

**T.C.  
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİR MERTEBEDEN DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN BAZI MATEMATİKSEL  
MODELLEMELERİ**

**Tezi Hazırlayan  
Zafer ÖZTÜRK**

**Tez Danışmanı  
Prof. Dr. Sezer SORGUN  
Prof. Dr. Halis BİLGİL**

**Matematik Anabilim Dalı  
Doktora Tezi**

**Haziran 2023**



**T.C.  
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİR MERTEBEDEN DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN BAZI MATEMATİKSEL  
MODELLEMELERİ**

**Tezi Hazırlayan  
Zafer ÖZTÜRK**

**Tez Danışmanı  
Prof. Dr. Sezer SORGUN  
Prof. Dr. Halis BİLGİL**

**Matematik Anabilim Dalı  
Doktora Tezi**

**Haziran 2023**

Prof. Dr. Sezer SORGUN ve Prof. Dr. Halis BİLGİL danışmanlığında **Zafer ÖZTÜRK** tarafından hazırlanan “**Kesir Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Bazı Matematiksel Modellemeleri**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

.../06/2023

## JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

Üye : Prof. Dr. Sezer SORGUN

Üye : Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Üye : Doç. Dr. Hatice TOPCU

Üye : Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

## ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun ..... tarih ve ..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

... /06/ 2023

Doç.Dr. Cemal ÇARBOĞA  
Enstitü Müdürü

## TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Zafer ÖZTÜRK

## TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve tez çalışmam boyunca bana kıymetli vaktini ayıran, ilgisini eksik etmeyen, bütün bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, akademik ortamda eşsiz fikirleriyle yetişmeme ve gelişmeme katkıda bulunan, tezimin hazırlanması sırasında yardımlarını esirgemeyen ve tezimi titizlikle inceleyen saygıdeğer danışmanlarım Prof. Dr. Halis BİLGİL ve Prof. Dr. Sezer SORGUN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Hatice TOPCU, Prof. Dr. Ayhan ERCİYES ve Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN hocalarıma teşekkür ederim.

Bu süreçte beni hiç yalnız bırakmayan, bana hep destek olan kıymetli eşim Özlem ÖZTÜRK'e, canım kızlarım Ela Su ÖZTÜRK ve Asel Duru ÖZTÜRK'e teşekkür ederim. Bu tezi rahmetli annem Zübeyde ÖZTÜRK'e ithaf ederim.

**KESİR MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAZI  
MATEMATİKSEL MODELLEMELERİ  
(Doktora Tezi)**

**Zafer ÖZTÜRK**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Haziran 2023**

**ÖZET**

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, temel kavramlar ve bununla birlikte, kesir mertebeden diferansiyel denklemler verilmiştir. İkinci bölümde, üstel fonksiyon yöntemi yardımıyla uyumlu kesir türevli modifiye edilmiş kötü ve iyi Boussinesq denklemlerinin yeni tam çözümleri elde edilmiştir. Üçüncü bölümde, yeni bir kesirsel  $SIQRV$  modeli oluşturularak nümerik uygulamaları ve kararlılık analizi yapılmıştır. Dördüncü bölümde, kesirsel  $PSQ_p$  sigara bağımlılık modeli ve kesirsel  $SAQ$  alkol bağımlılık modeli oluşturularak nümerik uygulamaları ve kararlılık analizleri yapılmıştır. Beşinci bölümde, kesirsel psikolojik hastalık modeli ile kesirsel köpek popülasyonu oluşturularak nümerik uygulamaları ve kararlılık analizleri yapılmıştır. Ayrıca kesirsel glikoz-insülin modelinin yeni bir nümerik uygulaması yapılmıştır. Son olarak altıncı bölümde tez çalışmasının genel bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

***Anahtar Kelimeler: Matematiksel Modelleme, Euler Metodu, Caputo Türev, Kararlılık Analizi, Tam Çözümler.***

**Tez Danışmanları: Prof. Dr. Sezer SORGUN, Prof. Dr. Halis BİLGİL**

**Sayfa Adeti: 119**

**SOME MATHEMATICAL MODELING OF FRACTIONAL ORDER  
DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**(Ph. D. Thesis)**

**Zafer ÖZTÜRK**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**June 2023**

**ABSTRACT**

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, basic concepts and fractional order differential equations are given. In the second chapter, new exact solutions of the modified bad and good Boussinesq equations with Conformable fractional derivatives are obtained using the exponential function method. In the third chapter, a new fractional  $SIQRV$  model was developed, numerical applications and stability analysis were performed. In the fourth chapter, the fractional  $PSQ_p$  smoking model and the fractional  $SAQ$  alcohol model were created. In addition, numerical applications and stability analysis of the models were performed. In the fifth chapter, the fractional psychological disease model and the fractional dog population model were created by numerical applications and stability analysis were performed. In addition, a new numerical application of the fractional glucose-insulin model was made. Finally, in the sixth chapter, an overall evaluation of the thesis is made.

***Keywords: Mathematical Modeling, Euler Method, Caputo Derivative, Stability Analysis, Exact Solutions.***

**Thesis Supervisors: Prof. Dr. Sezer SORGUN, Prof. Dr. Halis BİLGİL**

**Page Number: 119**



## İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI .....	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI .....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER .....	vi
TABLOLAR LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	x
SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xiii
1. BÖLÜM	
GİRİŞ .....	1
2. BÖLÜM	
KESİR TÜREVLİ MODİFİYE EDİLMİŞ KÖTÜ VE İYİ BOUSSINESQ DENKLEMLERİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ.....	9
2.1. Üstel Fonksiyon Yöntemi .....	10
2.2. Kesir Türevli Modifiye Edilmiş Kötü ve İyi Bousinessq Denklemleri.....	12
3. BÖLÜM	
<i>SIQRV</i> MODELİ, KESİRSEL <i>SIQRV</i> MODELİNİN UYGULAMASI VE KARARLILIK ANALİZİ .....	30
3.1. <i>SIQRV</i> Modeli.....	32
3.2. Kesirsel <i>SIQRV</i> Modelinin Uygulaması ve Kararlılık Analizi .....	41
4. BÖLÜM	
KESİRSEL $PSQ_p$ SİGARA MODELİ İLE KESİRSEL $SAQ$ ALKOL MODELİNİN UYGULAMASI VE KARARLILIK ANALİZİ.....	58
4.1. Kesirsel $PSQ_p$ Sigara Modeli .....	59

4.2.	Kesirsel SAQ Alkol Modeli .....	68
------	---------------------------------	----

## 5.BÖLÜM

KESİRSEL PSİKOLOJİK HASTALIK MODELİ, KESİRSEL GLİKOZ-İNSÜLİN MODELİ, KESİRSEL KÖPEK POPÜLASYONU MODELİ UYGULAMASI VE KARARLILIK ANALİZİ .....		77
---	--	----

5.1.	Kesirsel Psikolojik Hastalık Modeli.....	78
------	--	----

5.2.	Kesirsel Glikoz-İnsülin Modeli.....	85
------	-------------------------------------	----

5.3.	Kesirsel Köpek Popülasyonu Modeli.....	91
------	--	----

## 6. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER .....		107
-------------------------	--	-----

KAYNAKLAR .....		109
-----------------	--	-----

ÖZGEÇMİŞ .....		118
----------------	--	-----

## TABLULAR LİSTESİ

Tablo 3.1.	$S, I, Q, R$ ve $V$ kompartımanlarının $t$ anındaki değerleri .....	34
Tablo 3.2.	Kesirli $SIQRV$ modelinde kullanılan kompartımanlar ve anlamları .....	39
Tablo 3.3.	Kesirli $SIQRV$ modelinde kullanılan parametreler ve anlamları.....	39
Tablo 3.4.	$S, I, Q, R$ ve $V$ kompartımanlarının $\alpha = 1$ için $t$ anındaki değerleri .....	41
Tablo 3.5.	$S, I, Q, R$ ve $V$ kompartımanlarının $\alpha = 0.9$ için $t$ anındaki değerleri.....	42
Tablo 3.6.	$S, I, Q, R$ ve $V$ kompartımanlarının $\alpha = 0.8$ için $t$ anındaki değerleri.....	43
Tablo 3.7.	$S, I, Q, R$ ve $V$ kompartımanlarının $\alpha = 1$ için $t$ anındaki değerleri.....	51
Tablo 3.8.	$S, I, Q, R$ ve $V$ kompartımanlarının $\alpha = 0.9$ için $t$ anındaki değerleri.....	52
Tablo 3.9.	$S, I, Q, R$ ve $V$ kompartımanlarının $\alpha = 0.8$ için $t$ anındaki değerleri.....	53
Tablo 4.1.	Kesirli $PSQ_p$ modelinde kullanılan kompartımanlar ve anlamları.....	60
Tablo 4.2.	Kesirli $PSQ_p$ modelinde kullanılan parametreler ve anlamları.....	60
Tablo 4.3.	$P, S$ ve $Q_p$ kompartımanlarının $\alpha = 1$ için $t$ anındaki değerleri .....	63
Tablo 4.4.	$P, S$ ve $Q_p$ kompartımanlarının $\alpha = 0.9$ için $t$ anındaki değerleri .....	64
Tablo 4.5.	$P, S$ ve $Q_p$ kompartımanlarının $\alpha = 0.8$ için $t$ anındaki değerleri .....	65
Tablo 4.6.	Kesirli $SAQ$ modelinde kullanılan kompartımanlar ve anlamları .....	69
Tablo 4.7.	Kesirli $SAQ$ modelinde kullanılan parametreler ve anlamları.....	69
Tablo 4.8.	$S, A$ ve $Q$ kompartımanlarının $\alpha = 1$ için $t$ anındaki değerleri.....	72
Tablo 4.9.	$S, A$ ve $Q$ kompartımanlarının $\alpha = 0.9$ için $t$ anındaki değerleri.....	73
Tablo 4.10.	$S, A$ ve $Q$ kompartımanlarının $\alpha = 0.8$ için $t$ anındaki değerleri.....	74
Tablo 5.1.	Kesirli $SPR$ modelinde kullanılan kompartımanlar ve anlamları.....	78

Tablo 5.2.	Kesirli <i>SPR</i> modelinde kullanılan parametreler ve anlamları .....	79
Tablo 5.3.	<i>S, P</i> ve <i>R</i> kompartımanlarının $\alpha = 1$ için <i>t</i> anındaki değerleri .....	81
Tablo 5.4.	<i>S, P</i> ve <i>R</i> kompartımanlarının $\alpha = 0.9$ için <i>t</i> anındaki değerleri .....	82
Tablo 5.5.	<i>S, P</i> ve <i>R</i> kompartımanlarının $\alpha = 0.8$ için <i>t</i> anındaki değerleri .....	83
Tablo 5.6.	Kesirli Glikoz-İnsülin modelinde kullanılan kompartımanlar ve anlamları .....	86
Tablo 5.7.	Kesirli Glikoz-İnsülin modelinde kullanılan parametreler ve anlamları .....	86
Tablo 5.8.	<i>I, G</i> ve <i>D</i> kompartımanlarının $\alpha = 1$ için <i>t</i> anındaki değerleri .....	87
Tablo 5.9.	<i>I, G</i> ve <i>D</i> kompartımanlarının $\alpha = 0.9$ için <i>t</i> anındaki değerleri .....	88
Tablo 5.10.	<i>I, G</i> ve <i>D</i> kompartımanlarının $\alpha = 0.8$ için <i>t</i> anındaki değerleri .....	89
Tablo 5.11.	Köpek Popülasyon modelinde kullanılan kompartımanlar ve anlamları .....	92
Tablo 5.12.	Köpek Popülasyon modelinde kullanılan parametreler ve anlamları .....	92
Tablo 5.13.	<i>S, D</i> kompartımanlarının ve <i>N</i> popülasyonunun $\alpha = 1$ için <i>t</i> anındaki değerleri .....	96
Tablo 5.14.	<i>S, D</i> kompartımanlarının ve <i>N</i> popülasyonunun $\alpha = 0.9$ için <i>t</i> anındaki değerleri .....	97
Tablo 5.15.	<i>S, D</i> kompartımanlarının ve <i>N</i> popülasyonunun $\alpha = 0.8$ için <i>t</i> anındaki değerleri .....	98

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (1. Durum) .....	16
Şekil 2.2.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (2. Durum) .....	17
Şekil 2.3.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (3. Durum) .....	17
Şekil 2.4.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (4. Durum) .....	18
Şekil 2.5.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (5. Durum) .....	19
Şekil 2.6.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (6. Durum) .....	20
Şekil 2.7.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (7. Durum) .....	20
Şekil 2.8.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (8. Durum) .....	21
Şekil 2.9.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (1. Durum) .....	24
Şekil 2.10.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (2. Durum) .....	24
Şekil 2.11.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (3. Durum) .....	25
Şekil 2.12.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (4. Durum) .....	26
Şekil 2.13.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (5. Durum) .....	26
Şekil 2.14.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (6. Durum) .....	27
Şekil 2.15.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (7. Durum) .....	28
Şekil 2.16.	Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (8. Durum) .....	28
Şekil 3.1.	<i>S</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	35
Şekil 3.2.	<i>I</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	35
Şekil 3.3.	<i>Q</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	36
Şekil 3.4.	<i>R</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	36
Şekil 3.5.	<i>V</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	37
Şekil 3.6.	<i>S</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	43
Şekil 3.7.	<i>I</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	44
Şekil 3.8.	<i>Q</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	44

Şekil 3.9.	<i>R</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	45
Şekil 3.10.	<i>V</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	45
Şekil 3.11.	<i>S</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği.....	54
Şekil 3.12.	<i>I</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	54
Şekil 3.13.	<i>Q</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	55
Şekil 3.14.	<i>R</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	55
Şekil 3.15.	<i>V</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	56
Şekil 4.1.	Türkiye'nin 2019 yılındaki sigara kullanım verileri .....	62
Şekil 4.2.	<i>P</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	66
Şekil 4.3.	<i>S</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği.....	66
Şekil 4.4.	$Q_p$ kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	67
Şekil 4.5.	<i>S</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği.....	75
Şekil 4.6.	<i>A</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	75
Şekil 4.7.	<i>Q</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	76
Şekil 5.1.	<i>S</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği.....	83
Şekil 5.2.	<i>P</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	84
Şekil 5.3.	<i>R</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	84
Şekil 5.4.	<i>I</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	89
Şekil 5.5.	<i>G</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	90
Şekil 5.6.	<i>D</i> kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği .....	90
Şekil 5.7.	<i>D</i> , <i>S</i> ve <i>N</i> kompartımanlarının $\alpha = 1$ için zamana göre değişim grafiği .....	98
Şekil 5.8.	<i>D</i> , <i>S</i> ve <i>N</i> kompartımanlarının $\alpha = 0.9$ için zamana göre değişim grafiği .....	99
Şekil 5.9.	<i>D</i> , <i>S</i> ve <i>N</i> kompartımanlarının $\alpha = 0.8$ için zamana göre değişim grafiği .....	99

Şekil 5.10.	<i>D, S ve N</i> kompartımanlarının $\alpha = 1$ için zamana göre değişim grafiği .....	100
Şekil 5.11.	<i>D, S ve N</i> kompartımanlarının $\alpha = 0.9$ için zamana göre değişim grafiği .....	101
Şekil 5.12.	<i>D, S ve N</i> kompartımanlarının $\alpha = 0.8$ için zamana göre değişim grafiği .....	101
Şekil 5.13.	<i>D, S ve N</i> kompartımanlarının $\alpha = 1$ için zamana göre değişim grafiği .....	102
Şekil 5.14.	<i>D, S ve N</i> kompartımanlarının $\alpha = 0.9$ için zamana göre değişim grafiği .....	103
Şekil 5.15.	<i>D, S ve N</i> kompartımanlarının $\alpha = 0.8$ için zamana göre değişim grafiği .....	103

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

<b><i>IGD</i></b>	Kesirli Glikoz-İnsülin Modeli
<b><i>N</i></b>	Toplam Popülasyon
<b><i>ODE</i></b>	Adi Diferansiyel Denklem
<b><i>PDE</i></b>	Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem
<b><i>PSQ<sub>p</sub></i></b>	Kesirsel Sigara Modeli
<b><i>R<sub>0</sub></i></b>	Temel Çoğalma Oranı
<b><i>SAQ</i></b>	Kesirsel Alkol Modeli
<b><i>SIQRV</i></b>	Salgın Hastalık Modeli
<b><i>SPR</i></b>	Kesirsel Psikolojik Hastalık Modeli



# 1. BÖLÜM

## GİRİŞ

Bu bölümde özel fonksiyonların bazı temel kuramları verilmiştir. Gamma ve Beta fonksiyonları, Mittag-Leffler fonksiyonları ve Wright fonksiyonu hakkında bazı temel bilgiler verildi. Bu fonksiyonlar sistemlerin farklılaştırılması teorisinde ve kesirli diferansiyel denklemler uygulamalarında önemli rol oynamaktadır.

**Gamma Fonksiyonu:** Kesirli diferansiyel hesabın temel fonksiyonlarından biri Gamma fonksiyonudur.  $n!$  i genelleştiren,  $n$  'nin tamsayı olmayan hatta kompleks değerler almasını mümkün kılan, kompleks düzlemin sağ yarısında ( $Re(z) > 0$ ) yakınsak olan Euler Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır ve  $\Gamma(\cdot)$  ile gösterilir [1]. Bazı temel özellikler aşağıda verildi.

i)  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ ,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ,  $Re(z) > 0$ ,  $z \in \mathbb{N}$ ,

ii)  $\Gamma(z) = (z - 1)!$  ( $z \in \mathbb{N}$ ),

iii)  $\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}$ ,

iv)  $\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ ,  $0 < z < 1$ .

**Beta Fonksiyonu:** Matematiğin birçok alanında karşılaşılan özel bir fonksiyondur. Birçok durumda Gamma fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine Beta fonksiyonu kullanmak daha uygundur [1]. Beta fonksiyonu,

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1 - t)^{w-1} dt \quad (Re(z) > 0, Re(w) > 0) \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanır. Temel bazı özellikleri aşağıda verildi.

i)  $B(z, w) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{2z-1} \theta) (\cos^{2w-1} \theta) d\theta \quad (Re(z) > 0, Re(w) > 0)$ ,

$$\text{ii) } B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},$$

$$\text{iii) } B(z, w) = B(w, z),$$

$$\text{iv) } B(z, w) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt \quad (\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0),$$

$$\text{v) } B(z, w) = B(z, w+1) + B(z+1, w),$$

$$\text{vi) } B(z, w+1) = B(z, w) \frac{w}{z+w},$$

$$\text{vii) } B(z+1, w) = B(z, w) \frac{z}{z+w},$$

$$\text{viii) } B(z, w)B(z+w, 1-w) = \frac{\pi}{z \sin(\pi w)}.$$

**Mittag-Leffler Fonksiyonu:** Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde Mittag-Leffler fonksiyonu önemli bir yere sahiptir. Akışkanların akışı, elektrik ağları, olasılık, istatistiksel dağılım teorisi de dahil olmak üzere hem teorik hem de pratik olarak çeşitli alanlarda uygulanabilir. Esasında üstel fonksiyonun özel halleridir.

Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.3)$$

şeklinde olup  $\alpha > 0, z \in \mathbb{C}$  için bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \frac{1}{1-z}$$

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = e^z$$

$$E_2(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \cosh z$$

şeklinde gösterilir. Mittag-Leffler tipi iki parametrelili fonksiyonu genelleştirilmiş kesirli diferansiyel teorisinde önemli bir rol oynar. İlk olarak Agarwal ve Erdelyi tarafından bulunmuştur [1]. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu;

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.4)$$

$\alpha > 0, \beta > 0$  ve  $z \in \mathbb{C}$  seri açılımıyla tanımlanır.

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 2)} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh z$$

olarak elde edilir [1].

**Wright Fonksiyonu:** Wright fonksiyonu, lineer kısmi kesirli diferansiyel denklemlerin, kesirli difüzyon dalga denkleminin çözümünde önemli bir rol oynar [1].

Wright fonksiyonu;

$$W(z; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.5)$$

$\alpha > -1$  ve  $z, \beta \in \mathbb{C}$  şeklinde tanımlanır [1].

Kesirli diferansiyel denklem, kesirli türevleri içeren bir denklemdir. Kesirli integral denklem, kesirli integralleri içeren integral denklemdir. Kesirli türevin en çok kullanılanları Riemann-Liouville, Caputo, Atangana-Baleanu ve Conformable türev tanımlarıdır [1,2,3].

**Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali:**  $f(t)$  fonksiyonunun  $(a, t)$  aralığında sürekli ve integrallenebilir fonksiyon olmak üzere,  $f(t)$  fonksiyonunun  $p$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali  $p > 0$  olmak üzere

$$D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-x)^{p-1} f(x) dx$$

şeklinde tanımlanır.  $0 < \alpha \leq 1$  için  $k - \alpha > 0$  olmak üzere  $f(t)$  fonksiyonunun  $(k - \alpha)$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlanır [1].

**Teorem 1.1:**  $f(t) = (t-a)^v$  fonksiyonunun  $D_t^p f(t)$  Riemann-Liouville anlamında kesirli türevi;

$$D_t^p (t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)} (t-a)^{v-p} \quad (1.7)$$

$n-1 \leq p < n, n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{R}^+$  eşitliği sağlanır.

**Örnek:**  $f(t) = t$  fonksiyonunun  $p = \frac{1}{2}$  mertebeden Riemann-Liouville türevini hesaplayalım:

$$D_t^p (t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)} (t-a)^{v-p}, a = 0, v = 1, p = \frac{1}{2}$$

$$D_t^{\frac{1}{2}} (t)^1 = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)} (t)^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} (t)^{\frac{1}{2}} = 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

**Örnek:**  $f(t) = (t-1)^2$  fonksiyonunun  $p = \frac{1}{2}$  mertebeden Riemann-Liouville türevini hesaplayalım:

$a = 1, v = 2, p = \frac{1}{2}$  olur ki

$$D_t^{\frac{1}{2}}(t-1)^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma\left(2-\frac{1}{2}+1\right)}(t-1)^{2-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}(t-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}(t-1)^{\frac{3}{2}}.$$

**Caputo Kesirli Türevi:**  $f(t)$  fonksiyonu  $n$  kez sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $n-1 < \alpha < n$  şartını sağlayan  $\alpha$  değeri için  $f(t)$  fonksiyonunun  $\alpha$  mertebeden Caputo anlamındaki kesirli türevi

$${}_a^C D_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^n(x) dx \quad (1.8)$$

eşitliği ile tanımlıdır [1].

Riemann-Liouville kesirli türevi ile Caputo kesirli türevi arasındaki en büyük farklardan biri sabit bir fonksiyonun türevinin hesaplanmasıdır. Örneğin,  $f(t) = c$  sabit fonksiyonunun Caputo kesirli mertebeden türevi sifıra eşittir. Fakat bu sabit fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevi  $\alpha$  değerinin sonlu değer olması halinde sifıra eşit değildir. Çünkü sabit fonksiyonun Riemann-Liouville anlamındaki kesirli mertebeden türevi

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlanır.

**Örnek:**  $f(t) = t^2$  fonksiyonunun  $p = \frac{1}{2}$  mertebeden Caputo türevini hesaplayalım.

$$n-1 < p < n, n=1 \quad {}_a^C D_t^p = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-x)^{n-p-1} f^n(x) dx$$

olmak üzere

$${}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \int_0^t (t-x)^{1-\frac{1}{2}-1} 2x dx = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} 2x dx$$

elde edilir. Kısmi integrasyon yapılarak  ${}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$  elde edilir.

**Uyumlu Kesirli Türev:**  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $t > 0$  ve  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere  $f(t)$  fonksiyonunun  $\alpha$ . mertebeden uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (1.10)$$

eşitliği ile tanımlıdır. Eğer  $f(t)$  fonksiyonu  $\alpha > 0$  olmak üzere  $(0, a)$  açık aralığında  $\alpha$ . mertebeden diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğu ve  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^\alpha(t)$  limiti varsa

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f^\alpha(t) = f^\alpha(0) \quad (1.11)$$

eşitliği yazılabilir [2].

**Teorem 1.2:**  $0 < \alpha \leq 1$  ve  $t > 0$  için  $f(t)$  ve  $g(t)$  fonksiyonları  $\alpha$ . mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır [2].

i)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  için  $T_\alpha(af(t) + bg(t)) = aT_\alpha(f(t)) + bT_\alpha(g(t))$

ii)  $\forall p \in \mathbb{R}$  için  $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$

iii)  $\forall f(t) = c$  sabit fonksiyonu için  $T_\alpha(c) = 0$

iv)  $T_\alpha(f(t)g(t)) = f(t)T_\alpha(g(t)) + g(t)T_\alpha(f(t))$

v)  $T_\alpha\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)T_\alpha(f(t)) - f(t)T_\alpha(g(t))}{(g(t))^2}$

vi)  $T_\alpha(f(t)) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}$

Bazı fonksiyonların  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere  $\alpha$ . mertebeden uyumlu kesirli türevleri aşağıda belirtilmektedir.

i)  $a \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $T_\alpha(e^{at}) = at^{1-\alpha} e^{at}$ ,

ii)  $b \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $T_\alpha(\sin(bt)) = bt^{1-\alpha} \cos(bt)$ ,

iii)  $c \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $T_\alpha(\cos(ct)) = -ct^{1-\alpha} \sin(ct)$ ,

$$\text{iv) } T_{\alpha} \left( \frac{t^{\alpha}}{\alpha} \right) = 1,$$

$$\text{v) } T_{\alpha} \left( \sin \left( \frac{t^{\alpha}}{\alpha} \right) \right) = \cos \left( \frac{t^{\alpha}}{\alpha} \right),$$

$$\text{vi) } T_{\alpha} \left( \cos \left( \frac{t^{\alpha}}{\alpha} \right) \right) = -\sin \left( \frac{t^{\alpha}}{\alpha} \right),$$

$$\text{vii) } T_{\alpha} \left( e^{\frac{t^{\alpha}}{\alpha}} \right) = e^{\frac{t^{\alpha}}{\alpha}}.$$

**Tanım 1.3:**  $0 < \alpha \leq 1$  olmak üzere  $f(t)$  fonksiyonunun  $\alpha$ . mertebeden uyumlu kesirli integrali

$$I_{\alpha}^a f(t) = \int_{\alpha}^t x^{\alpha-1} f(x) dx \quad (1.12)$$

şeklinde tanımlanır [2].

**Teorem 1.4:**  $t \geq a$  olmak üzere  $f(t)$  sürekli fonksiyonu için  $T_{\alpha}(I_{\alpha}^a(f(t))) = f(t)$  eşitliği geçerlidir [2].

**Örnek:**  $f(t) = t^4$  fonksiyonunun  $\alpha = \frac{1}{2}$  mertebeden uyumlu kesirli türevini hesaplayalım.

$$p \in \mathbb{R} \text{ için } T_{\alpha}(t^p) = pt^{p-\alpha} \text{ için } T_{\frac{1}{2}}(t^4) = 4t^{4-\frac{1}{2}} = 4t^{\frac{7}{2}} \text{ elde edilir.}$$

**Örnek:**  $f(t) = \sin(2t)$  fonksiyonunun  $\alpha = \frac{1}{2}$  mertebeden uyumlu kesirli türevini hesaplayalım.

$$b \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere } T_{\alpha}(\sin(bt)) = bt^{1-\alpha} \cos(bt) \text{ olup}$$

$$T_{\frac{1}{2}}(\sin(2t)) = 2t^{1-\frac{1}{2}} \cos(2t) = 2t^{\frac{1}{2}} \cos(2t)$$

elde edilir.

**Atangana-Baleanu Kesirli Türev:**  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere Atangana-Baleanu kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$T_{\alpha}f(t) = \frac{B(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_0^t f'(s) E_{\alpha} \left[ -\frac{\alpha}{1-\alpha} (t-s)^{\alpha} \right] dt. \quad (1.12)$$

$B(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ ,  $B(\alpha) > 0$  olmak üzere  $B(0) = B(1) = 1$  eşitliğini sağlayan bir normalleştirme fonksiyonudur.  $E_{\alpha}$  bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonudur [3].





## 2. BÖLÜM

### KESİR TÜREVLİ MODİFİYE EDİLMİŞ KÖTÜ VE İYİ BOUSSINESQ DENKLEMLERİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ

Lineer olmayan oluşum denklemlerinin tam çözümlerini elde etmek çok önemlidir ve tam çözümler elde etmek için birçok yöntem önerilmiştir. En bilinen yöntemler Üstel Fonksiyon Metodu [4], Tanh-Metodu [5], Homojen Denge Metodu [6], Deneme Fonksiyon Metodu [7],  $(\frac{c'}{c})$  Genleşme Metotları [8], Kudryashov Metodudur [9]. Üstel fonksiyon yöntemi birçok araştırmacı tarafından çeşitli lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılmıştır [10-13]. Doğrusal olmayan oluşum denklemlerinin yeni tam çözümleri bazı farklı yöntemler kullanılarak elde edilebilir.

Hareketli dalgalar, genellikle kısmi diferansiyel denklemlerle tanımlanan birçok fiziksel sistemde doğal olarak ortaya çıkar. 'Solitonlar' olarak da bilinen soliter dalgalar, bazı özelliklere sahip belirli bir hareket dalgası sınıfıdır. Solitonlar, dispersif etkileri iptal eden bazı doğrusal olmayan etkiler nedeniyle genellikle dağılmadan büyük mesafelerde yayılabilirler. Küçük bir faz değişimi dışında, şekil değiştirmeden bir çarpışmadan sonra ortaya çıkacak şekilde diğer solitonlarla etkileşime girebilecekleri ek özelliğe sahiptirler. Geleneksel reel problemler tamsayı mertebeden doğrusal olmayan oluşum denklemleri ile tanımlanır ve bunlar ile karakterize edilir. Bununla birlikte, tamsayı mertebeden türevi olan doğrusal olmayan oluşum denklemleri, düzensiz olayları tanımlamak için uygun olmayan ideal klasik olaylardır.

Kesirli diferansiyel denklemler ise standart tamsayı mertebeden doğrusal olmayan oluşum denklemlerinden daha gerçek sonuçlar verdikleri için hesaplamalardaki zorluğa rağmen tercih edilir hale gelmiştir. Son yıllarda yapılan yeni kesirli türev tanımları ve teoremleri sayesinde kesirli hesaptaki zorluklar aşılmaya başlanmıştır. Kesirli türevin en popüler tanımları şu şekilde sıralanabilir: Uyumlu türev, Caputo türevi, Riemann-Liouville türevi, Atangana-Baleanu türevi. Tam çözüm araştırmalarındaki yeni eğilimler, yeni tam çözümler bulmak ve yeni çözüm mekanizmaları geliştirmektir.

Khalil ve arkadaşları 2014 yılında, uyumlu kesirli türev olarak adlandırılan sınıra dayalı bir kesirli türev tanımlamıştır [2]. Bu yeni kesirli türev tanımlarının yapısı diğer popüler kesirli türevlerden daha basittir.

Uyumlu kesirli türevin tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $\alpha$ . mertebeden uyumlu kesirli türevleri şu şekilde tanımlanır:

$$T_{\alpha}(f(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.1)$$

$t > 0$  ve  $\alpha \in (0, 1]$ . Eğer  $f, \alpha$ . mertebeden türevlenebilir ve  $(0, \alpha)$ ,  $\alpha > 0$  için

$\lim_{t \rightarrow 0^+} T_{\alpha}(f(t))$  limiti varsa

$$(T_{\alpha}f)(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} T_{\alpha}(f(t)). \quad (2.2)$$

Bu tanıma ek olarak  $T_{\alpha}(f(t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{[\alpha-1]}(t+\varepsilon t^{[\alpha]-\alpha}) - f^{[\alpha-1]}(t)}{\varepsilon}$ ,  $\alpha \in (n, n+1]$  olduğu bilinmektedir ve  $f$  fonksiyonu  $t > 0$  için  $\alpha$ . mertebeden türevlenebilir bir fonksiyondur. Burada  $[.]$  tavan fonksiyonu,  $\alpha$  dan büyük olan en küçük tamsayıdır [2].

Bu bölümde, kesirli kötü ve iyi modifiye edilmiş Boussinesq denklemlerinin uyumlu türevli yeni tam çözümleri üstel fonksiyon yöntemi ile elde edildi. Uyumlu kesirli türevin bazı özellikleri, üstel fonksiyon yönteminin uygulaması, kesir türevli modifiye edilmiş kötü ve iyi Boussinesq denklemlerinin tam çözümleri ve sonuçları bu bölümde verildi.

## 2.1. Üstel Fonksiyon Yöntemi

Kısmi diferansiyel denklemler matematiksel modelleme için yararlı araçlardır. İlk olarak He ve Wu (2006) tarafından tanımlanan Üstel Fonksiyon Yönteminin birçok bilim insanı tarafından çeşitli uygulamaları yapılmıştır [14-20]. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümü Üstel Fonksiyon Yöntemi ile elde edilir. İlk olarak, kısmi diferansiyel denklem adi diferansiyel denkleme indirgenir ve üstel fonksiyon yöntemi kullanılarak tam çözüme yönlendirilir. Üstel Fonksiyon Yöntemi matematiksel fizik, uygulamalı matematik ve mühendislik uygulamalarında ortaya çıkan

lineer olmayan oluşum denklemlerinin çözümünde etkili bir yöntemdir. Üstel Fonksiyon Yöntemi ayrıca lineer olmayan oluşum denkleminin genelleştirilmiş tek ve periyodik çözümlerini verir. Kesirli modifiye edilmiş kötü ve iyi Boussinesq denklemlerinin yardımcı denklem yöntemi yardımıyla bazı çözümleri Durur ve ark. tarafından bulundu [21].

Genel bir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemi şu şekilde ele alınır:

$$P = (x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0. \quad (2.3)$$

Karmaşık bir değişken olan  $\xi = kx + wt$  olarak tanımlansın. Burada  $k$  dalga sayısı,  $w$  dalga hızıdır. (2.3) denklemini  $\xi$ 'ye göre yeniden yazılarak

$$Q(u, u', u'', u''', \dots) = 0. \quad (2.4)$$

elde edilir. (2.4)'de  $\xi$  ye göre türev alınacak olup üstel fonksiyon yöntemine göre, çözümün şu şekilde ifade edilebileceğini varsayıyoruz:

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n e^{(n\xi)}}{\sum_{m=-p}^q b_m e^{(m\xi)}}. \quad (2.5)$$

Burada  $c, d, p$  ve  $q$  pozitif tamsayılardır,  $a_n$  ve  $b_m$  gözlemlenecek bilinmeyen sabitlerdir. Genellik kaybı olmadan, eğer  $d = q = c = p = 1$  alırsak, o zaman (2.5) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + a_0 + a_1e^{\xi}}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}}. \quad (2.6)$$

Burada  $b_1$  sabiti 1 olarak alındı.  $a_0, a_1, a_{-1}; b_0, b_{-1}; k, w$  bilinmeyenleri için bir dizi cebirsel denkleme ulaşılabacaktır. Bu konu için Ebaid [22] tarafından bazı yararlı teoremler verilmiştir.

**Teorem 2.1.**  $u^{(r)}$  ve  $u^{(\gamma)}$  'nın sırasıyla lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemin lineer olmayan en yüksek mertebeden terim ile en yüksek mertebeden lineer terimin olduğunu varsayalım. Burada  $r$  ve  $\gamma$  her ikisi de pozitif tamsayıdır. Üstel fonksiyon

yönteminden dengeleme yapılarak  $u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n e^{(n\xi)}}{\sum_{m=-p}^q b_m e^{(m\xi)}}$ ,  $c = d$  ve  $p = q$ ,  $\forall r \geq 1$ ,  $\forall \gamma \geq 1$  elde edilir [17].

i)  $u^{(r)}$  ve  $u^{(s)}u^{(k)}$  'nın sırasıyla lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemin lineer olmayan en yüksek mertebeden terimi ile en yüksek mertebeden lineer teriminin olduğunu varsayalım. Burada  $r, s$  ve  $k$  pozitif tamsayılarıdır. Üstel fonksiyon yönteminden dengeleme yapılarak  $c = d$  ve  $p = q$ ,  $\forall r, s, k \geq 1$  elde edilir.

ii)  $u^{(r)}$  ve  $(u^{(s)})^\gamma$  'nın lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemin lineer olmayan en yüksek mertebeden terimi ile en yüksek mertebeden lineer teriminin olduğunu varsayalım. Burada  $r, s$  ve  $\gamma$  pozitif tamsayılarıdır. Üstel fonksiyon yönteminden dengeleme yapılarak  $c = d$  ve  $p = q$ ,  $\forall r, s \geq 1$ ,  $\forall \gamma \geq 2$  elde edilir.

iii)  $u^{(r)}$  ve  $(u^{(s)})^\gamma u^{(\lambda)}$  'nın lineer olmayan bir adi diferansiyel denklemin lineer olmayan en yüksek mertebeden terimi ile en yüksek mertebeden lineer teriminin olduğunu varsayalım. Burada  $r, s, \gamma$  ve  $\lambda$  pozitif tamsayılarıdır. Üstel fonksiyon yönteminden dengeleme yapılarak  $c = d$  ve  $p = q$ ,  $\forall r, s, \gamma, \lambda \geq 1$  elde edilir.

## 2.2. Kesir Mertebeden Modifiye Edilmiş Kötü ve İyi Boussinesq Denklemleri

Boussinesq denklemi ilk olarak 1870 yılında Joseph Boussinesq tarafından ortaya atılmıştır [23]. Bu denklem iyon ses dalgaları, sıg su dalgalarının modellenmesi, elastik çubuklarda uzunlamasına yayılma dalgaları, sıvı-gaz köpük karışımlarında bastırılmış dalgalar ve bu dalgaların yayılma modeli gibi birçok alanda uygulamaları olan plazmadaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden biridir. Daha sonra, Boussinesq denklemi daha derin su problemlerine uyum sağlamak için değiştirilmiş ve literatürde bu denklemin birçok yeni formu elde edilmiştir [21,23].

Kesir mertebeden modifiye edilmiş kötü Boussinesq denklemi aşağıdaki gibidir.

$$D_t^{(2\alpha)} u - D_x^2 u - D_x^4 u - 3D_x^2(u^2) + 3D_x(u^2 D_x u) = 0 \quad (2.7)$$

Kesir mertebeden modifiye edilmiş iyi Boussinesq denklemi aşağıdaki gibidir.

$$D_t^{(2\alpha)} u - D_x^2 u + D_x^4 u - 3D_x^2(u^2) + 3D_x(u^2 D_x u) = 0 \quad (2.8)$$

Üstel Fonksiyon Yöntemini kullanarak kesir zamanlı modifiye edilmiş kötü ve iyi Boussinesq denklemlerinin çözümlerini bulalım. (2.7) denklemi için üstel fonksiyon yöntemini uygularsak

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n e^{(n\xi)}}{\sum_{m=-p}^q b_m e^{(m\xi)}}. \quad (2.9)$$

Teorem 2.1. ve hareketli dalga dönüşümü kullanılarak

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - w \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (2.10)$$

olmak üzere (2.7) denklemi adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. Burada  $a_n$  ve  $b_m$  bilinmeyen sabitlerdir,  $w$  dalganın hızını gösterir ve fonksiyonların  $\xi$ 'ye göre türevi alınır.

(2.7) denklemine dalga dönüşümü (2.10) uygulanarak aşağıdaki adi diferansiyel denklemi elde edilir:

$$(-w^2 - 1)u'' - u^{1p} - 6u'^2 - 6uu'' + 6uu'^2 + 3u^2u'' = 0. \quad (2.11)$$

(2.8) denklemine dalga dönüşümü (2.10) uygulanarak aşağıdaki adi diferansiyel denklemi elde edilir:

$$(-w^2 - 1)u'' + u^{1p} - 6u'^2 - 6uu'' + 6uu'^2 + 3u^2u'' = 0. \quad (2.12)$$

(2.6) ifadesini (2.11) ve (2.12) denklemlerinde yerine yazarsak Maple Yazılımı kullanılarak bilinmeyen parametreler elde edilir.

Buradan, kötü ve iyi modifiye Boussinesq denklemleri için tam çözümleri elde ederiz. (2.11) denklemine lineer olmayan en yüksek mertebeden terim ile en yüksek mertebeden lineer terimin dengelenmesine bakılır.  $u^{1p}$  ve  $u^2u''$  dengelenmesi ile  $p = c = 1$  ve  $q = d = 1$  elde edilir. Buna göre

$$\frac{-1}{A} [C_4 e^{4\xi} + C_3 e^{3\xi} + C_2 e^{2\xi} + C_1 e^\xi + C_0 + C_{-1} e^{-\xi} + C_{-2} e^{-2\xi} + C_{-3} e^{-3\xi} + C_{-4} e^{-4\xi}] = 0 \quad (2.13)$$

olur. (2.13) denkleminin çözümleri için bütün katsayılar sıfır olmalıdır.

$$A = b_{-1}(e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi})^5,$$

$$C_4 = -2a_0 + 3a_1^2a_0 - 6a_0a_1 + 6a_1^2b_0 - 3a_1^3b_0 + 2a_1b_0 - w^2a_0 + w^2a_1b_0,$$

$$\begin{aligned} C_3 = & -20a_{-1} + 24a_1^2b_{-1} + 20a_1b_{-1} + 12a_1^2a_{-1} + 9a_1^3b_0^2 - 6a_1^2b_0^2 \\ & -12a_1^3b_{-1} + 12a_1a_0^2 - 24a_1a_{-1} - 4w^2a_{-1} - 10a_1b_0^2 + 10a_0b_0 \\ & +4w^2a_1b_{-1} + 18a_1b_0a_0 - w^2a_0b_0 + w^2a_1b_0^2 - 21a_1^2a_0b_0 - 12a_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 = & 9a_0^3 + 4w^2a_0b_{-1} - 70a_1b_{-1}b_0 - 12a_1^2b_0b_{-1} - w^2a_1b_0^3 \\ & -12a_1a_{-1}b_0 - 21a_1^2a_{-1}b_0 + 12a_0a_1^2b_0^2 + 18a_1a_0b_0^2 \\ & +78a_1a_0b_{-1} - 11w^2a_{-1}b_0 - 66a_0a_1^2b_{-1} - 10a_0b_0^2 + 80a_0b_{-1} \\ & -54a_{-1}a_0 - 10a_{-1}b_0 - 12a_1^2b_0^3 + 33a_1^3b_0b_{-1} + w^2a_0b_0^2 \\ & +7w^2a_1b_0b_{-1} + 10a_1b_0^3 - 6a_0^2b_0 + 54a_1a_0a_{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 = & -w^2a_1b_0^4 - 84a_1a_0^2b_{-1} + 4w^2a_1b_{-1}^2 - 24a_1^2b_{-1}^2 + 56a_1b_0^2b_{-1} \\ & -6a_0a_1b_0^3 - 78a_{-1}a_0b_0 + 3a_0^2a_1b_0^2 + 3a_{-1}a_1^2b_0^2 - 4w^2a_{-1}b_{-1} \\ & +12a_{-1}a_1b_0^2 + 72a_{-1}a_1b_{-1} - 54a_1^2b_{-1}b_0^2 - 11w^2a_{-1}b_0^2 \\ & +w^2a_0b_0^3 - 84a_1^2a_{-1}b_{-1} + 34a_0b_0b_{-1} + 36a_0^2b_{-1} - 48a_{-1}^2 \\ & +2a_0b_0^3 + 48a_{-1}a_0^2 - 2a_1b_0^4 - 172a_1b_{-1}^2 - 3a_0^3b_0 + 48a_1a_{-1}^2 \\ & +36a_1^3b_{-1}^2 + 6a_0^2b_0^2 + 172a_{-1}b_{-1} - 22a_{-1}b_0^2 + 84a_0a_1b_0b_{-1} \\ & +13w^2a_0b_0b_{-1} - 2w^2a_1b_{-1}b_0^2 - 18a_{-1}a_0a_1b_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_0 = & 110a_{-1}b_{-1}b_0 - 90a_1^2b_{-1}^2b_0 + 15a_{-1}b_0a_0^2 + 15a_{-1}a_1^2b_{-1}b_0 \\ & +75a_0a_1^2b_{-1}^2 + 30a_0a_1b_{-1}^2 - 5w^2a_{-1}b_{-1}b_0 + 10w^2a_0b_{-1}b_0^2 \\ & +15a_1b_0a_0^2b_{-1} + 10w^2a_0b_{-1}^2 - 10a_{-1}b_0^3 - 220a_0b_{-1}^2 \\ & +30a_{-1}a_0b_{-1} - 5w^2a_{-1}b_0^3 + 15a_{-1}^2a_1b_0 + 110a_1b_{-1}^2b_0 \\ & -10a_1b_{-1}b_0^3 + 20a_0b_{-1}b_0^2 - 30a_{-1}b_0^2a_0 - 5w^2a_1b_{-1}^2b_0 \\ & +60a_0^2b_{-1}b_0 - 90a_{-1}^2b_0 + 120a_{-1}a_1b_{-1}b_0 - 5w^2a_1b_{-1}b_0^3 \\ & -180a_{-1}a_0a_1b_{-1} + 75a_0a_{-1}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{-1} = & -172a_{-1}b_{-1}^2 + 172a_1b_{-1}^3 - 24a_{-1}^2b_{-1} + 36a_0^2b_{-1}^2 - 2a_{-1}b_0^4 \\
& -48a_1^2b_{-1}^3 - 54a_{-1}^2b_0^2 + 48a_1a_0^2b_{-1}^2 - 22a_1b_{-1}^2b_0^2 + 6a_0^2b_{-1}b_0^2 \\
& -84a_{-1}a_0^2b_{-1} - 6a_0a_{-1}b_0^3 - 34a_0b_{-1}^2b_0 + 48a_{-1}a_1^2b_{-1}^2 \\
& +3a_{-1}^2b_0^2a_1 + 3a_0^2a_{-1}b_0^2 + 4w^2a_{-1}b_{-1}^2 - 3a_0^3b_{-1}b_0 \\
& +72a_1a_{-1}b_{-1}^2 - w^2a_{-1}b_0^4 + 51a_0a_{-1}^2b_0 - 4w^2a_1b_{-1}^3 \\
& +w^2a_0b_{-1}b_0^3 + 12a_{-1}b_0^2a_1b_{-1} + 13w^2a_0b_{-1}^2b_0 - 2w^2a_{-1}b_0^2b_{-1} \\
& -11w^2a_1b_0^2b_{-1}^2 + 2a_0b_{-1}b_0^3 - 84a_{-1}^2a_1b_{-1} + 84a_{-1}a_0b_{-1}b_0 \\
& -78a_1b_{-1}^2a_0b_0 - 18a_{-1}a_0a_1b_{-1}b_0 + 36a_{-1}^3 + 56a_{-1}b_{-1}b_0^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{-2} = & 9a_0^3b_{-1}^2 - 12a_{-1}^3b_0^3 + 80a_0b_{-1}^3 + 33a_{-1}^3b_0 + 12a_0a_{-1}^2b_0^2 \\
& +4w^2a_0b_{-1}^3 + 10a_{-1}b_{-1}b_0^3 - 54a_0a_1b_{-1}^3 - 70a_{-1}b_{-1}^2b_0 \\
& -12a_{-1}^2b_{-1}b_0 - 66a_{-1}^2a_0b_{-1} + 78a_{-1}a_0b_{-1}^2 - 10a_1b_{-1}^3b_0 \\
& -6a_0^2b_{-1}^2b_0 - 10a_0b_{-1}^2b_0^2 + 18a_{-1}b_0^2a_0b_{-1} + w^2a_0b_{-1}^2b_0^2 \\
& -12a_{-1}b_0a_1b_{-1}^2 - 21a_{-1}b_0a_0^2b_{-1} - 11w^2a_1b_{-1}^3b_0 \\
& +54a_{-1}a_1a_0b_{-1}^2 - w^2a_{-1}b_0^3b_{-1} - 21a_{-1}^2a_1b_0b_{-1} \\
& +7w^2a_{-1}b_{-1}^2b_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{-3} = & 18a_{-1}b_0a_0b_{-1}^2 - 21a_{-1}^2a_0b_0b_{-1} - 12a_{-1}^3b_{-1} + 24a_{-1}^2b_{-1}^2 \\
& -20a_1b_{-1}^4 + 10a_0b_{-1}^3b_0 - w^2a_0b_{-1}^3b_0 + w^2a_{-1}b_{-1}^2b_0^2 - 12a_0^2b_{-1}^3 \\
& +9a_{-1}^3b_0^2 + 20a_{-1}b_{-1}^3 - 10a_{-1}b_{-1}^2b_0^2 + 4w^2a_{-1}b_{-1}^3 \\
& +12a_{-1}^2a_1b_{-1}^2 - 4w^2a_1b_{-1}^4 - 6a_{-1}^2b_0^2b_{-1} + 12a_{-1}a_0^2b_{-1}^2 \\
& -24a_{-1}a_1b_{-1}^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{-4} = & w^2a_{-1}b_{-1}^3b_0 - 2a_0b_{-1}^4 + 6a_{-1}^2b_{-1}^2b_0 + 2a_{-1}b_{-1}^3b_0 - 3a_{-1}^3b_0b_{-1} \\
& +3a_{-1}^2a_0b_{-1}^2 - 6a_{-1}a_0b_{-1}^3 - w^2a_0b_{-1}^4,
\end{aligned}$$

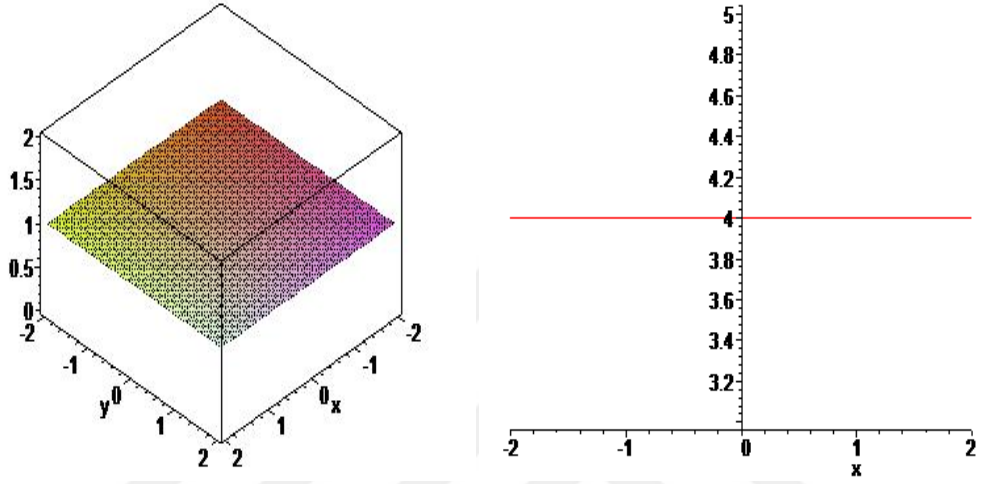
$e^{n\xi}$  tüm katsayıları sıfır olmalıdır. Maple Yazılımı kullanılarak aşağıdaki çözümler elde edilir.

$$\underline{1. Durum}: a_0 = a_1b_0, a_{-1} = a_1b_{-1} \tag{2.14}$$

eşitlikleri sağlanır. Bunlar (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = a_1 \quad (2.15)$$

elde edilir. Burada  $a_1$  keyfi parametredir.



Şekil 2.1. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (1. Durum)

Grafikler (2.15) eşitliğinde  $a_1 = 4$  için dalga çözümlerini gösterir.

2. Durum:

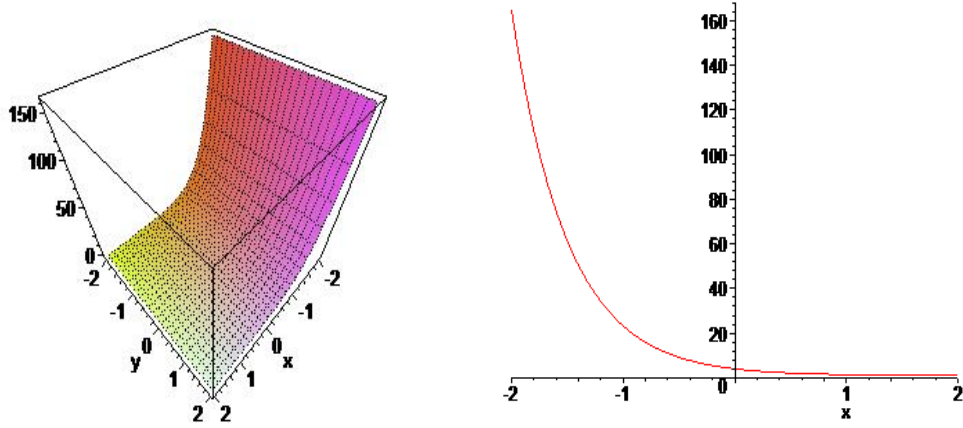
$$a_0 = 0, b_0 = 0, a_1 = 1, w = 2\sqrt{2}I, w = -2\sqrt{2}I, b_{-1} = 0 \quad (2.16)$$

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + e^{\xi}}{e^{\xi}} \quad (2.17)$$

elde edilir. Burada  $a_{-1}$  keyfi parametredir.





Şekil 2.2. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (2. Durum).

Grafikler (2.17) eşitliğinde  $a_{-1} = 3$  için dalga çözümlerini gösterir.

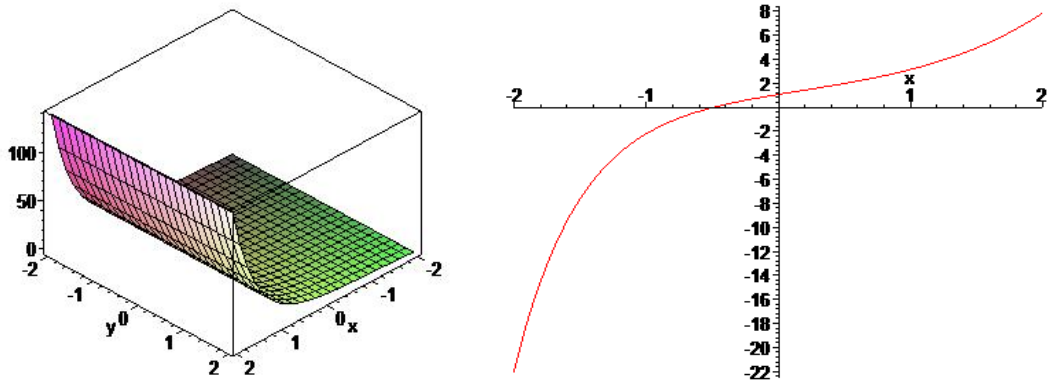
3. Durum:  $a_0 = 0, b_0 = 0, a_1 = 1 + \sqrt{2}, a_1 = 1 - \sqrt{2}, w = I\sqrt{2},$  (2.18)

$$w = -I\sqrt{2}, a_{-1} = -(1 + \sqrt{2})b_{-1} + 2b_{-1}, a_{-1} = -(1 - \sqrt{2})b_{-1} + 2b_{-1}$$

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{(-(1+\sqrt{2})b_{-1}+2b_{-1})e^{-\xi}+(1+\sqrt{2})e^{\xi}}{b_{-1}e^{-\xi}+e^{\xi}} \quad (2.19)$$

elde edilir. Burada  $b_{-1}$  keyfi parametredir.



Şekil 2.3. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (3. Durum)

Grafikler (2.19) eşitliğinde  $b_{-1} = 5$  için dalga çözümlerini gösterir.

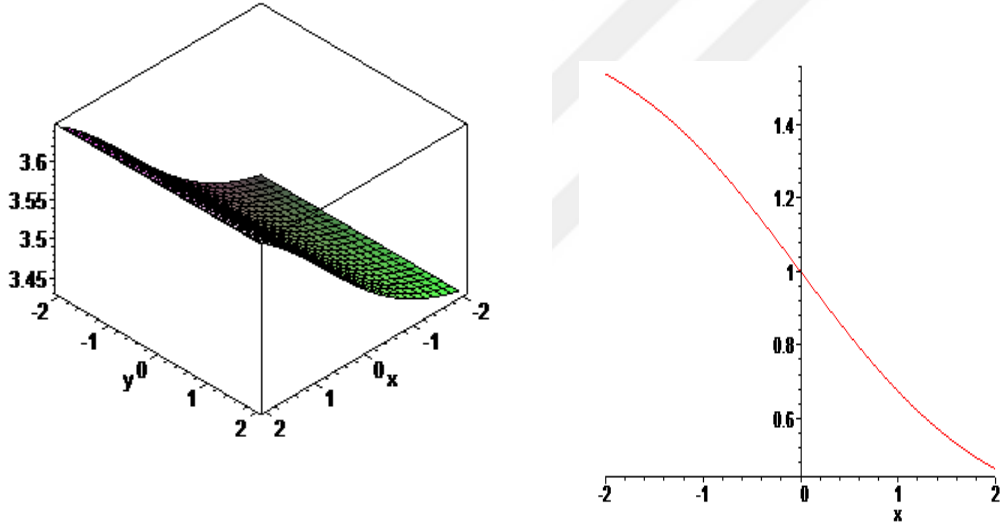
4. Durum:  $a_{-1} = 0, b_{-1} = 0, a_1 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, a_1 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, w = \frac{1}{2}I\sqrt{14},$  (2.20)

$$w = -\frac{1}{2}I\sqrt{14}, a_0 = -\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)b_0 + 2b_0, a_0 = -\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)b_0 + 2b_0$$

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{-(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})b_0+2b_0+(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})e^\xi}{b_0+e^\xi} \quad (2.21)$$

elde edilir. Burada  $b_0$  keyfi parametredir.



Şekil 2.4. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (4. Durum).

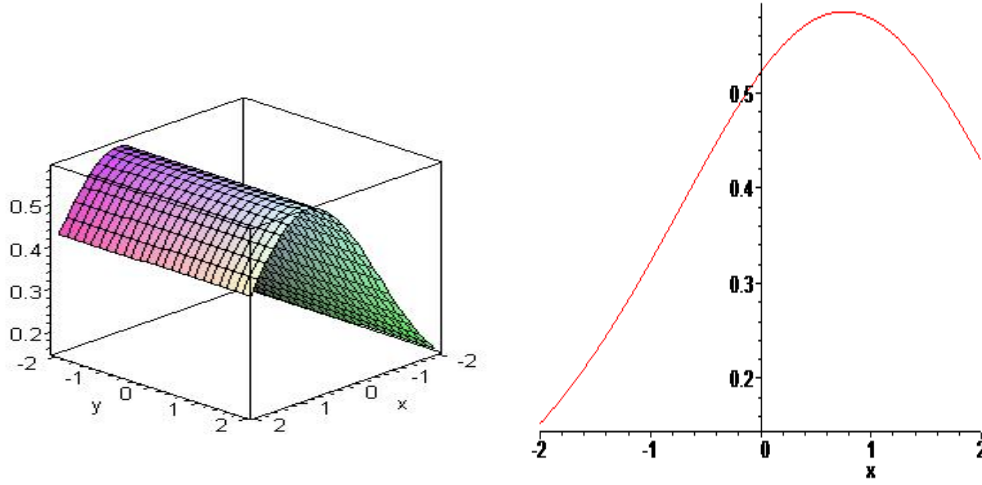
Grafikler (2.21) eşitliğinde  $b_0 = 2$  için dalga çözümlerini gösterir.

5. Durum:  $a_{-1} = 0, b_0 = a_0, a_1 = 0, w = I\sqrt{2}, w = -I\sqrt{2}, b_{-1} = \frac{1}{8}a_0^2$  (2.22)

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{a_0}{\frac{1}{8}a_0^2 e^{-\xi} + a_0 + e^\xi} \quad (2.23)$$

elde edilir. Burada  $a_0$  keyfi parametredir.



Şekil 2.5. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (5. Durum).

Grafikler (2.23) eşitliğinde  $a_0 = 6$  için dalga çözümlerini gösterir.

6. Durum:

$$a_{-1} = -a_0^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) a_0^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) b_0 a_0 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) b_0^2 + 2b_0 a_0 - \frac{1}{2} b_0^2$$

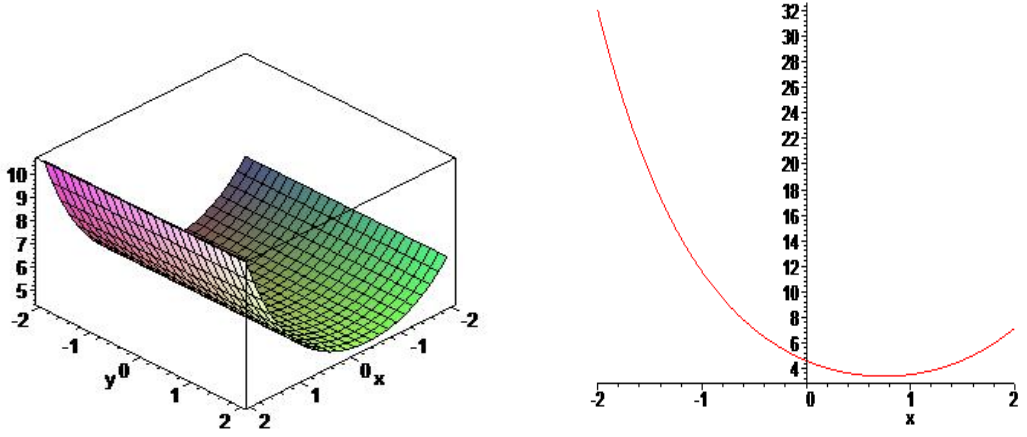
$$a_{-1} = -a_0^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) a_0^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) b_0 a_0 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) b_0^2 + 2b_0 a_0 - \frac{1}{2} b_0^2 \quad (2.24)$$

$$b_{-1} = b_0 a_0 - \frac{1}{2} a_0^2 - \frac{1}{4} b_0^2, \quad w = \frac{1}{2} I \sqrt{14}, \quad w = -\frac{1}{2} I \sqrt{14}, \quad a_1 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad a_1 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{\left(-a_0^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) a_0^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) b_0 a_0 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) b_0^2 + 2b_0 a_0 - \frac{1}{2} b_0^2\right) e^{-\xi} + a_0 + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) e^{\xi}}{\left(b_0 a_0 - \frac{1}{2} a_0^2 - \frac{1}{4} b_0^2\right) e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}} \quad (2.25)$$

elde edilir. Burada  $b_0$  ve  $a_0$  keyfi parametrelerdir.



Şekil 2.6. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (6. Durum).

Grafikler (2.25) eşitliğinde  $a_0 = 1$  ve  $b_0 = 1$  için dalga çözümlerini gösterir.

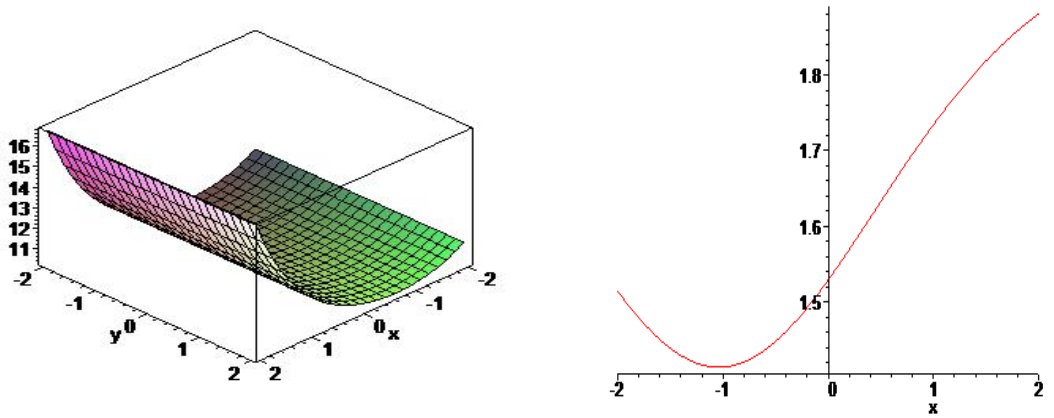
$$\underline{7. Durum:} \quad a_0 = \frac{b_0(a_1^2 - a_1 - 1)}{-1 + a_1}, \quad w = \sqrt{-6a_1 + 3a_1^2 - 2}, \quad (2.26)$$

$$w = -\sqrt{-6a_1 + 3a_1^2 - 2}, \quad b_{-1} = \frac{1}{8} \frac{b_0^2(2a_1^2 - 4a_1 + 1)}{(-1 + a_1)^2}, \quad a_{-1} = \frac{1}{8} \frac{b_0^2(2a_1^2 - 4a_1 + 1)a_1}{(-1 + a_1)^2}$$

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{\left(\frac{1b_0^2(2a_1^2 - 4a_1 + 1)a_1}{8(-1 + a_1)^2}\right)e^{-\xi} + \frac{b_0(a_1^2 - a_1 - 1)}{-1 + a_1} + a_1 e^{\xi}}{\left(\frac{1b_0^2(2a_1^2 - 4a_1 + 1)}{8(-1 + a_1)^2}\right)e^{-\xi} + b_0 + e^{\xi}} \quad (2.27)$$

elde edilir. Burada  $b_0$  ve  $a_1$  keyfi parametrelerdir.



Şekil 2.7. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (7. Durum).

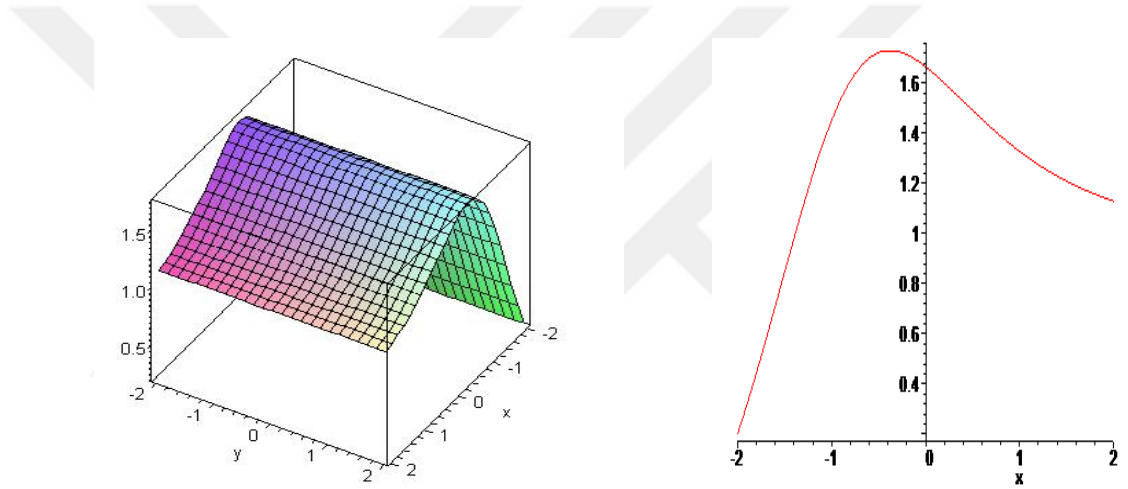
Grafikler (2.27) eşitliğinde  $a_1 = 2$  ve  $b_0 = 1$  için dalga çözümlerini gösterir.

$$\text{8. Durum: } a_{-1} = -\frac{1}{8}a_0^2, b_0 = 0, a_1 = 1, w = I\sqrt{5}, w = -I\sqrt{5}, b_{-1} = \frac{1}{8}a_0^2 \quad (2.28)$$

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{-a_0^2 e^{-\xi} + 8a_0 + 8e^\xi}{a_0^2 e^{-\xi} + 8e^\xi} \quad (2.29)$$

elde edilir. Burada  $a_0$  keyfi parametredir.



Şekil 2.8. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (8. Durum).

Grafikler (2.29) eşitliğinde  $a_0 = 1$  için dalga çözümlerini gösterir. Kesir mertebeden modifiye edilmiş kötü Boussinesq denkleminin tam çözümleri elde edildi. Şimdi Üstel Fonksiyon Yöntemi ile kesir mertebeden modifiye edilmiş iyi Boussinesq denkleminin tam çözümlerini elde edelim.

(2.12) denkleminde lineer olmayan en yüksek mertebeden terim ile en yüksek mertebeden lineer terimin dengelenmesine bakılır.  $u^{1\nu}$  ve  $u^2 u''$  dengelenmesi ile  $p = c = 1$  ve  $q = d = 1$  elde edilir.

$$\frac{-1}{B} [D_4 e^{4\xi} + D_3 e^{3\xi} + D_2 e^{2\xi} + D_1 e^\xi + D_0 + D_{-1} e^{-\xi} + D_{-2} e^{-2\xi} + D_{-3} e^{-3\xi} + D_{-4} e^{-4\xi}] = 0. \quad (2.30)$$

(2.30) denkleminin çözümleri için bütün katsayılar sıfır olmalıdır.

$$B = (b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + e^\xi)^5,$$

$$D_4 = w^2 a_1 b_0 - 3a_1^3 b_0 - 6a_1 a_0 + 6a_1^2 b_0 - w^2 a_0 + 3a_1^2 a_0,$$

$$\begin{aligned} D_3 = & 24a_1^2 b_{-1} - 12a_1 b_{-1} - 24a_1 a_{-1} + 12a_1^2 a_{-1} + 12a_1 b_0^2 + 12a_1 a_0^2 \\ & - 12a_1^3 b_{-1} - 4w^2 a_1 - 21a_0 a_1^2 b_0 - 6a_1^2 b_0^2 - 12a_0 b_0 + 4w^2 a_1 b_{-1} \\ & - w^2 a_0 b_0 + w^2 a_1 b_0^2 - 12a_0^2 + 12a_{-1} + 18a_1 b_0 a_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 = & -12a_1 b_0^3 - 72a_0 b_{-1} - 12a_1^2 b_0^3 - 12a_{-1} b_0 - 66a_1^2 b_{-1} a_0 \\ & + 12a_0 b_0^2 - 54a_{-1} a_0 + 9a_0^3 + 18a_1 b_0^2 a_0 - 11w^2 a_{-1} b_0 \\ & + 33a_1^3 b_{-1} b_0 + 12a_0 a_1^2 b_0^2 - 21a_1^2 b_{-1} b_0 + 54a_{-1} a_0 a_1 - 12a_{-1} a_1 b_0 \\ & + 84a_1 b_{-1} b_0 + 4w^2 a_0 b_{-1} + w^2 a_0 b_0^2 - 21a_1 b_0 a_0^2 \\ & - w^2 a_1 b_0^3 + 78a_1 b_{-1} a_0 - 12a_1^2 b_{-1} b_0 - 6a_0^2 b_0 + 7w^2 a_1 b_{-1} b_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 = & -3a_0^3 b_0 + 180a_1 b_{-1}^2 + 36a_0^2 b_{-1} + 48a_{-1} a_0^2 - 24a_1^2 b_{-1}^2 + 6a_0^2 b_0^2 \\ & + 48a_1 a_{-1}^2 + 36a_1^3 b_{-1}^2 - 180a_{-1} b_{-1} + 3a_{-1} a_1^2 b_0^2 - 18a_{-1} a_0 a_1 b_0 \\ & - 2w^2 a_1 b_0^2 b_{-1} - 11w^2 a_{-1} b_0^2 - 78a_{-1} a_0 b_0 + 13w^2 a_0 b_0 b_{-1} \\ & + 84a_1 b_{-1} a_0 b_0 + 51a_0 a_1^2 b_{-1} b_0 + 72a_{-1} a_1 b_{-1} - 84a_1 b_{-1} a_0^2 \\ & - 54a_1^2 b_{-1} b_0^2 + 60a_0 b_{-1} b_0 + 4w^2 a_1 b_{-1}^2 - 6a_0 a_1 b_0^3 - 48a_{-1}^2 \\ & + w^2 a_0 b_0^3 + 12a_{-1} a_1 b_0^2 - 84a_1^2 a_{-1} b_{-1} + 3a_0^2 a_1 b_0^2 - w^2 a_1 b_0^4 \\ & - 60a_1 b_{-1} b_0^2 - 4w^2 a_{-1} b_{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0 = & -30a_0 a_1 b_{-1}^2 + 75a_0 a_1^2 b_{-1}^2 + 10w^2 a_0 b_{-1}^2 + 240a_0 b_{-1}^2 \\ & + 120a_{-1} a_1 b_{-1} b_0 + 15a_1^2 a_{-1} b_{-1} b_0 - 90a_1^2 b_{-1}^2 b_0 - 90a_{-1}^2 b_0 \\ & - 30a_{-1}^2 a_0 b_0^2 + 15a_{-1} b_0 a_0^2 - 120a_1 b_{-1}^2 b_0 - 120a_{-1} b_{-1} b_0 \\ & - 30a_1 b_0^2 a_0 b_{-1} + 15a_1 a_{-1}^2 b_0 - 180a_0 a_{-1} a_1 b_{-1} + 10w^2 a_0 b_0^2 b_{-1} \\ & + 15a_1 b_0 a_0^2 b_{-1} + 75a_0 a_{-1}^2 - 5w^2 a_{-1} b_{-1} b_0 - 5w^2 a_1 b_0^3 b_{-1} \\ & - 5w^2 a_1 b_0 b_{-1}^2 - 5w^2 a_{-1} b_0^3 - 30a_0^3 b_{-1} + 60a_0^2 b_{-1} b_0 \\ & + 30a_0 a_{-1} b_{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{-1} = & 36a_{-1}^3 - 6a_0a_{-1}b_0^3 - 4w^2a_1b_{-1}^3 - 3a_0^3b_{-1}b_0 + 3a_0^2a_{-1}b_0^2 \\
& + 6a_0^2b_{-1}b_0^2 - w^2a_{-1}b_0^4 - 84a_{-1}^2a_1b_{-1} - 84a_0^2a_{-1}b_{-1} \\
& + 48a_1a_0^2b_{-1}^2 + 60a_0b_{-1}^2b_0 - 60a_{-1}b_{-1}b_0^2 + 3a_{-1}^2a_1b_0^2 \\
& + 4w^2a_{-1}b_{-1}^2 + 51a_0a_{-1}^2b_0 + 48a_{-1}a_1^2b_{-1}^2 + 72a_{-1}a_1b_{-1}^2 \\
& + 180a_{-1}b_{-1}^2 - 180a_1b_{-1}^3 - 48a_1^2b_{-1}^3 - 54a_{-1}^2b_0^2 - 24a_{-1}^2b_{-1} \\
& + 36a_0^2b_{-1}^2 + w^2a_0b_{-1}b_0^3 + 13w^2a_0b_{-1}^2b_0 - 78a_1b_{-1}^2a_0b_0 \\
& - 11w^2a_1b_0^2b_{-1}^2 - 18a_0a_{-1}a_1b_0b_{-1} + 12a_{-1}b_0^2a_1b_{-1} \\
& - 2w^2a_{-1}b_0^2b_{-1} + 84a_{-1}a_0b_0b_{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{-2} = & w^2a_0b_{-1}^2b_0^2 + 54a_{-1}a_0a_1b_{-1}^2 - 21a_{-1}a_0^2b_0b_{-1} - 11w^2a_1b_{-1}^3b_0 \\
& + 18a_{-1}b_0^2a_0b_{-1} + 7w^2a_{-1}b_{-1}^2b_0 - 12a_{-1}b_0a_1b_{-1}^2 \\
& - 21a_{-1}^2a_1b_0b_{-1} - w^2a_{-1}b_0^3b_{-1} + 9a_0^3b_{-1}^2 - 72a_0b_{-1}^3 \\
& + 33a_{-1}^3b_0 - 12a_{-1}^2b_0^3 - 66a_{-1}^2a_0b_{-1} + 84a_{-1}b_{-1}^2b_0 \\
& - 12a_1b_{-1}^3b_0 + 78a_{-1}a_0b_{-1}^2 - 6a_0^2b_{-1}^2b_0 + 4w^2a_0b_{-1}^3 \\
& - 12a_{-1}b_{-1}b_0^3 + 12a_0b_{-1}^2b_0^2 + 12a_0a_{-1}^2b_0^2 - 54a_1b_{-1}^3a_0 \\
& - 12a_{-1}^2b_0b_{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{-3} = & 24a_{-1}^2b_{-1}^2 + 12a_1b_{-1}^4 - 12a_{-1}b_{-1}^3 + 9a_{-1}^3b_0^2 - 12a_0^2b_{-1}^3 \\
& - 12a_{-1}^3b_{-1} + 12a_{-1}a_0^2b_{-1}^2 + 12a_{-1}b_{-1}^2b_0^2 - 12a_0b_{-1}^3b_0 \\
& + w^2a_{-1}b_{-1}^2b_0^2 - 21a_{-1}^2a_0b_{-1}b_0 + 18a_{-1}a_0b_{-1}^2b_0 \\
& - w^2a_0b_{-1}^3b_0 + 12a_{-1}^2a_1b_{-1}^2 - 4w^2a_1b_{-1}^4 - 6a_{-1}^2b_0^2b_{-1} \\
& + 4w^2a_{-1}b_{-1}^3 - 24a_{-1}a_1b_{-1}^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{-4} = & w^2a_{-1}b_{-1}^3b_0 - 3a_{-1}^3b_{-1}b_0 - w^2a_0b_{-1}^4 - 6a_{-1}a_0b_{-1}^3 + 6a_{-1}^2b_{-1}^2b_0 \\
& + 3a_{-1}^2a_0b_{-1}^2,
\end{aligned}$$

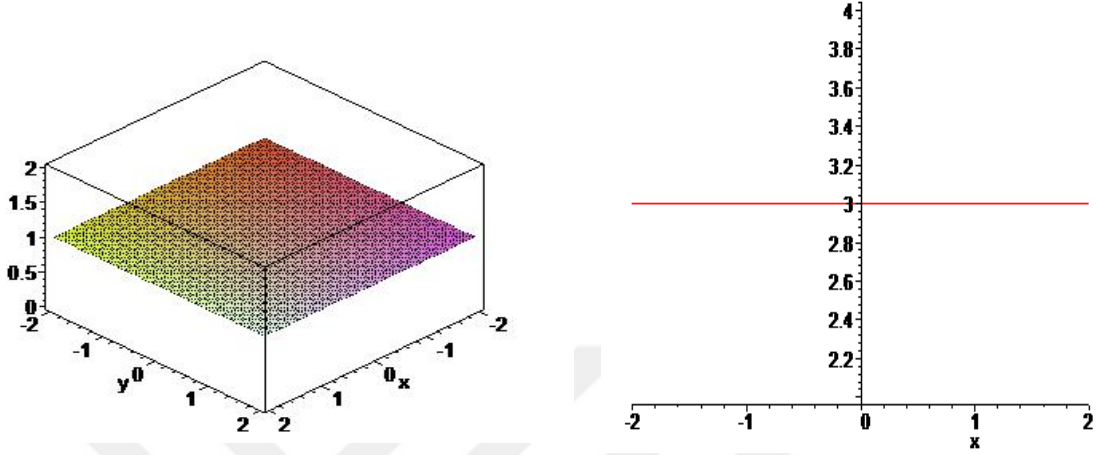
$e^{n\xi}$  tüm katsayıları sıfır olmalıdır. Maple Yazılımı kullanılarak aşağıdaki çözümler elde edilir.

$$\underline{1. Durum}: a_0 = a_1b_0, a_{-1} = a_1b_{-1}, \tag{2.31}$$

eşitlikleri sağlanır. Bunlar (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = a_1 \quad (2.32)$$

elde edilir. Burada  $a_1$  keyfi parametredir.



Şekil 2.9. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (1. Durum).

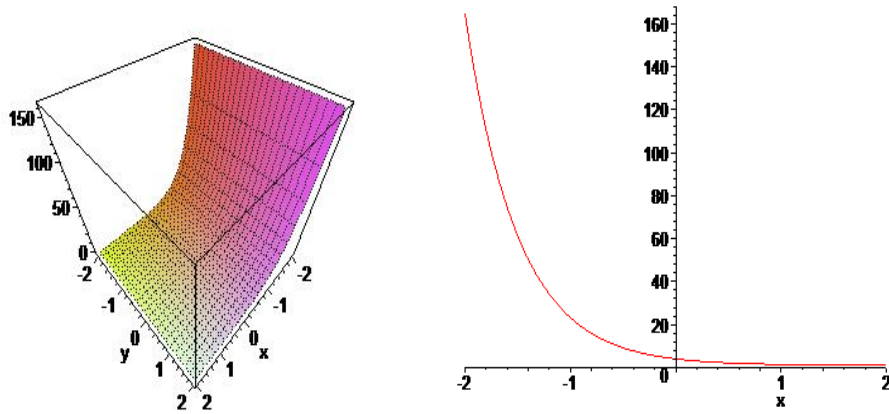
Grafikler (2.32) eşitliğinde  $a_1 = 3$  için dalga çözümlerini gösterir.

2. Durum:  $a_0 = 0, b_0 = 0, a_1 = 1, w = 0, b_{-1} = 0$  (2.33)

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + e^{\xi}}{e^{\xi}} \quad (2.34)$$

elde edilir. Burada  $a_{-1}$  keyfi parametredir.



Şekil 2.10. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (2. Durum).



Grafikler (2.34) eşitliğinde  $a_{-1} = 3$  için dalga çözümlerini gösterir.

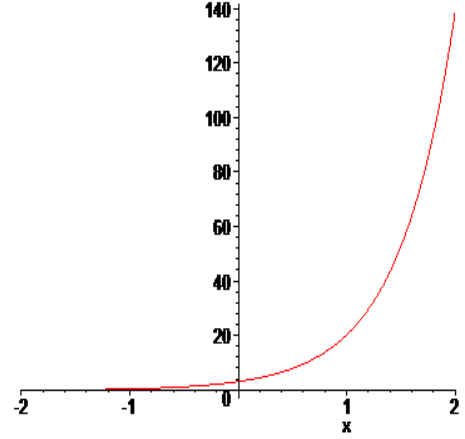
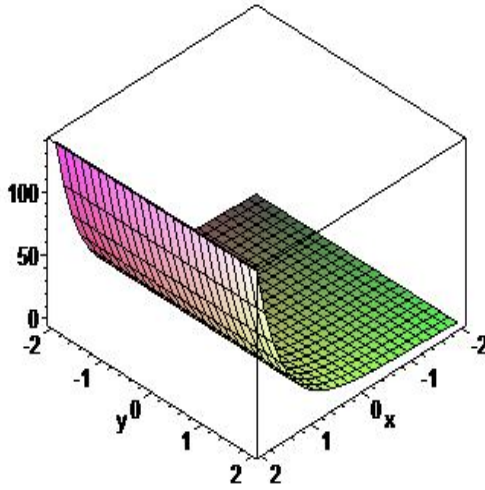
3. Durum:  $a_0 = 0, b_0 = 0, a_1 = 1 + I\sqrt{2}, a_1 = 1 - I\sqrt{2}, w = I\sqrt{6}, w = -I\sqrt{6}$

$$a_{-1} = -(1 + I\sqrt{2})b_{-1} + 2b_{-1}, a_{-1} = -(1 - I\sqrt{2})b_{-1} + 2b_{-1} \quad (2.35)$$

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{-(1+I\sqrt{2})b_{-1}+2b_{-1}}{b_{-1}e^{-\xi}+e^{\xi}}e^{-\xi} + \frac{(1-I\sqrt{2})b_{-1}+2b_{-1}}{b_{-1}e^{-\xi}+e^{\xi}}e^{\xi} \quad (2.36)$$

elde edilir. Burada  $b_{-1}$  keyfi parametredir.



Şekil 2.11. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (3. Durum).

Grafikler (2.36) eşitliğinde  $b_{-1} = 1$  için dalga çözümlerini gösterir.

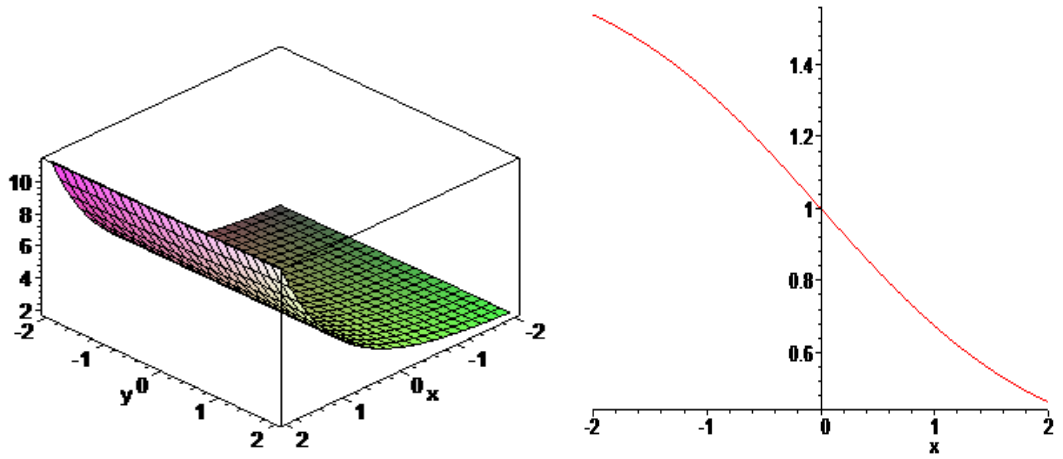
4. Durum:  $a_{-1} = 0, b_{-1} = 0, a_1 = 1 + \frac{1}{2}I\sqrt{2}, a_1 = 1 - \frac{1}{2}I\sqrt{2}, w = \frac{3}{2}I\sqrt{2}, w = -\frac{3}{2}I\sqrt{2}$  (2.37)

$$w = -\frac{3}{2}I\sqrt{2}, a_0 = -\left(1 - \frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)b_0 + 2b_0, a_0 = -\left(1 + \frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)b_0 + 2b_0$$

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{-(1-\frac{1}{2}I\sqrt{2})b_0+2b_0+(1-\frac{1}{2}I\sqrt{2})e^{\xi}}{b_0+e^{\xi}} \quad (2.38)$$

elde edilir. Burada  $b_0$  keyfi parametredir.



Şekil 2.12. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (4. Durum).

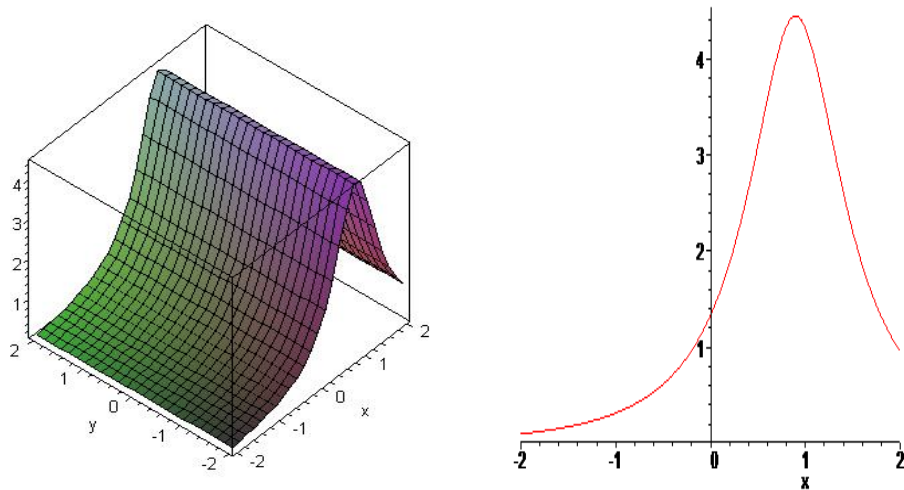
Grafikler (2.38) eşitliğinde  $b_0 = 1$  için dalga çözümlerini gösterir.

5. Durum:  $a_{-1} = 0, b_0 = -a_0, a_1 = 0, w = 0, b_{-1} = \frac{3}{8}a_0^2$  (2.39)

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{a_0}{\frac{3}{8}a_0^2 e^{-\xi} - a_0 + e^\xi} \quad (2.40)$$

elde edilir. Burada  $a_0$  keyfi parametredir.



Şekil 2.13. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (5. Durum).

Grafikler (2.40) eşitliğinde  $a_0 = 4$  için dalga çözümlerini gösterir.

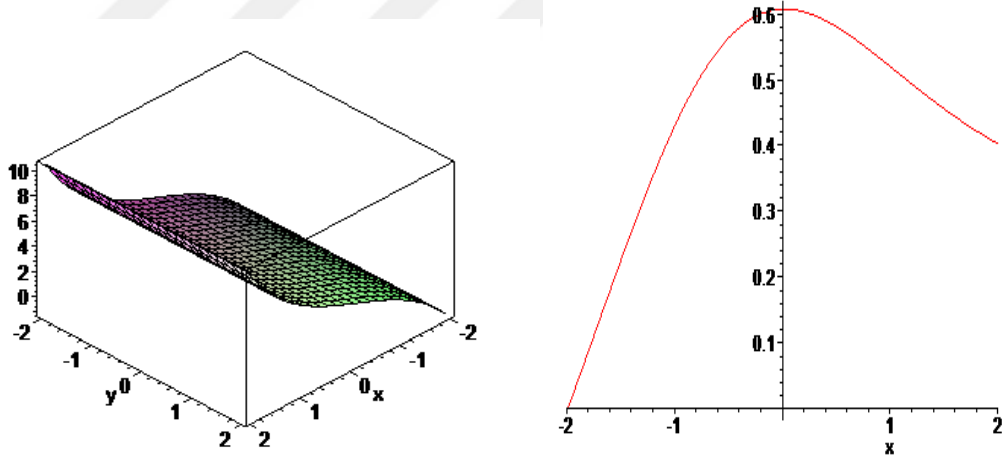
$$\begin{aligned} \underline{6. Durum:} \quad a_{-1} &= a_0^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right) a_0^2 + \left(1 + \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right) b_0 a_0 - \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right) b_0^2 \\ &- 2b_0 a_0 + \frac{3}{2} b_0^2, \quad b_{-1} = -b_0 a_0 + \frac{1}{2} a_0^2 + \frac{3}{4} b_0^2, \quad w = \frac{3}{2} I\sqrt{2}, \quad w = -\frac{3}{2} I\sqrt{2} \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} a_{-1} &= a_0^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right) a_0^2 + \left(1 - \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right) b_0 a_0 - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right) b_0^2 - 2b_0 a_0 + \frac{3}{2} b_0^2, \\ a_1 &= 1 - \frac{1}{2} I\sqrt{2}, \quad a_1 = 1, \end{aligned}$$

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{\left( a_0^2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right) a_0^2 + \left(1 + \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right) b_0 a_0 - \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right) b_0^2 - 2b_0 a_0 + \frac{3}{2} b_0^2 \right) e^{-\xi + a_0 + \left(1 - \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right) e^\xi}}{\left( -b_0 a_0 + \frac{1}{2} a_0^2 + \frac{3}{4} b_0^2 \right) e^{-\xi + b_0 + e^\xi}} \quad (2.42)$$

elde edilir. Burada  $a_0$  ve  $b_0$  keyfi parametrelerdir.



Şekil 2.14. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (6. Durum).

Grafikler (2.42) eşitliğinde  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 1$  için dalga çözümlerini gösterir.

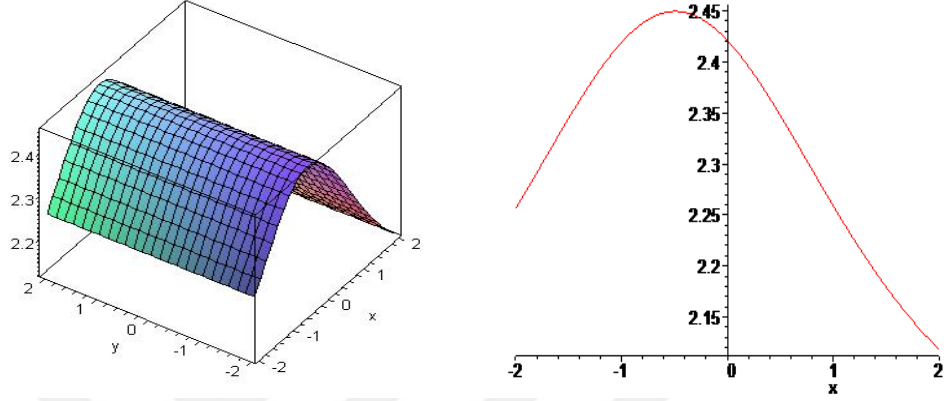
$$\underline{7. Durum:} \quad a_0 = \frac{b_0(a_1^2 - a_1 + 1)}{-1 + a_1}, \quad w = \sqrt{-6a_1 + 3a_1^2}, \quad w = -\sqrt{-6a_1 + 3a_1^2} \quad (2.43)$$

$$b_{-1} = \frac{1}{8} \frac{b_0^2(2a_1^2 - 4a_1 + 3)}{(-1 + a_1)^2}, \quad a_{-1} = \frac{1}{8} \frac{b_0^2(2a_1^2 - 4a_1 + 3)a_1}{(-1 + a_1)^2}$$

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{\left(\frac{1b_0^2(2a_1^2-4a_1+3)a_1}{8(-1+a_1)^2}\right)e^{-\xi} + \frac{b_0(a_1^2-a_1+1)}{-1+a_1} + a_1e^\xi}{\left(\frac{1b_0^2(2a_1^2-4a_1+3)}{8(-1+a_1)^2}\right)e^{-\xi} + b_0 + e^\xi} \quad (2.44)$$

elde edilir. Burada  $a_1$  ve  $b_0$  keyfi parametrelerdir.



Şekil 2.15. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (7. Durum).

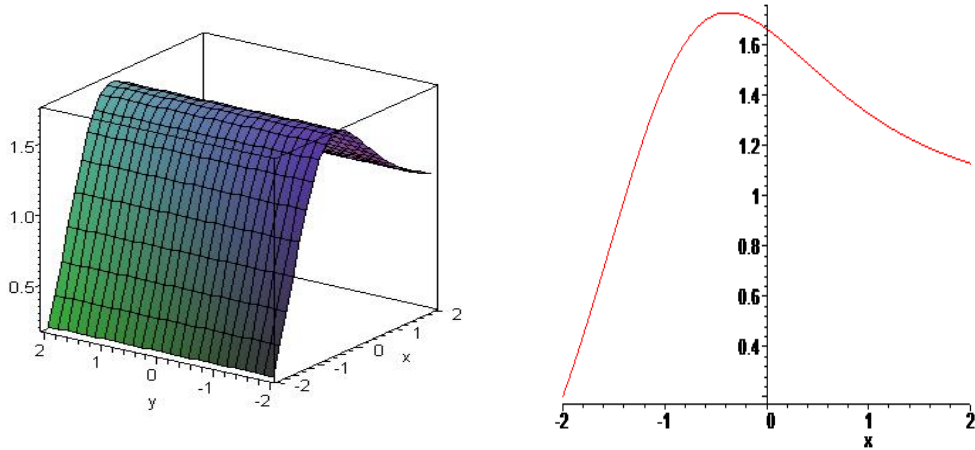
Grafikler (2.44) eşitliğinde  $a_1 = 2$ ,  $b_0 = 1$  için dalga çözümlerini gösterir.

**8. Durum:**  $a_{-1} = \frac{1}{8}a_0^2$ ,  $b_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $w = I\sqrt{3}$ ,  $w = -I\sqrt{3}$ ,  $b_{-1} = \frac{1}{8}a_0^2$  (2.45)

olup (2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{-a_0^2e^{-\xi} + 8a_0 + 8e^\xi}{a_0^2e^{-\xi} + 8e^\xi} \quad (2.46)$$

elde edilir. Burada  $a_0$  keyfi parametredir.



Şekil 2.16. Hareketli dalga çözümlerinin 3D ve 2D grafikleri (8. Durum).

Grafikler (2.46) eşitliğinde  $a_0 = 1$  için dalga çözümlerini gösterir.

**Not:** Bölüm 2'deki (2.11) ve (2.12) denklemlerinin tüm çözümleri Maple yardımıyla doğrulandı.

Bu bölümde, kesir türevli modifiye edilmiş kötü ve iyi Boussinesq denklemlerinin yeni tam çözümleri elde edildi. Kesir türevli modifiye edilmiş kötü ve iyi Boussinesq denklemleri hareketli dalga dönüşümü yardımıyla adi diferansiyel denkleme dönüştürüldü ve literatürdeki önceki çalışmalardan farklı olan üstel fonksiyon yöntemi kullanılarak yeni tam çözümler elde edildi. Bu sonuçlar, üstel fonksiyon yönteminin matematiksel fizik ve lineer olmayan dinamik sistemlerde oluşum denklemlerinin tam çözümlerini elde etmek için güçlü ve etkili bir yöntem olduğunu göstermektedir.

### 3. BÖLÜM

#### ***SIQRV* MODELİ, KESİRSEL *SIQRV* MODELİNİN UYGULAMASI VE KARARLILIK ANALİZİ**

Salgın bir hastalığın matematiksel modellenmesi hastalığın dinamikleri açısından önemli bir araçtır. Modellerin oluşturulması ve analizi; hastalığın seyri için varsayımlarda bulunmayı, hastalık için çeşitli parametreler geliştirilmesi ve bu parametrelerin yorumlanması, hastalığın yayılması vb. konuları aydınlatır. Bu bölümde *SIQR* (Hassas-Enfekte-Karantina-İyileşmiş) salgın hastalık modeline aşılınmış bireyler sınıfı eklenerek yeni bir *SIQRV* modeli elde edildi. Yeni oluşturulan *SIQRV* modelinde toplam nüfus beş bölüme ayrılmıştır. Duyarlı birey sınıfı (*S*), enfektif birey sınıfı (*I*), karantinada olan birey sınıfı (*Q*), iyileşmiş bireylerin sınıfı (*R*) ve aşılınmış bireylerin sınıfı (*V*) ile ilgili matematiksel analizler yapılarak nümerik sonuçlar Euler methodu yardımı ile elde edildi ve grafikler çizildi.

Pandemi; dünyada birden fazla ülkede veya kıtada çok geniş bir alanda yayılan ve etkisini gösteren salgın hastalıklara verilen genel isimdir. Pandemi, Dünya Sağlık Örgütü (WHO) tarafından ilan edilir. COVID-19 salgını Çin'in Hubei eyaletinin Wuhan şehrinde Aralık 2019 tarihinde ortaya çıktı. O zamandan bu yana yayılmaya devam etmiş ve hala devam eden bir pandemiye neden olmuştur. COVID-19 salgını, yayılması ve ölüm oranının yüksek oluşu nedeniyle dünya genelinde uluslararası pandemi olarak ilan edilmiştir. COVID-19 virüsünün çok hızlı yayılması, mutasyonlar geçirerek güçlenmesi, insanların tedbirlere yeterince özen göstermemesi ve henüz hastalığı önleyecek kesin bir ilacının bulunamamış olması bütün insanlığın endişelerini artırmaya devam etmektedir. COVID-19 gibi salgın hastalıkların seyri, salgını etkileyen parametrelerle yakından ilgilidir. Bu parametrelere bağlı matematiksel modeller ise gerek mevcut durum gerekse olabilecek senaryoların takip ve kontrol edilebilmesi için en güvenilir yöntemlerin başında gelmektedir. Bir salgın hastalığın ilerleyiş şekli ve salgında rolü olan faktörlerin pandemi üzerindeki etkilerinin belirlenmesi, ilgili otoriteler için hayati önem taşır. Çünkü yapılacak planlamalardan alınacak önlemlere kadar birçok karar bu sonuçlara bağlıdır [24].

Matematiksel modeller, bulaşıcı hastalıkların yayılmasını ve kontrolünü analiz etmede önemli araçlar haline gelmiştir. Hastalıkların dinamiklerini tanımlayan matematiksel model, epidemiyolojik örüntülerin ve hastalık kontrolünün daha iyi anlaşılmasında uzun süredir önemli bir rol oynamaktadır. Matematiksel modeller halk sağlığı için karar verme politikalarında faydalıdır. Matematiksel epidemiyolojinin en önemli ilgi alanlarından biri salgın hastalığın kontrolü ve ardından tamamen yok olmasını sağlamaktır [25-27]. Son yıllarda iletim hızı, tedavi planları, karantina, aşılama, medya aracılığıyla farkındalık programları ve sağlık çalışanları gibi bazı yeni faktörlerin eklendiği klasik epidemiyolojik modeller vb. araştırılmıştır [28]. Matematiksel modellemede tedavi yöntemlerinin göz önünde bulundurulması, salgın sırasındaki gerçek durumları tanımlamak için önemli bir adım olmuştur. Salgın hastalıkların matematiksel modellemesi, bir hastalığın yayılmasını etkileyen mekanizmaların anlaşılmasını sağladığı gibi hastalık ve kontrol stratejileri önerir. Bu sebeple matematiksel modeller bilgisayar simülasyonları, hastalıkların yayılmasının incelenmesi ve kontrol altında tutulması ilgili çalışmalar için önemli araç olmuştur. Teknoloji, mimarlık, mühendislik, sağlık-ekonomi politikaları, acil durum planlanması, risk değerlendirmesi, kontrol programı değerlendirmesi ve optimizasyon gibi birçok alanda matematiksel modelleme kullanılmaktadır [28].

Salgın hastalıkların modellenmesi popülasyonun belirli sınıflara bölünmesi ile olur ve birçok modelleme süreci bu şekilde başlar. Bu sınıflama bireyleri hassas, enfekte, karantina, hastalığa maruz kalmış, anneden bağışıklık kazanmış, iyileşmiş kişiler vb. gibi belirgin sınıflara böler. Salgın hastalık modelleri zaman içerisinde modifiye edilerek geliştirilmiştir. Salgın hastalıklarla yapılan çalışmalar literatürdeki kaynaklarda [24-37] yer almaktadır. Salgın hastalıklar literatürde SI, SIS, SIR, SIRS, SEIS, SEIR, MSIR, MSEIR, SIQR, SEIQR, SVIR şeklinde kısaltmalar kullanılarak kategorize edilmiş ve bunların her biri için farklı matematiksel modeller oluşturulmuştur. Bilinen ilk klasik salgın hastalık modeli 1920'lerin sonunda Kermack ve Mckendrick tarafından geliştirildi [29]. Salgın hastalığı yok etmek veya kontrol altına almak için birçok etkili strateji, aşı ve ilaç tedavisi yöntemini kullanır. Aşı ve ilaç tedavisi, matematiksel biyolojinin en önemli ilgi alanıdır. Biz bu çalışmada *SIQR* modeline *V* kompartımanını (aşılama) ekleyerek yeni bir *SIQRV* matematiksel modeli oluşturduk. Bu model, aşılama

ile enfekte sayısının azalması ve salgının erken aşamada kontrol altına alınmasının önemini ortaya koymuştur [32-36].

### 3.1. SIQRV Modeli

SIQRV modeli, bir topluluğu temel olarak beş ana gruba ayırır. Birincisi hassas bireyler, ikincisi enfekte olmuş bireyler, üçüncüsü karantinada olan bireyler, dördüncüsü iyileşmiş bireyler ve beşincisi aşılınmış olan bireylerdir. Bu modelde kullanılan değişkenleri açıklayalım.

### 3.2. Modelde Kullanılan Değişkenler

$S$ ,  $I$ ,  $Q$ ,  $R$  ve  $V$  gruplarının birey sayılarını diferansiyel denklem sistemi şeklinde ifade edelim.

$$\frac{dS}{dt} = bN - bS - \frac{\beta SI}{N} - \sigma S + \theta V + \vartheta R ,$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - bI - \gamma I - kI + \frac{\beta IV}{N} ,$$

$$\frac{dQ}{dt} = kI - bQ - \gamma Q , \tag{3.1}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \gamma Q - bR - \vartheta R ,$$

$$\frac{dV}{dt} = \sigma S - \theta V - bV - \frac{\beta IV}{N} ,$$

$$S(0) = S_0 , I(0) = I_0 , Q(0) = Q_0 , R(0) = R_0 , V(0) = V_0 , S + I + Q + R + V = N .$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dQ}{dt} + \frac{dR}{dt} + \frac{dV}{dt} .$$

Sistemde kullanılan değişkenler:

$S(t)$  : Popülasyondaki hassas bireylerin sayısı



$I(t)$  : Popülasyondaki enfektif bireylerin sayısı

$Q(t)$ : Popülasyondaki karantinada olan bireylerin sayısı

$R(t)$  : Popülasyondaki bağışıklığa sahip bireylerin sayısı

$V(t)$ : Popülasyondaki aşılannmış bireylerin sayısı

$N(t)$  : Toplam popülasyon sayısı

Sistemde kullanılan parametreler:

$\beta$ : Bulaştırma katsayısı

$\sigma$ : Aşılama oranı

$b$ : Doğum ve ölüm oranı

$\theta$ : Aşının korumasının düşme oranı

$\gamma$ : İyileşme oranı

$\vartheta$ : İyileşenlerin bağışıklığını kaybetme oranı

$k$ : Enfekte gruptan karantina grubuna geçenlerin oranı

Popülasyonda dışarıdan göç alımı, dışarıya göç verme olmadığı düşünöldü. Ayrıca popülasyondaki her bireyin aynı olasılıkta bulaştırma oranına sahip olduğu kabul edilmiştir. Yaş, cinsiyet, sosyal statü ve ırk enfekte olma olasılığını etkilememektedir. Kalıtsal bağışıklık yoktur. Doğal doğum ve ölüm oranları modele dahil edilmiştir. Tüm doğumlar hassas sınıfa girmiş kabul edilir [27-29].

### **3.3. SIQRV Modelinin Nümerik Simölasyonu**

Bu bölümde SIQRV modelinin nümerik simölasyonunu ve grafiklerini göstereceğiz. Matematiksel modellerin birçoğu lineer olmayan sistemlerden oluşur ve bu sistemlerin çözümlerinin bulunuşu oldukça zor olabilir. Bu durumda nümerik çözümler oldukça önem taşımaktadır. Nümerik yöntemlerden bir tanesi de Euler metodudur [40].

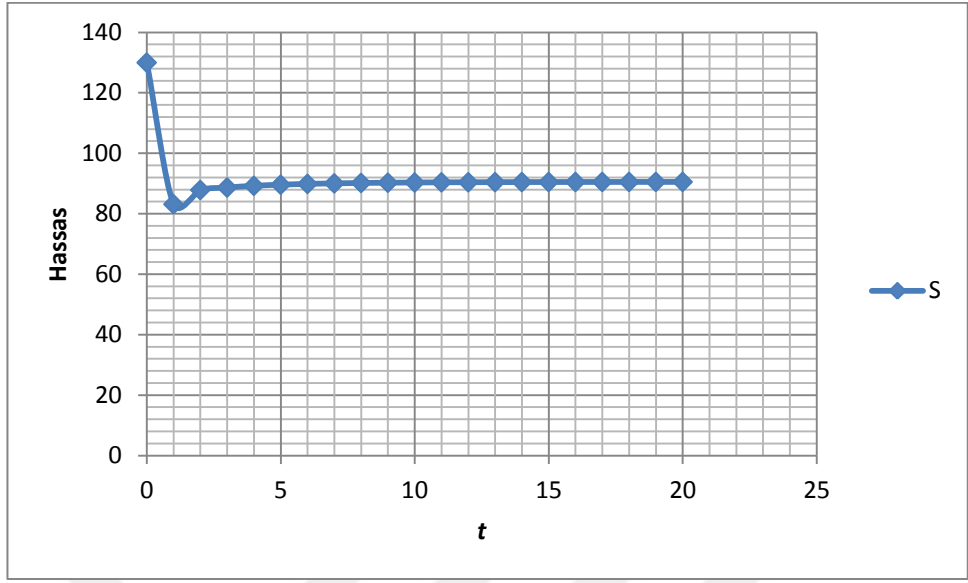
$N = 200, S = 130, I = 25, Q = 10, R = 20, V = 15, \beta = 0.6, \gamma = 0.25, \vartheta = 0.02, k = 0.001, b = 0.02, \theta = 0.005, \sigma = 0.55$  parametrelerini ele alalım.

$$\begin{aligned}
 S(k+1) &= S(k) + bN - bS(k) - \frac{\beta S(k)I(k)}{N} - \sigma S(k) + \theta V(k) + \vartheta R(k) \\
 I(k+1) &= I(k) + \frac{\beta S(k)I(k)}{N} - bI(k) - \gamma I(k) - kI(k) + \frac{\beta I(k)V(k)}{N} \\
 Q(k+1) &= Q(k) + kI(k) - bQ(k) - \gamma Q(k) \\
 R(k+1) &= R(k) + \gamma I(k) + \gamma Q(k) - bR(k) - \vartheta R(k) \\
 V(k+1) &= V(k) + \sigma S(k) - \theta V(k) - bV(k) - \frac{\beta I(k)V(k)}{N}
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

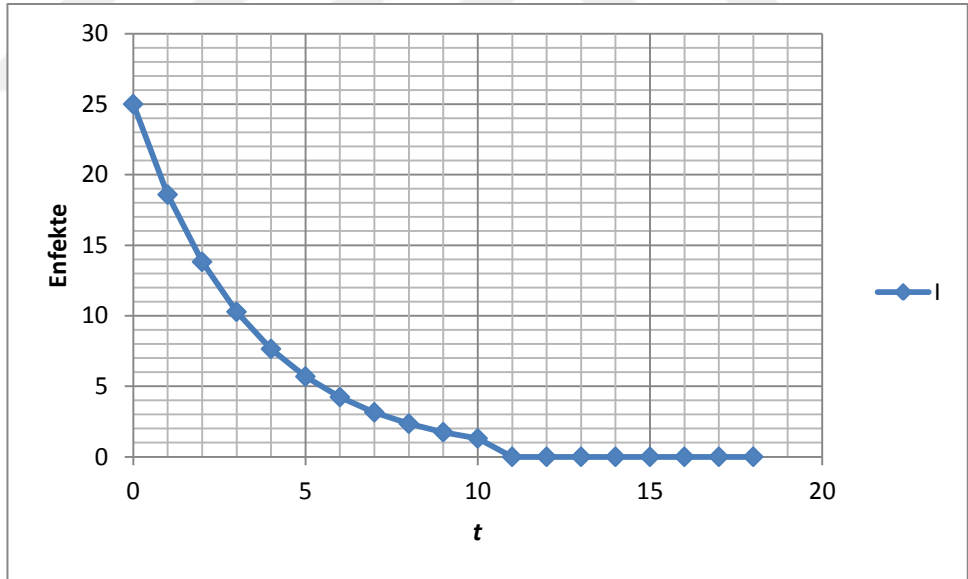
$\forall k = 0, 1, \dots, n - 1$  için aşağıdaki tabloyu elde edebiliriz.

Tablo 3.1.  $S, I, Q, R$  ve  $V$ 'nin  $t$  anındaki değerleri.

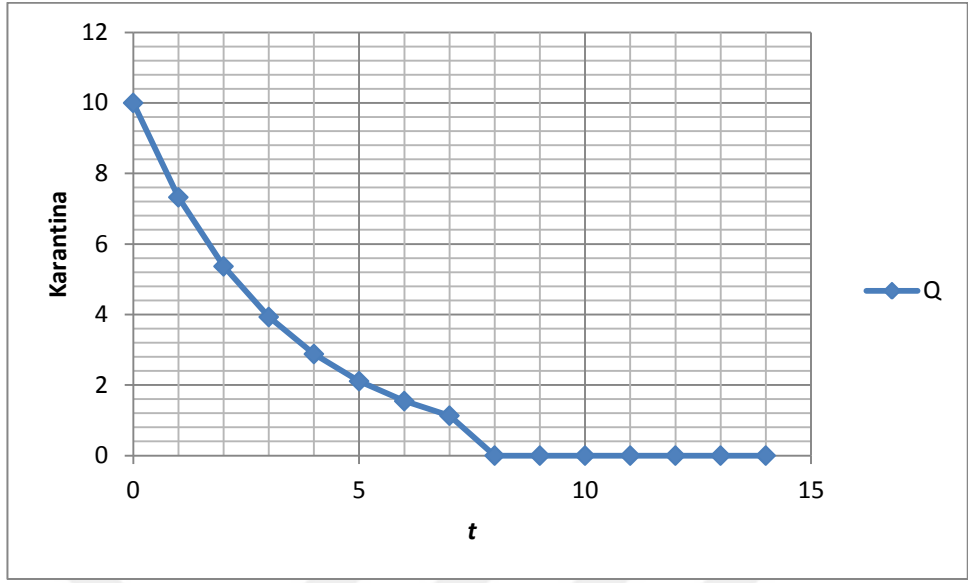
$t$ (gün)	$S(t)$	$I(t)$	$Q(t)$	$R(t)$	$V(t)$
0	130,00	25,00	10,00	20,00	15,00
1	83,16	18,58	7,32	27,95	86,08
2	87,85	13,82	5,36	33,31	116,80
3	88,67	10,28	3,93	36,77	130,60
4	89,25	7,64	2,87	38,85	137,33
5	89,62	5,69	2,10	39,93	141,09
6	89,87	4,23	1,54	40,28	143,63
7	90,05	3,15	1,13	40,12	145,64
8	90,18	2,34	0,83	39,58	147,43
9	90,27	1,74	0,60	38,79	149,10
10	90,34	1,30	0,44	37,83	150,70
11	90,39	0,97	0,32	36,75	152,26
12	90,43	0,72	0,23	35,61	153,76
13	90,46	0,53	0,17	34,42	155,22
14	90,48	0,40	0,12	33,22	156,63



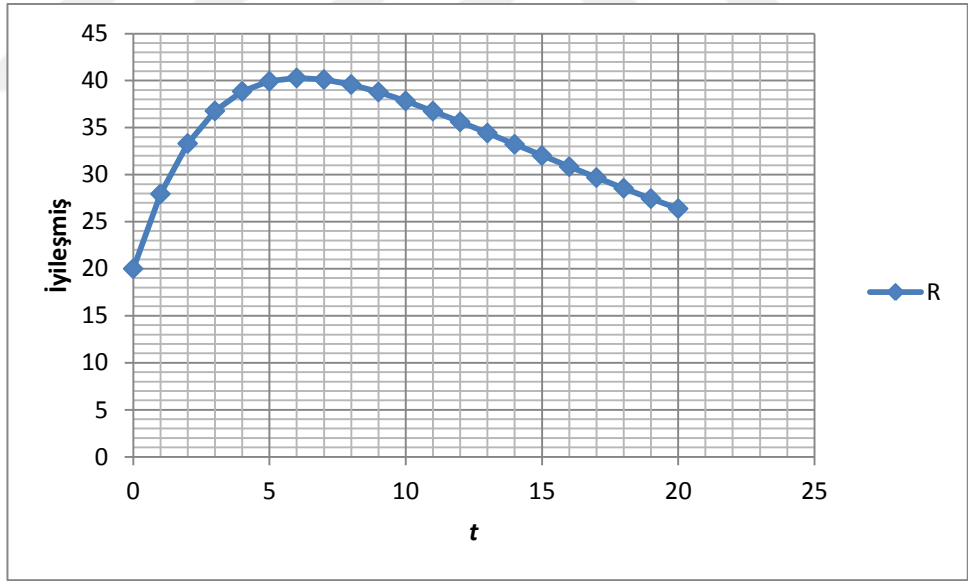
Şekil 3.1. *S* kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği



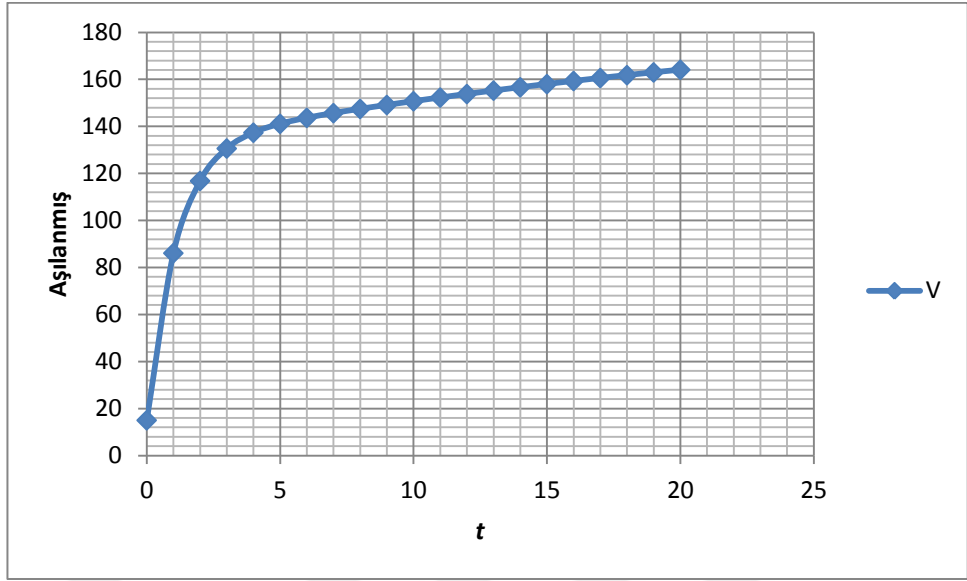
Şekil 3.2. *I* kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği



Şekil 3.3.  $Q$  kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği



Şekil 3.4.  $R$  kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği



Şekil 3.5.  $V$  kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği

### 3.4. Sonuçlar

Bu bölümde  $SIQR$  modeline  $V$  kompartıman modeli eklenerek yeni bir model elde edildi. Aşılama oranı ve aşının koruyuculuğu kaybetme oranı modellemeye dahil edilerek, aşılama ile birlikte salgının ne şekilde değişeceği nümerik simülasyonlar yardımıyla incelendi. Elde edilen grafiklerde hassas bireylerin zamanla azalarak sabit bir şekilde ilerlediği, enfekte bireylerin zamanla azalarak sifıra yaklaştığı, karantinada olan bireylerin zamanla azalarak sifıra yaklaştığı, iyileşen bireylerin  $t = 5$  zamanında maksimum değerini aldıktan sonra zamanla azaldığı ve aşılanan bireylerin zamanla hızlı bir şekilde arttığı gözlemlenmiştir.

### 3.5. Kesirli Türev ve Kesirli Mertebeden $SIQRV$ Modeli

**Tanım 3.1.**  $f(t)$  fonksiyonu  $n$  kez sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.  $n - 1 < \alpha < n$  şartını sağlayan  $\alpha$  değeri için  $f(t)$  fonksiyonunun  $\alpha$ . mertebeden Caputo kesirli türevi  ${}^c D_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^n(x) dx$  eşitliği ile tanımlıdır [29].

### 3.6. Kesirli Mertebeden $SIQRV$ Modeli

Kesirli mertebeden  $SIQRV$  modeli, bir topluluğu temel olarak beş gruba ayırır. Birincisi hassas bireyler, ikincisi enfekte olmuş bireyler, üçüncüsü karantinada olan bireyler,

dördüncüsü iyileşmiş bireyler ve beşincisi aşılınmış olan bireylerdir.  $SIQRV$  modelinin kesirli diferansiyel denklem sistemi olarak ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} = bN - bS - \frac{\beta SI}{N} - \sigma S + \theta V + \vartheta R ,$$

$$\frac{d^\alpha I}{dt^\alpha} = \frac{\beta SI}{N} - bI - \gamma I - kI + \frac{\beta IV}{N} ,$$

$$\frac{d^\alpha Q}{dt^\alpha} = kI - bQ - \gamma Q , \tag{3.3}$$

$$\frac{d^\alpha R}{dt^\alpha} = \gamma I + \gamma Q - bR - \vartheta R ,$$

$$\frac{d^\alpha V}{dt^\alpha} = \sigma S - \theta V - bV - \frac{\beta IV}{N} .$$

Burada  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ ,  $t$  zamanına göre Caputo kesirli türevidir.

Başlangıç değerleri  $S(0) = S_0$  ,  $I(0) = I_0$  ,  $Q(0) = Q_0$  ,  $R(0) = R_0$  ,  $V(0) = V_0$  ,  $0 < \alpha \leq 1$  şeklinde tanımlanır ve  $S + I + Q + R + V = N$ 'den

$$\frac{d^\alpha N}{dt^\alpha} = \frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha I}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha Q}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha R}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha V}{dt^\alpha} \tag{3.4}$$

olduğu açıktır. Zaman değişkenine bağlı olaylarda kesir mertebeden modeller hafıza özelliği taşıdığı için tam sayı mertebeden modellere göre daha gerçekçi ve doğru sonuçlar ortaya koyarlar. Bu nedenle kurulan model kesir mertebede olarak oluşturuldu [31-32]. Bu (3.3) sisteminde  $\alpha = 1$  alarak kesirli mertebeden diferansiyel denklemi tam mertebeden diferansiyel denkleme indirgenir.

Tablo 3.2. Sistemlerde kullanılan kompartımanlar ve anlamları

Sistemlerde kullanılan kompartımanlar	Anlamları
$S(t)$	Popülasyondaki hassas bireyler
$I(t)$	Popülasyondaki enfekte bireyler
$Q(t)$	Popülasyondaki karantinada olan bireyler
$R(t)$	Popülasyondaki iyileşmiş bireyler
$V(t)$	Popülasyondaki aşılınmış bireyler
$N(t)$	Toplam nüfus

Tablo 3.3. Parametreler ve anlamları

Parametreler	Anlamları
$\beta$	Hassas bireylerin enfekte kompartımanına geçiş oranı
$\sigma$	Aşılama oranı
$\gamma$	İyileşme oranı
$b$	Doğum ve ölüm oranı
$\theta$	Aşının korumasının düşme oranı
$\vartheta$	İyileşmiş olanların bağışıklığını kaybetme oranı
$k$	Enfekte gruptan karantina grubuna geçenlerin oranı

N popülasyonu boyutsuzlaştırılarak yeni değişkenler yardımıyla aşağıdaki şekilde oluşturuldu:

$$s = \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}, q = \frac{Q}{N}, r = \frac{R}{N}, v = \frac{V}{N}. \quad (3.5)$$

Burada  $s + i + q + r + v = 1$ 'dir. Kesirli mertebeden  $SIQRV$  modelinin yeni formu aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} D^\alpha s(t) &= b - bs(t) - \beta s(t)i(t) - \sigma s(t) + \theta v(t) + \vartheta r(t), \\ D^\alpha i(t) &= \beta s(t)i(t) - bi(t) - \gamma i(t) - ki(t) + \beta i(t)v(t), \\ D^\alpha q(t) &= ki(t) - bq(t) - \gamma q(t), \\ D^\alpha r(t) &= \gamma i(t) + \gamma q(t) - br(t) - \vartheta r(t), \\ D^\alpha v(t) &= \sigma s(t) - \theta v(t) - bv(t) - \beta i(t)v(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.7. Kesir Mertebeden Genelleştirilmiş Euler Metodu

Bu çalışmada, Caputo kesirli türevi ile başlangıç değer problemini çözmek için Genelleştirilmiş Euler Yöntemini kullandık. Matematiksel modellerin birçoğu lineer olmayan sistemlerden oluşur ve bu sistemlerin çözümlerinin bulunuşu oldukça zor olabilir. Çoğu durumda analitik çözümler bulunamaz ve bunun için sayısal bir yaklaşım düşünülmelidir. Bu yaklaşımlardan bir tanesi de Genelleştirilmiş Euler methodudur[40].  $D^\alpha y(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < t < a$  başlangıç değer problemini düşünelim.  $h = \frac{a}{n}$  adım büyüklüğü olmak üzere  $[t_j, t_{j+1}]$  aralığını  $j = 0, 1, \dots, n - 1$  olmak üzere  $n$  alt aralığa bölelim. Varsayalım ki  $y(t)$ ,  $D^\alpha y(t)$  ve  $D^{2\alpha} y(t)$   $[0, a]$  aralığında sürekli olsun ve Genelleştirilmiş Taylor formülü kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir [40].

$$y(t_1) = y(t_0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_0, y(t_0)) \quad (3.7)$$

Bu işlem bir dizi oluşturmak için tekrarlanacaktır.  $t_{j+1} = t_j + h$  olmak üzere

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(t_j, y(t_j)) \quad , \quad j = 0, 1, \dots, n - 1 \quad \text{şeklinde genelleştirilmiş}$$

formül elde edilir.  $h$  adım büyüklüğü olmak üzere  $\forall k = 0, 1, \dots, n - 1$  için

$$S(k+1) = S(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (bN - bS(k) - \frac{\beta S(k)I(k)}{N} - \sigma S(k) + \theta V(k) + \vartheta R(k))$$

$$I(k+1) = I(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\frac{\beta S(k)I(k)}{N} - bI(k) - \gamma I(k) - kI(k) + \frac{\beta I(k)V(k)}{N})$$

$$Q(k+1) = Q(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (kI(k) - bQ(k) - \gamma Q(k)) \quad (3.8)$$

$$R(k+1) = R(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\gamma I(k) + \gamma Q(k) - bR(k) - \vartheta R(k))$$

$$V(k+1) = V(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\sigma S(k) - \theta V(k) - bV(k) - \frac{\beta I(k)V(k)}{N})$$

elde edilir. Yaptığımız çalışmada aldığımız parametreleri herhangi bir bölgeye göre değil, yeni bulduğumuz kesirli modelin sonuçlarını görebilmek için keyfi aldık. Kesirli mertebeden  $SIQRV$  modeli yeni bir model olup aşılama oranı ve aşının koruyuculuğunu kaybetme oranını içermektedir. Tüm dünyada hazır hale gelmiş belli başlı aşuların (Oxford-Astra, Moderna, Sputnik, Biontech, CoronaVac) koruma oranları %90-95 civarındadır. Koruyuculuk oranları aşı yapılan kişinin yaş ile bağışıklık durumuna göre



değişiklik gösterebilmektedir. COVID-19'a karşı geliştirilen ve mRNA tekniğini kullanan BioNTech-Pfizer aşısının etkinlik oranının 6 ay içerisinde %50'nin altına düştüğü, bağışıklık sistemini güçlendirmek için ileride ekstra doz gerekebileceği, BioNTech-Pfizer aşısını 2 doz olduktan sonra koruyuculuk oranının %88'den %47'ye düştüğü, söz konusu aşının 2 doz alındıktan sonra delta varyantına karşı ilk ay %93 koruma sağlarken, 4 ay sonra bu oranın %53'e gerilediği, diğer yeni çıkan varyantlara karşı aşının koruma oranınınsa %97'lerden %67'lere düştüğü yapılan çalışmalarda kaydedilmiştir [45].

### 3.8. Kesirli Mertebeden $SIQRV$ Modelinin Nümerik Simülasyonu

Bu bölümde kesirli mertebeden  $SIQRV$  modelinin nümerik simülasyonu Genelleştirilmiş Euler metodu kullanılarak elde edildi ve grafikleri gösterildi.

$N = 200$  ,  $S = 130$  ,  $I = 25$ ,  $Q = 10$  ,  $R = 20$  ,  $V = 15$  ,  $\beta = 0.6$  ,  $\gamma = 0.25$  ,  $\vartheta = 0.02$  ,  $k = 0.001$  ,  $b = 0.02$  ,  $\theta = 0.005$  ,  $\sigma = 0.55$  parametrelerini ele alalım.

Adım büyüklüğü  $h = 1$  alınırsa aşağıdaki tablolar elde edilir.

Tablo 3.4.  $S, I, Q, R$  ve  $V$ 'nin  $\alpha = 1$  için  $t$  anındaki değerleri.

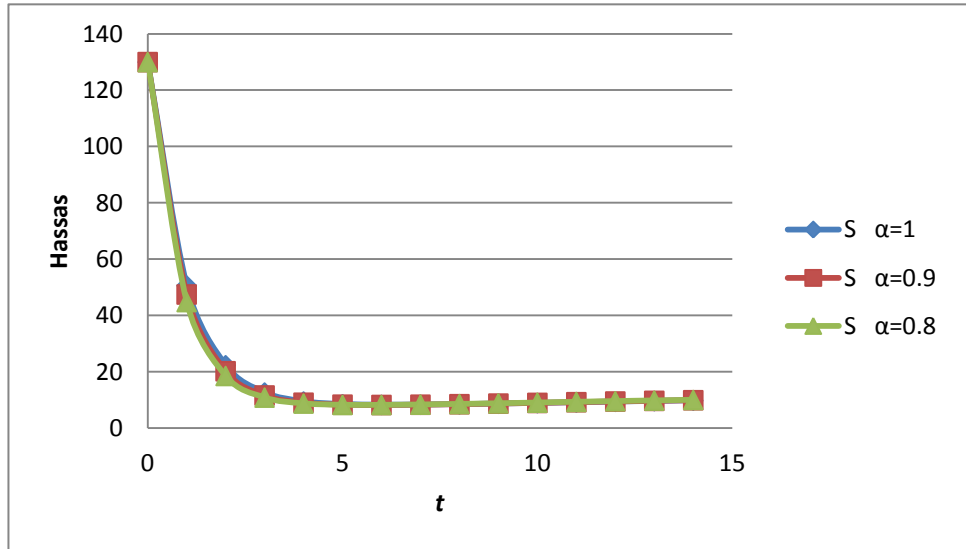
$t$ (gün)	$S(t)$	$I(t)$	$Q(t)$	$R(t)$	$V(t)$
0	130,00	25,00	10,00	20,00	15,00
1	50,62	29,10	7,32	27,95	85,00
2	22,33	33,05	5,37	35,93	103,29
3	12,62	36,55	3,95	44,10	102,75
4	9,43	39,30	2,92	52,47	95,86
5	8,47	41,06	2,17	60,92	87,35
6	8,25	41,74	1,62	69,30	79,07
7	8,29	41,36	1,23	77,37	71,73
8	8,44	40,08	0,93	84,92	65,60
9	8,64	38,12	0,72	91,78	60,71
10	8,86	35,72	0,56	97,82	57,00
11	9,10	33,10	0,45	102,99	54,34
12	9,34	30,43	0,36	107,26	52,59
13	9,57	27,84	0,29	110,67	51,61
14	9,78	25,41	0,24	113,27	51,28

Tablo 3.5.  $S$ ,  $I$ ,  $Q$ ,  $R$  ve  $V$ 'nin  $\alpha = 0.9$  için  $t$  anındaki değerleri.

$t$ (gün)	$S(t)$	$I(t)$	$Q(t)$	$R(t)$	$V(t)$
0	130,00	25,00	10,00	20,00	15,00
1	47,46	29,26	7,21	28,26	87,78
2	20,20	33,36	5,22	36,57	104,63
3	11,59	36,95	3,79	45,08	102,58
4	9,01	39,70	2,76	53,79	94,71
5	8,32	41,36	2,03	62,59	85,68
6	8,22	41,83	1,50	71,27	77,16
7	8,31	41,19	1,12	79,57	69,78
8	8,49	39,61	0,85	87,26	63,76
9	8,71	37,38	0,65	94,15	59,08
10	8,95	34,75	0,50	100,12	55,64
11	9,20	31,96	0,40	105,13	53,28
12	9,45	29,19	0,32	109,17	51,85
13	9,68	26,55	0,26	112,30	51,19
14	9,90	24,11	0,21	114,60	51,16

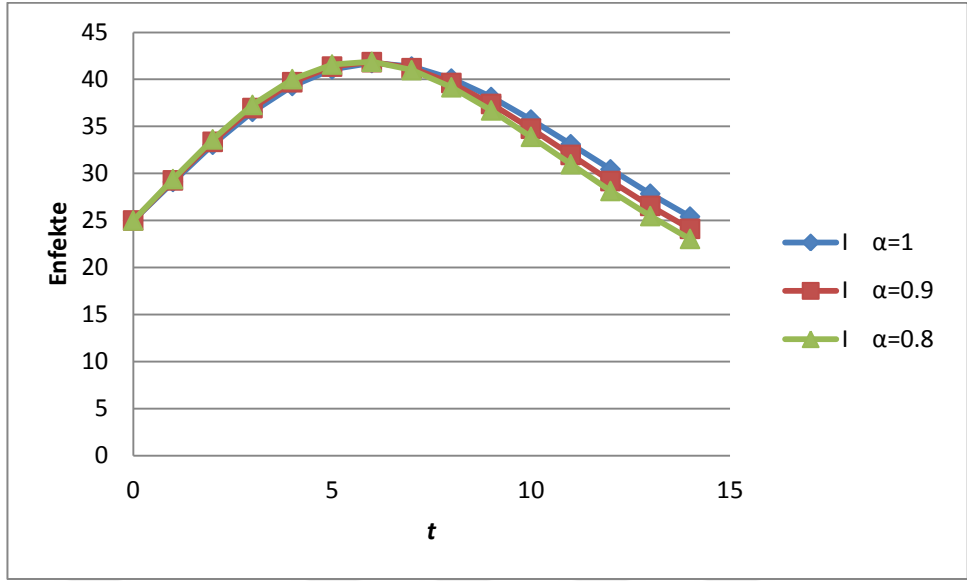
Tablo 3.6.  $S$ ,  $I$ ,  $Q$ ,  $R$  ve  $V$ 'nin  $\alpha = 0.8$  için  $t$  anındaki değerleri.

$t$ (gün)	$S(t)$	$I(t)$	$Q(t)$	$R(t)$	$V(t)$
0	130,00	25,00	10,00	20,00	15,00
1	44,77	29,40	7,12	28,53	90,15
2	18,52	33,62	5,09	37,11	105,64
3	10,84	37,29	3,65	45,91	102,30
4	8,73	40,02	2,63	54,93	93,66
5	8,23	41,58	1,91	64,02	84,23
6	8,21	41,87	1,40	72,95	75,55
7	8,34	40,98	1,04	81,43	68,18
8	8,54	39,16	0,78	89,21	62,28
9	8,78	36,70	0,59	96,11	57,80
10	9,03	33,89	0,46	101,99	54,60
11	9,29	30,98	0,36	106,83	52,51
12	9,55	28,13	0,29	110,66	51,35
13	9,78	25,47	0,23	113,54	50,96
14	10,00	23,04	0,19	115,56	51,19



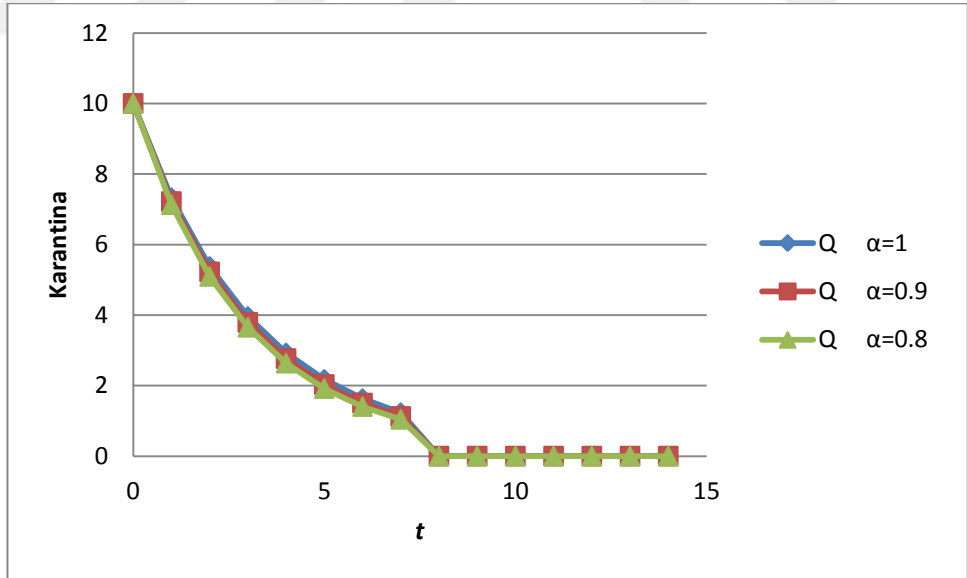
Şekil 3.6.  $S$  kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği

Hassas bireylerin zamanla azalarak sabit bir şekilde ilerlediği gözlemlenmektedir.



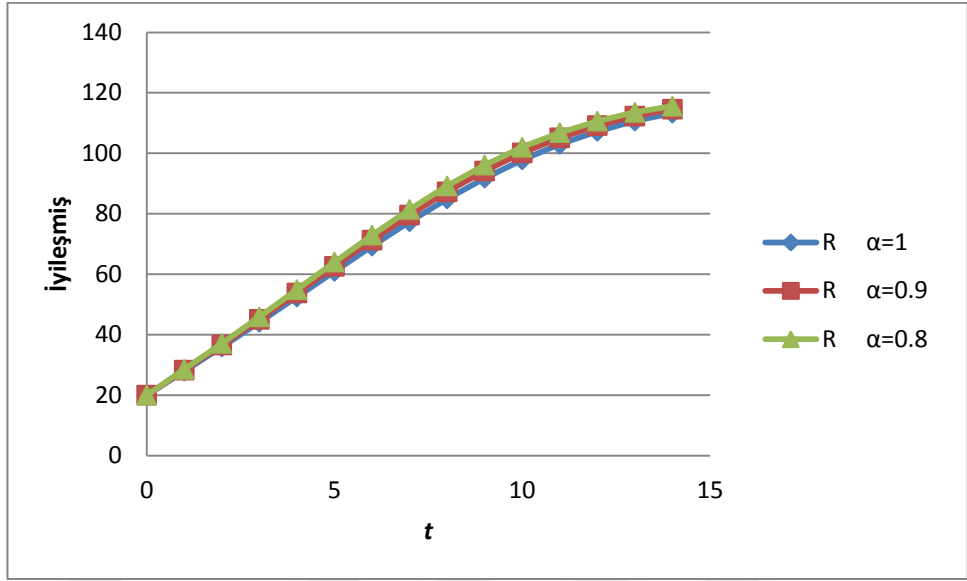
Şekil 3.7. *I* kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği

Enfekte bireylerin belli bir  $t$  zamanında maksimum değerini aldıktan sonra zamanla azaldığı gözlemlenmektedir.



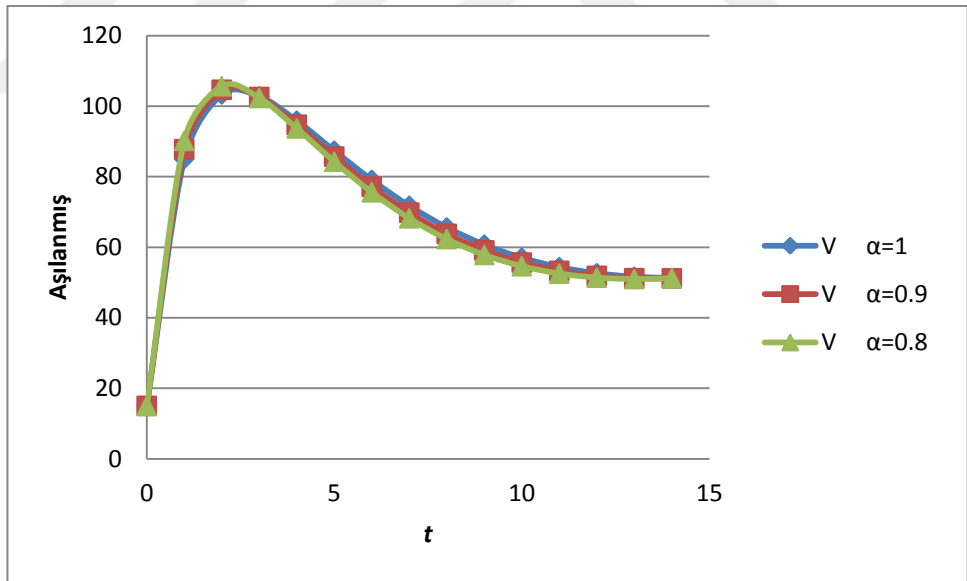
Şekil 3.8. *Q* kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği

Karantinada olan bireylerin zamanla azalarak sıfıra yaklaştığı gözlemlenmektedir.



Şekil 3.9. *R* kompartman modelinin zamana göre değişim grafiği

İyileşmiş bireylerin zamanla hızlı bir şekilde arttığı gözlemlenmektedir.



Şekil 3.10. *V* kompartman modelinin zamana göre değişim grafiği

Aşılmanmış bireylerin belli bir *t* zamanında maksimum değerini aldıktan sonra zamanla azaldığı ve sabit bir şekilde ilerlediği gözlemlenmektedir.

### 3.9. Kararlılık Analizi

Gerçek dünya problemlerinin modellenmesinde kesirli türevli diferansiyel denklemlerin kullanılması tercih edilmektedir. Bunun nedenlerinden en önemlisi, kesirli mertebeden modellerin hafıza özelliğine sahip olmasıdır. Örneğin bir salgın hastalık için oluşturulan tamsayı mertebeden modelin, salgının devam ettiği farklı bölgeler üzerindeki uygulamasında farklılık yoktur. Ancak salgının devam ettiği her bir farklı bölgede, salgına ait farklı şartların ve parametrelerin var olması muhtemeldir. Bu ise modelin her bölgede aynı yapıda çalışması anlamına gelir ki tam olarak gerçekçi olmayabilir. Buna rağmen, eğer model kesir mertebeden ise her bölge için optimum türev mertebesi belirlenebilir. Böylece oluşturulan model, üzerine çalışılan bölgeye özel bir alt modele indirgenir. Bu şekilde daha gerçekçi ve doğru sonuçların elde edilmesi sağlanır [33-37].

Doğadaki kompleks problemler her zaman tam sayı mertebeden diferansiyel denklemler tarafından yönetilemezler. Kesir mertebeden modellerin fizik, kimya ve mühendislik gibi birçok alanda uygulamaları görülmektedir. Özellikle, salgın hastalıklar gibi karmaşık mekanizmaya sahip problemler için kesir mertebeden modeller ideal birer modelleme aracı olarak kullanılırlar [38-40].

$R_0$  (Reproduction) olarak adlandırılan temel çoğalma sayısı, tamamen duyarlı bir popülasyona sokulduğunda tek bir enfekte birey tarafından üretilen yeni enfekte olmuş bireylerin sayısıdır.  $R_0$ , tek bir sayı veya sayı dağılımı olarak belirtilse bile aslında enfeksiyonun epidemiyolojik özellikleri (bulaşma yolu, kuluçka süresi, enfeksiyöz periyot, toplumun kazandığı immünite oranı, aşılama oranı, aşının koruyuculuğu gibi), enfeksiyöz etkenin biyolojik özellikleri, sosyo-demografik değişkenler (enfekte ve hassas kişiler arasındaki ortamın özellikleri, temas riski, yoğunluğu ve süresi) gibi birçok faktöre göre değişebilir.  $R_0$  sayısı birçok parametreye bağlıdır.  $R_0 > 1$  ise hasta bir kişinin hastalığı birden fazla kişiye bulaştırabileceği ve zamanla hastalığın toplumda giderek yayılacağı öngörülür.  $R_0 < 1$  ise her olgu hastalığı başka bir kişiye oransal olarak bulaştıramaz demektir ve hastalık giderek kendini sınırlar, görülen olgular hızlı bir şekilde azalır. Ancak gerekli önlemler alınmadığı takdirde  $R_0$  sayısı yeniden büyüyebilir.  $R_0$  değerini azaltmak ve salgın kontrolünü sağlamak için aşı ve karantina gibi müdahaleler yapılabilir [41]. Dünya Sağlık Örgütü (DSÖ)'nün pandemi uyarısı yaptığı COVID-19 hastalığı için de  $R_0$  değerleri değişik çalışmalarda tahmin edilmiştir.

COVID-19  $R_0$  değeri, Ocak-Şubat 2020 arasında, özellikle Çin ve diğer ülkelerde 1.4-6.49 arasında bulunmuştur [42].

### 3.10. Kararlılık ile İlgili Bazı Temel Tanım ve Teoremler

Matematiksel modellemenin en önemli problemlerinden biri hastalısız denge noktasının belirlenmesi ve sistemin kararlılık analizinin yapılmasıdır. Kararlılıkla ilgili temel tanım ve teoremler aşağıda belirtilmiştir.

**Tanım 3.2.** Birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)\end{aligned}\tag{3.9}$$

normal formunda verilir. (3.9) sistemi matris formunda

$$\frac{dX}{dt} = F(X(t), t)\tag{3.10}$$

şeklinde ifade edilir [43].

**Tanım 3.3.** (3.9) diferansiyel denklem sisteminde  $F$  fonksiyonu açık bir şekilde  $t$  ye bağlı değilse yani sistem

$$\frac{dX}{dt} = F(X(t))\tag{3.11}$$

formunda ifade edilebiliyorsa (3.9) sistemine otonomdur aksi halde otonom değildir denir [43].

**Tanım 3.4.** Birinci basamaktan lineer homojen sabit katsayılı bir diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n\end{aligned}\tag{3.12}$$

formundadır.  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $A = [a_{ij}]$  reel değerli bir matris ve  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  olmak üzere (3.12) sistemi

$$X' = AX \quad (3.13)$$

şeklinde ifade edilir. (3.13) sisteminin çözümü,  $\vartheta \in R^n$  de sabit bir vektör ve  $\lambda$  bir sabit olmak üzere  $X(t) = e^{\lambda t}$  formunda aranırsa  $\lambda e^{\lambda t} \vartheta = A e^{\lambda t} \vartheta$  ifadesinden

$$(A - \lambda I)\vartheta = 0 \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.14) lineer denklem sisteminin aşıkâr olmayan  $\vartheta$  çözümünün mevcut ve tek olması için  $\det(A - \lambda I) = 0$  olmalıdır. Bu eşitliği sağlayan  $\lambda$  sayılarına,  $n \times n$  lik  $A$  matrisinin özdeğerleri denir. Her bir  $\lambda$  özdeğerine karşılık gelen sıfırdan farklı  $\vartheta$  vektörüne özvektör denir.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.15)$$

şeklinde ifade edilir. Buradan,  $b_n \neq 0$  olmak üzere

$$P_n(\lambda) = b_n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + b_1 \lambda + b_0 = 0 \quad (3.16)$$

elde edilir. Bu ifade  $A$  matrisinin karakteristik denklemi olarak ifade edilir [43].

**Tanım 3.5.**  $F(\bar{X}) = 0$  eşitliğini sağlayan sabit bir  $\bar{X}$  çözümüne (3.10) diferansiyel denklem sisteminin kritik noktası veya denge noktası adı verilir [43].

**Teorem 3.1. (Routh-Hurwitz Kararlılık Kriteri)**

$a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) reel sabitler olmak üzere

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (3.17)$$

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$



olmak üzere tanımlansın. (3.17) polinomunun negatif reel kısmı köklerinin olması için  $H_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) Hurwitz matrislerinin tüm determinantları pozitif olmalıdır. Yani  $\det H_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  eşitsizliği sağlanmalıdır [43].

**Teorem 3.2.**  $\bar{X}$ ,  $\frac{dX}{dt} = F(X)$  sisteminin bir denge noktası olsun.  $F$  nin  $\bar{X}$  daki Jakobiyen matrisi  $J(\bar{X})$  olmak üzere Jakobiyen matrisinin özdeğerleri  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $\lambda_i$  olsun.

(i)  $\forall i, i = 1, 2, \dots, n$  için  $Re(\lambda_i) < 0$  ise  $\bar{X}$  lokal asimptotik kararlı bir denge noktasıdır.

(ii)  $\exists i, i = 1, 2, \dots, n$  için  $Re(\lambda_i) > 0$  ise  $\bar{X}$  denge noktası kararsız bir denge noktasıdır.

(iii)  $\exists i, i = 1, 2, \dots, n$  için  $Re(\lambda_i) = 0$  ise  $\bar{X}$  lineerleştirilmiş sistemin kararlı denge noktası olarak kabul edilse bile, (3.9) sisteminin asimptotik kararlı, kararlı veya kararsız denge noktası olabilir [44].

### 3.11. Kesirsel SIQRV Modelinin Kararlılık Analizi

Matematiksel modellemenin en önemli problemlerinden biri sistemin hastalısız denge noktasının belirlenmesi ve kararlılık analizi çalışmasıdır. Hastalısız denge noktasını bulmak için (3.3) sisteminde  $D^\alpha S = 0$ ,  $D^\alpha I = 0$ ,  $D^\alpha Q = 0$ ,  $D^\alpha R = 0$ ,  $D^\alpha V = 0$  alınır. (3.3) sisteminde hastalısız denge noktasını belirlemek için  $I(t) = 0$  ve  $Q(t) = 0$  alınır. Burada

$$E_0 = (S_0, I_0, Q_0, R_0, V_0) = \left( \frac{N(\theta+b)}{\sigma+\theta+b}, 0, 0, 0, \frac{N\sigma}{\sigma+\theta+b} \right) \quad (3.18)$$

hastalısız denge noktası elde edilir. Sistemin hastalısız denge noktasındaki Jacobian matrisi

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\sigma - b & \frac{-\beta(\theta+b)}{\sigma+\theta+b} & 0 & \vartheta & \theta \\ 0 & \beta - \gamma - k - b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & -\gamma - b & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma & -\vartheta - b & 0 \\ \sigma & \frac{-\beta\sigma}{\sigma+\theta+b} & 0 & 0 & -\theta - b \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

elde edilir. Jacobian matrisinden (3.19) elde edilen özdeğerler

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \beta - \gamma - k - b, \\
\lambda_2 &= -\gamma - b, \\
\lambda_3 &= -\vartheta - b, \\
\lambda_4 &= -b, \\
\lambda_5 &= -\sigma - b - \theta,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

olarak elde edilir. Burada  $\beta, b, k, \gamma, \vartheta, \sigma, \theta$  parametreleri pozitif tanımlı reel sayılardır.  $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$  ve  $\lambda_5 < 0$  olduğu açıktır.  $\lambda_1 < 0$  ise hastalısız denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.  $\lambda_1 > 0$  ise hastalısız denge noktası kararsızdır.  $\beta - \gamma - k - b < 0$  ise  $\beta < \gamma + k + b$  dir.  $R_0 = \frac{\beta}{\gamma + k + b} < 1$  temel çoğalma oranıdır.  $R_0 < 1$  ise hastalık kendini sınırlar ve salgın azalır.  $R_0 > 1$  ise hastalık yayılmaya devam eder ve salgın artar.

**Teorem 3.3.**  $\forall t \geq 0$  için (3.3) sisteminin  $S(0) = S_0 \geq 0$  ,  $I(0) = I_0 \geq 0$  ,  $Q(0) = Q_0 \geq 0$  ,  $R(0) = R_0 \geq 0$  ,  $V(0) = V_0 \geq 0$  başlangıç koşullarına sahip çözümleri  $(S(t), I(t), Q(t), R(t), V(t)) \in R_+^5$  negatif değildir [45].

### 3.12. Kesirli Mertebeden *SIQRV* Modelinin Nümerik Simülasyonu

Genelleştirilmiş Euler methodu kullanılarak kesirli mertebeden *SIQRV* modelinin nümerik simülasyonu elde edildi. Dünya Sağlık Örgütü (DSÖ), Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) ve Türkiye Cumhuriyeti Sağlık Bakanlığı kaynaklarından elde edilen verilere göre, Türkiye'de özellikle 29 Temmuz 2022 tarihini dikkate alarak parametreleri belirleyelim [42].

$S = 21999069$  ,  $I = 593268$  ,  $Q = 279750$  ,  $R = 3921347$  ,  $V = 5682092$  ,  $\beta = 0.03752$  ,  $\gamma = 0.89$  ,  $\vartheta = 0.005$  ,  $k = 0.7$  ,  $b = 0.0000364$  ,  $\theta = 0.0055$  ,  $\sigma = 0.67$  olmak üzere adım büyüklüğü  $h = 0.1$  olarak alınırsa Euler methodu kullanılarak aşağıdaki tablolar elde edilir.

Tablo 3.7.  $S, I, Q, R$  ve  $V$ 'nin  $\alpha = 1$  için  $t$  anındaki değerleri.

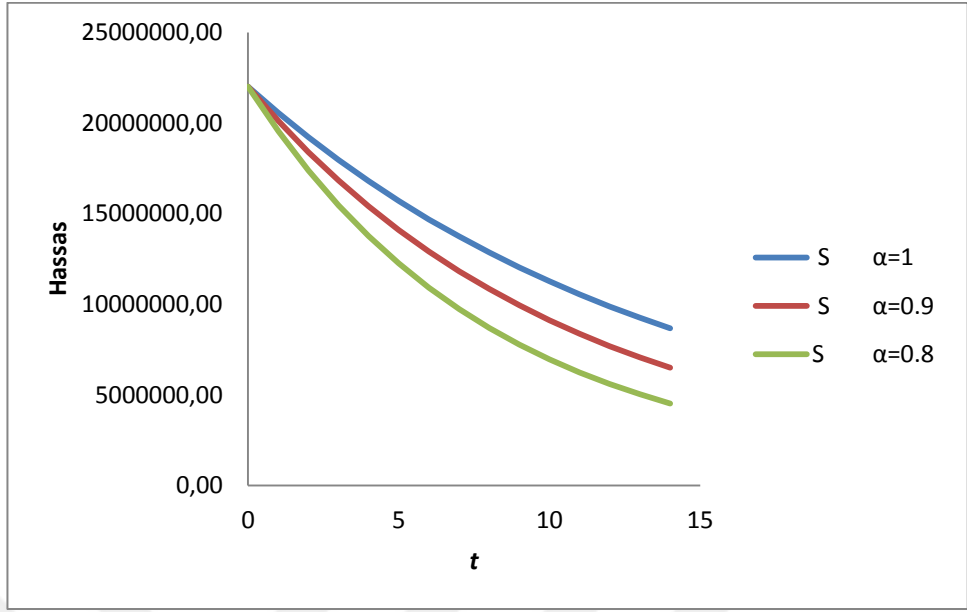
$t$ (ay)	$S(t)$	$I(t)$	$Q(t)$	$R(t)$	$V(t)$
0	21999069,00	593268,00	279750,00	3921347,00	56820928,00
1	20557710,42	501033,85	296379,99	3996874,58	58260686,02
2	19213814,42	423139,17	305073,46	4065631,59	59603070,10
3	17960789,02	357354,61	307540,55	4128191,61	60854670,25
4	16792488,25	301797,45	305183,15	4185081,75	62021630,52
5	15703182,01	254877,66	299146,56	4236786,00	63109679,14
6	14687527,84	215252,40	290362,86	4283748,50	64124156,72
7	13740544,75	181787,61	279587,18	4326376,60	65070042,47
8	12857588,72	153525,52	267428,03	4365043,71	65951978,66
9	12034329,88	129657,28	254372,75	4400091,91	66774293,44
10	11266731,29	109499,79	240808,66	4431834,52	67541022,08
11	10551029,07	92476,15	227040,80	4460558,33	68255926,82
12	9883713,96	78099,13	213306,67	4486525,79	68922515,32
13	9261514,05	65957,28	199788,54	4509976,99	69544057,92
14	8681378,77	55703,09	186623,64	4531131,47	70123603,66

Tablo 3.8.  $S, I, Q, R$  ve  $V$ 'nin  $\alpha = 0.9$  için  $t$  anındaki değerleri.

$t$ (ay)	$S(t)$	$I(t)$	$Q(t)$	$R(t)$	$V(t)$
0	21999069,00	593268,00	279750,00	3921347,00	56820928,00
1	20112377,19	472536,48	301518,12	4020210,17	58705524,70
2	18392676,57	376374,14	309687,83	4107472,64	60423282,10
3	16825183,06	299781,08	308094,62	4184420,91	61988979,90
4	15396421,9	238774,93	299668,97	4252204,85	63416088,50
5	14094111,69	190183,69	286635,07	4311851,00	64716885,20
6	12907058,61	151480,90	270667,36	4364274,70	65902559,80
7	11825060,09	120654,23	253013,68	4410291,41	66983310,90
8	10838816,97	96100,87	234592,13	4450626,90	67968433,90
9	9939853,52	76544,17	216066,97	4485926,66	68866400,90
10	9120444,43	60967,31	197908,12	4516764,37	69684933,60
11	8373548,39	48560,38	180437,55	4543649,59	70431069,80
12	7692747,49	38678,28	163865,53	4567034,65	71111224,00
13	7072192,01	30807,21	148318,72	4587320,91	71731242,90
14	6506550,09	24537,92	133861,96	4604864,33	72296454,90

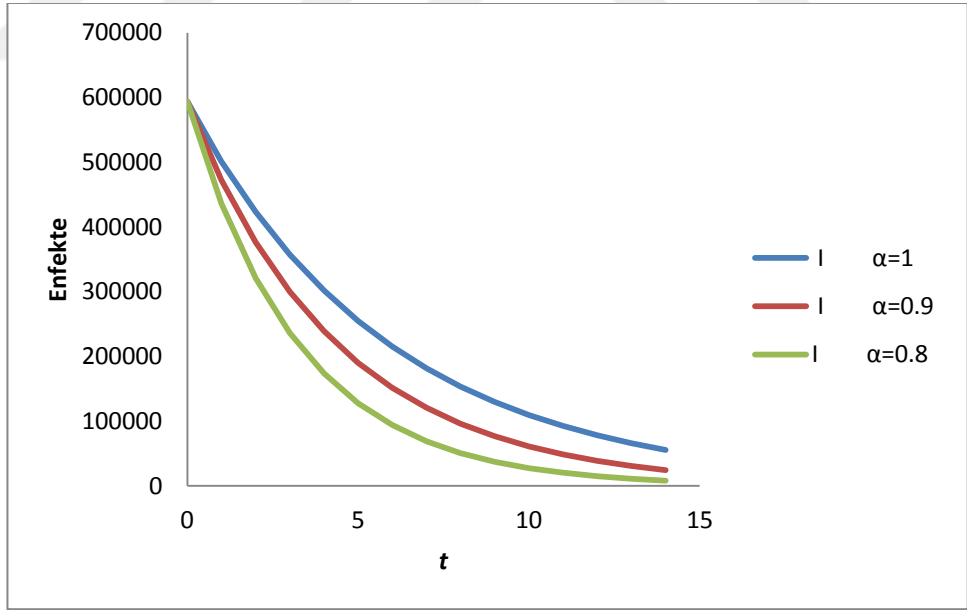
Tablo 3.9.  $S, I, Q, R$  ve  $V$ 'nin  $\alpha = 0.8$  için  $t$  anındaki değerleri.

$t$ (ay)	$S(t)$	$I(t)$	$Q(t)$	$R(t)$	$V(t)$
0	21999069,00	593268,00	279750,00	3921347,00	56820928,00
1	19546377,90	436317,56	308048,46	4049868,69	59270895,51
2	17375898,25	320888,73	313365,77	4158785,33	61438908,21
3	15455150,46	235996,90	304128,38	4250923,31	63357436,04
4	13755394,31	173563,43	286178,08	4328718,88	65055209,89
5	12251198,25	127646,89	263509,60	4394267,28	66557652,37
6	10920058,33	93877,70	238804,96	4449366,93	67887258,82
7	9742061,03	69042,22	213819,48	4495558,98	69063934,49
8	8699584,97	50777,02	189659,83	4534162,27	70105292,81
9	7777036,93	37343,92	166983,57	4566304,08	71026919,30
10	6960618,40	27464,56	146141,61	4592946,95	71842605,14
11	6238118,86	20198,81	127279,45	4614912,07	72564553,74
12	5598733,03	14855,21	110408,56	4632899,50	73203563,55
13	5032899,05	10925,27	95456,31	4647505,66	73769189,88
14	4532155,38	8035,00	82300,52	4659238,41	74269887,95



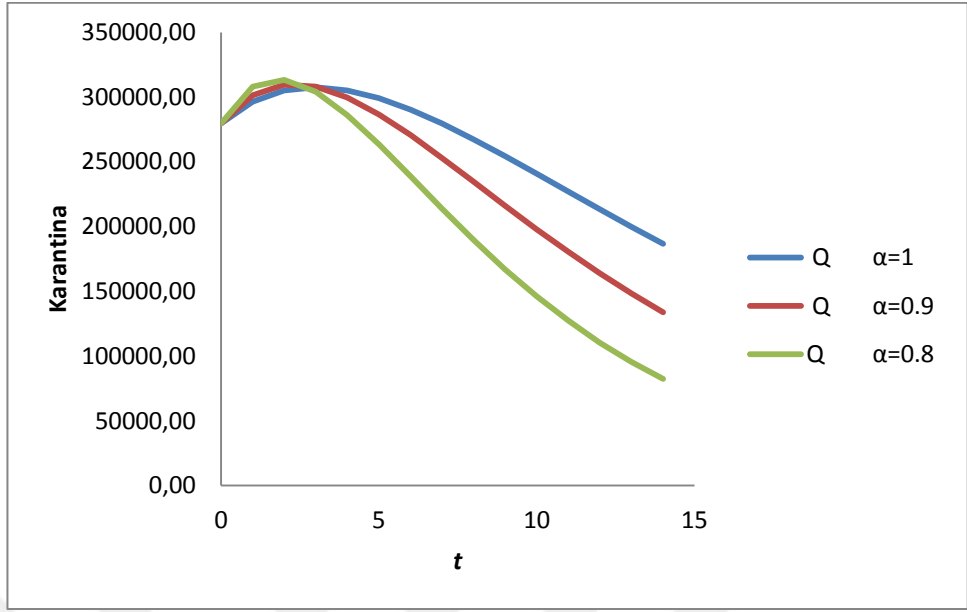
Şekil 3.11. *S* kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği

Hassas bireylerin zamanla azaldığı gözlemlenmektedir.



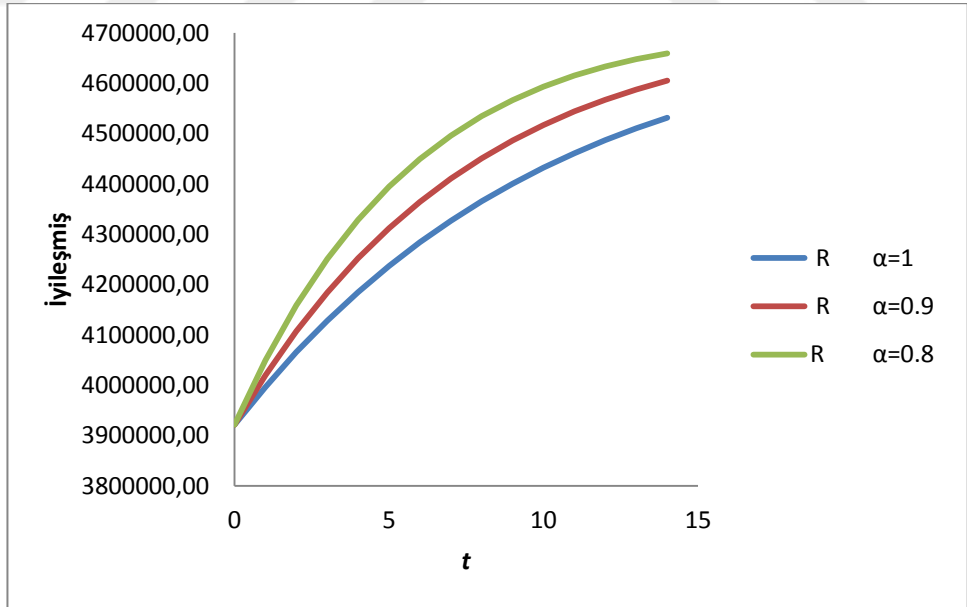
Şekil 3.12. *I* kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği

Enfekte bireylerin zamanla azaldığı gözlemlenmektedir.



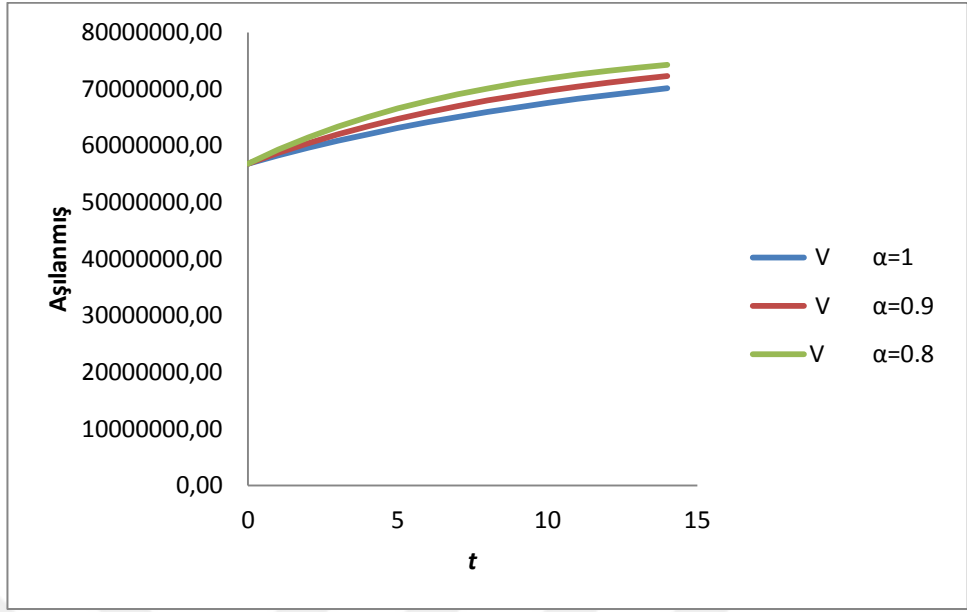
Şekil 3.13. *Q* kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği

Karantinada olan bireylerin ilk üç ay artarken takip eden aylarda zamanla azaldığı gözlemlenmektedir.



Şekil 3.14. *R* kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği

İyileşmiş bireylerin zamanla arttığı gözlemlenmektedir.



Şekil 3.15.  $V$  Kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği

Aşılamanın bireylerin zamanla yavaşça arttığı gözlemlenmektedir.

### 3.14. Sonuçlar

Bu alışmada  $SIQR$  modeline  $V$  kompartıman modeli eklenerek yeni bir model elde edildi. Aşılama oranı ve aşının koruyuculuğu kaybetme oranı modellemeye dahil edilerek, aşılama ile birlikte salgının ne şekilde değişeceği nümerik simülasyonlar yardımıyla incelendi. Enfeksiyonlara, delta ve diğer varyantlara karşı koruma oranı, tam aşılamaadan kısa bir süre sonra yüksekti, ancak belli bir süre sonra koruma oranı azaldı. Elde edilen grafiklerde hassas bireylerin zamanla azalarak sabit bir şekilde ilerlediği, enfekte bireylerin zamanla azalarak sıfıra yaklaştığı, karantinada olan bireylerin zamanla azalarak sıfıra yaklaştığı, iyileşen bireylerin belli bir  $t$  zamanında maksimum değerini aldıktan sonra zamanla azaldığı ve aşılamanın bireylerin zamanla hızlı bir şekilde arttığı gözlemlenmiştir.

Bu alışmada Dünya Sağlık Örgütü (DSÖ), Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) ve Türkiye Cumhuriyeti Sağlık Bakanlığı kaynaklarından elde edilen verilere göre, Türkiye'de özellikle 29 Temmuz 2022 tarihi dikkate alınarak COVID-19 için kesirsel  $SIQRV$  modelinin yeni bir uygulaması yapıldı ve elde edilen nümerik sonuçlar yardımıyla grafikler çizildi. Aşılama oranı ve aşının koruyuculuğu kaybetme oranı



dikkate alınarak aşılama ile birlikte salgının ne şekilde değişeceği incelendi. Kesirsel *SIQRV* modelinin hastalısız denge noktası elde edilerek kararlılık analizi yapıldı ve temel çoğalma oranı olan  $R_0$  sayısının önemi vurgulandı. Elde edilen grafiklerde hassas bireylerin zamanla azaldığı, enfekte bireylerin zamanla azaldığı, karantinada olan bireylerin ilk üç ay artarken takip eden aylarda zamanla azaldığı, iyileşen bireylerin zamanla arttığı ve aşılanan bireylerin zamanla yavaşça arttığı gözlemlenmiştir.



## 4. BÖLÜM

### KESİRSEL $PSQ_p$ SİGARA MODELİ İLE KESİRSEL SAQ ALKOL MODELİNİN UYGULAMASI VE KARARLILIK ANALİZİ

Sigara kullanımı dünyada en sık görülen alışkanlıkların başında gelmekle beraber içerisinde barındırdığı zararlı maddeler ile birlikte insanların sağlığını bozarak ölümlerine neden olmaktadır. Her yıl pek çok insan sigaradan ya da sigaraya doğrudan maruz kalarak sağlığını kaybetmektedir. Bu çalışmada sigara kullanımının kesirsel bir modeli ile ilgili yeni bir uygulaması ve kararlılık analizini yapıldı. Bu model henüz sigara içmeyen ama gelecekte sigara içebilecekler ( $P$ ), potansiyel sigara içenler ( $S$ ) ve sigarayı kesin olarak bırakanlar ( $Q_p$ ) olmak üzere üç kompartımandan oluşmaktadır. Kesirli türev Caputo anlamında kullanılmaktadır. Sigara kullanımının matematiksel modeli için oluşturulan kesirsel  $PSQ_p$  modeli ile ilgili matematiksel analizler yapılarak nümerik sonuçlar Euler metodu yardımı ile elde edildi ve grafikler çizildi.

Sigara kullanımı dünyada en önemli ölüm nedenlerinden biridir. 20. yüzyılda 100 milyon kişi tütün kullanımı nedeniyle hayatını kaybetmiştir ve her yıl 5.4 milyon kişi tütün kullanımına bağlı olarak hayatını kaybetmektedir. Günümüzde 1 milyardan fazla insanın yaşamını tehdit eden küresel bir sorun olan sigara kullanımının hayatı tehdit eden en sık sekiz hastalığın altısı için risk faktörü olduğu bilinmektedir [46]. Sigarayı bırakma modellerinin tanımlanmasında matematiksel modelleme önemlidir. Bu modeller, sigaranın yayılmasını ve kontrolünü analiz edebileceğimiz gerçeği göz önünde bulundurularak adi diferansiyel denklemler sistemleri kullanılarak incelenmiştir. Sigara içmenin günümüz dünyasında yaygın durum olduğu iyi bilinmektedir. Sigara içme yaygınlığının artışında toplumdaki bireylerin sosyal davranışlarının etkisinin büyük olduğu oldukça açıktır. Sigara içmek bir popülasyondaki insanların sosyal davranışlarını son derece etkilemektedir [47-50].

Matematiksel modellemenin temel amacı gerçek yaşam problemlerini matematiksel olarak ifade ederek süreçlerin işleyişini açıklayabilmektir. Bununla birlikte modellenen sürecin kontrol edilebilmesi de önemlidir. Matematiksel modeller, bir sistemi açıklamaya, çeşitli bileşenlerinin etkilerini incelemeye ve davranışları hakkında tahminlerde bulunmaya yardımcı olmak için geliştirilmiştir. Matematiksel modelleme

yöntemi sadece salgın hastalıkların ve sigara bırakma modellerinin temsilinde değil farklı dinamiklerin modellenmesinde de kullanılmaktadır [51-54].

Sigara kullanım modeli oluşturulurken henüz sigara içmeyenler, sigara içenler ve sigarayı bırakan kişiler ele alınmıştır. Bu modelle ilgili uygulama yapılırken Türkiye’de 2019 yılındaki TÜİK’in sigara kullanım verileri esas alınarak nümerik bir çalışma yapılmıştır [55].

#### 4.1. Kesirsel $PSQ_p$ Sigara Modeli

Kesirsel  $PSQ_p$  modeli, bir topluluğu temel olarak üç ana gruba ayırır. Birincisi henüz sigara içmeyen ama gelecekte sigara içebilecekler, ikincisi sigara içenler ve üçüncüsü sigarayı kesin olarak bırakanlardır.  $PSQ_p$  modelinin kesirli diferansiyel denklem sistemi olarak ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d^\alpha P}{dt^\alpha} = \mu N - \mu P - \frac{\beta PS}{N},$$

$$\frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} = \frac{\beta PS}{N} - \mu S - \gamma S - \theta S, \quad (4.1)$$

$$\frac{d^\alpha Q_p}{dt^\alpha} = \gamma S - \mu Q_p.$$

Burada  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ ,  $t$  zamanına göre Caputo kesirli türevidir. Başlangıç değerleri  $P(0) = P_0$ ,  $S(0) = S_0$ ,  $Q_p(0) = Q_{p_0}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  şeklinde tanımlanır ve  $P + S + Q_p = N$  eşitliğinden

$$\frac{d^\alpha N}{dt^\alpha} = \frac{d^\alpha P}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha Q_p}{dt^\alpha} \quad (4.2)$$

olduğu açıktır. Zaman değişkenine bağlı olaylarda kesir mertebeden modeller hafıza özelliği taşıdığı için tam sayı mertebeden modellere göre daha gerçekçi ve doğru sonuçlar ortaya koyarlar. Bu nedenle kurulan model kesir mertebede olarak oluşturuldu [54]. Bu (4.1) sisteminde  $\alpha = 1$  olarak kesirli mertebeden diferansiyel denklemi tam

mertebeden diferansiyel denkleme indirgenir. Bütün kompartıman ve parametreler Tablo 4.1. ve Tablo 4.2. de gösterildi.

Tablo 4.1. Sistemlerde kullanılan kompartımanlar ve anlamları

Sistemlerde kullanılan kompartımanlar	Anlamları
$P(t)$	$t$ zamanında henüz sigara içmeyen ama gelecekte sigara içebilecek bireylerin sayısı
$S(t)$	$t$ zamanında potansiyel sigara içen bireylerin sayısı
$Q_p(t)$	$t$ zamanında sigarayı kesin olarak bırakan bireylerin sayısı
$N(t)$	Toplam nüfus

Tablo 4.2. Parametreler ve anlamları

Parametreler	Anlamları
$\beta$	Yıllık sigaraya başlama oranı
$\mu$	Yıllık doğum ve ölüm oranı
$\gamma$	Yıllık sigarayı bırakma oranı
$\theta$	Yıllık sigaraya bağlı ölüm oranı

Doğal doğum ve ölüm oranları modelde eşit olarak kabul edildi. Tüm doğumlar sigara içmeyen sınıfa girmiş kabul edilir. Modelde tanımlanan parametreler zamana göre değişim göstermemektedir. Sigaranın neden olduğu bazı hastalıklarla ilişkili ölüm oranı yoktur [46-54].  $N$  popülasyonu boyutsuzlaştırılarak yeni değişkenler yardımıyla aşağıdaki şekilde oluşturuldu.

$$p = \frac{P}{N}, s = \frac{S}{N}, q_p = \frac{Q_p}{N} \quad (4.3)$$

$p + s + q_p = 1$  'dir. Kesirsel  $PSQ_p$  sigara modelinin yeni formu aşağıdaki şekilde yazılır.

$$D^\alpha p(t) = \mu - \mu p(t) - \beta p(t)s(t),$$

$$D^\alpha s(t) = \beta p(t)s(t) - \mu s(t) - \gamma s(t) - \theta s(t), \quad (4.4)$$

$$D^\alpha q_p(t) = \gamma s(t) - \mu q_p(t).$$

## 4.2. Kesirsel $PSQ_p$ Modelinin Kararlılık Analizi

Sigarasız denge noktasını bulmak için (4.4) sisteminde  $D^\alpha p = 0$ ,  $D^\alpha s = 0$ ,  $D^\alpha q_p = 0$  alınır. (4.4) sisteminde sigarasız denge noktasını belirlemek için  $s(t) = 0$  alınır.

$$E_0 = (p_0, s_0, q_{p_0}) = (1, 0, 0) \quad (4.5)$$

sigarasız denge noktası elde edilir. Sistemin sigarasız denge noktasındaki Jacobian matrisi

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta & 0 \\ 0 & \beta - \mu - \gamma - \theta & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

elde edilir. Jacobian matrisinden (4.6) elde edilen özdeğerler

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu, \\ \lambda_2 &= -\mu, \\ \lambda_3 &= \beta - \mu - \gamma - \theta, \end{aligned} \quad (4.7)$$

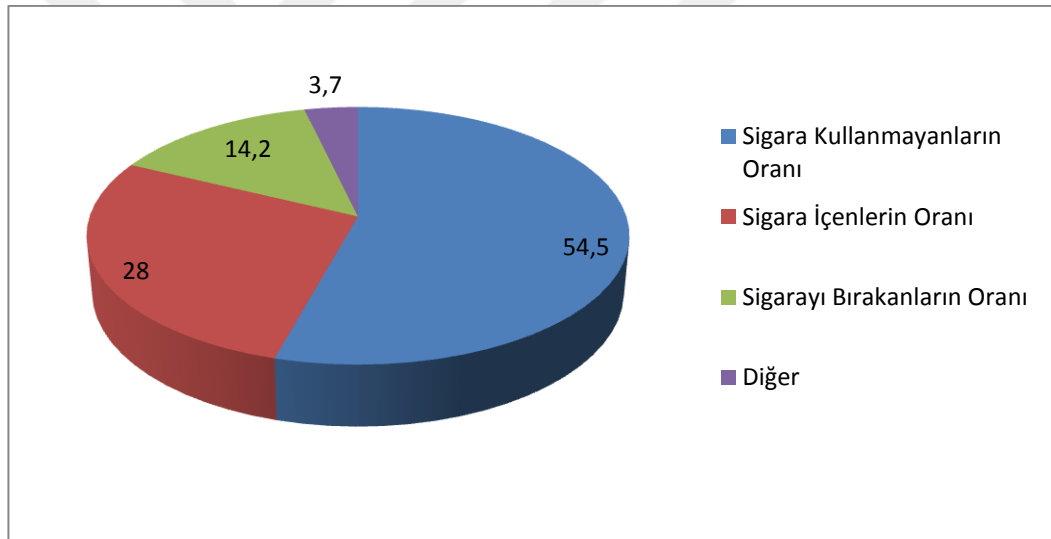
olarak elde edilir. Burada  $\beta, \mu, \gamma, \theta$  parametreleri pozitif tanımlı reel sayılardır.  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  olduğu açıktır.  $\lambda_3 < 0$  ise sigarasız denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.  $\lambda_3 > 0$  ise sigarasız denge noktası kararsızdır.

$\beta - \mu - \gamma - \theta < 0$  ise  $\beta < \mu + \gamma + \theta$  dir.  $R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma + \theta} < 1$  temel çoğalma oranıdır.  $R_0 < 1$  olduğunda potansiyel sigara içenler ile sigara içmeyenler arasındaki temas oranı daha azdır.  $R_0 > 1$  olduğunda potansiyel sigara içenler ile sigara içmeyenler arasındaki temas oranı daha fazladır. Bu durumda sigara kullanımının artması beklenir.

**Teorem 4.1.**  $\forall t \geq 0$  için  $P(0) = P_0 \geq 0$ ,  $S(0) = S_0 \geq 0$ ,  $Q_p(0) = Q_{p_0} \geq 0$  başlangıç koşullarına sahip çözümleri  $(P(t), S(t), Q_p(t)) \in R_+^3$  negatif değildir [54].

### 4.3. Kesirli $PSQ_p$ Modelinin Türkiye için Nümerik Simülasyonu

Bu bölümde kesirli  $PSQ_p$  modelinin nümerik simülasyonu Genelleştirilmiş Euler metodu kullanılarak elde edildi ve grafikleri gösterildi. Türkiye'nin 2019 yılındaki nüfusunu dikkate alarak sigara kullanım verilerine göre aşağıdaki parametreler ele alındı [55]. 2019 yılında Türkiye'deki sigara kullanım verilerine göre sigara kullanmayan oranı, sigara kullanan ve sigarayı bırakan popülasyon oranı aşağıdaki gibi grafikte gösterildi.



Şekil 4.1. Türkiye'nin 2019 yılındaki Sigara Kullanım Verileri

$N = 8300004$ ,  $P = 45046935$ ,  $S = 23003604$ ,  $Q_p = 11084706$ ,  $\beta = 0.1798$ ,  $\gamma = 0.272$ ,  $\mu = 0.0053$ ,  $\theta = 0.001$  olmak üzere adım büyüklüğü  $h = 1$  olarak alındı.

$$\begin{aligned}
 P(k+1) &= P(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left( \mu N - \mu P - \frac{\beta PS}{N} \right), \\
 S(k+1) &= S(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left( \frac{\beta PS}{N} - \mu S - \gamma S - \theta S \right), \\
 Q_p(k+1) &= Q_p(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\gamma S - \mu Q_p).
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Euler metodu kullanılarak  $\forall k = 0, 1, \dots, n - 1$  için aşağıdaki tablolar elde edilir.

Tablo 4.3.  $P, S$  ve  $Q_p$ 'nin  $\alpha = 1$  için  $t$  anındaki değerleri.

$t$ (yıl)	$P(t)$	$S(t)$	$Q_p(t)$
0	45046935,00	23003604,00	11084706,00
1	43003313,11	18846474,36	17282937,34
2	41459623,69	15357172,63	22317578,80
3	40300522,03	12462537,37	26376446,59
4	39438830,45	10082212,26	29626461,59
5	38808331,91	8137705,55	32211803,08
6	38358418,48	6557111,59	34254536,43
7	38050159,45	5277127,07	35856521,75
8	37853417,73	4243478,72	37101860,75
9	37744727,49	3410485,94	38059447,10
10	37705722,14	2740206,23	38785384,20
11	37721960,49	2201428,37	39325157,76
12	37782043,02	1768662,17	39715522,95
13	37876940,71	1421201,19	39986106,78
14	37999481,54	1142292,52	40160747,14

Tablo 4.4.  $P, S$  ve  $Q_p$ 'nin  $\alpha = 0.9$  için  $t$  anındaki değerleri.

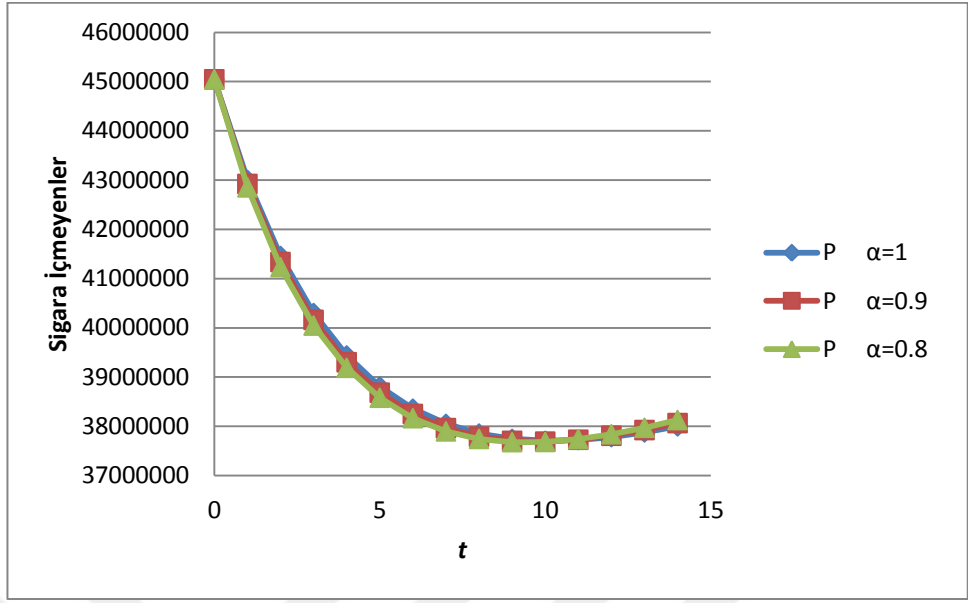
$t$ (yıl)	$P(t)$	$S(t)$	$Q_p(t)$
0	45046935,00	23003604,00	11084706,00
1	42922079,18	18681228,54	17529316,91
2	41336899,50	15081619,35	22715994,05
3	40162300,61	12121756,42	26856076,45
4	39301825,61	9710715,52	30136259,45
5	38683016,76	7760414,90	32716495,15
6	38251079,57	6190996,39	34730943,60
7	37964286,97	4932944,28	36290440,70
8	37790649,64	3927350,33	37485551,69
9	37705493,21	3125213,43	38389682,79
10	37689682,28	2486308,58	39061977,57
11	37728307,18	1977930,08	39549877,60
12	37809704,03	1573672,41	39891313,44
13	37924716,91	1252327,14	40116538,81
14	38066137,83	996925,27	40249642,75



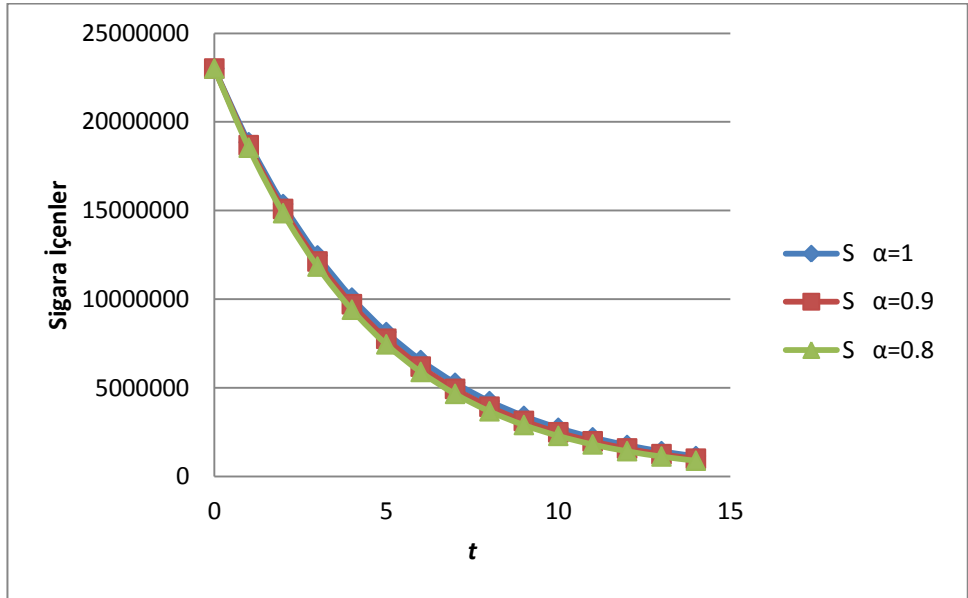
Tablo 4.5.  $P, S$  ve  $Q_p$ 'nin  $\alpha = 0.8$  için  $t$  anındaki değerleri.

$t$ (yıl)	$P(t)$	$S(t)$	$Q_p(t)$
0	45046935,00	23003604,00	11084706,00
1	42852759,42	18540218,50	17739561,23
2	41233326,74	14848246,12	23053068,05
3	40047012,16	11835541,04	27258141,48
4	39189031,15	9401456,46	30559461,03
5	38581412,44	7449202,13	33131148,78
6	38165722,72	5891814,66	35118069,54
7	37897846,52	4654330,19	36638867,11
8	37744243,32	3673860,34	37789617,87
9	37679250,05	2898621,36	38647485,63
10	37683121,11	2286531,12	39274072,30
11	37740590,93	1803714,11	39718339,66
12	37839809,32	1423088,38	40019077,90
13	37971545,67	1123111,95	40206947,53
14	38128589,13	886712,44	40306143,50

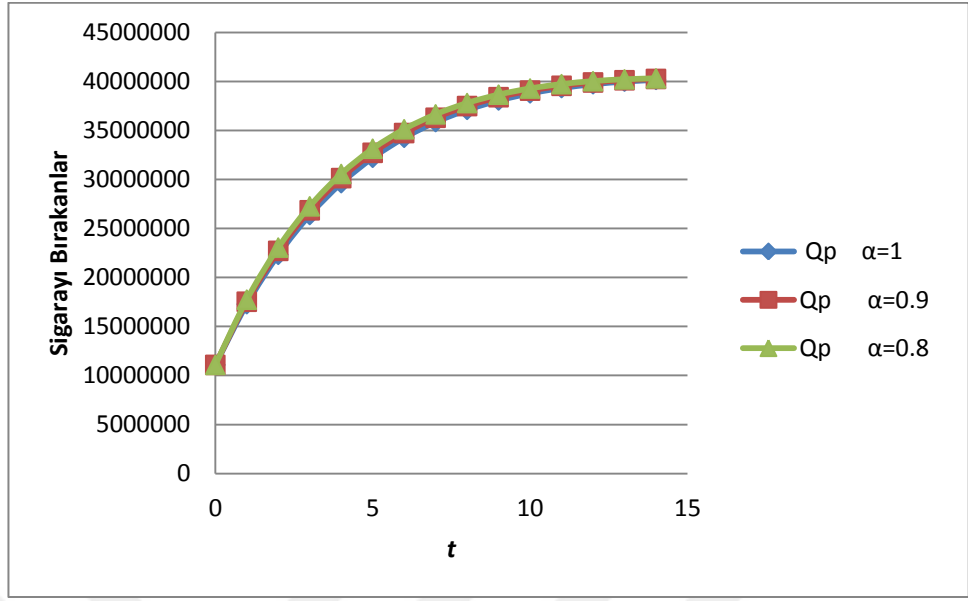
Temel çoğalma oranı  $R_0 = \frac{\beta}{\mu+\gamma+\theta}$  olmak üzere elimizdeki parametrelere göre  $R_0 = 0,64606539705$  elde edilir.  $R_0 < 1$  olurki potansiyel sigara içenler ile sigara içmeyenler arasındaki temas oranı daha azdır. Bu durumda ilerleyen yıllarda Türkiye’de sigara kullanım oranında resmi verilere göre bir düşüş beklenmektedir.



Şekil 4.2. *P* kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği



Şekil 4.3. *S* kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği



Şekil 4.4.  $Q_p$  kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği

Tablo 4.3., Tablo 4.4. ve Tablo 4.5.'te  $\alpha$ 'nın farklı durumları için  $P, S$  ve  $Q_p$ 'nin değişimleri görölmektedir. Yukarıdaki grafiklere göre aşağıdaki yorumlar yapıldı.

\*Henüz sigara içmeyen ama gelecekte sigara içebilecek bireylerin sayısının zamanla azalarak bir noktada minimum değeri aldıktan sonra arttığı gözlemlenmektedir.

\*Sigara içen bireylerin zamanla azaldığı gözlemlenmektedir.

\*Sigarayı bırakan bireylerin zamanla arttığı gözlemlenmektedir.

#### 4.4. Sigara Kullanımı ile İlgili Sonuçlar

Bu çalışmada sigara kullanımına ilişkin kesirsel  $PSQ_p$  modelinin [55] deki veriler dikkate alınarak yeni bir uygulaması yapıldı ve elde edilen nümerik sonuçlar yardımıyla grafikler çizildi. Kesirsel  $PSQ_p$  modelinin sigarasız denge noktası elde edilerek kararlılık analizi yapıldı ve temel çoğalma oranı olan  $R_0$  sayısı bulundu. Elde edilen grafiklerde henüz sigara içmeyen ama gelecekte sigara içebilecek bireylerin sayısının zamanla azalarak bir noktada minimum değeri aldıktan sonra arttığı, sigara içen bireylerin zamanla azaldığı ve sigarayı bırakan bireylerin zamanla arttığı gözlemlenmektedir.

#### 4.5. Kesirsel SAQ Alkol Modelinin Türkiye Uygulaması ve Kararlılık Analizi

Dünya Sağlık Örgütüne göre alkol bağımlılığı, alkolün yinelenen bir biçimde veya sürekli biçimde kullanımından kaynaklanan kullanım bozukluğu olarak tanımlanmaktadır. Alkol kullanımı dünya nüfusunun sağlığı konusunda önde gelen risk faktörlerinden biridir ve birçok hastalığa yol açmaktadır, toplumlar üzerinde sosyal ve ekonomik açıdan pek çok yük oluşturmaktadır. Alkol bağımlılığı sıklıkla farklı psikolojik veya bedensel sorunlarla birlikte görülür. Alkol bağımlılığı tanısı alan kişilerde farklı maddelere bağımlılık riski, duygu durum bozuklukları, depresyon, kaygı sorunları şizofreni, kişilik bozuklukları gibi ruhsal problemler görülürken aynı zamanda bedensel olarak da karaciğerde büyüme, yağlanma, sarılık, kanser ve siroz, yüksek tansiyon, kalpte büyüme ve ani kriz, damar tıkanıkları görülmektedir [56]. Alkolü bırakma modellerinin tanımlanmasında matematiksel modelleme önemlidir. Bu modeller, alkol kullanımının kontrolünü analiz edebileceğimiz gerçeği göz önünde bulundurularak adi diferansiyel denklem sistemleri kullanılarak incelenmiştir. Alkol kullanmanın günümüz dünyasında yaygın durum olduğu iyi bilinmektedir. Alkol kullanımının bir popülasyondaki insanların sosyal davranışlarını son derece etkilediğini de biliyoruz. Toplumda şiddet ve bilinç dışı hareketler oluşmasının en önemli sebebi alkoldür. Yapılan araştırmalarda alkol kullanımının genç yaşlarda başlayıp; toplumda bulaşıcı hastalık gibi kullanımın yayıldığı görülmektedir [57].

Matematiksel salgın modellerinden yararlanılarak sigara içme, alkol kullanma, internet kullanma gibi modellemeler oluşturulmuştur. Bir matematiksel modelin  $R_0$  çoğalma oranı, salgının veya sosyal bulaşıcılığın artıp azalması hakkında bize bilgi sunmaktadır.  $R_0$ , modelin parametrelerinden oluşmaktadır [58].

#### 4.6. Kesirsel SAQ Modeli

Kesirsel SAQ modeli, bir topluluğu temel olarak üç ana gruba ayırır. Birincisi henüz alkol kullanmayan ama gelecekte alkol kullanabilecekler, ikincisi alkol kullananlar ve üçüncüsü alkol kullanmayı kesin olarak bırakanlardır. SAQ alkol modelinin kesirli diferansiyel denklem sistemi olarak ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} &= \mu N - \mu S - \frac{\beta AS}{N}, \\ \frac{d^\alpha A}{dt^\alpha} &= \frac{\beta AS}{N} - \mu A - wA - mA, \\ \frac{d^\alpha Q}{dt^\alpha} &= mA - \mu Q.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Burada  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ ,  $t$  zamanına göre Caputo kesirli türevidir. Başlangıç değerleri  $S(0) = S_0$ ,  $A(0) = A_0$ ,  $Q(0) = Q_0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  şeklinde tanımlanır ve  $S + A + Q = N$  eşitliğinden

$$\frac{d^\alpha N}{dt^\alpha} = \frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha A}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha Q}{dt^\alpha}\tag{4.10}$$

olduğu açıktır. Zaman değişkenine bağlı olaylarda kesir mertebeden modeller hafıza özelliği taşıdığı için tam sayı mertebeden modellere göre daha gerçekçi ve doğru sonuçlar ortaya koyarlar. Bu nedenle kurulan model kesir mertebede oluşturuldu [57]. Bu (4.9) sisteminde  $\alpha = 1$  alarak kesirli mertebeden diferansiyel denklemi tam mertebeden diferansiyel denkleme indirgenir. Bütün kompartıman ve parametreler Tablo 4.6. ve Tablo 4.7. de gösterildi.

Tablo 4.6. Sistemlerde kullanılan kompartımanlar ve anlamları

Sistemlerde kullanılan kompartımanlar	Anlamları
$S(t)$	$t$ zamanında alkol kullanmayan bireylerin sayısı
$A(t)$	$t$ zamanında alkol kullanan bireylerin sayısı
$Q(t)$	$t$ zamanında alkol kullanmayı kesin olarak bırakan bireylerin sayısı
$N(t)$	Toplam nüfus

Tablo 4.7. Parametreler ve anlamları

Parametreler	Anlamları
$\beta$	Yıllık alkole başlama oranı
$\mu$	Yıllık doğal doğum ve ölüm oranı
$m$	Yıllık alkölü bırakma oranı
$w$	Yıllık alkole bağlı ölüm oranı

Tüm bireyler hassas sınıf içine doğar. Daha sonra ergenlik yaşını geçtiklerinde yaşadığı toplumsal çevrenin etkisiyle kötü alışkanlıklardan biri olan alkolü tanıyıp, tüketmeye başlayabilir. Böylece alkol ile tanışmış olur. Doğal doğum ve ölüm oranları modelde eşit olarak kabul edildi. Tüm doğumlar hassas sınıfa girmiş kabul edilir. Modelde tanımlanan parametreler zamana göre değişim göstermemektedir. Alkol kullanımının neden olduğu bazı hastalıklarla ilişkili ölüm oranı yoktur [56-57].  $N$  popülasyonu boyutsuzlaştırılarak yeni değişkenler yardımıyla aşağıdaki şekilde oluşturuldu.

$$s = \frac{S}{N}, a = \frac{A}{N}, q = \frac{Q}{N} \quad (4.11)$$

$s + a + q = 1$ 'dir. Kesirsel SAQ alkol modelinin yeni formu aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{aligned} D^\alpha s(t) &= \mu - \mu s(t) - \beta s(t)a(t), \\ D^\alpha a(t) &= \beta s(t)a(t) - \mu a(t) - ma(t) - wa(t), \\ D^\alpha q(t) &= ma(t) - \mu q(t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

#### 4.7. Kesirsel SAQ Modelinin Kararlılık Analizi

Alkolsüz denge noktasını bulmak için (4.12) sisteminde  $D^\alpha s = 0$ ,  $D^\alpha a = 0$ ,  $D^\alpha q = 0$  alınır. (4.12) sisteminde alkolsüz denge noktasını belirlemek için  $a(t) = 0$  alınır.

$$E_0 = (s_0, a_0, q_0) = (1, 0, 0) \quad (4.13)$$

alkolsüz denge noktası elde edilir. Sistemin alkolsüz denge noktasındaki Jacobian matrisi

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta & 0 \\ 0 & \beta - \mu - m - w & 0 \\ 0 & m & -\mu \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

elde edilir. Jacobian matrisinden (4.14) elde edilen özdeğerler

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu, \\ \lambda_2 &= -\mu, \\ \lambda_3 &= \beta - \mu - m - w, \end{aligned} \quad (4.15)$$

olarak elde edildi. Burada  $\beta, \mu, m, w$  parametreleri pozitif tanımlı reel sayılardır.  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$  olduğu açıktır.  $\lambda_3 < 0$  ise alkolsüz denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.  $\lambda_3 > 0$  ise alkolsüz denge noktası kararsızdır.

$\beta - \mu - m - w < 0$  ise  $\beta < \mu + m + w$  olur.  $R_0 = \frac{\beta}{\mu + m + w} < 1$  temel çoğalma oranıdır.  $R_0 < 1$  olduğunda zamanla alkol kullanım oranı azalacaktır.  $R_0 > 1$  olduğunda zamanla alkol kullanım oranı artacaktır.

**Teorem 4.2.**  $\forall t \geq 0, S(0) = S_0 \geq 0, A(0) = A_0 \geq 0, Q(0) = Q_0 \geq 0$  başlangıç koşullarına sahip çözümleri  $(S(t), A(t), Q(t)) \in R_+^3$  negatif değildir [57].

#### 4.8. Kesirli SAQ Alkol Modelinin Türkiye için Nümerik Simülasyonu

Bu bölümde kesirli SAQ alkol modelinin 2019 yılı için Türkiye alkol kullanımına ilişkin nümerik simülasyonu Genelleştirilmiş Euler metodu kullanılarak elde edildi ve grafikleri gösterildi. [58] deki verilere göre aşağıdaki parametreler kullanıldı.

$S = 47.236.00, A = 13.324.075, Q = 111.914, \beta = 0.0003, m = 0.08, \mu = 0.022, w = 0.003$  olmak üzere adım büyüklüğü  $h = 1$  olarak alındı.

Bu durumda Genelleştirilmiş Euler mekanizma,

$$\begin{aligned} S(k+1) &= S(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left( \mu - \mu S(k) - \frac{\beta S(k)A(k)}{N} \right), \\ A(k+1) &= A(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left( \frac{\beta S(k)A(k)}{N} - \mu A(k) - mA(k) - wA(k) \right), \\ Q(k+1) &= Q(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (mA(k) - \mu Q(k)), \end{aligned} \quad (4.16)$$

olarak yazılır. Buradan  $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$  için aşağıdaki tablolar oluşturuldu.

Tablo 4.8.  $S, A$  ve  $Q$ 'nun  $\alpha = 1$  için  $t$  anındaki değerleri

$t$ (yıl)	$S(t)$	$A(t)$	$Q(t)$
0	47236000,00	13324075,00	111914,00
1	48020534,09	11847377,52	1255322,34
2	48788026,96	10534374,94	2246579,71
3	49538833,66	9366916,98	3103111,20
4	50273303,06	8328866,40	3840397,62
5	50991777,89	7405875,67	4472191,38
6	51694594,77	6585188,43	5010708,48
7	52382084,20	5855462,94	5466799,10
8	53054570,66	5206615,18	5850099,33
9	53712372,62	4629679,34	6169166,05
10	54355802,55	4116683,74	6431596,82
11	54985167,05	3660540,64	6644136,49
12	55600766,82	3254948,13	6812771,99
13	56202896,76	2894303,02	6942816,54
14	56791846,02	2573623,34	7038984,64



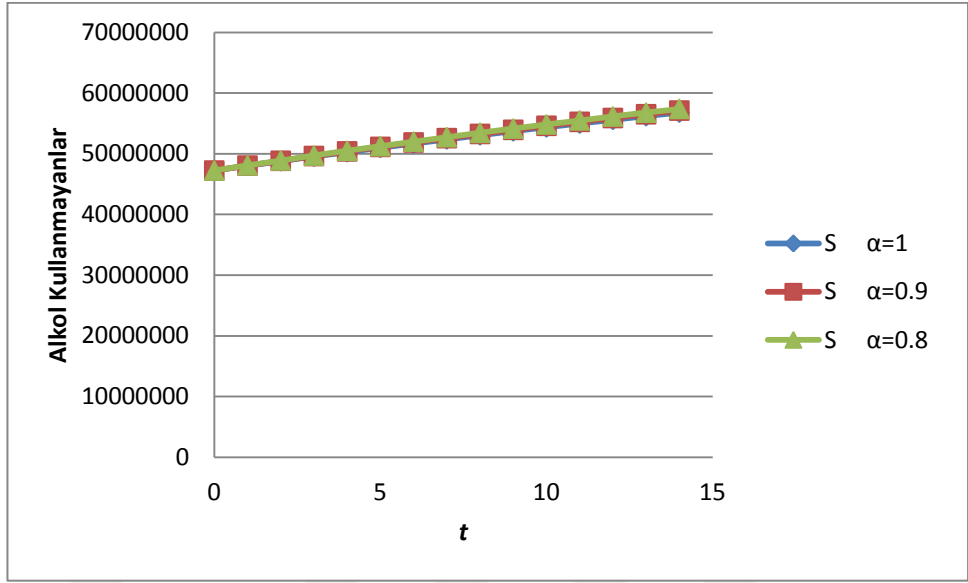
Tablo 4.9.  $S, A$  ve  $Q$ 'nun  $\alpha = 0.9$  için  $t$  anındaki değerleri

$t$ (yıl)	$S(t)$	$A(t)$	$Q(t)$
0	47236000,00	13324075,00	111914,00
1	48051719,30	11788678,83	1300772,80
2	48849015,86	10430249,76	2325144,23
3	49628288,72	9228385,98	3204614,99
4	50389929,72	8165038,40	3956499,44
5	51134323,51	7224239,19	4596101,97
6	51861847,62	6391861,78	5136949,05
7	52572872,46	5655408,44	5590994,60
8	53267761,39	5003822,41	5968801,52
9	53946870,75	4427321,72	6279702,46
10	54610549,93	3917252,16	6531941,87
11	55259141,43	3465957,24	6732801,78
12	55892980,89	3066663,10	6888713,00
13	56512397,21	2713376,78	7005353,54
14	57117712,58	2400796,14	7087735,66

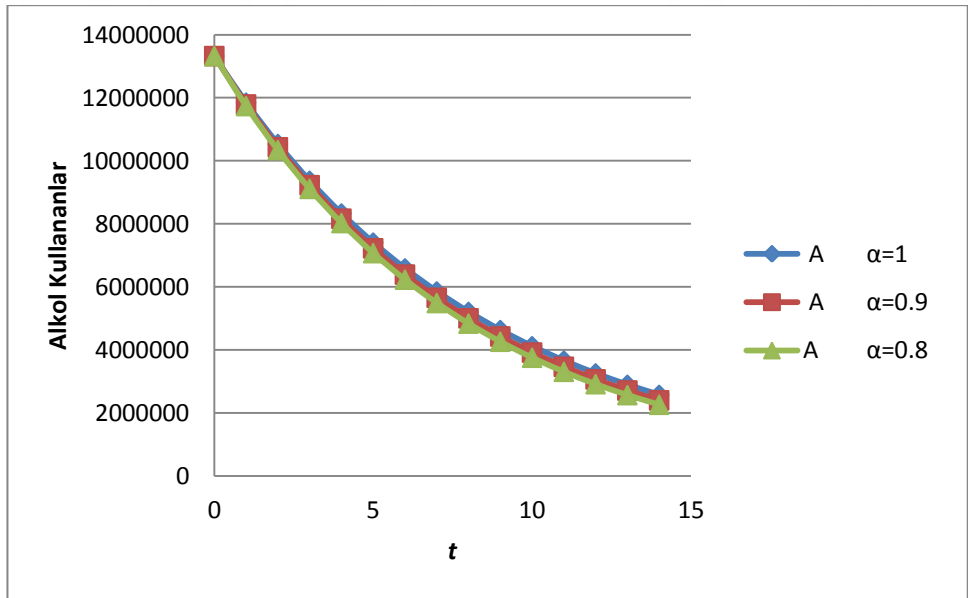
Tablo 4.10.  $S, A$  ve  $Q$ 'nun  $\alpha = 0.8$  için  $t$  anındaki değerleri

$t$ (yıl)	$S(t)$	$A(t)$	$Q(t)$
0	47236000,00	13324075,00	111914,00
1	48078330,74	11738589,18	1339557,26
2	48901017,27	10341805,13	2391805,87
3	49704498,93	9111258,54	3290226,66
4	50489206,87	8027160,15	4053802,80
5	51255564,10	7072077,09	4699241,80
6	52003985,50	6230652,22	5241246,87
7	52734877,91	5489356,88	5692755,89
8	53448640,12	4836273,14	6065151,96
9	54145663,01	4260901,95	6368448,88
10	54826329,51	3753994,17	6611454,43
11	55491014,77	3307401,73	6801914,37
12	56140086,16	2913946,51	6946639,11
13	56773903,38	2567304,87	7051615,42
14	57392818,59	2261905,86	7122104,73

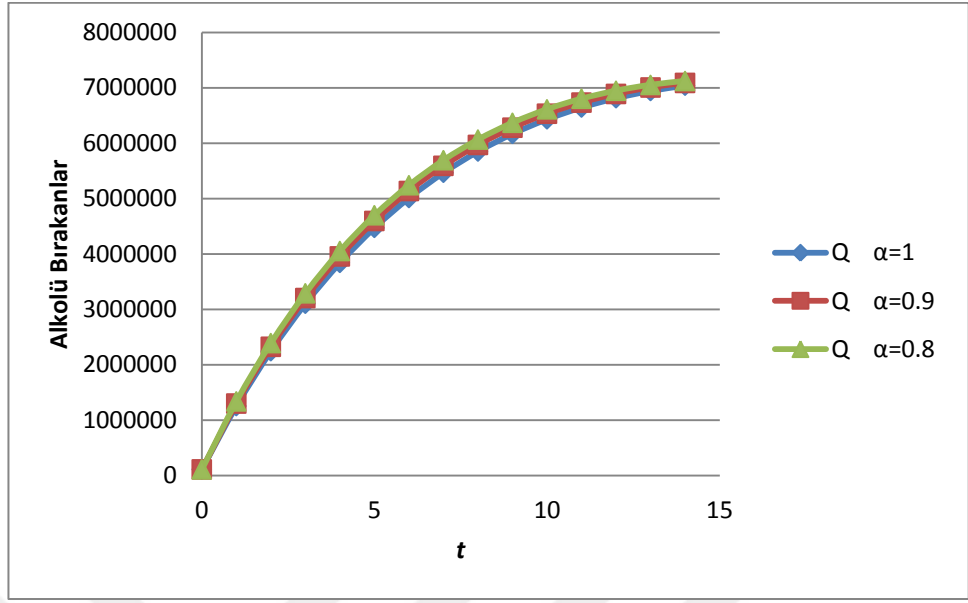
Temel çoğalma oranı olan  $R_0$ ,  $R_0 = \frac{\beta}{\mu+m+w}$  olmak üzere aldığımız parametrelere göre  $R_0 = 0,0027027027$  elde edilir.  $R_0 < 1$  olduğundan zamanla alkol kullanımının azalacağı düşünölmektedir.



Şekil 4.5. S kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği



Şekil 4.6. A kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği



Şekil 4.7. Q kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği

Tablo 4.8., Tablo 4.9. ve Tablo 4.10.'da  $\alpha$ 'nın farklı durumları için  $S, A$  ve  $Q$ 'nin değişimleri görülmektedir. Yukarıdaki grafiklere göre aşağıdaki yorumlar yapıldı.

\*Henüz alkol kullanmayan ama gelecekte alkol kullanabilecek bireylerin sayısının zamanla yavaşça artarak sabit bir şekilde ilerlediği gözlemlenmektedir.

\*Alkol kullanan bireylerin zamanla azaldığı gözlemlenmektedir.

\* Alkol kullanmayı bırakan bireylerin zamanla arttığı gözlemlenmektedir.

#### 4.9. Türkiye'de Alkol Tüketim Alışkanlığı ile İlgili Sonuçlar

Bu çalışmada kesirsel  $SAQ$  modelinin 2019 yılı için Türkiye alkol kullanımındaki veriler [58] dikkate alınarak yeni bir uygulaması yapıldı ve elde edilen nümerik sonuçlar yardımıyla grafikler çizildi. Kesirsel  $SAQ$  modelinin alkolsüz denge noktası elde edilerek kararlılık analizi yapıldı ve temel üreme oranı olan  $R_0$  sayısı bulundu. Elde edilen grafiklerde alkol kullanmayan ama gelecekte alkol kullanabilecek bireylerin sayısının zamanla yavaşça artarak sabit bir şekilde ilerlediği, alkol kullanan bireylerin zamanla azaldığı ve alkol kullanmayı bırakan bireylerin zamanla arttığı gözlemlenmiştir.

## 5. BÖLÜM

### KESİRSEL PSİKOLOJİK HASTALIK MODELİ, KESİRSEL GLİKOZ-İNSÜLİN MODELİ, KESİRSEL KÖPEK POPÜLASYONU MODELİ UYGULAMASI VE KARARLILIK ANALİZİ

Psikolojik hastalıklar, bir kişinin sağlıklı sürdürmesi gereken hayatını, sağlıklı bir şekilde sürdürmesine engel olan psikolojik rahatsızlıklara verilen genel isimdir. Psikolojik hastalıklar kişileri zihinsel olarak etkilediği gibi yaratmış olduğu olumsuz durumlar fiziksel olarak da kendisini gösterir. Bu durum kişinin yaşam tarzını oldukça fazla etkilemektedir. Psikolojik hastalıklar obsesif-kompulsif bozukluk, depresyon, sosyal fobi, panik bozukluğu, travma sonrası stres bozukluğu, bipolar bozukluk, yeme bozuklukları, erişkin dikkat eksikliği ve hiperaktivite bozukluğu, madde bağımlılığı, yaygın anksiyete bozukluğu, nikotin bağımlılığı şeklinde sıralanabilir [59]. Genetik nedenler, beyin hasarları, travmatik yaşantılar, doğum esnasında ortaya çıkan problemler, yoğun madde kullanımı, yoğun ilaç kullanımı, kişinin yeterli şekilde beslenmemesi, yaşanan doğal afetler, kötü yaşam koşulları, ölüm ve yas süreci, toplumun yüksek beklentileri, kişinin yalnız yaşaması, cinsel istismar ya da duygusal istismar, sosyal uyumda zorluk yaşama, gelişen teknoloji, yoğun çalışma temposu, ekonomik sıkıntılar, evrensel problemler, ailevi sorunlar gibi nedenler psikolojik hastalıklara neden olur [60].

Toplumda psikolojik tedavi gören bireylerin matematiksel modellemesi adi diferansiyel denklem sistemleri kullanılarak incelenmiştir [59-61]. Psikolojik hastalıkların günümüz dünyasında yaygın durum olduğu iyi bilinmektedir. Ruhsal hastalıkların bir popülasyondaki insanların sosyal davranışlarını son derece etkilediğini de biliyoruz. Psikolojik hastalık nedenleri de tedavi kadar önemli bir konudur. Bu tür durumlar bazen birbirinden bağımsız ortaya çıkar. Bazı durumlarda ise psikolojik hastalıklar birbiriyle bağlantılı ortaya çıkar. Örneğin yoğun travmatik yaşantıları olan kişilerde bedensel tepkiler de ortaya çıkar. Travmatik yaşantı panik atak durumunu da tetikler. Ancak bazı durumlarda ise psikolojik hastalıklar tek başına ortaya çıkar. Bu noktada kişilerin genetik faktörlerini ve çevresel faktörlerini dikkate almamız gerekir. Diğer bir nokta ise var olan genetik faktör, yaşam şartları nedeniyle tekrardan ortaya çıkar. Çekinik bir gen olan bir hastalık, ilerleyen süreçlerde yoğun kaygı nedeniyle ortaya çıkabilir. Travmatik

yaşantılar bu konuda oldukça önemlidir. Kaygı sorunu olmayan biri yaşadığı deprem yaşantısı sonucunda anksiyete bozukluğu yaşar. Bu tür durumlar geçmiş yaşantılarla da ortaya çıkar [61]. Aşağıdaki kısımda toplumda psikolojik hastalık oranı için matematiksel bir model ele alındı ve sonuçlar tartışıldı.

### 5.1. Kesirsel *SPR* Psikolojik Hastalık Modeli

Kesirsel *SPR* psikolojik hastalık modeli, bir topluluğu temel olarak üç ana gruba ayırır. Birincisi psikolojik tedavi görmeyen bireyler, psikolojik destek alan bireyler ve psikolojik tedaviyi tamamlayarak iyileşen bireylerdir. *SPR* psikolojik hastalık modelinin kesirli diferansiyel denklem sistemi olarak ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} &= \mu N - \mu S - \beta S, \\ \frac{d^\alpha P}{dt^\alpha} &= \beta S - \mu P - \sigma P - \theta P, \\ \frac{d^\alpha R}{dt^\alpha} &= \sigma P - \mu R.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Burada  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ ,  $t$  zamanına göre  $\alpha$ . mertebeden Caputo kesirli türevidir. Başlangıç değerleri  $S(0) = S_0$ ,  $P(0) = P_0$ ,  $R(0) = R_0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  şeklinde tanımlandı.

Toplum üç kompartımana ayrıldığı için  $S + P + R = N$  olup tüm terimlerin zamana göre türevlenmesiyle

$$\frac{d^\alpha N}{dt^\alpha} = \frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha P}{dt^\alpha} + \frac{d^\alpha R}{dt^\alpha}\tag{5.2}$$

elde edilir. Bütün kompartıman ve parametreler Tablo 5.1 ve Tablo 5.2 de gösterildi.

Tablo 5.1. Modelde kullanılan kompartımanlar ve anlamları

Sistemlerde kullanılan kompartımanlar	Anlamları
$S(t)$	$t$ zamanında psikolojik tedavi görmeyen bireylerin sayısı (yıllık)
$P(t)$	$t$ zamanında psikolojik destek alan bireylerin sayısı (yıllık)
$R(t)$	$t$ zamanında iyileşen bireylerin sayısı (yıllık)
$N(t)$	Toplam nüfus

Zaman değişkenine bağlı olaylarda kesir mertebeden modeller hafıza özelliği taşıdığı için tam sayı mertebeden modellere göre daha gerçekçi ve doğru sonuçlar ortaya koyarlar [59-61]. Bu nedenle kurulan model kesir mertebede olarak oluşturuldu. (5.1) sisteminde  $\alpha = 1$  için kesirli mertebeden diferansiyel denklem tam mertebeden diferansiyel denkleme indirgenir.

Tablo 5.2. Parametreler ve anlamları

Parametreler	Anlamları
$\beta$	Yıllık psikolojik tedaviye başlama oranı
$\mu$	Yıllık doğum ve doğal ölüm oranı
$\sigma$	Yıllık tamamen iyileşme oranı
$\theta$	Yıllık psikolojik hastalıklara bağlı ölüm oranı

Doğal doğum ve ölüm oranları modelde eşit olarak kabul edildi. Tüm doğumlar hassas sınıfa girmiş kabul edilir. Psikolojik hastalıklarda tedavisi tamamlanan bireylerin büyük bir oranı yeniden aynı ya da başka türden bir psikolojik hastalığa yakalanabilir. Modelde tanımlanan parametreler zamana göre değişim göstermemektedir.  $N$  popülasyonu boyutsuzlaştırılarak yeni değişkenler aşağıdaki şekilde oluşturuldu.

$$s = \frac{S}{N}, p = \frac{P}{N}, r = \frac{R}{N} \quad (5.3)$$

Buradan açıktır ki  $s + p + r = 1$ 'dir. Böylece kesirsel *SPR* psikolojik modelinin yeni formu aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{aligned} D^\alpha s(t) &= \mu - \mu s(t) - \beta s(t), \\ D^\alpha p(t) &= \beta s(t) - \mu p(t) - \sigma p(t) - \theta p(t), \\ D^\alpha r(t) &= \sigma p(t) - \mu r(t). \end{aligned} \quad (5.4)$$

## 5.2. Kesirsel *SPR* Psikolojik Modelinin Hastalıklı Denge Noktası ve Kararlılık Analizi

Denge noktasını bulmak için (5.4) sisteminde  $D^\alpha s = 0$ ,  $D^\alpha p = 0$ ,  $D^\alpha r = 0$  olması düşünülür. Bu durumda kompartımanların zamana göre değişimi yoktur. Yani ya

hastalık bitmiş ya da dengeye girmiştir. Sistemin psikolojik hastalıklı denge noktasını belirlemek için  $p(t) \neq 0$  alınır.  $E_0 = (s_0, p_0, r_0)$  olmak üzere

$$E_0 = \left( \frac{\mu}{\mu+\beta}, \frac{\beta\mu}{(\mu+\beta)(\mu+\sigma+\theta)}, \frac{\sigma\beta}{(\mu+\beta)(\mu+\sigma+\theta)} \right) \quad (5.5)$$

psikolojik hastalıklı denge noktası elde edilir. Sistemin denge noktasındaki Jacobian matrisi

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta & 0 & 0 \\ \beta & -\mu - \sigma - \theta & 0 \\ 0 & \sigma & -\mu \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

olarak elde edilir. Jacobian matrisinden (5.6) elde edilen özdeğerler

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu - \beta, \\ \lambda_2 &= -\mu - \sigma - \theta, \\ \lambda_3 &= -\mu, \end{aligned} \quad (5.7)$$

şeklinde elde edildi. Burada  $\beta, \mu, \sigma, \theta$  parametreleri pozitif tanımlı reel sayılardır.  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  ve  $\lambda_3 < 0$  olduğu açıktır. Sistemin psikolojik hastalıklı denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.

**Teorem 5.1.**  $\forall t \geq 0, S(0) = S_0 \geq 0, P(0) = P_0 \geq 0, R(0) = R_0 \geq 0$  başlangıç koşullarına sahip çözümleri  $(S(t), P(t), R(t)) \in R_+^3$  negatif değildir [61].

### 5.3. Kesirli SPR Psikolojik Hastalık Modelinin Türkiye için Nümerik Simülasyonu

Bu bölümde kesirli SPR psikolojik hastalık modelinin 2019 yılı Türkiye verilerine ilişkin nümerik simülasyonu Genelleştirilmiş Euler metodu kullanılarak elde edildi ve grafikleri gösterildi [58].  $S = 67.850.000, P = 15.000.000, R = 150.000, \beta = 0.05, \sigma = 0.01, \mu = 0.022, \theta = 0.15$  olmak üzere adım büyüklüğü  $h = 0.1$  olarak alındı. Euler yönteminin akış mekanizması

$$\begin{aligned} S(k+1) &= S(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\mu N - \mu S(k) - \beta S(k)), \\ P(k+1) &= P(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\beta S(k) - \mu P(k) - \sigma P(k) - \theta P(k)), \\ R(k+1) &= R(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\sigma P(k) - \mu R(k)), \end{aligned} \quad (5.8)$$



olarak yazılır. Euler metodunu kullanarak aşağıdaki tablolardaki sonuçlar elde edildi.

Tablo 5.3.  $S, P$  ve  $R$  'nin  $\alpha = 1$  için  $t$  anındaki değerleri

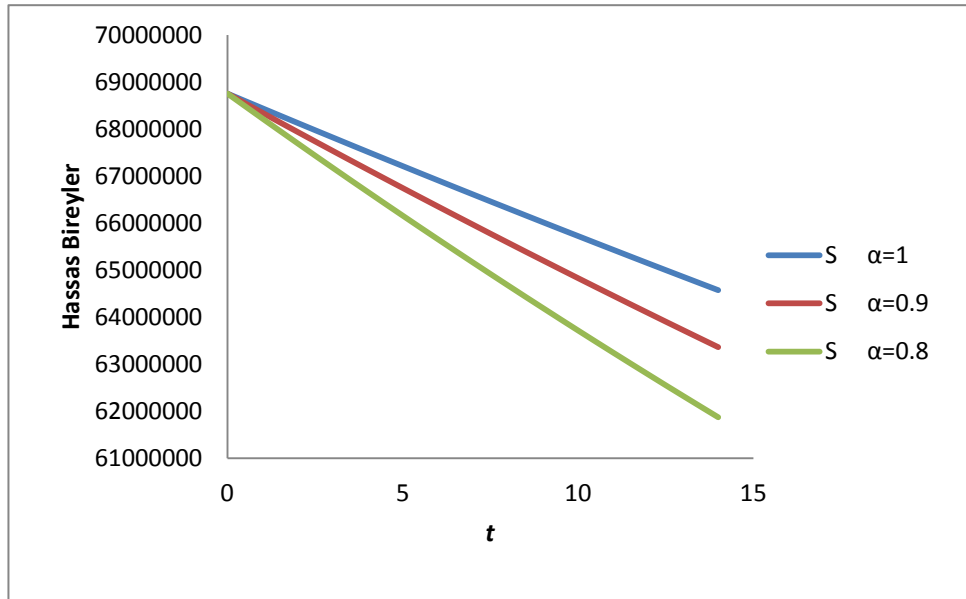
$t$ (yıl)	$S(t)$	$P(t)$	$R(t)$
0	68750000,00	15000000,00	150000,00
1	68437600,00	15070750,00	164670,00
2	68127449,28	15138650,35	179378,47
3	67819531,64	15203764,16	194122,49
4	67513831,01	15266153,31	208899,18
5	67210331,43	15325878,47	223705,76
6	66909017,04	15382999,14	238539,48
7	66609872,12	15437573,64	253397,70
8	66312881,04	15489659,16	268277,80
9	66018028,30	15539311,77	283177,24
10	65725298,49	15586586,44	298093,57
11	65434676,34	15631537,06	313024,35
12	65146146,67	15674216,46	327967,23
13	64859694,42	15714676,46	342919,92
14	64575304,62	15752967,82	357880,17

Tablo 5.4.  $S, P$  ve  $R$  'nin  $\alpha = 0.9$  için  $t$  anındaki değerleri

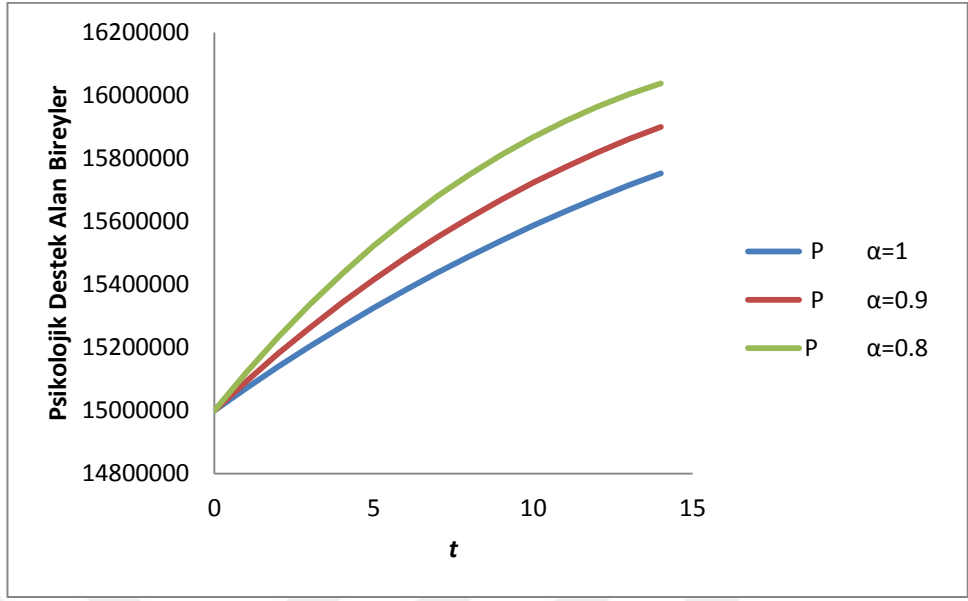
$t$ (yıl)	$S(t)$	$P(t)$	$R(t)$
0	68750000,00	15000000,00	150000,00
1	68341078,49	15092609,46	169202,55
2	67936010,89	15180336,34	188471,03
3	67534760,87	15263322,19	207798,86
4	67137292,47	15341704,93	227179,65
5	66743570,03	15415618,98	246607,23
6	66353558,26	15485195,30	266075,61
7	65967222,17	15550561,53	285579,01
8	65584527,14	15611842,02	305111,80
9	65205438,85	15669157,93	324668,56
10	64829923,29	15722627,33	344244,02
11	64457946,81	15772365,22	363833,10
12	64089476,05	15818483,67	383430,88
13	63724477,96	15861091,84	403032,59
14	63362919,82	15900296,11	422633,62

Tablo 5.5.  $S, P$  ve  $R$  'nin  $\alpha = 0.8$  için  $t$  anındaki değerleri

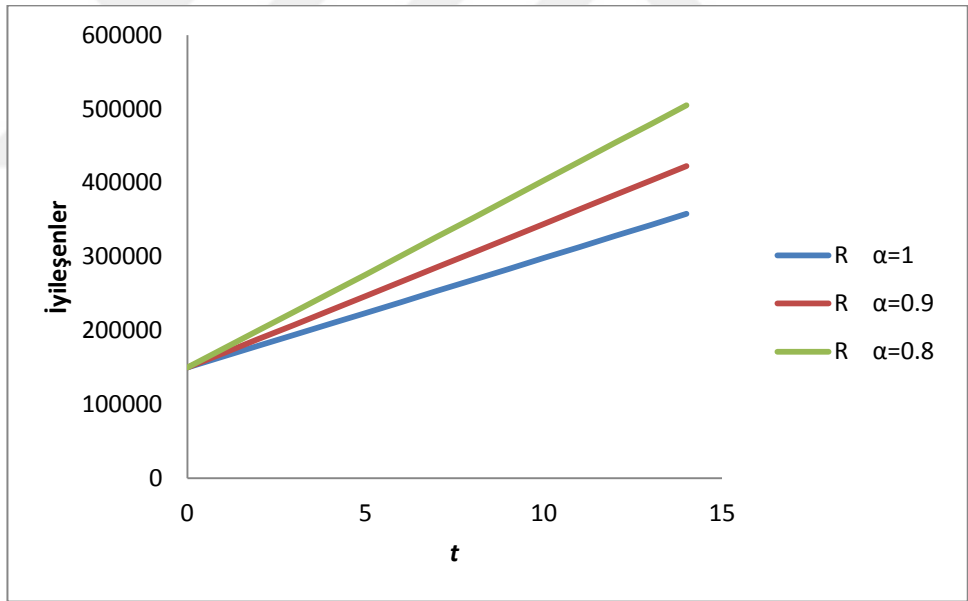
$t$ (yıl)	$S(t)$	$P(t)$	$R(t)$
0	68750000,00	15000000,00	150000,00
1	68218403,82	15120391,89	174963,23
2	67693320,72	15232532,29	200037,88
3	67174670,87	15336732,14	225209,49
4	66662375,47	15433292,11	250464,17
5	66156356,66	15522502,86	275788,62
6	65656537,54	15604645,42	301170,07
7	65162842,15	15679991,41	326596,28
8	64675195,46	15748803,45	352055,52
9	64193523,38	15811335,35	377536,54
10	63717752,69	15867832,44	403028,57
11	63247811,09	15918531,83	428521,31
12	62783627,17	15963662,67	454004,89
13	62325130,38	16003446,41	479469,87
14	61872251,04	16038097,03	504907,21



Şekil 5.1.  $S$  kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği



Şekil 5.2. P kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği



Şekil 5.3. R kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği

Tablo 5.3., Tablo 5.4. ve Tablo 5.5.'te  $\alpha$ 'nın farklı durumları için S, P ve R'nin değişimleri görülmektedir. Yukarıdaki grafiğlere göre aşağıdaki yorumlar yapıldı.

\*Psikolojik tedavi görmeyen bireylerin sayısının zamanla azaldığı gözlemlenmektedir.

\*Psikolojik destek gören bireylerin sayısının zamanla arttığı gözlemlenmektedir.

\*İyileşmiş bireylerin sayısının zamanla arttığı gözlemlenmektedir.

#### 5.4. Psikolojik Model için Elde Edilen Sonuçlar

Bu çalışmada kesirsel *SPR* psikolojik hastalık modelinin 2019 yılı için Türkiye psikolojik hastalık verileri dikkate alınarak yeni bir uygulaması yapıldı ve elde edilen nümerik sonuçlar yardımıyla grafikler çizildi. Kesirsel *SPR* modelinin psikolojik hastalıklı denge noktası elde edildi ve kararlılık analizi yapıldı. Elde edilen grafiklerde psikolojik tedavi görmeyen bireylerin sayısının zamanla azaldığı, psikolojik destek gören bireylerin sayısının zamanla arttığı ve iyileşen bireylerin sayısının zamanla arttığı gözlemlenmiştir.

#### 5.5. Kesirli Glikoz-İnsülin Modeli

Yediğimiz besinlerin özellikle karbonhidrat içeren besinlerin çoğu vücutta enerji için kullanılmak üzere glikoza dönüştürülür. Midenin arka yüzeyinde yerleşik bir organ olan pankreas, kaslarımızın ve diğer dokuların kandan glikozu alıp enerji olarak kullanmalarını sağlayan insülin adı verilen bir hormon üretir. Besinlerle kana geçen glikoz, insülin hormonu aracılığı ile hücrelere girer. Hücreler glikozu yakıt olarak kullanır. Glikoz vücudun temel enerji kaynağı olup eğer glikoz miktarı vücudun yakıt ihtiyacından fazla ise karaciğerde yağ dokusunda depolanır [62]. İnsülin, vücudumuzda midenin arka tarafında bulunan bir organ olan pankreastaki beta hücrelerinde salgılanan bir hormondur. Kandaki şekerin kandan ayrılarak hücre içine girmesini sağlar. Böylelikle kandaki şeker düzeyi de azalmış olur. Tüm vücut hücrelerinin enerji için glikoza ihtiyacı vardır, ancak bunların içinde bazıları (beyin, alyuvarlar ve üreme organları) enerji ihtiyaçlarını sadece glikozla karşılayabilirler. Bunun için de kan şekeri seviyesinin her zaman yeterli miktarda olması gerekir. Kan şekeri seviyesi, insülin ve glukagon isimli pankreastan salgılanan hormonlar tarafından kontrol edilir. Kan şekerinin yükselmesi de düşmesi de vücut için tehlikelidir [63].

Glikoz ve insülin sistemi ile ilgili geçmişte yapılan çalışmalar göz önüne alınarak 2013 yılında Lamborte vd. [64] tarafından oluşturulan modelin kesirsel durumu ele alınıp Genelleştirilmiş Euler Yöntemi kullanılarak nümerik sonuçlar elde edilmiştir. Kesirsel Glikoz-İnsülin modeli, üç kompartımandan oluşmaktadır. Birincisi kandaki glikoz konsantrasyonu ( $G$ ), ikincisi kandaki insülin konsantrasyonu ( $I$ ) ve üçüncüsü ince

bağırsaktaki emilime hazır glikoz konsantrasyonudur ( $D$ ). Kesirsel Glikoz-İnsülin modelinin kesirli diferansiyel denklem sistemi olarak ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha I}{dt^\alpha} &= k_1 G - k_6 I, \\ \frac{d^\alpha G}{dt^\alpha} &= -k_4(I - I_{pi}) - k_2 I - k_3 + k_0 D, \\ \frac{d^\alpha D}{dt^\alpha} &= -k_a D.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Burada  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ ,  $t$  zamanına göre Caputo kesirli türevidir. Başlangıç değerleri  $I(0) = I_0$ ,  $G(0) = G_0$ ,  $D(0) = D_0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  şeklinde tanımlanır. Kurulan model kesir mertebeye olarak oluşturuldu [62-64]. Bu (5.9) sisteminde  $\alpha = 1$  olarak kesirli mertebeden diferansiyel denklemi tam mertebeden diferansiyel denkleme indirgenir. Bütün kompartıman ve parametreler Tablo 5.6. ve Tablo 5.7.' de gösterildi.

Tablo 5.6. Sistemlerde kullanılan kompartımanlar ve anlamları

Sistemlerde kullanılan kompartımanlar	Anlamları
$I(t)$	$t$ zamanında kandaki insülin konsantrasyonu
$G(t)$	$t$ zamanında kandaki glikoz konsantrasyonu
$D(t)$	$t$ zamanında ince bağırsaktaki emilime hazır glikoz konsantrasyonu

Tablo 5.7. Parametreler ve anlamları

Parametreler	Anlamları
$k_0$	Açlık anında kanda bulunan glikoz oranı
$k_1$	Pankreastan insülin salgılama oranı
$k_2$	İnsüline bağlı olarak dokulardaki glikoz yükselme oranı
$k_3$	İnsülinden bağımsız olarak dokulardaki glikoz yükselme oranı
$k_4$	Karaciğerdeki glikoz üretiminin yükselme oranı
$k_6$	Kana insülin geçiş oranı
$k_a$	Glikoz emilim parametresi
$I_{pi}$	Karaciğerdeki değişen glikoz üretimine bağlı olan kandaki insülin değişimi

**Teorem 5.2.**  $\forall t \geq 0, I(0) = I_0 \geq 0, G(0) = G_0 \geq 0, D(0) = D_0 \geq 0$  başlangıç koşullarına sahip çözümleri  $(I(t), G(t), D(t)) \in R_+^3$  negatif değildir [65].

### 5.6. Kesirli Glikoz-İnsülin Modelinin Nümerik Simülasyonu

Bu bölümde kesirli Glikoz-İnsülin modelinin nümerik simülasyonu Genelleştirilmiş Euler Metodu kullanılarak elde edildi ve grafikleri gösterildi. [65] deki verilere göre  $k_0 = 0.01, k_1 = 0.7, k_2 = 0.0005, k_3 = 1, k_4 = 0.05, k_6 = 0.5, k_a = 0.15, I_{pi} = 800$  parametre değerleri alındı.  $G = 150, I = 90$  ve  $D = 50$  keyfi olmak üzere adım büyüklüğü  $h = 0.01$  olarak alındı. Euler methodu ile elde edilen sayısal veriler Tablo 5.8, Tablo 5.9 ve Tablo 5.10 da verildi.

Tablo 5.8.  $I, G$  ve  $D$ 'nin  $\alpha = 1$  için  $t$  anındaki değerleri

$t$ (gün)	$I(t)$	$G(t)$	$D(t)$
0	90,00	150,00	50,00
1	90,95	150,55	49,88
2	91,90	151,10	49,76
3	92,84	151,65	49,64
4	93,79	152,21	49,52
5	94,74	152,76	49,40
6	95,68	153,31	49,29
7	96,62	153,86	49,17
8	97,56	154,41	49,05
9	98,50	154,95	48,94
10	99,44	155,50	48,82
11	100,38	156,05	48,70
12	101,32	156,59	48,59
13	102,25	157,14	48,47
14	103,18	157,68	48,36

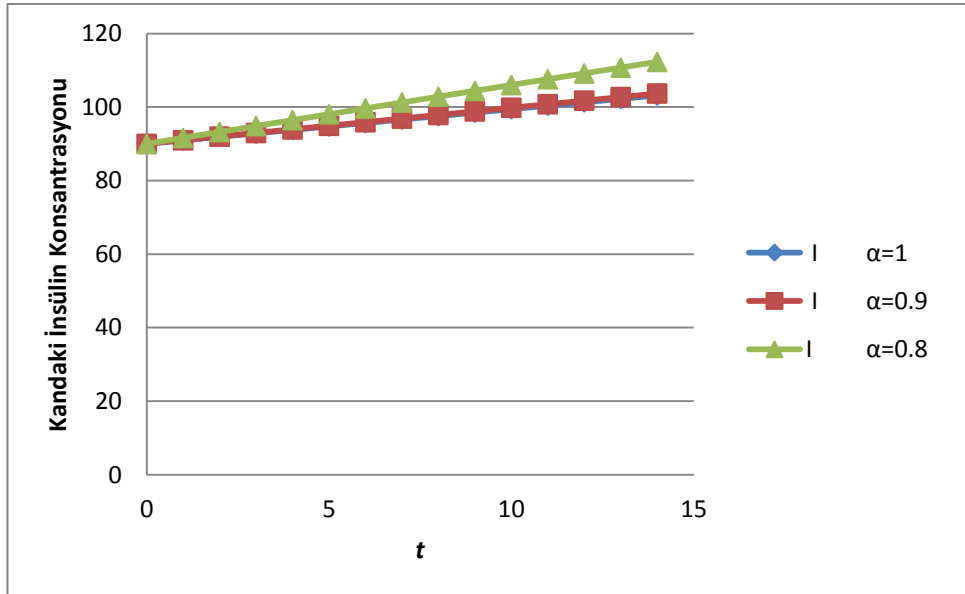
Tablo 5.9.  $I, G$  ve  $D$ 'nin  $\alpha = 0.9$  için  $t$  anındaki değerleri

$t$ (gün)	$I(t)$	$G(t)$	$D(t)$
0	90,00	150,00	50,00
1	90,98	150,57	49,87
2	91,97	151,15	49,59
3	92,96	151,72	49,39
4	93,94	152,29	49,19
5	94,92	152,87	48,99
6	95,90	153,44	48,79
7	96,88	154,01	48,60
8	97,86	154,58	48,40
9	98,84	155,15	48,20
10	99,82	155,72	48,01
11	100,79	156,29	47,81
12	101,76	156,85	47,62
13	102,73	157,42	47,43
14	103,70	157,98	47,24

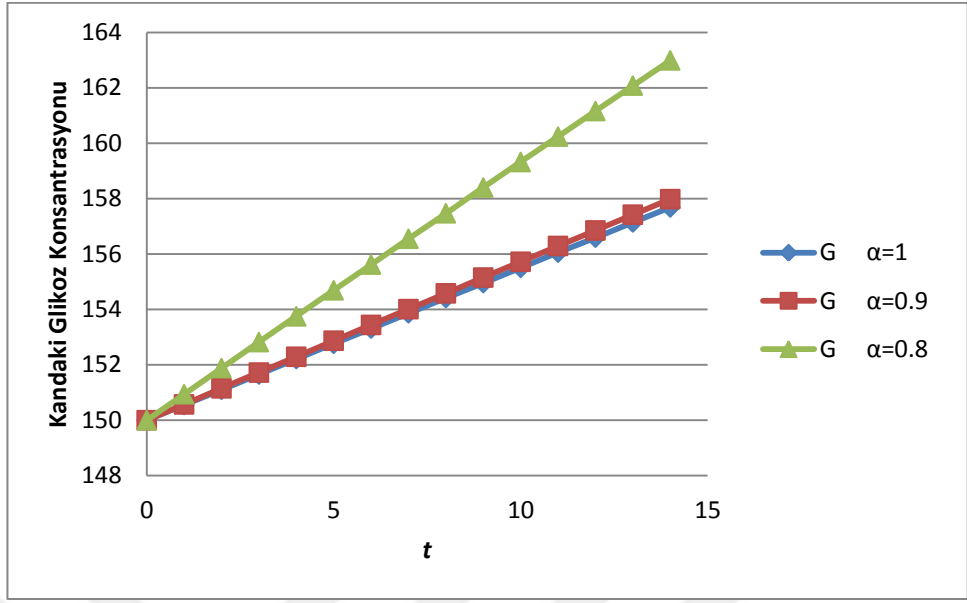


Tablo 5.10.  $I, G$  ve  $D$ 'nin  $\alpha = 0.8$  için  $t$  anındaki değerleri

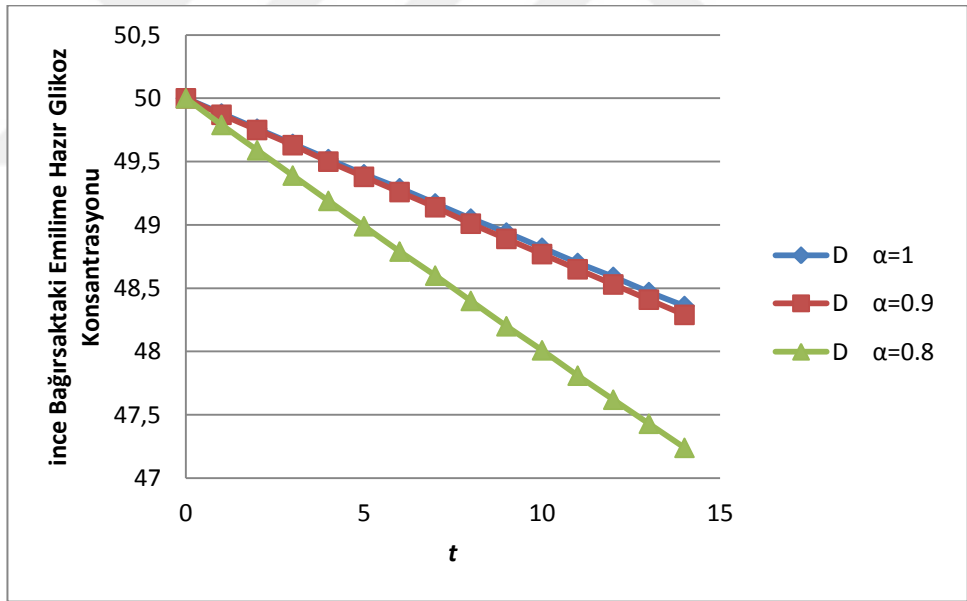
$t$ (gün)	$I(t)$	$G(t)$	$D(t)$
0	90,00	150,00	50,00
1	91,61	150,94	49,79
2	93,23	151,88	49,59
3	94,84	152,82	49,39
4	96,44	153,75	49,19
5	98,05	154,69	48,99
6	99,64	155,62	48,79
7	101,24	156,55	48,60
8	102,83	157,47	48,40
9	104,41	158,40	48,20
10	106,00	159,32	48,01
11	107,58	160,24	47,81
12	109,15	161,16	47,62
13	110,72	162,08	47,43
14	112,29	162,99	47,24



Şekil 5.4.  $I$  kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği



Şekil 5.5. *G* Kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği



Şekil 5.6. *D* Kompartıman modelinin zamana göre değişim grafiği

Tablo 5.8., Tablo 5.9. ve Tablo 5.10'da  $\alpha$ 'nın farklı durumları için *I*, *G* ve *D*'nin değişimleri görülmektedir. Yukarıdaki grafiklere göre aşağıdaki yorumları yapabiliriz.

\*Kandaki insülin konsantrasyonunun zamanla yavaşça yükseleceği gözlemlenmektedir.

\*Kandaki glikoz konsantrasyonunun  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 0.9$  için zamanla yükseleceği ve  $\alpha = 0.8$  için daha hızlı yükseleceği gözlemlenmektedir.

\*İnce bağırsaktaki emilime hazır glikoz konsantrasyonunun  $\alpha = 1$  ,  $\alpha = 0.9$  için zamanla azalacağı ve  $\alpha = 0.8$  için daha hızlı azalacağı gözlemlenmektedir.

### **5.7. Glikoz-İnsülin Modeli için Elde Edilen Sonuçlar**

Bu çalışmada kesirsel Glikoz-İnsülin modelinin Genelleştirilmiş Euler Methodu yardımı ile yeni bir uygulaması yapıldı ve elde edilen nümerik sonuçlar yardımıyla grafikler çizildi. Elde edilen grafiklerde kandaki insülin konsantrasyonunun zamanla yükseleceği, kandaki glikoz konsantrasyonunun  $\alpha = 1$  ve  $\alpha = 0.9$  için zamanla yükseleceği,  $\alpha = 0.8$  için daha hızlı yükseleceği ve ince bağırsaktaki emilime hazır glikoz konsantrasyonunun  $\alpha = 1$  ve  $\alpha = 0.9$  için zamanla azaldığı,  $\alpha = 0.8$  için daha hızlı azaldığı gözlemlenmektedir. Glikoz-İnsülin modelleri özellikle diyabet hastaları için önem taşımaktadır. Bu çalışma ile diyabet hastası bir insanın vücudundaki glikoz miktarının, insülin durumunun ve ince bağırsaktaki emilime hazır glikoz konsantrasyonunun zamana göre değişiminin matematiksel modellenmesi yapılmıştır.

### **5.8. Kesirsel Köpek Popülasyonu Modeli**

Köpek popülasyonu, genel itibariyle sahipli ve sahipsiz köpekler olmak üzere ikiye ayrılmakta olup sahipsiz köpekler üç ana başlık altında toplanabilir. Buna göre sahipsiz köpek popülasyonunu sahipli olduğu halde kaybolan köpekler, sahibi tarafından terk edilen köpekler ve halihazırda sahipsiz olan köpekler oluştururlar. Sahipli köpekler ise, gerek bir kişi tarafından gerekse birden fazla kişi tarafından sahiplenilmiş, bakımı üstlenilmiş köpeklerdir [65]. Sahipsiz köpekler, belirli bir habitat içerisinde bir araya gelerek hayatlarını idame ettirmeye çalışır. Bu habitatta köpeklerin üremesi, dışarıdan gelen köpeğin habitata kabulü, ölümleri vb. hususlar ile köpek popülasyonu oluşur. Sahipsiz köpek popülasyonuna etki eden bazı etmenler vardır. Buna göre, çevredeki insanların tavır ve davranışları, köpeklerin üreme kapasiteleri, grup içindeki köpeklerin yiyecek ve su gibi kaynaklara erişimi gibi hususlar, popülasyonun büyüklüğünü belirler. Sahipsiz köpek popülasyonunun kontrol altında tutulmaması, popülasyonun büyümesiyle beraber bazı riskleride beraberinde getirmektedir. Buna göre, bir habitatta sokak köpeği sayısının artması, zoonoz hastalıklarda artışa neden olmaktadır. Zoonoz hastalıklar; hayvanlardan insanlara bulaşan ve her iki gruba dâhil bireylerde ortak olarak şekillenen hastalıklar diye tanımlanabilir. Zoonoz hastalıklar içerisinde bakteriyel, viral,

funga (mantar kaynaklı), riketsiyal (paraziter bir mikroorganizma türü) ve paraziter enfeksiyonlar yer almaktadır. Sahipsiz köpekler, insanlara saldırmakla birlikte yaşadıkları habitatta trafik kazalarına, kuduz ve zoonoz hastalıklarda neden olmaktadır. Sonuç itibariyle sahipsiz köpek popülasyonunun kontrol altına alınmaması, insan sağlığını tehdit etmektedir [66-68].

Kesirsel köpek popülasyon modeli, iki kompartımandan oluşmaktadır. Birincisi kısırlaştırılmayan köpekler ( $D$ ) ve ikincisi kısırlaştırılan köpeklerdir ( $S$ ). Kesirsel köpek popülasyon modelinin kesirli diferansiyel denklem sistemi olarak ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha D}{dt^\alpha} &= rD \left(1 - \frac{D}{K}\right) - \mu D - \beta D - \theta D, \\ \frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} &= \beta D - \mu S - \theta S. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Burada  $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ ,  $t$  zamanına göre Caputo kesirli türevidir. Başlangıç değerleri  $D(0) = D_0$ ,  $S(0) = S_0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  şeklinde tanımlanır.

Tablo 5.11. Sistemlerde kullanılan kompartımanlar ve anlamları

Sistemlerde kullanılan kompartımanlar	Anlamları
$D(t)$	$t$ zamanında kısırlaştırılmayan köpek sayısı
$S(t)$	$t$ zamanında kısırlaştırılan köpek sayısı
$N(t)$	Toplam popülasyon

Tablo 5.12. Parametreler ve anlamları

Parametreler	Anlamları
$\beta$	Yıllık kısırlaştırma oranı
$\mu$	Yıllık doğal ölüm oranı
$\theta$	Yıllık hastalık, açlık ve diğer nedenlere bağlı ölüm oranı
$K$	Taşıma kapasitesi oranı
$r$	Yıllık büyüme oranı

$N$  popülasyonu boyutsuzlaştırılarak yeni değişkenler yardımıyla aşağıdaki şekilde oluşturuldu.

$$d = \frac{D}{N}, s = \frac{S}{N} \quad (5.11)$$

$d + s = 1$  'dir. Kesirsel köpek popülasyon modelinin yeni formu aşağıdaki şekilde yazılır.

$$D^\alpha d(t) = rd(t) \left(1 - \frac{d(t)}{K}\right) - \mu d(t) - \beta d(t) - \theta d(t), \quad (5.12)$$

$$D^\alpha s(t) = \beta d(t) - \mu s(t) - \theta s(t).$$

### 5.9. Parametrelerin Belirlenmesi

Zamana göre lojistik olarak büyüyen  $D$  büyüklüğünün uç sınır değerinin  $K$  ( $D$ 'nin alabileceği en büyük değer, maksimum taşıma kapasitesi) olduğunu varsayalım. Lojistik model,  $\frac{D}{K} \approx 0$  olduğunda göreceli büyüme oranının  $r$  olduğunu ve  $\frac{D}{K} \approx 1$  iken  $D$ 'nin lineer fonksiyonu olarak azalarak sifira gittiğini varsayar ve

$$\frac{d^\alpha D}{dt^\alpha} = rD \left(1 - \frac{D}{K}\right). \quad (5.13)$$

elde edilir [69].

Kısırlaştırılmamış köpek kompartımanında doğal ölümler olacağı için azalma olacaktır.

$$\frac{d^\alpha D}{dt^\alpha} = rD \left(1 - \frac{D}{K}\right) - \mu D. \quad (5.14)$$

Kısırlaştırılmamış köpek kompartımanında,  $\beta$  kısırlaştırma oranı olmak üzere yapılacak kısırlaştırmalardan sonra  $\beta D$  kadar azalma olacaktır.

$$\frac{d^\alpha D}{dt^\alpha} = rD \left(1 - \frac{D}{K}\right) - \mu D - \beta D. \quad (5.15)$$

Kısırlaştırılmamış köpek kompartımanında, hastalık, açlık ve diğer nedenlere bağlı ölümler olacağı için  $\theta$  bu tür nedenlere bağlı ölüm oranı olmak üzere  $\theta D$  kadar azalma olacaktır. Buna göre aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{d^\alpha D}{dt^\alpha} = rD \left(1 - \frac{D}{K}\right) - \mu D - \beta D - \theta D. \quad (5.16)$$

Kısırlaştırılmış köpek kompartımanına,  $\beta$  kısırlaştırma oranı olmak üzere yapılacak kısırlaştırmalardan sonra  $\beta D$  kadar köpek girecektir.

$$\frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} = \beta D. \quad (5.17)$$

Kısırlaştırılmış köpek kompartımanında doğal ölümler olacağı için azalma olacaktır.

$$\frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} = \beta D - \mu S. \quad (5.18)$$

Kısırlaştırılmış köpek kompartımanında, hastalık, açlık ve diğer nedenlere bağlı ölümler olacağı için  $\theta$  bu tür nedenlere bağlı ölüm oranı olmak üzere  $\theta S$  kadar azalma olacaktır. Buna göre aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} = \beta D - \mu S - \theta S. \quad (5.19)$$

### 5.10. Kesirsel Köpek Popülasyon Modelinin Kararlılık Analizi

Sistemin denge noktasını bulmak için (5.12) sisteminde  $D^\alpha d = 0$  ,  $D^\alpha s = 0$  alınır.

$$E_0 = (d_0, s_0) = \left( \frac{K(r-\mu-\beta-\theta)}{2r}, \frac{\beta K(r-\mu-\beta-\theta)}{2r(\mu+\theta)} \right) \quad (5.20)$$

denge noktası elde edilir. Jacobian matrisi bir sistemin bütün birinci derece kısmi türevlerini içeren matristir. Bu matrisin kare matris yani satır ve sütun sayısı eşit olan matris olması gerekmektedir. Bu sistemde D ve S değişkenlerine göre kısmi türev

alınarak Jacobian matrisi oluşturulur.  $J(E_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial D} & \frac{\partial f_1}{\partial S} \\ \frac{\partial f_2}{\partial D} & \frac{\partial f_2}{\partial S} \end{pmatrix}$  olmak üzere

$f_1 = rD(1 - \frac{D}{K}) - \mu D - \beta D - \theta D$  ve  $f_2 = \beta D - \mu S - \theta S$  olmak üzere sistemin Jacobian matrisi

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} r - 2r\frac{D}{K} - \mu - \beta - \theta & 0 \\ \beta & -\mu - \theta \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

elde edilir. Sistemin denge noktasındaki Jacobian matrisi

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & -\mu - \theta \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

elde edilir. Jacobian matrisinden (5.22) elde edilen özdeğerler aşağıda belirtilmiştir:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= -\mu - \theta. \end{aligned} \quad (5.23)$$

özdeğerleri elde edilir. Burada  $\beta, \mu, \theta, K, r$  parametreleri pozitif tanımlı reel sayılardır.  $\lambda_1 = 0$  ve  $\lambda_2 < 0$  olduğundan sistemin denge noktası Liapunov kararlıdır.

**Teorem 5.3.**  $\forall t \geq 0, D(0) = D_0 \geq 0, S(0) = S_0 \geq 0$  başlangıç koşullarına sahip çözümleri  $(D(t), S(t)) \in R_+^2$  negatif değildir [70-71].

### 5.11. Kesirli Köpek Popülasyon Modelinin Nümerik Simülasyonu

Bu bölümde kesirli köpek popülasyon modelinin nümerik simülasyonu Genelleştirilmiş Euler metodu kullanılarak elde edildi ve grafikleri gösterildi. Türkiye’de ortalama 10 milyon köpek bulunmakta olup bu köpeklerin 1.300.000’i kısırlaştırılmıştır [72]. Buna göre  $D = 8.700.000$  ,  $S = 1.300.000$  ,  $\beta = 0.15$  ,  $\mu = 0.1$  ,  $\theta = 0.05$  ,  $r = 0.12$  ,  $K = 10^7$  olmak üzere adım büyüklüğü  $h = 0.1$  olarak alınırsa

$$D(k+1) = D(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (rD(k)(1 - \frac{D(k)}{K}) - \mu D(k) - \beta D(k) - \theta D(k)) \quad (5.24)$$

$$S(k+1) = S(k) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} (\beta D(k) - \mu S(k) - \theta S(k))$$

şeklinde bir model kuruldu. Euler metodunu kullanarak  $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$  için aşağıdaki tablolar oluşturuldu.

Tablo 5.13.  $D$  ,  $S$  ve  $N$ 'nin  $\alpha = 1$  için  $t$  anındaki değerleri

$t$ (yıl)	$D(t)$	$S(t)$	$N(t)$
0	8700000,00	1300000,00	10000000,00
1	8452572,00	1411000,00	9863572,00
2	8214690,53	1516623,58	9731314,11
3	7985848,73	1617094,58	9602943,31
4	7765574,92	1712625,89	9478200,81
5	7553429,59	1803420,13	9356849,72
6	7349002,69	1889670,27	9238672,96
7	7151911,24	1971560,26	9123471,50
8	6961797,03	2049265,52	9011062,55
9	6778324,75	2122953,49	8901278,24
10	6601180,08	2192784,06	8793964,14
11	6430068,14	2258910,00	8688978,14
12	6264711,98	2321477,37	8586189,35
13	6104851,23	2380625,89	8485477,12
14	5950240,85	2436489,27	8386730,12

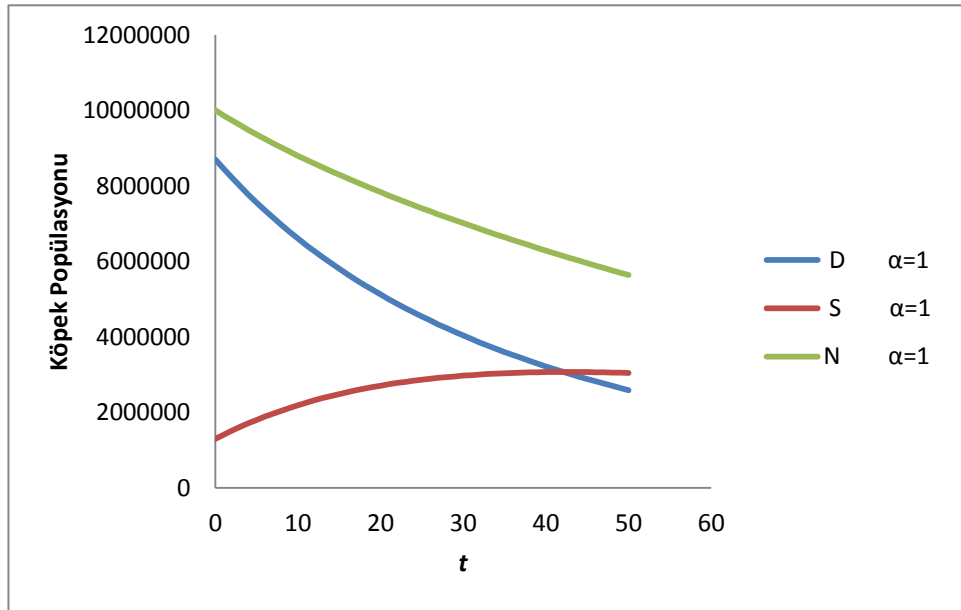


Tablo 5.14.  $D$  ,  $S$  ve  $N$ 'nin  $\alpha = 0.9$  için  $t$  anındaki değerleri

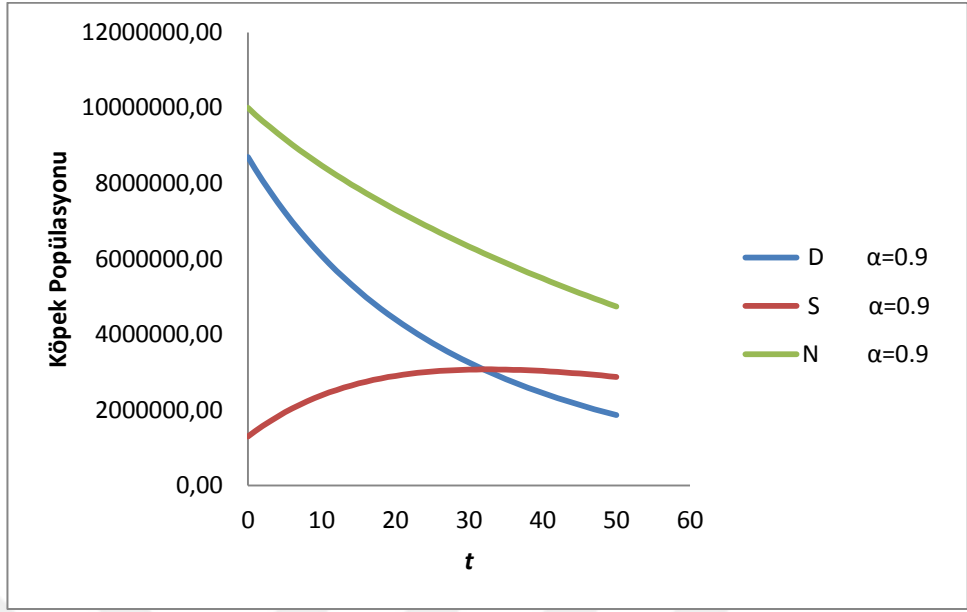
$t$ (yıl)	$D(t)$	$S(t)$	$N(t)$
0	8700000,00	1300000,00	10000000,00
1	8376124,74	1445295,41	9821420,15
2	8068567,59	1581378,88	9649946,47
3	7776201,33	1708751,69	9484953,02
4	7498000,15	1827883,13	9325883,28
5	7233028,43	1939213,13	9172241,56
6	6980430,97	2043154,62	9023585,59
7	6739424,55	2140095,65	8879520,20
8	6509290,42	2230401,25	8739691,67
9	6289367,79	2314415,16	8603782,95
10	6079048,10	2392461,43	8471509,53
11	5877769,90	2464845,77	8342615,67
12	5685014,36	2531856,89	8216831,25
13	5500301,32	2593767,61	8094068,93
14	5323185,68	2650835,99	7974021,67

Tablo 5.15.  $D$  ,  $S$  ve  $N$ 'nin  $\alpha = 0.8$  için  $t$  anındaki değerleri

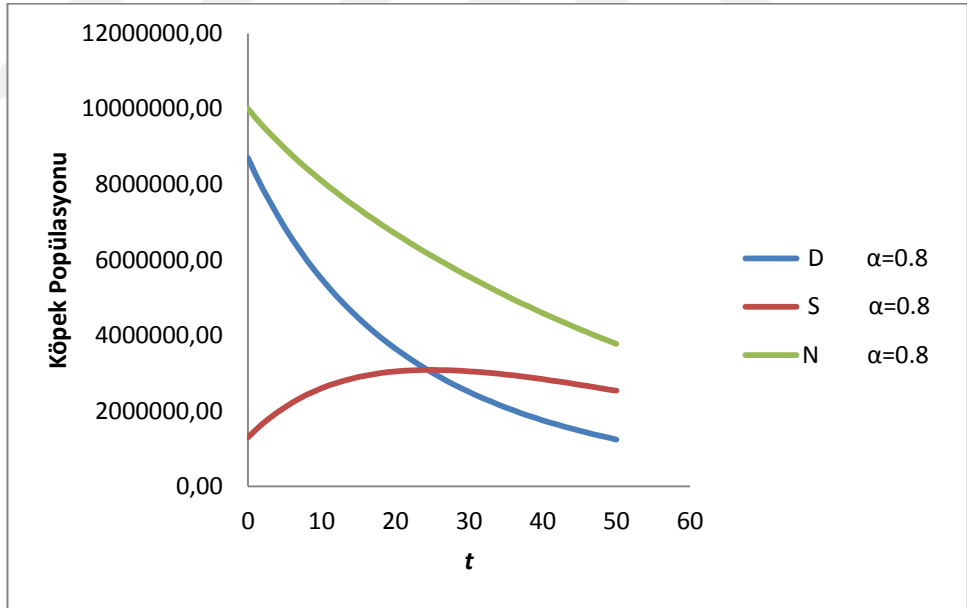
$t$ (yıl)	$D(t)$	$S(t)$	$N(t)$
0	8700000,00	1300000,00	10000000,00
1	8278963,58	1488883,40	9767846,98
2	7885421,04	1662198,73	9547619,77
3	7516922,43	1821045,13	9337967,56
4	7171300,60	1966431,17	9137731,77
5	6846631,34	2099284,34	8945915,68
6	6541200,08	2220459,35	8761659,43
7	6253473,89	2330745,32	8584219,21
8	5982077,96	2430872,12	8412950,08
9	5725775,59	2521515,88	8247291,47
10	5483451,17	2603303,92	8086755,09
11	5254095,66	2676819,06	7930914,72
12	5036794,07	2742603,49	7779397,56
13	4830714,71	2801162,21	7631876,92
14	4635099,86	2852966,10	7488065,96



Şekil 5.7.  $D$  ,  $S$  kompartıman modelinin ve  $N$  popülasyonunun  $\alpha = 1$  için zamana göre değişim grafiği.



Şekil 5.8.  $D$ ,  $S$  kompartıman modelinin ve  $N$  popülasyonunun  $\alpha = 0.9$  için zamana göre değişim grafiği.



Şekil 5.9.  $D$ ,  $S$  kompartıman modelinin ve  $N$  popülasyonunun  $\alpha = 0.8$  için zamana göre değişim grafiği.

Tablo 5.13., Tablo 5.14. ve Tablo 5.15.'te  $\alpha$ 'nın farklı durumları için  $D, S$  kompartımanlarının ve  $N$  popülasyonunun değişimleri görülmektedir. Yukarıdaki grafiklere göre aşağıdaki yorumlar yapıldı:

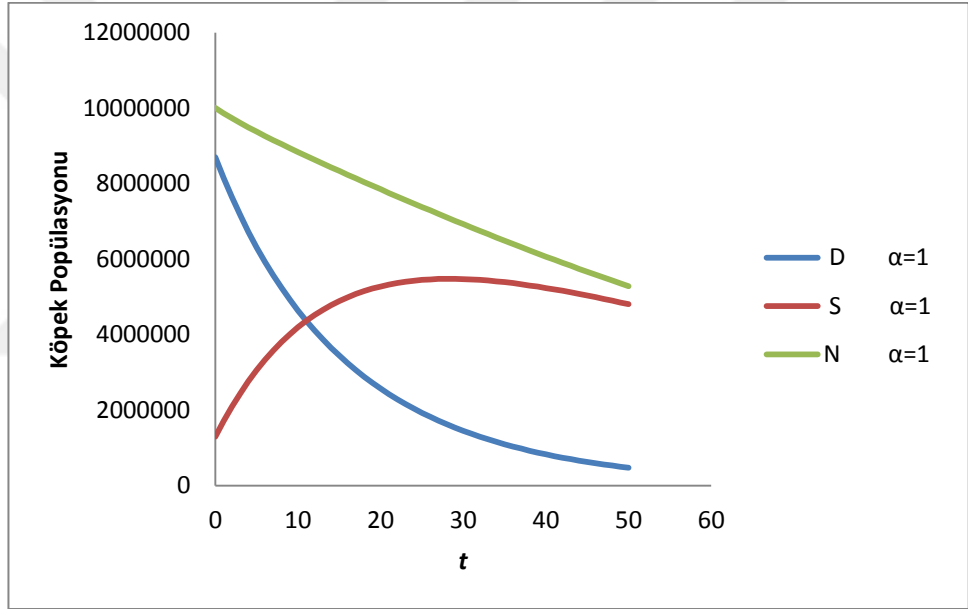
\*Kısırlaştırılmamış köpek sayısının zamanla azalacağı gözlemlenmektedir.

\*Kısırlaştırılmış köpek sayısının zamanla artacağı gözlemlenmektedir.

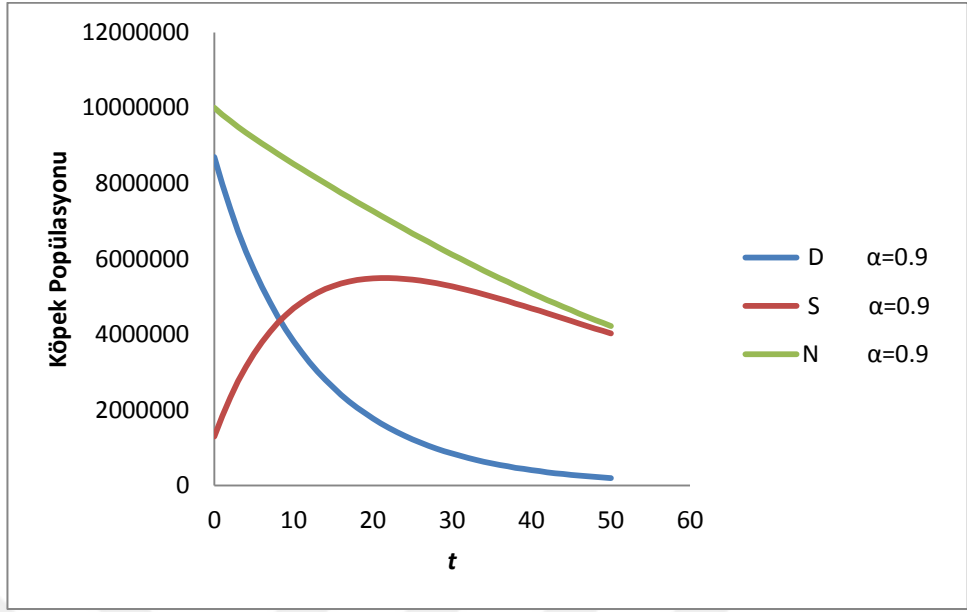
\*Köpek popülasyonunun sayısının zamanla yavaşça azalacağı gözlemlenmektedir.

## 5.12. Kısırlaştırma Oranına Göre Durumlar

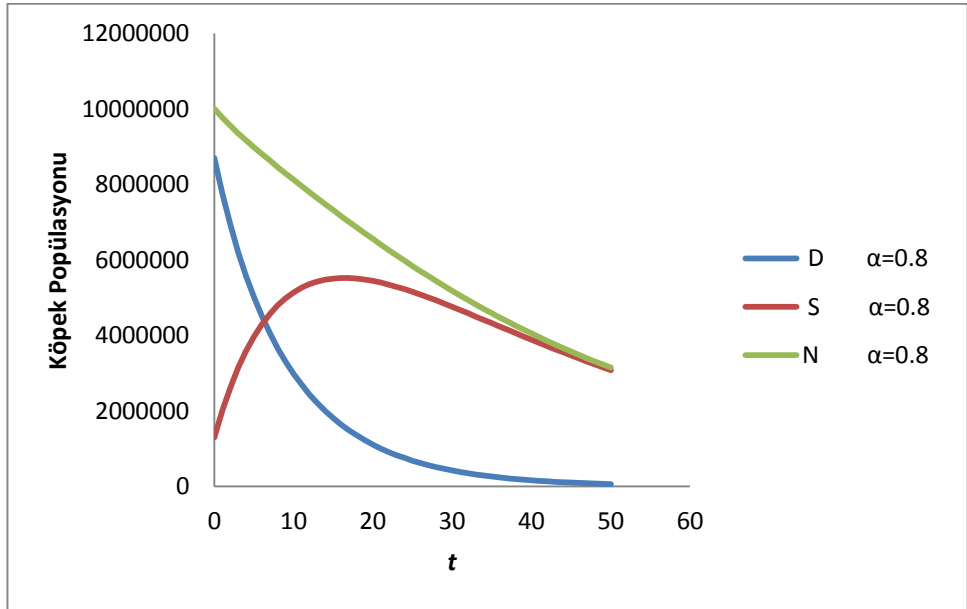
**1. Durum:** Köpek popülasyonunda yapılacak kısırlaştırmaların kabul edilebilir sayıda tutulması önemlidir. Eğer yıllık kısırlaştırma oranı  $\beta = 0.5$  alınırsa aşağıdaki grafikler elde edilir.



Şekil 5.10.  $D$ ,  $S$  kompartıman modelinin ve  $N$  popülasyonunun  $\alpha = 1$  için zamana göre değişim grafiği.



Şekil 5.11.  $D$ ,  $S$  kompartıman modelinin ve  $N$  popülasyonunun  $\alpha = 0.9$  için zamana göre değişim grafiği.



Şekil 5.12.  $D$ ,  $S$  kompartıman modelinin ve  $N$  popülasyonunun  $\alpha = 0.8$  için zamana göre değişim grafiği.

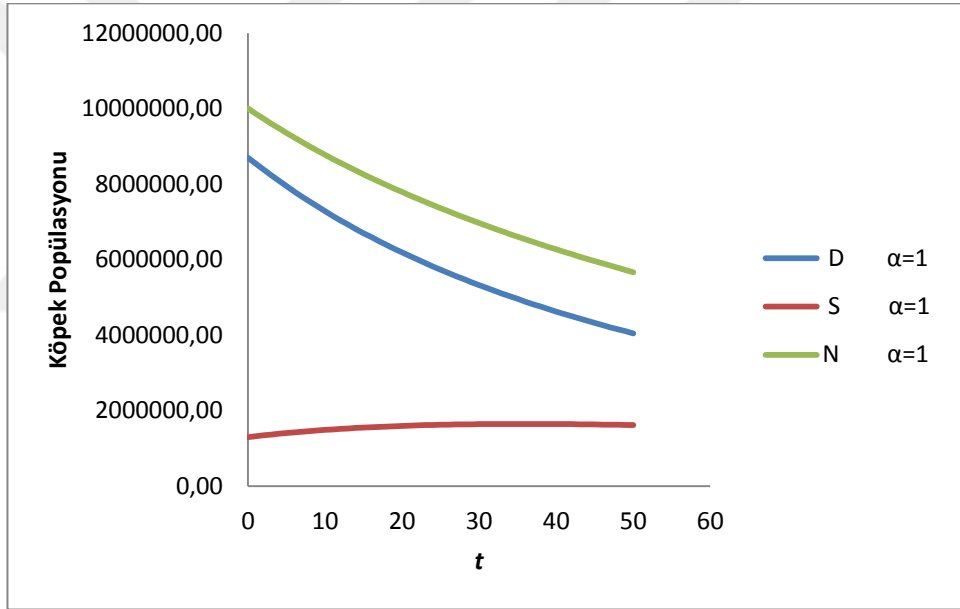
Yukarıdaki grafiklere göre aşağıdaki yorumları yapabiliriz.

\*Kısırlaştırılmamış köpek sayısının zamanla azalarak kısırlaştırılmış köpek sayısından daha fazla azalacağı gözlemlenmektedir.

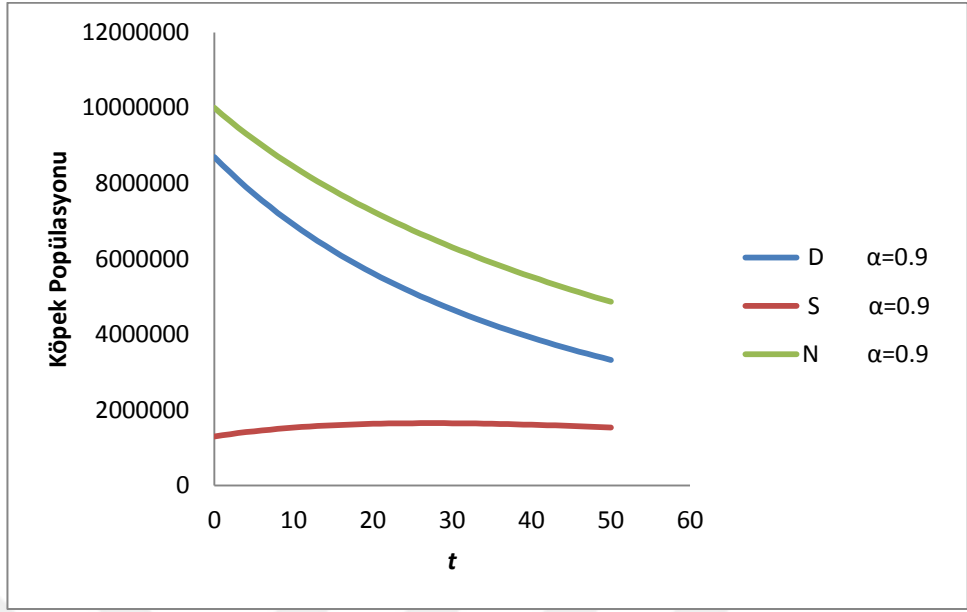
\*Kısırlaştırılmış köpek sayısının zamanla artarak kısırlaştırılmamış köpek sayısından daha fazla olacağı gözlemlenmektedir.

\*Köpek popülasyonunun sayısının zamanla yavaşça azalacağı gözlemlenmektedir.

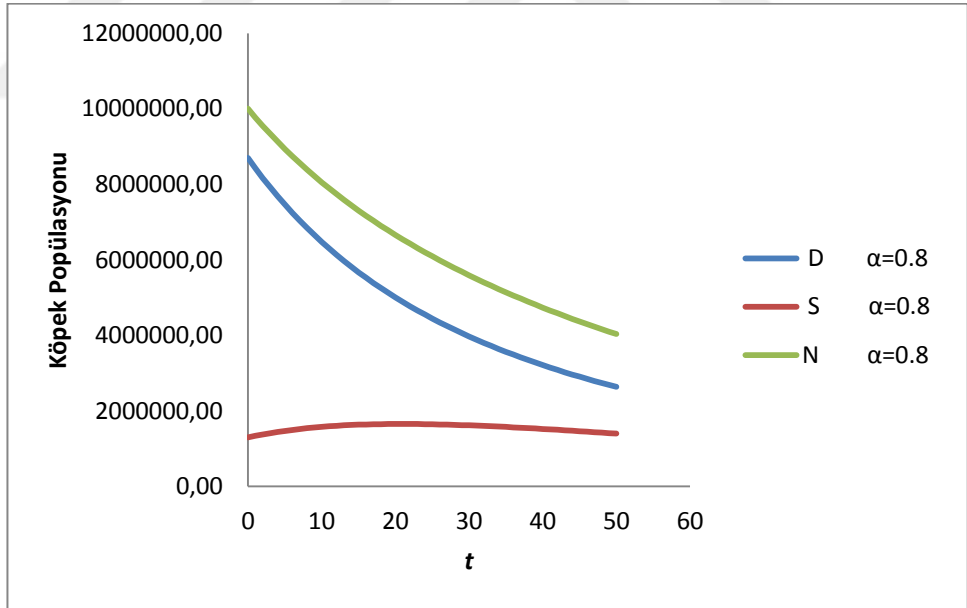
**2. Durum:** Eğer yıllık kısırlaştırma oranı  $\beta = 0.05$  alınırsa aşağıdaki grafikler elde edilir.



Şekil 5.13.  $D$ ,  $S$  kompartıman modelinin ve  $N$  popülasyonunun  $\alpha = 1$  için zamana göre değişim grafiği



Şekil 5.14.  $D$ ,  $S$  kompartıman modelinin ve  $N$  popülasyonunun  $\alpha = 0.9$  için zamana göre değişim grafiği



Şekil 5.15.  $D$ ,  $S$  kompartıman modelinin ve  $N$  popülasyonunun  $\alpha = 0.8$  için zamana göre değişim grafiği

Yukarıdaki grafiklere göre aşağıdaki yorumları yapabiliriz:

\*Kısırlaştırılmamış köpek sayısının zamanla yavaşça azalarak sabit bir şekilde ilerlediği gözlemlenmektedir.

\*Kısırlaştırılmış köpek sayısının zamanla yavaşça artarak sabit bir şekilde ilerlediği gözlemlenmektedir.

\*Köpek popülasyonunun sayısının zamanla yavaşça azalarak sabit bir şekilde ilerlediği gözlemlenmektedir.

### **5.13. Tartışma**

Türkiye’de 10 milyonun üzerinde sahihsiz köpek olduğu tahmin edilmektedir. Sahipsiz köpek sayısının 10 yıl içerisinde 60 milyona ulaşacağı öngörülmektedir [72]. Bu rakamlar sahihsiz köpek sayısının önlenemez bir şekilde aşırı düzeyde artmasına, sayının artması ile sahihsiz köpek saldırılarının katlanarak artmasına, ölümlere, yaralanmalara, güvenlik sorunlarının oluşmasına neden olacaktır. Sahipsiz köpeklerin saldırısı yüzünden ölen veya kalıcı şekilde zarar gören çok sayıda insan vardır. Bu çalışmada köpek popülasyonunun kontrol altında tutulması için kısırlaştırma stratejisinin önemi vurgulandı ve gerekli analizler yapıldı. Sonuçlarımız köpek popülasyonunun kontrolü, matematiksel modelin kurulumu ve uygulamasının önemini göstermektedir.

Köpek popülasyon yönetimi hem köpeklerin hem de insanların sağlığını ve esenliğini geliştirmek için popülasyon dinamiklerinin belirleyicilerini (istenmeyen doğumların ve terk edilmelerin azaltılması, profilaktik tedavi kapsamındaki artış ve göçmenlik kontrolü) değiştirmeyi amaçlamaktadır [73].

Baquero vd. (2016) yaptıkları çalışmada lokal duyarlılığı analiz ederek, dişi kısırlaştırmanın ve erkek kısırlaştırmanın benzer etkilere sahip olduğunu bulmuştur [74].

Akamine vd. (2012) dişi hayvanlarda uygulanan kısırlaştırmanın erkek kısırlaştırmasından daha verimli olduğunu ve bu etkinliğin başlangıç popülasyon büyüklüğüne, büyüme hızına, kısırlaştırma hızına ve üreme kontrolünün sürdürüldüğü süreye bağlı olduğunu belirtmiştir [75].

Köpek popülasyonu modeli oluşturulurken, köpeklerde doğal ölüm oranı, büyüme oranı, kısırlaştırma oranı ve taşıma kapasitesi dikkate alınarak değerlendirme



yapılmıştır. Lojistik büyüme modeli düşünülerek köpek popülasyon modeli oluşturuldu. Taşıma kapasitesi, köpek popülasyonu modeli simülasyonlarındaki en etkili parametrelerden biridir. Popülasyon büyüklüğünün artması ile köpeklere yapılacak olan kısırlaştırma işlemlerinin etkisi de azalacaktır. Bu nedenle popülasyonun kontrol altında tutulması çok önemlidir.

Bulduğumuz sonuçlar, kısırlaştırma işlemlerinin köpek popülasyonunun kontrol altında tutulmasında önemini ortaya koymaktadır. Popülasyon dinamiklerini etkileyen faktörler uzun süreler boyunca tek bir değer alamayacaktır. Modelde kullanılan parametreler biyolojik olarak gerçekçi değerler aralığında alındığı için değişkenlikte artacaktır.

Geliştirilen model, sahip olunan ve başıboş köpek popülasyonları arasındaki etkileşim göz önünde bulundurularak, çeşitli faktörlerin köpek popülasyonu dinamikleri üzerindeki etkilerini birlikte değerlendirmemize izin verdi. Ele aldığımız parametreler, popülasyonun büyüklüğünün nasıl değiştiğini görmemizi sağladı. Ayrıca, doğal ölüm oranı ve taşıma kapasitesi parametrelerinin etkisi ile daha hassas bir model oluşturuldu ve yapılacak olan kısırlaştırma işlemleri ile potansiyel müdahalelerin etkisi ölçüldü. Kısırlaştırma oranı ile lojistik büyüme modelinin yarattığı varyasyon, kısırlaştırmanın potansiyel etkisini göstermiştir. Taşıma kapasitesinin değişmesi, popülasyon dinamiğinin değişmesine neden olacaktır. Sahiplenilen köpeklerin terk edilmesi de bu dinamiği etkileyecektir. Terk edilmenin önlenmesi, kısırlaştırma stratejisiyle birlikte ele alındığında popülasyondaki varyasyonu da etkileyecektir.

Oluşturduğumuz model, dişi ve erkek köpeklerde yapılacak olan kısırlaştırma stratejisi ile gelecekte köpek popülasyonu hakkında önemli bilgiler elde etmemizi sağlamaktadır. Başıboş köpek popülasyonlarının yönetimi, sosyal ve çevresel olarak sürdürülebilir politik, sıhhi, etik, ekolojik ve insani stratejiler gerektirir. Bu tür önlemler hem hayvanlara hem de toplumdaki insanlara fayda sağlayarak kuduz ve leishmaniasis gibi zoonozların kontrolünü de içermelidir. Sonuçlarımız, popülasyon kontrol programlarının tasarlanmasında ve uygulanmasında insan faktörlerinin önemini göstermektedir. Köpek popülasyon modelleri ayrıca ülke yönetimlerinin köpek yönetim programlarına da önemli katkılar sunmaktadır.

#### 5.14. Köpek Popülasyonu Modelinden Elde Edilen Sonuçlar

Bu çalışmada yeni bir kesirsel köpek popülasyonu modeli oluşturuldu. Kesirsel köpek popülasyonu modelinin Genelleştirilmiş Euler methodu yardımı ile yeni bir uygulaması yapıldı ve elde edilen nümerik sonuçlar yardımıyla grafikler çizildi. Ayrıca yeni oluşturulan kesirsel köpek popülasyonunun kararlılık analizi yapıldı. Elde edilen grafiklerde kısırlaştırılmamış köpek sayısının zamanla azalacağı, kısırlaştırılmış köpek sayısının zamanla artacağı ve köpek popülasyonunun sayısının zamanla yavaşça azalacağı gözlemlenmektedir. Köpek popülasyonu için kısırlaştırma oranı  $\beta = 0.05$  ve  $\beta = 0.5$  alınarak grafikleri çizildi, yorumlaması yapıldı. Köpek popülasyonu modelleri özellikle başıboş köpek popülasyonu için önem taşımaktadır. Bu çalışma ile köpek popülasyonunun kontrol altında tutulmasının matematiksel modellenmesi yapıldı.

Şekil 5.7-5.9'dan da görüleceği gibi,  $\beta = 0.15$  için kısırlaştırma ve doğal sebepler nedeniyle köpek popülasyonunda kontrollü bir azalma vardır. Kısırlaştırma oranı aynı oranda devam ettiği sürece, nüfustaki kısırlaştırılmış köpek sayısı yaklaşık 43 yıl sonra kısırlaştırılmamış köpek sayısından daha fazla olacaktır. Bu durumda nüfusun ellinci yılından sonra hızla azalması beklenmektedir.  $\alpha$  parametresinin artmasıyla, her bölmedeki azalma daha fazla olacaktır. Eğer kısırlaştırma oranı  $\beta = 0.5$ 'e yükseltirse, her bölmedeki köpek sayısının daha hızlı azaldığı görülmüştür (Şekil 5.10-5.12 ).

Bu durumda yaklaşık 31 yılın sonunda, nüfustaki kısırlaştırılmış köpek sayısı, kısırlaştırılmamış köpek sayısını geçecek ve böylece toplam nüfus hızla azalacaktır. Bu durumda, gelecekte ülkedeki köpek neslinin tükenmesi tehdit altında olabilir.

Sonuç olarak insanlarla ortak bir ortam kullanan köpek sayısını kontrol etmek gereklidir. Bunu yapmanın en doğru yolu kısırlaştırmadır. Bununla birlikte kısırlaştırmanın belli bir oranda yapılması önemlidir. Aksi takdirde, ya köpek nüfusu kontrolsüz bir şekilde artacak ya da köpek popülasyonunun yok olma tehlikesi olacaktır. Önerilen modelin sonuçlarına göre, mevcut köpek popülasyonunun korunması için  $\beta$  değeri 0.1 civarında tutulmalıdır.

## 6. BÖLÜM

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, kesir türevli modifiye edilmiş kötü ve iyi Boussinesq denklemlerinin yeni tam çözümleri elde edildi. Kesir türevli modifiye edilmiş kötü ve iyi Boussinesq denklemleri hareketli dalga dönüşümü yardımıyla adi diferansiyel denkleme dönüştürüldü ve literatürdeki önceki çalışmalardan farklı olan üstel fonksiyon yöntemi kullanılarak yeni tam çözümler elde edildi. Bu sonuçlar, üstel fonksiyon yönteminin matematiksel fizik ve lineer olmayan dinamik sistemlerde oluşum denklemlerinin tam çözümlerini elde etmek için güçlü ve etkili bir yöntem olduğunu göstermektedir. Bu yöntem yardımıyla literatüre katılan yeni lineer olmayan oluşum denklemlerinin tam çözümleri elde edilebilir.

*SIQR* modeline *V* kompartıman modeli eklenerek yeni bir model elde edildi. Aşılama oranı ve aşının koruyuculuğu kaybetme oranı modellemeye dahil edilerek, aşılama ile birlikte salgının ne şekilde değişeceği nümerik simülasyonlar yardımıyla incelendi. COVID-19 için yeni bir kesirsel *SIQRV* modelinin Dünya Sağlık Örgütü (DSÖ), Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) ve Türkiye Cumhuriyeti Sağlık Bakanlığı kaynaklarından elde edilen verilere göre, Türkiye'de özellikle 29 Temmuz 2022 tarihini dikkate alarak yeni bir uygulaması yapıldı ve elde edilen nümerik sonuçlar yardımıyla grafikler çizildi. Aşılama oranı ve aşının koruyuculuğu kaybetme oranı dikkate alınarak aşılama ile birlikte salgının ne şekilde değişeceği incelendi. Kesirsel *SIQRV* modelinin hastalısız denge noktası elde edilerek kararlılık analizi yapıldı ve temel çoğalma oranı olan  $R_0$  sayısının önemi vurgulandı. Bu modele güncel gelişmelere bağlı eklentiler yapılarak model geliştirilebilir. Ayrıca başka salgın hastalık modelleri için kaynak bir çalışma olarak da alınabilir.

Sigara kullanımına ilişkin yeni bir kesirsel  $PSQ_p$  modeli oluşturuldu ve [55] deki veriler dikkate alınarak yeni bir uygulaması yapıldı. Elde edilen nümerik sonuçlar yardımıyla grafikler çizildi. Kesirsel  $PSQ_p$  modelinin sigarasız denge noktası elde edilerek kararlılık analizi yapıldı ve temel çoğalma oranı olan  $R_0$  sayısı bulundu. Güncel gelişme ya da verilere bağlı olarak yeni sonuçlar araştırılabilir.

Alkol kullanımına ilişkin yeni bir kesirsel *SAQ* modeli oluşturuldu ve [58] deki veriler dikkate alınarak yeni bir uygulaması yapıldı. Elde edilen nümerik sonuçlar yardımıyla grafikler çizildi. Kesirsel *SAQ* modelinin alkolsüz denge noktası elde edilerek kararlılık analizi yapıldı ve temel çoğalma oranı olan  $R_0$  sayısı bulundu. Bu modeldeki parametreler değiştirilerek farklı senaryolar için popülasyonun alkol kullanımına etkisi detaylı olarak araştırılabilir.

Yeni bir kesirsel *SPR* psikolojik hastalık modeli oluşturuldu ve 2019 yılı Türkiye psikolojik hastalık verileri dikkate alınarak yeni bir uygulaması yapıldı. Elde edilen nümerik sonuçlar yardımıyla grafikler çizildi. Kesirsel *SPR* psikolojik hastalık modelinin psikolojik hastalıklı denge noktası elde edildi ve kararlılık analizi yapıldı. İyileşmiş bireylerin yeniden hastalanabilmesi gibi farklı durumlar için bu model geliştirilebilir.

Kesirsel Glikoz-İnsülin modelinin Genelleştirilmiş Euler metodu yardımı ile yeni bir uygulaması yapıldı ve elde edilen nümerik sonuçlar yardımıyla grafikler çizildi.

Kesirsel köpek popülasyon modeli için yeni bir model geliştirilerek nümerik uygulaması yapıldı ve elde edilen nümerik sonuçlar yardımıyla grafikler çizildi. Kesirsel köpek popülasyon modelinin denge noktası elde edilerek kararlılık analizi yapıldı. Özellikle kısırlaştırma oranının köpek popülasyonunun optimal değerde tutulması için alması gereken değerler detaylı olarak ele alınabilir.

## KAYNAKLAR

1. Podlubny, I., "Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications", *Elsevier*, 1998.
2. Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., "A new definition of fractional derivative", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65–70, 2014.
3. Atangana, A., Koca, I., "Chaos in a simple nonlinear system with Atangana–Baleanu derivatives with fractional order", *Chaos, Solitons and Fractals*, 89, 447–454, 2016.
4. He, J. H., Wu, X. H., "Exp-Function Method for Nonlinear Wave Equations", *Chaos, Soliton and Fractals*, 30 (3), 700–708, 2006.
5. Zayed, E.M., Abdelaziz, M. A., "The tanh function method using a generalized wave transformation for nonlinear equations", *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 11, 595–601, 2010.
6. Fan, E., Zhang, H., "A note on the homogeneous balance method", *Physics Letters A*, 246, 403–406, 1998.
7. Gurefe, Y., Sonmezoglu, A., Misirli, E., "Application of the trial equation method for solving some nonlinear evolution equations arising in mathematical physics", *Pramana*, 77(6), 1023–1029, 2011.
8. Kudryashov, N. A., "A note on the  $(G'/G)$  – expansion method", *Applied Mathematics and Computation*, 217(4), 1755–1758, 2010.
9. Ryabov, P. N., Sinelshchikov, D. I., Kochanov, M. B., "Application of the Kudryashov method for finding exact solutions of the high order nonlinear evolution equations", *Applied Mathematics and Computation*, 218(7), 3965–3972, 2011.

10. He, J. H., “Exp-function method for fractional differential equations”, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 14(6), 363–366, 2013.
11. Öztürk, Z., Bilgil, H., “Exact Solutions of Rosenzweig-MacArthur (RM) Model Equations by Using Exp Function Method”, *European Journal of Science and Technology*, 16, 427–433, 2019.
12. Ebaid, A., “Application of the Exp-function method for solving some evolution equations with nonlinear terms of any orders”, *Zeitschrift für Naturforschung A*, 65, 1039–1044, 2010.
13. Zhang, S., “Exp-function method for Riccati equation and new exact solutions with two arbitrary functions of (2+1)-dimensional Konopelchenko–Dubrovsky equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 216 (5), 1546–1552, 2010.
14. Kottakkaran, N. S., Ilhan, O. I., Abdulazeez S. T., Manafian, J., Mohammed, S. A., Osman, M.S., “Novel multiple soliton solutions for some nonlinear PDEs via multiple Exp-function method”, *Results in Physics*, 21, 103769, 2021.
15. Gepreel, K. A., Zayed, E. M. E., “Multiple wave solutions for nonlinear burgers equations using the multiple exp-function method”, *International Journal of Modern Physics C*, 2150149, 2021.
16. Ahmed, H.M., El-Sheikh, M.M.A., Arnous, A.H., Rabie, W. B., “Solitons and other solutions to (n+1)-dimensional modified Zakharov–Kuznetsov equation by exp-function method”, *SeMA Journal*, 78, 1–13, 2021.
17. Hossam A. G., Abd-Allah H., Zakarya, M., “Exact solutions of stochastic fractional Korteweg de–Vries equation with conformable derivatives”, *Chinese Physics B*, 29(3), 30203, 2020.

18. Yaslan, H. C., Girgin, A., “Exp-function method for the conformable space-time fractional STO, ZKBBM and coupled Boussinesq equations”, *Arab Journal of Basic and Applied Sciences*, 26(1), 163–170, 2019.
19. Ravi, L.K., Ray, S. S., Sahoo, S., “New exact solutions of coupled Boussinesq–Burgers equations by Exp-function method”, *Journal of Ocean Engineering and Science*, 2(1), 34–46, 2017.
20. Eskandari, E. M., Taghizadeh, N., “Exact Solutions of Two Nonlinear Space-time Fractional Differential Equations by Application of Exp-function Method”, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, 15(2), 970–977, 2020.
21. Durur, H., Tasbozan, O., Kurt, A., “New analytical solutions of conformable time fractional bad and good modified Boussinesq equations”, *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 5(1), 447–454, 2020.
22. Ebaid, A., “An improvement on the Exp-function method when balancing the highest order linear and nonlinear terms”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 392(1), 1–5, 2012.
23. Boussinesq, J., “Thorie des ondes et des remous qui se propagent le long d’un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond”, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 17, 55–108, 1872.
24. Bozkurt, F., Yousef, A., Abdeljawad, T., “Analysis of the outbreak of the novel coronavirus COVID-19 dynamic model with control mechanisms”, *Results in Physics*, 19, 103586, 2020.
25. Brauer, F., Castillo-Chavez, C., Feng, Z., “Mathematical models in epidemiology”, *Springer*, New York, 2019.

26. Allen L. J. S., “An Introduction to Mathematical Biology”, *Pearson/Prentice Hall*, s. 348, 2007.
27. Van den Driessche, P., Watmough, J., “Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission”, *Mathematical Biosciences*, 180 (1–2), 29–48, 2002.
28. Linda, J.S.A., “An Introduction to Mathematical Biology”, *Pearson Education*, s. 123-127, USA, 2007.
29. Kermack, W.O., McKendrick, A.G., “A contribution to the mathematical theory of epidemics”, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 115 (772), 700–721, 1927.
30. Hethcote, H., Zhiem, M., Shengbing, L., “Effects of quarantine in six endemic models for infectious diseases”, *Mathematical Biosciences*, 180, 141160, 2002.
31. Wang, S., Ding, Y., Lu, H., Gong, S., “Stability and bifurcation analysis of SIQR for the COVID-19 epidemic model with time delay”, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 18(5), 5505–5524, 2021.
32. Mishra, B.K., Jha, N., “SEIQRS model for the transmission of malicious objects in computer network”, *Applied Mathematical Modelling*, 34, 710–715, 2010.
33. Liu, X., Takeuchi, Y., Iwami, S., Liu, X., Takeuchi, Y., Iwami, S., “SVIR epidemic models with vaccination strategies”, *Journal of Theoretical Biology*, 253, 1–11, 2008.
34. Trawicki, M.B., “Deterministic Seirs Epidemic Model for Modeling Vital Dynamics, Vaccinations, and Temporary Immunity”, *Mathematics*, 5 (1), 7, 2017.



35. Sun, C., Yang, W., “Global results for an SIRS model with vaccination and isolation”, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11, 4223–4237, 2010.
36. Öztürk, Z., Sorgun, S., Bilgil H., “SIQRV Modeli ve Nümerik Uygulaması”, *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 28, 573–578, 2021.
37. Odagaki, T., “Exact properties of SIQR model for COVID-19”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 564, 125564, 2021.
38. Öztürk, Z., Sorgun, S., Bilgil H., Erdinç, Ü., “New Exact Solutions of Conformable Time-Fractional Bad and Good Modified Boussinesq Equations”, *Journal of New Theory*, 37, 8–25, 2021.
39. Turan, C., Hacimustafaoğlu, M., “Enfeksiyon Hastalıklarında  $R_0$  Oranı ve Klinik Anlamı Nedir?”, *Çocuk Enfeksiyon Dergisi*, 14(1), 55–56, 2020.
40. Yaro, D., Omari–Sasu, S. K., Harvim, P., Saviour, A. W., Obeng, B. A., “Generalized Euler method for modeling measles with fractional differential equations”, *International Journal of Innovative Research and Development*, 4, 2015.
41. Boyce, W. E., DiPrima, R. C., Meade, D. B., “Elementary differential equations and boundary value problems”, *John Wiley & Sons*, 2021.
42. Bilgil, H., Yousef, A., Erciyes, A., Erdinç, Ü., Öztürk, Z., “A fractional-order mathematical model based on vaccinated and infected compartments of SARS-CoV-2 with a real case study during the last stages of the epidemiological event”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 425, 115015, 2023.
43. Sideris, T. C., “Ordinary differential equations and dynamical systems”, *Paris: Atlantis Press*, 2013.
44. Braun, M., Golubitsky, M., “Differential equations and their applications”, *Springer-Verlag*, New York, 1983.

45. Öztürk, Z., Bilgil, H., Sorgun, S., “Application of Fractional SIQRV Model for SARS-CoV-2 and Stability Analysis”, *Symmetry*, 15(5), 1048, 2023.
46. Organization, W.H., WHO report on the global tobacco epidemic: the MPOWER package.: World Health Organization, 2008.
47. Castillo-Garsow, C., Jordan-Salivia, G., Rodriguez-Herrera, A., “Mathematical models for the dynamics of tobacco use, recovery, and relapse”, Technical Report Series BU-1505-M, *Cornell University*, UK, 2000.
48. Sharomi, O., Gumel, A. B., “Curtailling smoking dynamics: a mathematical modeling approach”, *Applied Mathematics and Computation*, 195, 2, 475–499, 2008.
49. Öztürk, Z., Bilgil, H., Sorgun, S., “Stability Analysis of Fractional PSQp Smoking Model and Application in Turkey”, *New Trends in Mathematical Sciences*, 10(4), 54-62, 2022.
50. Basu, S., Stuckler, D., Bitton, A., Glantz, S. A., “Projected effects of tobacco smoking on worldwide tuberculosis control: mathematical modelling analysis”, *Bmj*, 343, 2011.
51. Brauer, F., van den Driessche, P., Wu, J., “Mathematical Epidemiology”, Lecture Notes in Mathematics, *Springer*, Berlin, Germany, 2008.
52. Lahrouz, A., Omari, L., Kiouach, D., Belmaati, A., “Deterministic and stochastic stability of a mathematical model of smoking”, *Statistics & Probability Letters*, 81(8), 1276–1284, 2011.
53. Zaman, G., “Qualitative behavior of giving up smoking models”, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 34( 2), 403–415, 2011.

54. Zeb, A., Zaman, G., Erturk, V. S., Alzalg, B., Yousafzai, F., Khan, M., “Approximating a giving up smoking dynamic on adolescent nicotine dependence in fractional order”, *PloS one*, 11(4), e0103617, 2016.
55. İnternet: Türkiye İstatistik Kurumu “2019 Sigara Kullanımı İstatistikleri” <https://data.tuik.gov.tr/Bulten/Index>.
56. Adu, I. K., Osman, M. A. R. E. N., YangC., “Mathematical model of drinking epidemic”, *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 22(5), 2017.
57. Khajji, B., Labzai, A., Balatif, O., Rachik, M., “Mathematical modeling and analysis of an alcohol drinking model with the influence of alcohol treatment centers”, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2020, 1–12, 2020.
58. İnternet: Türkiye İstatistik Kurumu “2019 Alkol Kullanımı İstatistikleri” <https://data.tuik.gov.tr/Bulten/Index>.
59. Townsend, J. T., Landon, D. E., “Mathematical models of recognition and confusion in psychology”, *Mathematical Social Sciences*, 4(1), 25–71, 1983.
60. Estes, W. K., “Mathematical models in psychology: A Handbook for Data Analysis in the Behaviorial Sciences: Volume 1: Methodological Issues Volume 2: Statistical Issues”, *Psychology Press*, 2014.
61. Öztürk, Z., Bilgil, H., Sorgun, S., “Application of Fractional SPR Psychological Disease Model in Turkey and Stability Analysis”, *Journal of Mathematical Sciences and Modelling*, 6(2), 49-55, 2023.
62. Makroglou, A., Li, J., Kuang, Y., “Mathematical models and software tools for the glucose-insulin regulatory system and diabetes: an overview”, *Applied Numerical Mathematics*, 56(3–4), 559–573, 2006.

63. Huard, B., Easton, J. F., Angelova, M., “Investigation of stability in a two-delay model of the ultradian oscillations in glucose–insulin regulation”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 26(1–3), 211–222, 2015.
64. Lombarte, M., Lupo, M., Campetelli, G., Basualdo, M., Rigalli, A., “Mathematical model of glucose–insulin homeostasis in healthy rats”, *Mathematical Biosciences*, 245(2), 269–277, 2013.
65. Amaku, M., Dias, R.A., Ferreira, F., “Dynamics and control of stray dog populations”, *Mathematical Population Studies*, 17 (2), 69–78, 2010.
66. Fournier, A., Geller, E., “Behavior analysis of companion-animal overpopulation: a conceptualization of the problem and suggestions for intervention”, *Behavior and Social Issues*, 68, 51–68, 2004.
67. Morters, M.K., McKinley, T.J., Restif, O., Conlan, A.J.K., Cleaveland, S., Hampson, K., Whay, H.R., Damriyasa, I.M., Wood, J.L.N., “The demography of free-roaming dog populations and applications to disease and population control”, *Journal of Applied Ecology*, 51 (4), 1096–1106, 2014.
68. Nunes, C.M., Lima, V.M.F.D., Paula, H.B.D., Perri, S.H.V., Andrade, A.M.D., Dias, F.E.F., Burattini, M.N., “Dog culling and replacement in an area endemic for visceral leishmaniasis in Brazil”, *Veterinary Parasitology*, 153 (1–2), 19–23, 2008.
69. Bacaër, N., “Verhulst and the logistic equation (1838)”, *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, 2011, 35–39, 2011.
70. Slater, M.R., “The role of veterinary epidemiology in the study of free-roaming dogs and cats”, *Preventive Veterinary Medicine*, 48 (4), 273–286, 2001.
71. Matos, M., Alves, M., “São Paulo Pasteur Institute Technique for estimating a canine population”, *Cadernos de Saúde Pública*, 18 (5), 1423–1428, 2002.

72. İnternet: “2022 Köpek Popülasyonu İstatistikleri”  
<https://www.bbc.com/turkce/haberler-turkiye-60947128>.
73. Garcia, R. D. C. M., Calderón, N., Ferreira, F., “Consolidation of international guidelines for the management of canine populations in urban areas and proposal of indicators for their management”, *Revista Panamericana de Salud Publica*, 32, 140–144, 2012.
74. Baquero, O. S., Akamine, L. A., Amaku, M., Ferreira, F., “Defining priorities for dog population management through mathematical modeling”, *Preventive Veterinary Medicine*, 123, 121–127, 2016.
75. Akamine, L. A. T., Amaku, M., Ferreira, F., Dias, R. A., Garcia, R. D. C. M., “Modelagem do efeito da esterilização no controle da população canina”, *Acta Scientiae Veterinariae*, 40, 2012.