(5),1299-1309, 2010.
8. Luxemburg W. A. J., On the convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations. II, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 61 = Indag. Math. 20 (1958), 540-546.
9. Malkowsky E.,"Recent results in the theory of matrix transformations in sequence spaces", Mat. Vesnik, 49, 187-196, 1997.
10. Kantorovich L.V., Akilov G.P., "Functional Analysis in Normed Spaces", Macmillan, New York, 1964.
11. Wang C. S., "On Nörlund sequence spaces", Tamkan g J. Math., 9, 269-274, 1978.
12. Şengönül M. and Eryılmaz A., "the sequence spaces of interval numbers", Thai Journal of Mathematics, 8, no:3, 503-510, 2010
13. Malkowsky E., Mursaleen M., Suantai S.,"The dual spaces of sets of difference sequences of order m and matrix transformations", Acta Math. Sin.Engl. Ser., 23(3), 521–532, 2007.
14. Altay B., Başar F., "Some Euler sequence spaces of non-absolute type", Ukrainian Math. J., 57(1), 1-17, 2005.
15. Boos J., Cass P., "Classical and Modern Methods in Summability", Oxford University Press, New York, 2000.

16. Zararsız Z., “A New Approach to Infinite Matrices of Interval Numbers”, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 14, no: 3, 485-500, 2018.
17. Zadeh L.A., Fuzzy sets,Inform and Control 8 (1965)338-356.
18. Atanassov K.T., Intuitionistic fuzzy sets: Fuzzy Sets and Systems 20(1986), 87-96.
19. Atanassov K.T., Intuitionistic fuzzy sets: Theory and application,Studies in Fuzziness and Soft Computing, XVIII, Physica Verlag, Heidelberg, (1999), 324-330.
20. Molodtsov D., Soft set theory-first results, Comput. Math.Appl. 37 (4-5) (1999), 1931.
21. Zhang W.R., Bipolar fuzzy sets and relations: a computationalframework for cognitive modeling and multiagentdecision analysis, NAFIPS/IFIS/NASA94. Proceedings ofthe First International Joint Conference of The NorthAmerican Fuzzy Information Processing Society BiannualConference. The Industrial Fuzzy Control and Intellige(1994), 305–309.
22. Zhang W.R., Bipolar fuzzy sets, Proceedings of IEEE InternationalConference on Fuzzy Systems (1998), 835–840.
23. Yager R.R., Pythagorean fuzzy subsets, IFSA WorldCongress and NAFIPS Annual Meeting (IFSA/NAFIPS),2013 Joint, Edmonton, Canada, IEEE, (2013), 57–61.
24. Yager R.R. and Abbasov A.M., Pythagorean membership grades, complex numbers, and decision making, InternationalJournal of Intelligent Systems 28(5) (2013), 436–452.
25. Yager R.R., Pythagorean membership grades in multicriteriadecision making, IEEE Transactions on FuzzySystems 22(4) (2014), 958–965.
26. Yager R.R., Generalized orthopair fuzzy sets, IEEE Transactionson Fuzzy Systems 25(5) (2017), 1220–1230.
27. Smarandache F., Neutrosophy: Neutrosophic Probability,Set, and Logic: Analytic Synthesis & Synthetic Analysis,American Research Press, (1998).
28. Smarandache F., Extension of soft set to hypersoft set, andthen to plithogenic hypersoft set, Neutrosophic Sets and Systems 22 (2018), 168–170. DOI: 10.5281/zenodo.2159754.
29. Mahmood T., Ullah K., Khan Q. and Jan N., An Approachtowards decision making and medical diagnosis problemsusing the concept of spherical fuzzy sets, Neural Computingand Applications 31 (2019), 7041–7053.

30. Ashraf S., Abdullah S., Mahmood T., Ghani F. and Mahmood T., Spherical fuzzy sets and their applications inmulti-attribute decision making problems, Journal of 6 Intelligent& Fuzzy Systems 36(3) (2019), 2829–2844.
31. Rafiq M., Ashraf S., Abdullah S., Mahmood T. and Shakoor M., The cosine similarity measures of spherical fuzzysets and their applications in decision making, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 36 (6) (2019), 6059–6073.
32. Gundogdu F.K. and Kahraman C., Properties and arithmeticoperations of spherical fuzzy sets, Decision Making withSpherical Fuzzy Sets: Theory and Applications, Studies in Fuzziness and Soft Computing (2021), 3–25.
33. Wei G., Wei C. and Gao H., Multiple attribute decisionmaking with interval-valued bipolar fuzzy information andtheir application to emerging technology commercialization evaluation, IEEE Access (2018), 60930–60955.
34. Han Y., Lu Z., Du Z., Luo Z. and Chen S., AYinYang bipolarfuzzy cognitive TOPSIS method to bipolar disorder diagnosis,Computer Methods and Programs in Biomedicine 158 (2018), 1–10.
35. Abdullah S., Aslam M. and Ullah K., Bipolar fuzzy soft setsand its applications in decision making problem, Journal ofIntelligent & Fuzzy Systems 27 (2) (2014), 729–742.
36. Karaaslan F. and Karatas S., A new approach to bipolar softsets and its applications,Discrete Mathematics, Algorithmsand Applications 07 (4) (2015), 1550054.
37. Naz M. and Shabir M., On fuzzy bipolar soft sets, theiralgebraic structures and applications, Journal of Intelligent& Fuzzy Systems 26 (4) (2014), 1645–1656.
38. Akram M. and Waseem N., Similarity measures for newhybrid models:mFSets andmFSoft Sets, Punjab UniversityJournal of Mathematics 51 (6) (2019), 115–130.
39. Lee K.M., Bipolar-valued fuzzy sets and their basic operations,Proceedings of International Conference, Bangkok,Thailand, (2000), 307–317.
40. Lee K.M., Comparison of interval-valued fuzzy sets, intuitionisticfuzzy sets, and bipolar-valued fuzzy sets, Journal of Korean Institute of Intelligent Systems 14 (2) (2004), 125–129.
41. Batyrshin I., Towards a general theory of similarity andassociation measures: Similarity, dissimilarity and correlation functions, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 36 (4) (2019), 2977–3004.

42. Batyrshin I.Z., Data ccience: Similarity, dissimilarity and correlation functions, In Artificial Intelligence. Lecture Notes in Computer Science, Springer, Cham, 11866 (2019), 13–28.
43. Akram M., Bipolar fuzzy graphs, Information Sciences 181 (24) (2011), 5548–5564.
44. Alghamdi M.A., Alshehri N.O. and Akram M., Multicriteria decision-making methods in bipolar fuzzy environment, Int. J. Fuzzy Syst. 20 (6) (2018), 20–57.
45. Riaz M. and Tehrim S.T., On bipolar fuzzy soft topology with decision-making, Soft Computing 24 (24) (2020), 18259–18272.
46. Riaz M. and Tehrim S.T., Bipolar fuzzy soft mappings with application to bipolar disorders, International Journal of Biomathematics 12 (7) (2019), 1–31.
47. Alcantud J.C.R., Santos-Garc´ia G., Peng X.D. and Zhan J., Dual extended hesitant fuzzy sets, Symmetry 11 (5) (2019), 1–13.
48. Zhang X.L. and Xu Z.S., Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets, International Journal of Intelligent Systems 29 (2014), 1061–1078.
49. Kharal A., Distance and similarity measures for soft sets, New Math. Nat. Comput. (2010), 1–14.
50. Kamaci H., Similarity measure for soft matrices and its applications, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems (4) (2019), 3061–3072.
51. Majumdar P. and Samanta S.K., Similarity measure of soft sets, New Math. Nat.Comput. 4 (1) (2008), 1–12.
52. Muthukumar P. and Krishnan G.S.S., A similarity measure of intuitionistic fuzzy soft sets and its application in medical diagnosis, Applied Soft Computing 41 (2016), 148–156.
53. Saqlain M., Riaz M., Saleem M.A., Yang M.S., Distance and similarity measures for neu-trosophic hypersoft set (NHSS) with construction of NHSS-TOPSIS and applications, IEEE Access 9 (2021), 30803–30816.
54. Chen S.M., Measures of similarity between vague sets, Fuzzy Sets Syst. 74 (1995), 217–223.
55. Chen S.M., Similarity measures between vague sets and between elements, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B 27 (1) (1997), 153–168.

56. Chen S.M., Yeh M.S. and Hsiao P.Y. , A comparison of similarity measures of fuzzy values, Fuzzy Sets and Systems 72 (1995), 79–89.
57. Hyung L.K., Song Y.S. and Lee K.M., Similarity measure between fuzzy sets and between elements, Fuzzy Sets and Systems 62 (3) (1994), 291–293.
58. Li D. and Cheng C., Newsimilarity measures on intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognition, Pattern Recognit. Lett. 23 (2002), 221–225.
59. Li Y.H., Olson D.L. and Zheng Q., Similarity measures between intuitionistic fuzzy (vague) sets: a comparative analysis, Pattern Recognition Letters 28 (2) (2007),278–285.
60. Hong D.H. and Kim C., Note on similarity measure between vague sets and elements, Information Sciences 115 (1–4) (1999), 83–96.
61. Jun Y., Cosine similarity measures for intuitionistic fuzzy sets and their applications, Mathematical and Computer Modeling 53 (1-2) (2011), 91–97.
62. Liang Z. and Shi P., Similarity measures on intuitionistic fuzzy sets, Pattern Recognit. Lett. 24 (2003), 2687–2693.
63. Hung W.L. and Yang M.S., Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on Lp metric, Int. J. Approx. Reason. 46 (2007), 120–136.
64. Xu Z.S. and Cai X., Intuitionistic fuzzy information aggregation: theory and applications, Springer Heidelberg New York Dordrecht London, (2012).
65. Wang J., Gao H. and Wei G., The generalized dice similarity measures for Pythagorean fuzzy multiple attribute group decision making, International Journal of Intelligent Systems 34 (6) (2019), 1158–1183.
66. Hussain Z. and Yang M.S., Distance and similarity measures of Pythagorean fuzzy sets based on the Hausdorff metric with application to fuzzy TOPSIS, International Journal of Intelligent Systems 34 (10) (2019), 1–22.
67. Zhang Q., Hu J. , Feng J., Liu A. and Li Y., New similarity measures of Pythagorean fuzzy sets and their applications, IEEE Access 7 (2019), 138192–138202.
68. Augustine E.P., New similarity measures for Pythagorean fuzzy sets with applications, International Journal of Fuzzy Computation and Modelling 3 (1) (2020), 75–94.
69. Nguyen X.T., Nguyen V.D., Nguyen V.H. and Garg H., Exponential similarity measures for Pythagorean fuzzy sets and their applications to pattern recognition and decisionmaking process, Complex & Intelligent Systems 5 (2019), 217–228.

70. Riaz M., Naeem K. and Afzal D., A similarity measure under Pythagorean fuzzy soft environment with applications, Computational and Applied Mathematics 39 (2020), 1–17.

71. Jan N, Zedam L., Mahmood T., Rak E. and Ali Z., Generalized dice similarity measures for q-rung orthopair fuzzy sets with applications, Complex & Intelligent Systems 6 (2020), 545–558.

72. Garg H., Ali Z. and Mahmood T., Generalized dice similarity measures for complex q-Rung Orthopair fuzzy sets and its application, International Journal of Intelligent Systems, (2020).

73. Wang P., Wang J., Wei G. and Wei C., Similarity measures of q-rung orthopair fuzzy sets based on cosine function and their applications, Mathematics 7 (4) (2019), 340.

74. Liu D., Chen X. and Peng D., Some cosine similarity measures and distance measures between q-rung orthopair fuzzy sets, Mathematics 34 (7) (2019), 1572–1587.

75. Patrascu V., Similarity, cardinality and entropy for bipolar fuzzy set in the framework of pentavalued representation, arxiv, (2015).

76. Ulucay V., Deli I. and Sahin M. , Similarity measures of bipolar neutrosophic sets and their application to multiple criteria decision making, Neural Computing&Applications 29 (2018), 739–748.

77. Hashim R.M., Gulistan M. and Smarandache F., Applications of neutrosophic bipolar fuzzy sets in hope foundation for planning to build a children hospital with different types of similarity measures, Symmetry 10 (8) (2018), 1–26.

78. Petchimuthu S. and Kamaci H., The row-products of inverse soft matrices in multicriteria decision making, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 36 (6) (2019), 6425–6441.

79. Kamaci H., Introduction to N-soft algebraic structures, Turkish Journal of Mathematics 44 (6) (2020), 2356–2379.

80. Kamaci H. and Petchimuthu S., Bipolar N-soft set theory with applications, Soft Computing 24 (22) (2020), 16727–16743.

81. Kamaci H., Selectivity analysis of parameters in soft set and its effect on decision making, International Journal of Machine Learning and Cybernetics 11 (2) (2020), 313–324.

82. Aygun E. and Kamaci H., Some new algebraic structures of soft sets, Soft Computing 25 (13) (2021), 8609–8626.
83. Zararsiz Z., Similarity measures of sequence of fuzzy numbers and fuzzy risk analysis, Advances in Mathematical Physics 28 (2015), 1–12.
84. Zararsiz Z., Acontribution to the algebraic structure of fuzzy numbers, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 12 (2) (2016), 205–219.
85. Zararsiz Z. And Sengonul M., On the gravity of center of sequence of fuzzy numbers, Annals of fuzzy Mathematics and Informatics 6 (3) (2013), 479–485.