T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOTAL ÇİZGELERİN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Tezi Hazırlayan
Akkız ÇELİK

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Sezer SORGUN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Mart 2024
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOTAL ÇİZGELERİN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Tezi Hazırlayan
Akkız ÇELİK

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Sezer SORGUN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Mart 2024

Prof. Dr. Sezer SORGUN danışmanlığında Akkız ÇELİK tarafından hazırlanan **"TOTAL ÇİZGELERİN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ "** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

…./…/20..

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Halis BİLGİL

Üye : Prof. Dr. Sezer SORGUN

Üye : Doç. Dr. Hatice TOPCU

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun………………….tarih ve…………….. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

…/…/20..

Prof. Dr. …………….
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Akkız ÇELİK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmam süresince sağladığı destek ve değerli rehberliği için Prof. Dr. Sezer Sorgun a içtenlikle teşekkür etmek istiyorum.

Her zaman tam anlamıyla yanımda olan aileme ve sadece bir baba değil aynı zamanda hayattaki en değerli öğretmenim, kıymetlim, şansım olan babama (Tufan DİRİK) teşekkür ediyorum.

Ayrıca destekçim en büyük gücüm değerli eşim (Oğuz ÇELİK) ve biricik kızım (Güneş) e koşulsuz sevgi, anlayış ve desteğiniz için teşekkür ediyorum.

TOTAL ÇİZGELERİN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Akkız ÇELİK

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mart 2024

ÖZET

Çizgi çizgeler olarak da bilinen total çizgeler, köşelerin kenarlarla ilişkilendirilmesiyle orijinal çizgeden elde edilir. Toplam çizgedeki her kenar, orijinal çizgedeki iki kenar arasındaki komşuluğu temsil eder. Bu dönüşüm, orijinal çizgenin yapısal ve bağlantısal özelliklerinin farklı bir bağlamda keşfedilmesini kolaylaştırır.

Bu tez çalışmasının 2. Bölümünde çizge teorisi ile ilgili bazı temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Ayrıca bu bölümde total çizgeler tanıtılmış ve bazı çizge parametreleri ile ilişkileri verilmiştir. 3. Bölümde ise halka yapıları üzerinde inşa edilen total çizgelerin cebirsel özellikleri derlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Çizge, Total Çizge, Ağaç, Komşu

Tez Danışman: Prof. Dr. Sezer SORGUN
Sayfa Adeti: 54

ALGEBRAIC PROPERTIES OF TOTAL GRAPHS
(M. Sc. Thesis)

Akkız ÇELİK

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

March 2024

ABSTRACT

Total graphs, also known as line graphs, are obtained from the original graph by associating vertices with edges. Each edge in the aggregate graph represents a neighborhood between two edges in the original graph. This transformation facilitates exploration of the structural and connectivity properties of the original graph in a different context.

In Chapter 2 of this thesis, some basic definitions and concepts related to graph theory are given. Additionally, in this section, total graphs are introduced and their relationships with some graph parameters are given. In Chapter 3, the algebraic properties of total graphs built on ring structures are compiled.

Keywords: Graph, Total Graph, Tree, Neighbor

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Sezer SORGUN
Number of Pages: 54

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\delta(G)$	Minimum Derece
$\Delta(G)$	Maksimum Derece
Cb_m	m boyutlu küp çizge
C_n	Döngü Çizge
$d(v_i)$	vi noktasının derecesi
$diam$	Çap
(G)	Çizgenin çapı
$E(G)$	Kenarlar kümesi
$G = (V, E)$	Nokta kümesi V, kenar kümesi E olan bir G çizgesi
gr(G)	G'nin çevresi
$K_{p,q}$	İki parçalı tam çizge
$k(G)$	Nokta bağlantısallık
K_n	Tam çizge
$N(v_i)$	Komşuluk kümesi
P	Petersen çizge
S_n	Yıldız çizge
T	Ağaç
$V(G)$	Noktalar kümesi
W_n	Tekerlek çizge
$\alpha(G)$	Çizgenin bağımsızlık sayısı
$\lambda(G)$	Kenar bağlantısallık
$\omega(G)$	Çizgenin klik sayısı

1. BÖLÜM

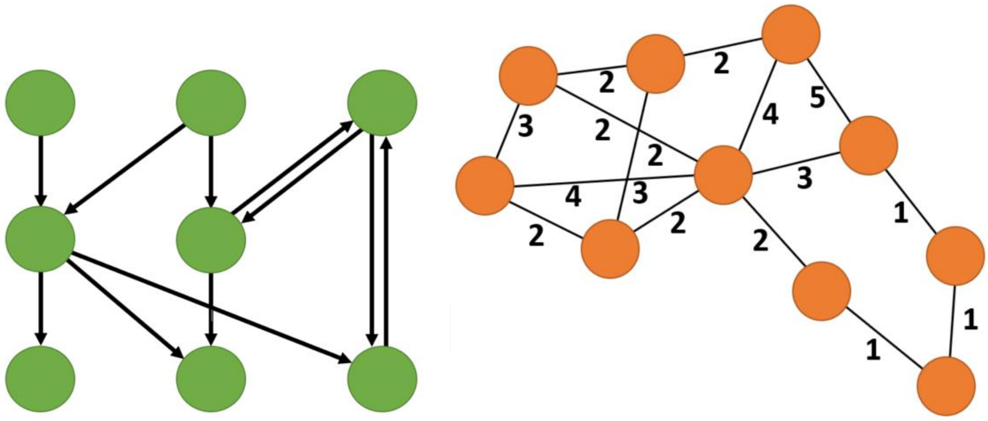
GİRİŞ

Euler'in orijinal ispatını okurken, kişi nispeten basit ve kolay anlaşılır bir matematik eseri keşfeder; ancak, bu problemi ünlü yapan asıl kanıt değil, ara adımlardır. Euler'in büyük yeniliği, Königsberg köprüsü problemini, kara kütlelerinin ve köprülerin daha büyük durumunu temsil etmek için çizgiler ve harfler kullanarak soyut olarak incelemiştir. Büyük harfleri kara kütlelerini, küçük harfleri ise köprüleri temsil etmek için kullanmıştır. Bu, o zamanlar için tamamen yeni bir düşünce türüydü ve makalesinde Euler, yanlışlıkla, çizgenin yalnızca köşeler ve kenarların bir koleksiyonu olduğu, çizge teorisi adı verilen yeni bir matematik dalını keşfetmiştir. Bugün bir çizgede, çizgenin her kenarını yalnızca bir kez içeren bir yola, bu problemden dolayı Euler yolu denir. Euler'in bu sorunu çözdüğü zamandan bugüne çizge teorisi, ağlar hakkındaki düşüncemizin temelini yönlendiren matematiğin önemli bir dalı haline gelmiştir [1].

Königsberg Köprüsü problemi için Biggs şöyle der: "*Çizge teorisinin kökenleri alçakgönüllü, hatta anlamsızdı*". Çizge teorisinin gelişmesine yol açan problemler, genellikle hayal gücünü harekete geçirmek yerine yaratıcılığı test etmek için tasarlanmış bulmacalardan biraz daha fazlasıydı. Ancak bu tür bulmacaların bariz önemsizliğine rağmen, matematikçilerin ilgisini çektiler ve bunun sonucunda çizge teorisi, şaşırtıcı bir çeşitlilik ve derinlikteki teorik sonuçlar açısından zengin bir konu haline gelmiştir [2]. Biggs'in ifadesinin ima edeceği gibi, bu problem o kadar önemlidir ki, kütüphanede incelenen her Graph Theory kitabının ilk bölümünde bahsedilmiştir.

Euler'in keşfinden (veya okuyucunun nasıl baktığına bağlı olarak icadı) sonra, çizge teorisi Augustin Cauchy, William Hamilton, Arthur Cayley, Gustav Kirchhoff ve George Polya gibi büyük matematikçilerin yaptığı büyük katkılarla patlamıştır. Bu adamların hepsi "bir kristaldeki atomların oluşturduğu kafes veya arıların bir kovandaki altıgen kafes gibi büyük ama düzenli çizgeler hakkında bilinen hemen hemen her şeyi" ortaya çıkarmaya katkıda bulunmuşlardır [3]. Diğer ünlü çizge teorisi problemleri arasında bir labirentten kaçmanın bir yolunu bulmak veya bir satranç tahtasında bir şövalye ile hamlelerin sırasını bulmak, öyle ki her kareye sadece bir kez inecek ve şövalye başladığı alana geri dönecektir [4]. Diğer bazı çizge teorisi problemleri yüzyıllardır çözülmemiştir [3].

Şekil 1.1'de iki ağ çizgesini sunulmuştur.



Şekil 1.1. İki ağ çizgesi [5]

Turuncu çizge, ağırlıklı bir çizge örneğidir. Bu, düğümler arasındaki kenarların kendilerine atanmış ağırlıklara sahip olduğu bir ağdır. Görselleştirildiğinde, bir kenarla ilişkili ağırlıklar, yukarıdaki örnekte olduğu gibi bir sayı veya çizginin kalınlığı ile temsil edilebilir.

Yeşil (solda) çizge, yönlendirilmiş bir çizge bir örneğidir. Bu, düğümler arasındaki kenarların kendilerine atanmış bir yönü olduğu bir ağdır. Yönlendirilmiş çizgeler, kenarı ve yönü temsil etmek için bir çizginin aksine bir ok içerecektir. Bazı algoritmalar, metrikleri hesaplarken yönü dikkate alacaktır Bir çizgenin hem ağırlıklı hem de yönlendirilmiş olması mümkündür ve oldukça popülerdir.

Euler yayınladığı bir makale ile problemin çözümünün olmadığını belirtmiştir. Çünkü köprülerden sadece bir kez geçileceği için tüm bölgelere farklı köprüler ile girilmeli ve çıkılmalıdır. Bunu yapabilmek için de tüm bölgelerin çift sayıda köprü ile komşu olması gerekir fakat bölgelerin tek sayıda köprü ile komsu olduğu bu sebeple tüm köprülerden yalnızca bir kez geçmek startıyla tüm bölgeleri ziyaret etmenin mümkün olmadığı aşikârdır [6].

Basit bir gözlem sonucunda Euler, tüm kenarlardan sadece bir kez geçerek başlangıç noktasına yapılacak bir gezintinin ancak ve ancak her noktanın çift dereceli olması ile mümkün olduğunun farkına varmıştır [6]. Aynı kenardan yalnızca bir kez geçmemiz gerektiği için bir noktadan farklı bir kenar ile çıkıp farklı bir kenar ile geri dönüş sağlamamız gerekir. Bu sebeple noktanın 2 kenar ile komsu olmalıdır. Eğer gezintiyi tekrar ederse yani aynı noktadan 2 kez geçerse yine 2 kenar kullanılması gerektiğinden toplamda gezintide 4 kenar olacaktır [7]. Bu gezintiler tekrarlanırsa kenar sayının her zaman çift olduğu görülür.

Ağaç kavramı Gustav Kirchhof tarafından 1845 yılında uygulanmıştır ve Kirchhof çizge teoriyi elektrik ağlarında ve devrelerinde akımı hesaplamakta kullanmıştır. 1856 yılında Thomas P. Kirkman ve William R. Hamilton polihidralar üzerinde devir çizgeleri çalışmış ve her noktadan sadece bir kez gecen ziyaretleri inceledikleri çalışmalarında Hamilton çizge kavramını keşfetmişlerdir [8].

Cayley, ağaçlar üzerinde çalışmak için diferansiyel kalkülüsteki belirli analitik formlar üzerinde çalışmalar yapmıştır [8].

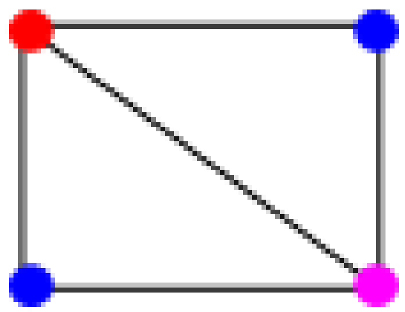
1852 yılında Thomas Gutherie ünlü 4 renk problemini bulmuştur [8].

Buna göre, herhangi ikisi komşu olan dört ülke kolayca çizilebilir. Bu ülkelerin aynı sınırı payla³anlarının farklı renkte boyanması için 4–renk gerektiği de açıktır [9].

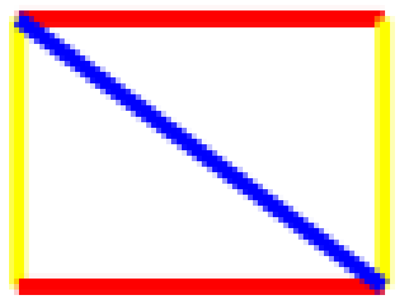
Merak uyandıran bu problem matematikçiler tarafından ilgiyle karşılanmış ve birçok matematikçi ispatlamaya çalışmıştır. 1878 ve 1880 yılları arasında Alfred Kempe ve Peter Guthrie Tait problemi ispatladıklarını açıklamışlardır fakat 1890 yılında Percy John Heawood, Kempe'nin ispatında eksiklikler olduğunu söylemiştir. Bundan kısa süre sonra Guthrie'nin ispatı da beğenilmemiştir. Sonrasında birçok çözüm ortaya atılmış ve matematikçiler 4 renk ile 1939 yılında 22 ülkeli bir haritanın, 1950 yılında 50 ülkeli bir haritanın, 1960 yılında 39 ülkeli bir haritanın, 1975 yılında 52 ülkeli bir haritanın boyanabileceğini ispat etmişlerdir [9].

Slyvester 1878'de nicel sabitler, cebirin ortak degişkenleri ve moleküler diyagramlar arasındaki benzerliği gösteren bir çizim ile çizge terimini ortaya atmıştır. Çizge teorideki önemli çalışmalardan biri de çizge renklendirmedir [8].

Birçok renklendirme çeşidi vardır ve uygun olan renklendirmeler çizgelerde kullanılır. Düzgün renklendirme, noktaların ve kenarların iki nokta ya da iki kenar aynı renkte olmayacak şekilde ve en az renk kullanarak çizgenin renklendirilmesidir [8].



Şekil 1.2. Çizgede noktaların düzgün renklendirilmesi [8]



Şekil 1.3. Çizgede kenarların düzgün renklendirilmesi [8]

Euler çizge teorinin temellerini attıktan sonra çizge ile ilgili yeni problemler ortaya atılmış, ve tanımlar yapılmıştır. 19. yüzyıl ve 20. yüzyılda yapılan çalışmalar sonucu hem ortaya atılan bazı problemlerin çözümleri bulunmuş, hem de çizge ile ilgili yapılan çalışmalar sadece matematik alanı ile kısıtlı kalmayarak birçok alanda kullanılmaya başlanmıştır. Kimya alanında moleküllerle ilgili çalışmalar, fizik alanında devrelerin resmedilmesinde, biyoloji alanında ilaç, endüstrisinde, genlerin ve proteinlerin temsil edilmesinde, dil bilim alanında kelimelerin, hecelerin, cümlelerin incelenmesinde ve daha birçok alanda çizgeler kullanılmaktadır.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Çizge Teori

Bu bölümde tez konusunun daha iyi anlaşılabilmesi için çizge teorinin ön bilgileri tanıtılıp daha sonra total çizgelerle ilgili tanım ve kavramlara yer verilecektir. Bu bölümdeki temel tanım ve kavramlar için [9-14] referans numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır.

Tanım 2.1.1

$V = \{v_1, v_2, v_3, \cdots\}$ ile noktalar (tepe noktaları) kümesini $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ ile de bu noktaların birbirleri ile bağlanmasıyla oluşan kenarlar (bağlantılar ya da yaylar) kümesi olsun. $G = (V, E)$ ikili yapısına çizge denir ve genelde kısaca $G = (V, E)$ ile gösterilir. Bu tez çalışmasında bazı gösterimler kullanılmıştır, örneğin $V(G)$ ile çizgenin noktalar kümesi, $E(G)$ ile çizgenin kenarlar kümesi, k, i, j için $e_k = (v_i, v_j)$ kenar ikilisi ifade edilmektedir [9].

Tanım 2.1.2

$G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere $V(G) = V$ ise bu çizgeye boş (null) çizge denir. Eğer $V(G) = \{v\}$ ve $E(G) = E$ ise bu çizgeye de aşikar (trival) çizge denir [9].

Tanım 2.1.3

$G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere eğer $e_k = (v_i, v_i)$ ise bu kenara ilmek (loop) denir [9].

Tanım 2.1.4

$G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere $e_k = (v_i, v_j)$ ve $e_m = (v_i, v_j)$ şeklinde kenarlar oluşuyorsa bu kenarlara katlı kenarlar (paralel kenarlar) denir. Ayrıca bir çizge içerisinde iki nokta arasında ikiden fazla kenar da oluşturulabilir [9, 10].

Tanım 2.1.5

$G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere $k, i, j \;\; \mathbb{N}$ için $e_k = (v_i, v_j)$ kenarı ise v_i, v_j noktalarına komşu noktalar denir ve $v_i \sim v_j$ ile gösterilir. Benzer şekilde $k, l, i, j, m \in \mathbb{N}$ için $e_k = (v_i, v_j)$ ve $e_l = (v_j, v_m)$ kenarlarına komşu kenarlar denir. Yani iki kenarın bir ortak noktası var ise bu kenarlar komşu kenarlardır [9, 10].

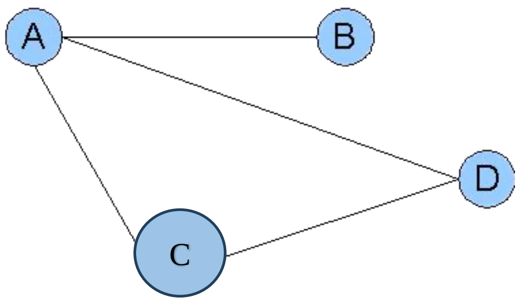
Tanım 2.1.6

$G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere çizgedeki bir noktaya komşu olan noktaların kümesine o noktanın komşuluk kümesi denir ve $N(v_i)$ ile gösterilir. Yani $v_i \in V(G)$ olmak üzere komşuluk kümesi $N(v_i) = \{ v_j : v_i \sim v_j \}$ biçiminde tanımlanır [9, 10].

Tanım 2.1.7

$G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere çizgede ki bütün noktalar yönlendirilmişse (orientation) bu çizgeye yönlü çizge (directed) denir. Yönlü olmayan çizgelere de yönsüz çizge (undirected) denir [11].

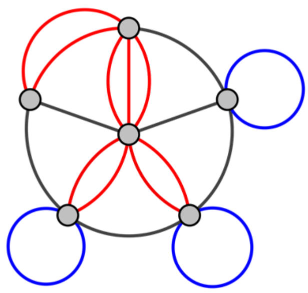
Şekil 2.1. Yönlü çizge [11]



Şekil 2.1. Yönsüz çizge [11]

Tanım 2.1.8

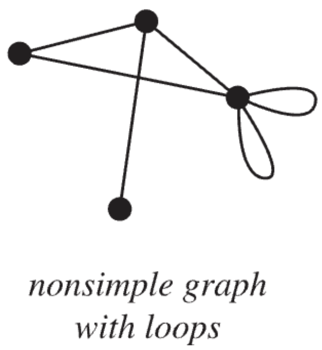
$G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere G çizgesi katlı kenar içeriyor ama ilmek içermiyorsa G çizgesine katlı çizge (multigraph) denir [11].



Şekil 2.2. Katlı çizge

Tanım 2.1.9

$G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere G çizgesi hem katlı kenar hem de ilmek içeriyorsa G çizgesine pseudo çizge denir [12].

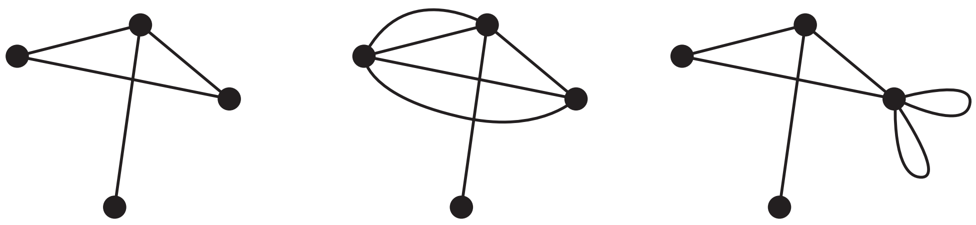


Şekil 2.3. PSEUDO çizge

Tanım 2.1.10

$G = (V, E)$ çizgesi ilmek ve katlı kenar içermiyorsa bu G çizgesine basit çizge denir [10].

Bu tez çalışmasının ilerleyen bölümünde basit çizgeler üzerinde çalışmalara yer verilecektir.



Şekil 2.4. Basit çizge

Tanım 2.1.11

$G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere $v_i \in$V(G) noktasına bağlı kenarların sayısına v_i noktasının derecesi denir ve $deg_G\,(v_i\,)$, $deg(v_i\,)$ ya da kısaca $d(v_i\,)$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.1.12

$G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere $v_i \in$V(G) noktası için $d(v_i\,) = 0$ ise yani hiçbir kenar oluşturmuyorsa v_i noktasına izole nokta (isolated vertex) denir. Eğer v_i noktası için $d(v_i) = 1$ ise bu durumda v_i noktasına pendant nokta denir [10].

Lemma 2.1.13

$G = (V, E)$ yönsüz bir çizge olmak üzere $\sum_{v \in v} d(v) = 2. |E(G)|$ dir. Bu lemma kaynaklarda el sıkışma lemması (Handshaking Lemma) olarak da ifade edilir [2].

Teorem 2.1.14

$G = (V, E)$ n noktalı yönsüz ve basit bir çizge olmak üzere herhangi bir noktanın derecesi $n - 1$'i geçemez. Yani; $\forall v \in V\ (G)\ için\ 0 \leq d(v) \leq n$ –1 [2].

Tanım 2.1.15

$G = (V, E)$ n noktalı bir çizge ve bu çizgenin noktalarının derecelerinin artmayan dizisine çizgenin derece dizisi denir [2].

Tanım 2.1.16

$G = (V,E)$ n noktalı bir çizge olmak üzere derece dizisindeki en büyük elemana maksimum derece, en küçük elemana minimum derece denir ve sırasıyla $\Delta(G)$, $\delta(G)$ ile gösterilir. Yani [2];

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} deg(v)\ deg(v)$$

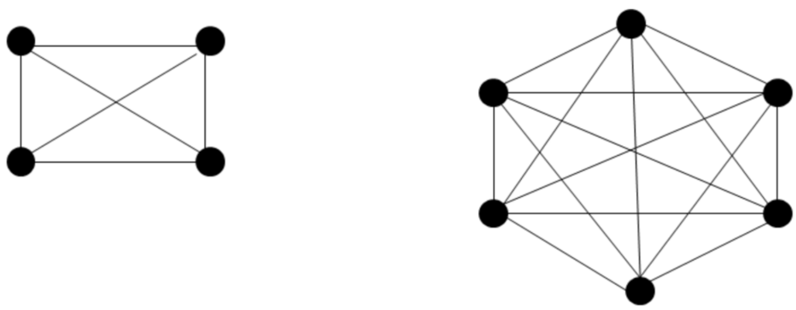
$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} deg(v)$$

Tanım 2.1.17

$G = (V\ ,E)$ n noktalı bir çizge olmak üzere her noktanın derecesi aynı ise bu çizgeye düzenli (regular) çizge denir [9].

Tanım 2.1.18

$G = (V,E)$ n noktalı çizgesinin tüm dereceleri $(n-1)$ ise bu çizgeye tam çizge denir ve K_n ile gösterilir. Bir n noktalı tam çizgenin kenar sayısı $E(G) = \frac{n.(n-1)}{2}$ ile hesaplanır. Tam çizgeler $(n-1)$ düzenlidir [9].

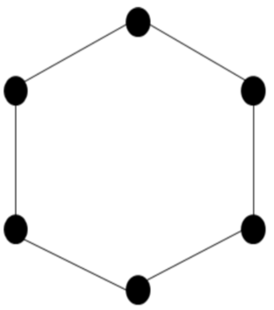


Şekil 2.5. $K_4\ ve\ K_6\ Tam\ Grafları$

Tanım 2.1.19

$n \geq 3$ olmak üzere

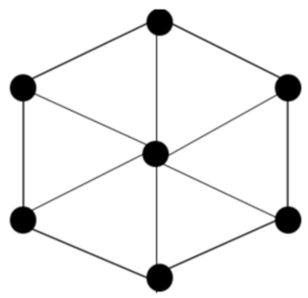
$E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$ n noktalı bir çizgede kenarlar kümesi şekilinde ise bu çizgeye döngü çizge (cycle) denir ve C_n ile gösterilir [10].



Şekil 2.6. C_6 çizgesi

Tanım 2.1.20

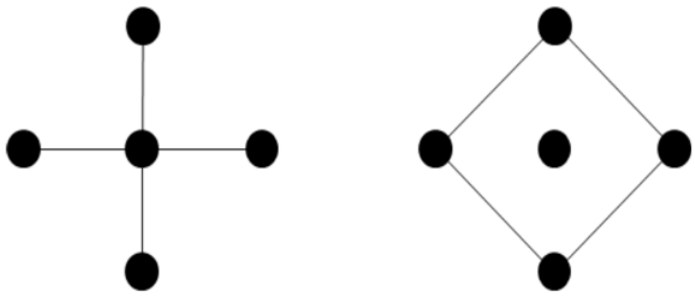
Bir döngü çizge ve döngü çizgedeki bütün noktalarla bağlantılı bir noktanın oluşturduğu çizgeye tekerlek (wheel) çizge denir ve W_n ile gösterilir [10].



Şekil 2.7. W_7 çizgesi

Tanım 2.1.21

$G = (V, E)$ bostan farklı bir çizge olmak üzere $G = (V, E)$'nin herhangi iki noktası bir yol (path) oluşturuyorsa $G = (V, E)$' ye bağlantılı (connected) çizge denir. Bağlantılı olmayan çizgeye bağlantısız çizge denir [10].



Şekil 2.8. $G = (V, E)$ çizgesi

Tanım 2.1.22

$G = (V, E)$ çizgesinde alınan herhangi iki nokta cifti arasındaki en büyük uzaklığa çizgenin çapı (diameter) denir ve $diam(G)$ biçiminde gösterilir [10].

$d\text{iam}(G) = \sup \{d(x, y) | \, x, y \in G\}$

Tanım 2.1.23.

GGgrafında alınan herhangi iki nokta çifti arasındaki en kısa döngü uzunluğuna G'nin çevresi (girth) denir. $g\text{r}(G)$ ile gösterilir. Eğer G grafı döngü içermiyorsa $\text{gr}(G) = \infty$' dur [10].

Tanım 2.1.24

$G = (V, E)$ çizgesinde noktaların ve kenarların tekrar edilmediği kapalı yürümeye döngü (cycle) denir [10].

Tanım 2.1.25

$G = (V, E)$ çizgesinde hiçbir döngü yok ise bu çizgeye döngüsüz (acyclic) çizge denir [10].

Tanım 2.1.26

$G = (V, E)$ çizgesinde tek döngü var ise bu çizgeye tek döngülü (unicyclic) çizge denir. Acıktır ki nokta sayısı kenar sayısına eşittir [10].

Tanım 2.1.27

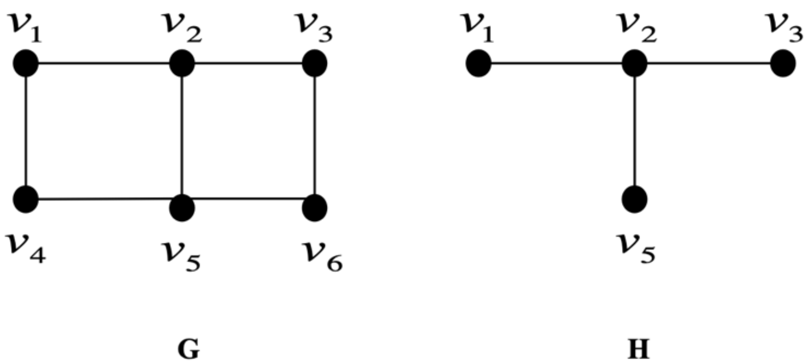
Hiçbir döngü içermeyen bağlantılı çizgeye ağaç (tree) denir ve T ile gösterilebilir. Acıktır ki kenar sayısı nokta sayısının bir eksiğine eşittir [10].

Tanım 2.1.28

Bileşenleri ağaç olan çizgelere orman (forest) denir [10].

Tanım 2.1.29

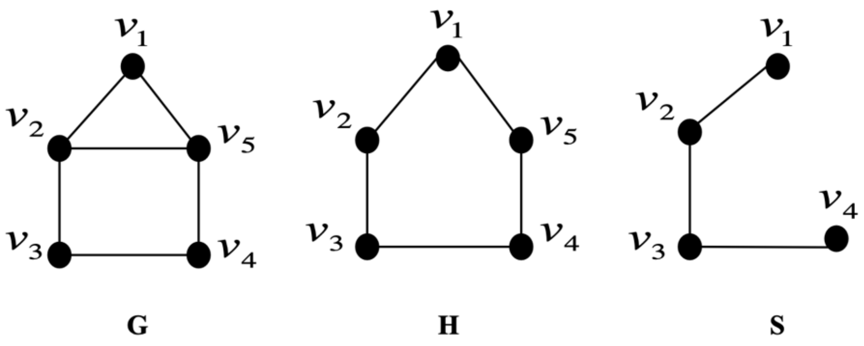
$G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ olacak şekilde $H = (V, E)$ çizgesi var ise bu çizgeye $G = (V, E)$ çizgesinin alt çizgesi (subgraph) denir [10].



Şekil 2.9. H çizgesi G çizgesinin alt çizgesidir

Tanım 2.1.30

Bir $G = (V, E)$ çizgesinin tüm noktalarını içeren alt çizgeye dallanmış altçizge (spanning subgraph) denir [10].



Şekil 2.10. H çizgesi G çizgesinin dallanmış alt çizgesidir ama S çizgesi sadece alt çizgedir

Tanım 2.1.31

Bir çizgeden sadece noktalar silinerek oluşturulan alt çizgeye indirgenmiş alt çizge (induced subgraph) denir. Burada önemli olan silinen noktanın bağlı olduğu kenarları silmektir diğer kenarların silinmemesi gereklidir [10].

Tanım 2.1.32

$G = (V, E)$ çizgesinin tam olan alt çizgenin noktalar kümesine klik (clique) denir. Yani öyle bir alt çizge ki tüm noktalar birbirleri ile kenar oluşturur [10].

Tanım 2.1.33

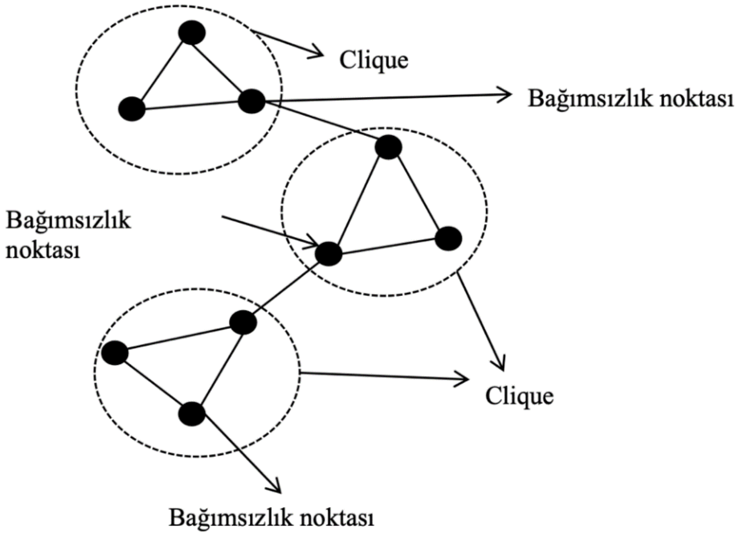
$G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere birbirleriyle kenar oluşturmayan noktaların kümesine bağımsız küme (independent set) denir [10].

Tanım 2.1.34

$G = (V, E)$ çizgesindeki en geniş klik kümesinin eleman sayısına (nokta sayısı) çizgenin klik sayısı denir ve $\omega(G)$ ile gösterilir[10].

Tanım 2.1.35

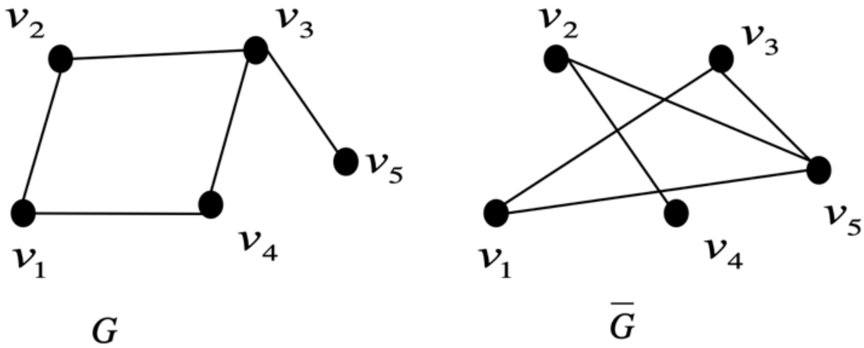
$G = (V, E)$ çizgesindeki en büyük bağımsız kümenin eleman sayısına (nokta sayısı) çizgenin bağımsızlık sayısı (independent number) denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir[10].



Şekil 2.11. Bağımsızlık noktası ve klik

Tanım 2.1.36

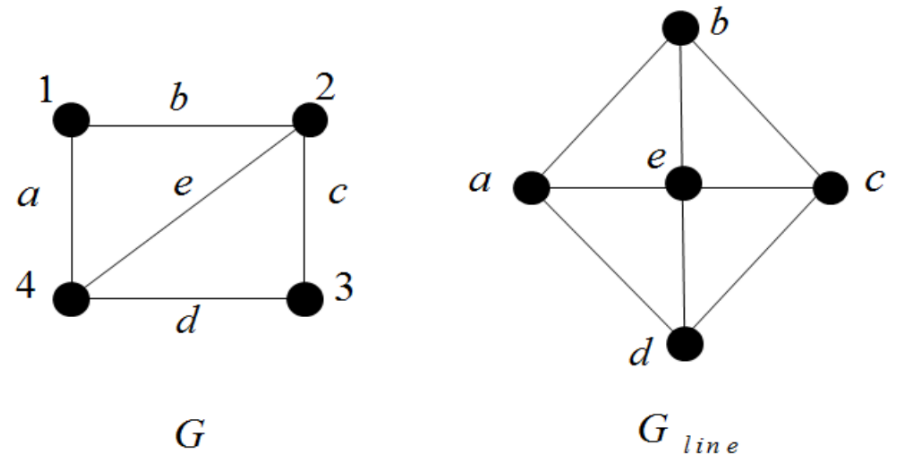
$G = (V, E)$ basit çizge olmak üzere $e = \{v_i, v_j\} \in \bar{E}(\bar{G}) \Leftrightarrow v_i, v_j \notin E(G)$ olacak biçimde $\bar{G} = (V, \bar{E})$ çizgesine $G = (V, E)$ çizgesinin tümleyenidir denir. Yani kenar oluşturmayan noktaların kenar oluşturmasıyla oluşan yeni çizge $G = (V, E)$ çizgesinin tümleyenidir. Örneğin, tam çizgelerin tümleyeni boş çizgedir [10].



Şekil 2.12. G çizgesi ve tümleyeni

Tanım 2.1.37

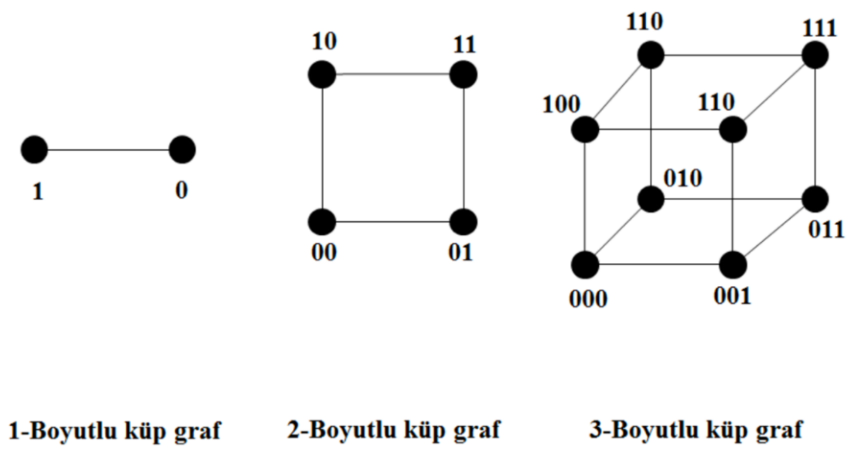
$G = (V, E)$ çizgesindeki noktaları kenar, kenarları da nokta olarak belirlenen yeni çizgeye *G* çizgesinin çizgi çizgesi denir ve G_{line} sembolü ile gösterilir [10].



Şekil 2.13. Bir çizge ve onun çizgi çizgesi

Tanım 2.1.38

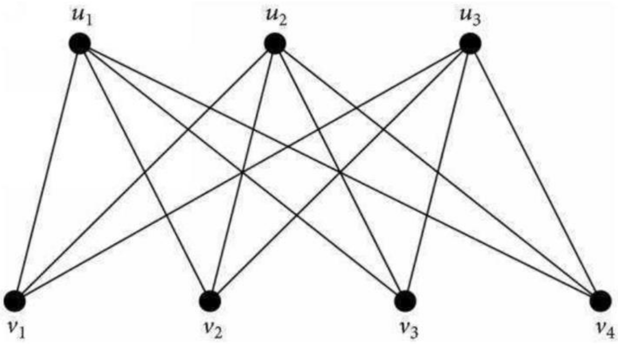
2^n noktadan ve $n.2^n$ kenardan oluşan çizgeye m boyutlu küp çizge denir ve Cb_m sembolü ile gösterilir. M boyutlu küp çizge için komşuluğu ikili sistemdeki sıfır ve birler kullanılarak oluşturulur [2, 10].



Şekil 2.14. $Cb_{1,}Cb_2$ ve Cb_3 küp çizgeler

Tanım 2.1.39

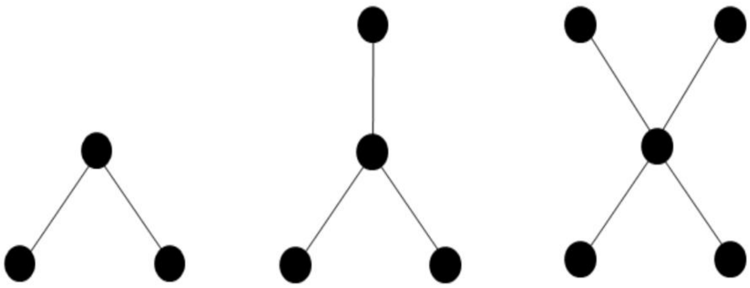
G çizgesi birbirine komşu olmayan $|V_1| = p$, $|V_2| = q$ biçiminde iki farklı nokta kümesinden oluşan bir çizge olmak üzere eğer V_1 kümesindeki her nokta V_2 kümesindeki her nokta ile komşu ise G çizgesine iki parçalı tam çizge denir ve $K_{p,q}$ sembolü ile gösterilir [2, 10].



Şekil 2.15. $K_{3,4}$ iki parçalı tam çizge

Tanım 2.1.40

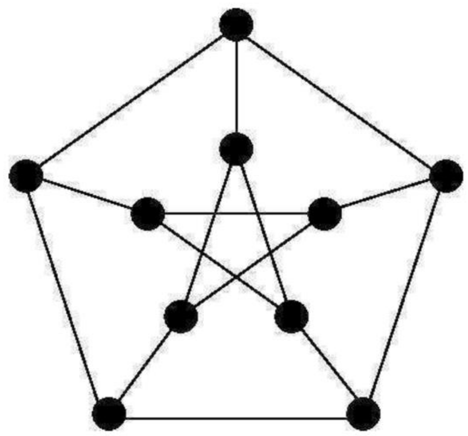
$G = (V, E)$ n noktalı bir çizge olmak üzere bir noktanın derecesi $n-1$ ve $n-1$ noktanın derecesi bir olan ağaca yıldız (star) çizge denir. S_n sembolü ile gösterilir. Dikkat edilirse $S_n = K_{1,n-1}$ dir [2, 10].



Şekil 2.16. Yıldız çizgeler

Tanım 2.1.41

Noktalarının derecesi 3 olan 10 noktalı ve 15 kenarlı düzenli çizgeye Petersen çizge denir. Özel bir çizge olduğu için genelde P ile gösterilir [2, 10].



Şekil 2.17. Petersen çizge

Tanım 2.1.42

Bağlantılı bir çizgeyi bağlantısız yapan minimum kenar sayısına kenar bağlantısallık, çizgeyi bağlantısız yapan minimum nokta sayısına da nokta bağlantısallık denir ve sırasıyla $e(G)$ ve $v(G)$ ile gösterilir. Temel nitelikteki kaynaklarda kenar bağlantısallık λ(G), nokta bağlantısallık $k(G)$ sembolleri ile de gösterilir [2, 10].

2.2 Total Çizgeler

Tanım 2.2.1

Bir çizgenin toplam $T\,(G)$ çizgesi $G = (V, E)$, G' deki her kenar ve köşe için köşe kümesi olarak bir tepe noktasına sahiptir. $T\,(G)$'deki iki köşe, temsil ettikleri G'nin elemanları (köşe veya kenar) birbirine bitişik olduğunda tam olarak bitişiktir. Böylece, bir çizgenin toplam çizgesini köşe kümesi aşağıdaki bölümlere ayrılabilir [11]:

1. Orijinal çizgenin köşeleri (böyle bir köşe köşesi olarak adlandırılır)

2.Çizgi çizgenin köşeleri (böyle bir köşe kenar köşesi olarak adlandırılır).

Tanım 2.2.2

Toplam çizgedeki karma bir klik, toplam çizgenin geçerli bir bölümündeki köşe köşeleri kümesinden en az bir tepe noktasına ve kenar köşeleri kümesinden en az bir tepe noktasına ters toplam çizgeye ve çizgi çizgesine sahip olan bir kliktir [11].

Tanım 2.2.3

Toplam çizgedeki saf bir klik, yalnızca köşe köşelerinden veya yalnızca kenar köşelerinden oluşan bir kliktir [11].

2.3. Toplam Çizgelerin Temel özellikleri

Toplam çizgenin köşe kümesi $H = T(G)$ iki ayrık kümeye bölünmüştür, öyle ki bir kısımdaki indirgenen alt çizge ters toplam çizge G ve diğeri çizgi çizge olan $L(G)$'dir. Birkaç toplam çizgede, bu bölümleme benzersiz değildir, ancak farklı bölümlerin hepsi birbirine izomorfiktir [11].

Bunlara sırasıyla köşe kısmı ve kenar kısmı denir. Yukarıdaki gibi bölünmenin neden olduğu iki parçalı alt çizge, kenar kısmındaki köşelerde 2-düzenlidir. Bunun nedeni, ters toplam çizgedeki her kenarın tam olarak iki uç noktaya sahip olmasıdır. Bu nedenle, belirli bir çizgesinin ters toplam çizgesini hesaplamak için bir algoritma (eğer toplam bir çizgeyse), köşe kümesinin böyle bir bölümünü bulmaya dayanır [11].

Teorem 2.3.1

En az iki köşe köşesinden oluşan en büyük karma klik, toplam çizgede 3 boyutundadır [11].

2.3.1. G'nin Köşe Dereceleri açısından H = T (G) Köşe Dereceleri

Bu alt bölümde, bir toplam çizgenin derece dizisini, ters toplam çizgesinin derece dizisi açısından ifade eden sonuçlar elde edilmiştir [11].

Teorem 2.3.1.1

Toplam çizgedeki köşe köşesinin derecesi, ters toplam çizgedeki orijinal köşenin derecesinin 2 katıdır [11].

Total Çizgelerin Yönlendirilmiş Renklendirilmesi

Bu bölümde, toplam yönlendirilmiş çizgelerin renklendirilmesinin bazı sonuçlarını değerlendirilmiştir. T, T_1 $(\Gamma\ (R))$ ile $T_r(\Gamma\ (\mathrm{R}))$ ile doğrudan ilişkilendirmektedir [11].

Tanım 2.3.1.2

R bir halka olsun. R sıfır olmayan nilpotent elemanlara sahip değilse R'ye indirgenmiş halka denir [10].

Tanım 2.3.1.3

R bir halka ve $a \in R$ için $a^n = 0$ olacak şekilde $n \in N-\{0\}$ varsa a' ya R halkasının nilpotent elemanı denir. Öyle ki $a^2 = a$ olacak şekilde bir $a \in R$ varsa halkanın nilpotent elemanı denir [10].

Tanım 2.2.2.4

R bir halka ve S maksimal ideali olmak üzere tek maksimal ideali olan halkalara lokal (yerel) halka denir. (R, S) ile gösterilir [10].

Tanım 2.2.2.5

G grafının komşu olan iki noktası aynı renk olmayacak şekilde grafın noktalarını renklendirmek için gerekli olan en küçük renk sayısına G grafının kromatik sayısı denir ve χ ile gösterilir. G grafının aynı noktasına gelen iki kenarın aynı renge sahip olmaması için her bir kenarı renklendirmek için gereken en az renk sayısına kromatik indeks ya da kenar kromatik sayısı denir. χ' ile gösterilir [11].

Teorem 2.3.1.6

R, indirgenmiş bir halka olsun. Öyleyse $\chi\ (T_1(\Gamma\ (R)))\ =\ 1$, ancak ve ancak R'nin sıfır olmayan sol sıfır bölenleri yoktur [11].

2.3.2. Toplam Çizge Üzerinde L (2, 1) Etiketlemesi

Total çizge, çizge etiketleme problemlerinde önemli bir rol oynar. Bir G çizgesinin toplam çizgesi $T(G)$, köşeleri G'nin köşelerine ve kenarlarına karşılık gelen ve iki köşesi ancak ve ancak karşılık gelen köşeler bitişikse, kenarlar bitişikse veya köşeler ve kenarlar çakışıyorsa G'de ortak olan bir çizgedir [12].

Bir L (2, 1) - bir graf etiketlenmesi, köşelerinin negatif
olmayan tamsayılarla renklendirilmesidir, öyle ki bitişikköşelerdeki etiketler en az 2, iki
mesafedeki köşelerdeki etiketler en az 1 farklılık gösterir. Bu kavram, köşe renklendirm
ekavramını genelleştirir, çünkü köşe renklendirme, L (1, 0) etiketleme ile aynıdır. λ (G) ile gösterilenG'nin L (2, 1) etiketleme sayısı, en küçük k sayısıdır, öyle ki G, k'den büyü
k etiketi olmayan bir L (2, 1) etiketlemeye sahiptir [12].

Teorem 2.3.2.1

Maksimum derece $\varDelta$ olan toplam $T\ (G)$ çizgesi için

$$\lambda_{2,1}(T(G)) \leq max\left\{\frac{3}{4}\Delta^2 + \frac{1}{2}\varDelta, \frac{1}{2}\Delta^2 + 2\Delta\right\}$$

eşitsizliği sağlanır [12].

Tanım 2.3.2.2

R bir halka ve 0 ≠ a ∈ R olmak üzere ab = 0 olacak şekilde 0 ≠ $b \in R$ varsa a elemanına sol sıfır bölen denir. Yine 0 ≠ a ∈ RR olmak üzere ba = 0 olacak şekilde 0 ≠ $b \in R$ varsa a elemanına sağ sıfır bölen denir. Eğer a elemanı hem sağ sıfır bölen hem de sol sıfır bölen ise kısaca a' ya sıfır bölen denir [13].

Teorem 2.3.2.3

H, $H \neq T(C)$, $T(K)$, bağlı bir toplam çizge olsun ve v, V(H)' nin özel olmayan bir elemanı olsun. Ardından H'nin her özel olmayan tepe noktası $\{i\}$, $i \geq 1$'de, her ikisi de $\{i\}$ içinde olan veya biri $\{i\}$, diğeri de $\{i+1\}$'de bulunan H'nin tam iki özel köşesi ile bitişik olur [13].

Teorem 2.3.2.4

H, v ve u_1 köşeleri H'nin bitişiğindeki 2. derece köşe v_1 ile bağlantılı düzensiz bir toplam çizge olsun. O halde;

(a) $deg\, u_1 \neq deg\, v_1$, öyle ki $degv < degu_1$

(b) u_1 ve v_1 H nin özel köşeleri iken v özel değildir, v nin toplam çizge fonksiyonu altında $u_1v_1$kenarına karşılık gelmesi özelliğine sahiptir [13].

Kanıt

H'nin her özel olmayan tepe noktasının derecesinin ikiden fazla olduğu açıktır. Böylece v_1 özeldir. Dolayısıyla ya u_1 ya da v özel değildir.

Varsayalım ki $degu_1 = degv$. O halde $degu_1 = \frac{1}{2}\, degv + 1$, ya da $degv$=$\frac{1}{2}degu_1 + 1$, her ikisi de H'nin düzenli olduğunu ima eder.

Böylelikle $degv < degu_1$ olduğunu varsayabiliriz.

(b) bölümünü kanıtlamak için u_1'nun özel olmadığını varsayalım. O halde $degu_1 \frac{1}{2} = degv + 1$ ve $degv < degu_1$ eşitsizliği $degv_1 \leq$ eşitsizliğinin imkansız olduğunu gösterir. Bu nedenle, v özel değildir ve açıktır ki v, u_1v_1'nin kenarına karşılık gelir [13].

Tanım 2.3.2.5

K mertebesindeki bir π projektif düzleminden elde edilen grafa "π'ye karşılık gelen k mertebesinde projektif graf" veya herhangi bir karışıklık olmayacaksa "k mertebesinde projektif graf" adı verilir [14].

Teorem 2.3.2.6

R, sonlu değişmeli bir halka olsun. O zaman $gr\ (T_\Gamma(R))\ =\ 2$, ancak ve ancak R, ya $\mathbb{Z}_{10}$ ya da $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{F}_4$ izomorfiksedir. Değişmeli halkaların projektif toplam çizgesi Khashyarmanesh [14] tarafından incelenmiştir [14].

Aşağıdaki teorem, T_Γ (R) yansıtmalı olan yerel halka R'nin bir karakterizasyonunu sağlar.

Teorem 2.3.2.7

R sonlu bir yerel halka olsun. O zaman toplam çizge T_Γ (R) projektiftir ancak ve ancak R, $\mathbb{Z}_9$ veya $\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(x^2)}$ halkalarından birine izomorfiktir. Sonraki teorem, T_Γ (R) projektif olan tüm yerel olmayan halkaların R karakterizasyonunu sağlar [14].

Teorem 2.3.2.8

R sonlu yerel olmayan bir halka olsun. O zaman toplam çizge T_Γ (R) projektiftir ancak ve ancak R, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ‘ e izomorfik ise [14].

3. BÖLÜM

TOTAL ÇİZGELERDE CEBİRSEL ÖZELLİKLER

Bir halka üzerinde bağlantılı graflardan biri de total graflardır. Sıfır-bölen graflar söz konusu olduğunda grafların kenarı için halkanın elemanlarının çarpımı kullanılır. Bunun bir varyasyonu olarak halkanın elemanlarının toplamı kullanılarak bir graf oluşturulur ve buna değişmeli halkaların total grafı denir. İlk olarak 2008' de D.F. Anderson ve A. Badawi tarafından [13] de total graf aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

Tanım 3.1

Boştan farklı bir R kümesi üzerinde toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ denilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa o zaman $(R,+,\cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir .

- $(R, +)$ değişmeli bir gruptur.
- R kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır. Yani $\forall a, b \in R$ için $a, b \in R$ dir.
- R kümesi çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. Yani $\forall\ a, b, c \in$

RR için $a(b\boldsymbol{c}) = (ab)c$ dir.

• Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani $\forall\ a, b$,c $\in R$ için; $a(b + c) = ab + ac$ ve $(b + c)a = ba + ca$ dır.

Tanım 3.2

R değişmeli, birimi sıfırdan farklı bir halka olsun. $\mathcal{T}(R)$ ile gösterilen total graf, noktaları R' nin bütün elemanları olan basit bir graftır. Burada farklı $x, y \in R$ için x ve y komşudur ancak ve ancak $x + y \in \mathcal{Z}(R)$' dir [13].

R' nin düzenli grafı olarak adlandırılan $\mathcal{T}$(Reg(R)) noktaları Reg(R)=R\ $\mathcal{Z}(R)$ olan ve noktaları $\mathcal{Z}(R)$ olan $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$'ın indirgenmiş alt grafları olsun. A, değişmeli bir B halkasının bir alt halkasıysa, $\mathcal{T}(A)$' nın $\mathcal{T}(B)$' nin indirgenmiş bir alt grafı olması gerekmez. $x, y \in A$, $\mathcal{T}(B)$' de komşu olmasına rağmen $\mathcal{Z}(A) \subseteq \mathcal{Z}(B)$ olduğundan $\mathcal{T}(A)$' da komşu ise elemanlar $\mathcal{T}(B)$' de komşu olabilir fakat $\mathcal{T}(A)$' da komşu değildir. Aslında $\mathcal{T}$(A), $\mathcal{T}$(B)' nin indirgenmiş bir alt grafıdır ancak ve ancak $\mathcal{Z}(B) \cap A = \mathcal{Z}$(A) [13].

Tanım 3.3

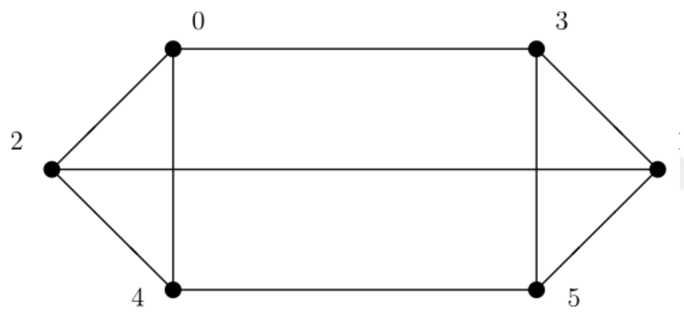
R bir halka ve I, R' nin bir alt halkası olmak üzere her r $\in R$ $\forall a \in I$ için r $a \in I$ ve $ar \in I$ ise o takdirde I' ya R halkasının bir ideali denir [13].

Tanım 3.4

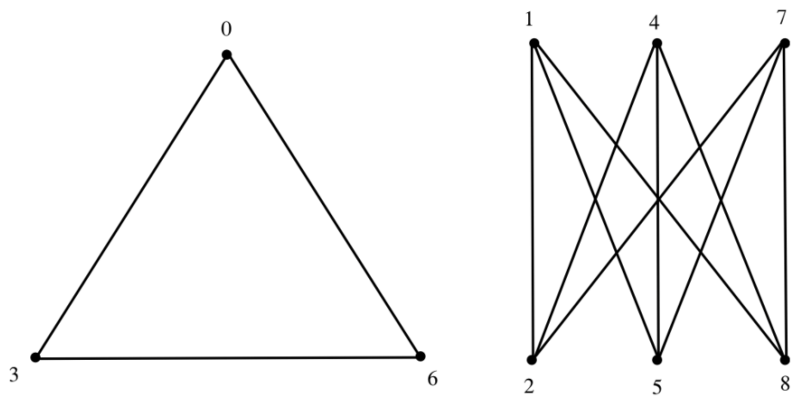
G= (V, E) grafı için $V' \subseteq V$ ve $E' \subseteq E$ olmak üzere, H = (V', E') grafına G'nin bir alt grafı denir ve $H \subseteq G$ ile gösterilir. G grafının noktalarından bazılarının ve bu noktalara bağlı bütün kenarların silinmesi ile elde edilen alt grafa nokta indirgenmiş alt graf denir. Kısaca indirgenmiş alt graf denir. Bazı noktalar sabit kalarak bağlı kenarların silinmesi ile elde edilen alt grafa G' nin kenar indirgenmiş alt grafı denir [13].

Örnek

Toplam çizgeler için bazı örnekler Şekil 3.1 ve 3.2'de verilmiştir [13].



Şekil 3.1. $T\Gamma$ $(Z6)$



Şekil 3.2. $T\Gamma$ $(Z9)$

$\mathcal{T}(R)$ üzerine yapılan çalışmalar $\mathcal{Z}(R)$' nin R' nin ideali olup olmadığına bağlı olarak iki duruma ayrılır. $\mathcal{T}(R)$ ' ın $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$ alt grafı daima bağlantılıdır ve $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$ tamdır ancak ve ancak $\mathcal{Z}(R)$, R' nin idealidir. Ayrıca $\mathcal{Z}(R)$, R' nin ideali ise o zaman $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$ ve $\mathcal{T}$(Reg(R)), $\mathcal{T}(R)$' ın ayrık alt graflarıdır. $\mathcal{T}$(Reg(R)), her biri tam graf ya da iki parçalı tam graf olan ayrık grafların birleşimidir. Ancak $\mathcal{Z}(R)$, R' nin ideali değilse $\mathcal{T}(R)$' ın $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$ ve $\mathcal{T}$(Reg(R)) alt grafları asla ayrık değildir ve $\mathcal{T}(R)$ ancak ve ancak $\mathcal{Z}(R)$=R ise bağlantılıdır [13].

Teorem 3.5

$\mathcal{Z}(R)$, R' nin ideali olacak şekilde R değişmeli bir halka olsun. O zaman $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$, $\mathcal{T}(R)$' ın tam indirgenmiş alt grafıdır ve $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$, $\mathcal{T}$(Reg(R)) ' den ayrıktır [13].

Teorem 3.6

$Z(R)$, R' nin bir ideali olacak şekilde R, değişmeli bir halka ve $|\mathcal{Z}(R)| = \alpha$ ve $|R/\mathcal{Z}(R)| = \beta$ olsun.

1. $2 \in \mathcal{Z}(R)$ ise o zaman $\mathcal{T}$(Reg(R)), $\beta - 1$ tane ayrık K_α' nın birleşimidir.

2. $2 \notin \mathcal{Z}(R)$ ise o zaman, $\mathcal{T}$(Reg(R)), $\frac{\beta-1}{2}$ tane ayrık $K_{\alpha,\alpha}$'nın birleşimidir [13].

Açıklama 3.7

$\mathcal{Z}(R) = \{0\}$ ise yani R bir tamlık bölgesi ise $2 \in \mathcal{Z}(R)$ olması için gerek ve yeter koşul $Kmg(R) = 2$ olmasıdır. R bir tamlık bölgesi değilse bunun geçerli olması gerekmez, örneğin $R = Z_4$. R, $Kmg(R) = 2$ ile birlikte bir tamlık bölgesi ise o zaman, $\mathcal{T}$(Reg(R)), $\beta - 1$ tane ayrık K_1' lerin birleşimidir. R, $Kmg(R) \neq 2$ ile birlikte bir tamlık

bölgesi ise o zaman, $\mathcal{T}$(Reg(R)), $\frac{\beta-1}{2}$ tane ayrık $K_{1,1} = K_2$' lerin birleşimidir [13].

Teorem 3.8

$\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali olacak şekilde R, değişmeli bir halka olsun.

1. $\mathcal{T}$(Reg(R)), tamdır $\Leftrightarrow$ ya $R/\mathcal{Z}(R) \cong Z_2$ ya da $R \cong Z_3$.
2. $\mathcal{T}$(Reg(R)), bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ ya $R/\mathcal{Z}(R) \cong Z_2$ ya da $R/\mathcal{Z}(R) \cong Z_3$.
3. $\mathcal{T}$(Reg(R)), tamamen bağlantısızdır$\Leftrightarrow$ R, $Kmg(R) = 2$ ile birlikte bir tamlık bölgesidir [13].

Teorem 3.9

$\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali olacak şekilde R, değişmeli bir halka olsun. O zaman;

1. $d$iam ($\mathcal{T}$(Reg(R))) = 0,1,2 veya ∞. Özellikle $\mathcal{T}$(Reg(R)), bağlantılı ise $d$iam ($\mathcal{T}$(Reg(R))), ≤ 2 ' dir.

2. gr ($\mathcal{T}$(Reg(R))) = 3,4 veya ∞. Özellikle $\mathcal{T}$(Reg(R)), bir döngü içeriyorsa gr ($\mathcal{T}$(Reg(R))) ≤ 4' tür [13].

Teorem 3.10

$\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali olacak şekilde R, değişmeli bir halka olsun.

1. (a) $diam$ ($\mathcal{T}(Reg(R))$) = 0 ⟺ $R \cong$ Z_2.

(b) $diam\ (\mathcal{T}(Reg(R)))\ =\ 1\ \Leftrightarrow\ ya\ R/\mathcal{Z}(R)\ \cong\ Z_2\, ve\ R\ \cong/ Z_2$ (yani $R/\mathcal{Z}(R)\ \cong\ Z_2$ ve$|\mathcal{Z}(R)| \geq 2)\ yada\ R\ \cong\ Z_3$.

(c) $diam\ (\mathcal{T}(Reg(R)))\ =\ 2\ \Leftrightarrow\ R/\mathcal{Z}(R)\ \cong\ Z_3\, ve\ R\ \cong/ Z_3$ (yani $R/\mathcal{Z}(R)\ \cong$ $Z_3\, ve\ |\mathcal{Z}(R)|\ \geq$

2). (d) Diğer durumlarda, $d$iam ($\mathcal{T}$(Reg(R))) = ∞.

2. (a) $gr\ (\mathcal{T}(Reg(R)))\ =\ 3\ \Leftrightarrow\ 2 \in \mathcal{Z}(R) ve|\mathcal{Z}(R)| \geq 3$.

(b) $gr\ (\mathcal{T}(Reg(R)))\ = 4\ \Leftrightarrow\ 2 \in/ \mathcal{Z}(R) ve|\mathcal{Z}(R)| \geq 2$.

(c) Diğer durumlarda, $gr\ (\mathcal{T}(Reg(R)))\ =\ \infty$.

3. (a) $gr\ (\mathcal{T}(Reg(R)))\ =\ 3\ \Leftrightarrow\ |\mathcal{Z}(R)|\ \geq\ 3$.

(b) $gr\ (\mathcal{T}(Reg(R)))\ =\ 4\ \Leftrightarrow 2 \in/ \mathcal{Z}(R)\ ve\ |\mathcal{Z}(R)| = 2$.

(c) Diğer durumlarda, $gr\ (\mathcal{T}(Reg(R)))\ =\ \infty$ [13].

Örnek 3.3.9. $m \geq 2$ tam sayı olsun. O zaman $\mathcal{Z}(Z_m)$, Z_m' in bir idealidir ancak ve ancak bazı s asalı ve $n \geq 1$ tam sayısı için $m = s^n$'dir. Öyleyse kabul edelim ki $\mathcal{Z}(Z_m)$, Z_m' in bir ideali olsun. Dolayısıyla $\mathcal{T}$(Reg ($\mathbb{Z}_m$)) bağlantılıdır gerek ve yeter şart bazı $n \geq 1$ tam sayısı için ya $m = 2^n$ ya da $m = 3^n$ ' dir. Bu nedenle $\mathcal{T}$(Reg ($\mathbb{Z}_m$)) tam graftır gerek ve yeter şart bazı $n \geq 1$ tam sayısı için ya $m = 2^n$ ya da m = 3' dir [13].

Teorem 3.11

$\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali olmak üzere R, değişmeli bir halka olsun.

1. G, $\mathcal{T}$(Reg(R))' nin indirgenmiş bir alt grafı olsun. x ve y G' de bir yolla bağlantılı olan G' nin farklı noktaları olsun. O zaman x ve y arasında en fazla 2 uzunluğunda G' de bir yol vardır. Özellikle $\mathcal{T}$(Reg(R))bağlantılı ise o zaman $d$iam ($\mathcal{T}$(Reg(R))) ≤ 2.

2. x ve y R' nin bir yolla bağlı farklı düzenli elemanları olsun. $x + y \notin \mathcal{Z}(R)$ ise yani x ve y komşu değilse o zaman $\mathcal{T}$(Reg(R))' de x ve y arasında 2 uzunluğunda $x - (-x) - y$ ve $x - (-y) - y$ yolları vardır [13].

Teorem 3.12

$\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali değil ve R, değişmeli bir halka olsun.

1. $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$, $d$iam($\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$) = 2 ile bağlantılıdır.
2. $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$' nin bazı noktaları $\mathcal{T}$(Reg(R)' de bir noktaya komşudur. Özellikle $\mathcal{T}(R)$' ın alt grafları $\mathcal{T}(\mathcal{Z}(R))$, ve $\mathcal{T}$(Reg(R) ayrık değillerdir.
3. $\mathcal{T}$(Reg(R) bağlantılı ise $\mathcal{T}(\Gamma(R))$'da bağlantılıdır [13].

Teorem 3.13

$\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali değil ve R, değişmeli bir halka olsun. O zaman $\mathcal{T}(R)$'ın bağlantılı olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{Z}(R)$ = R. Yani bazı $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathcal{Z}(R)$ için $R = (z_1, z_2, \dots, z_n)$'dir. Özellikle R sonlu, değişmeli bir halka ve $\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali değilse o halde $\mathcal{T}(\Gamma(R)$ bağlantılıdır [13].

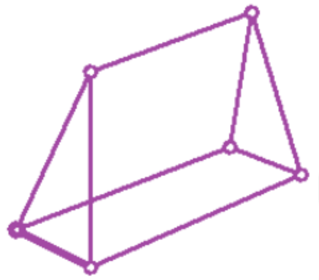
Teorem 3.14

$\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali değil ve $\mathcal{Z}(R)$ = R yani $\mathcal{T}(R)$ bağlantılı olacak şekilde R, değişmeli bir halka olsun. $n \geq 2$ en küçük tam sayı öyle ki bazı $z_1, z_2, \dots, z_{nn} \in \mathcal{Z}(R)$ için $R = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ olsun. O zaman $d$iam($\mathcal{T}(R)$ = n olur. Özellikle R sonlu, değişmeli bir halka ve $\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali değilse o halde $d$iam($\mathcal{T}(R)$)= 2' dir [13].

Sonuç 3.15

R, değişmeli bir halka öyle ki $\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali değil ve kabul edelim ki $\mathcal{T}(R)$ bağlantılı olsun. $d$iam($\mathcal{T}(R)$)= n ise o halde, $\mathcal{T}$(Reg(R)≥ $n - 2$ ' dir [13].

Örnek 3.3.19 $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ olsun.O zaman $diam(\mathcal{T}(R))$=2 olur. Buradan $diam$ ($\mathcal{T}$(Reg(R)))=1 olduğunu kontrol etmek kolaydır. Dolayısıyla $diam(\mathcal{T}(R))>$ $diam$ ($\mathcal{T}$(Reg(R))) [13].



Şekil 3.3. $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{3)}$

Teorem 3.16

Değişmeli bir R halkasının asal idealleri P_1 ve P_2 olsun. Bazı $x \in P_1 \setminus P_2$ ve $y \in P_2 \setminus P_1$ için $xy = 0$ ve $S = R \setminus (P_1 \cup P_2)$ olsun. O zaman $\mathcal{T}(R_S)$, $diam(\mathcal{T}(R_S) = 2$ ile bağlantılıdır [13].

Örnek 3.17

$R = Z[X_1, X_2, X_3] / \langle X_1X_2X_3 \rangle = \mathbb{Z}[x_1, xx_2, xx_3]$, RR halkasının asal idealleri $P_1 = (x_1)$ ve $P_2 = (x_2)$ olmak üzere, $x = x_1$ ve $y = x_2x_3$ olsun. O zaman $xy = 0$ ve $x \in P_1 \setminus P_2$ ve $y \in P_2 \setminus P_1$.$S = R \setminus (P_1 \cup P_2) \supset R \setminus \mathcal{Z}(R)$ olsun. O halde $\mathcal{T}(R_S)$, $diam(\mathcal{T}(R_S) = 2$ ile bağlantılıdır. Teorem 3.14 ve Teorem 3.16 ' den $\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali değil ve $\mathcal{Z}(R) \subset R$ olduğunda $\mathcal{T}(R)$' ın bağlantısız olduğu açıktır.

Teorem 3.18

$\mathcal{Z}(R)$, R' nin bir ideali olmayacak şekilde R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman aşağıdaki verileri sağlamaktadır.

1. $\mathcal{T}(R)$ bir Hamilton graftır.
2. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $\mathcal{T}$(Reg(R)bir Hamilton graftır ancak ve ancak R, ${\mathbb{Z}_2}^{n+1}$, ${\mathbb{Z}^n}_2 \times \mathbb{Z}_3$, ${\mathbb{Z}^n}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2[x] / \langle x^2 \rangle$ halkalarından herhangi birine izomorf değildir [15].

Açıklama 3.19

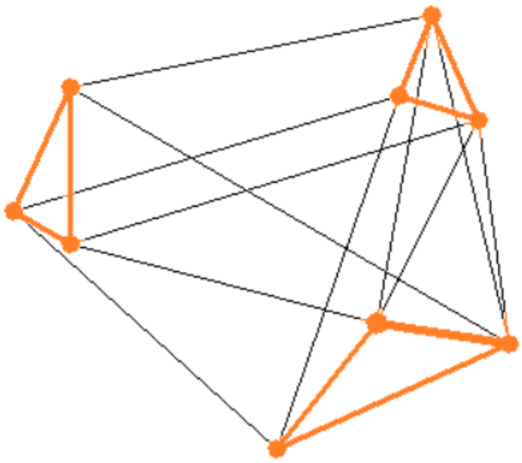
R sonlu, değişmeli, lokal halka ise o zaman $\mathcal{Z}(R)$bir ideal ve $\mathcal{T}(R)$' de bağlantısızdır. Dolayısıyla $\mathcal{T}(R)$ bir Hamilton graf değildir [15].

Teorem 3.20

$diam$ ($\mathcal{T}(R)$ = 2 olacak şekilde (dolayısıyla $\mathcal{T}(R)$ bağlantılıdır) R değişmeli bir halka olsun. O halde $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ (R) Hamilton graftır [16].

Örnek 3.21

$R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ olsun. Bu halkanın total grafı;



Şekil 3.4. $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

Şekilde basit bir şekilde diam ($\mathcal{T} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$)= 2 olduğu görülmektedir. diam ($\mathcal{T} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$)= 2 ve $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ halkası değişmeli ve bütün noktalardan bir kez geçecek şekilde bir döngü olduğu için $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ Hamilton graftır.

Teorem 3.22

R birimli değişmeli bir halka olsun. O zaman:

1. $\mathcal{T}(R)$ bir yol değildir.
2. $\mathcal{T}(R)$ tam graf değildir.
3. $\mathcal{T}(R)$ bir yıldız değildir.
4. $\mathcal{T}(R)$ bir döngüdür $\Leftrightarrow R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
5. $\mathcal{T}(R)$ iki parçalı graftır $\Leftrightarrow$ R ya tamlık bölgesi ya $\mathbb{Z}_4$ ya $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ya da $\mathbb{Z}_2[x]$ / 〈 x^2dir [16].

Tanım 3.23

R değişmeli halkasının total grafının tümleyen grafı $\overline{\mathcal{T}(\mathrm{R})}$ ile gösterilsin.

$\overline{\mathcal{T}(\mathrm{R})}$ basit ve yönsüz bir graftır. $\overline{\mathcal{T}(\mathrm{R})}$ ‘deki iki farklı nokta x ve y komşudur gerek ve yeter şart $x + y \in Reg\ (R)$ olmasıdır.

R' ye karşılık gelen birim grafın R' den elde edilen komaksimal grafın alt grafı olduğu gözlemlenmektedir. Başka bir ifade ile $\overline{\mathcal{T}(\mathrm{R})}$ $ve\ R'$nin komaksimal grafı arasında bir ilişki yoktur. Örneğin $\mathbb{Z}$ halkası $\overline{\mathcal{T}(\mathbb{Z})}$’de 2, 4’e komşu iken $\mathbb{Z}$ nin komaksimal grafıda değildir. Ayrıca $\mathbb{Z}$’nin komaksimal grafında 1, -1’e komşu iken $\overline{\mathcal{T}(\mathbb{Z})}$’de değildir [16].

Toplam çizgenin tümleyeninin cinsi ve genellemesi

Toplam çizgenin $\overline{T_\Gamma(R)}$ tümleyeni, tepe noktası olarak R ile basit yönsüz bir çizgedir ve $x + y \in Reg(R)$ [6]' da $\overline{T_\Gamma(R)}$ olmak üzere iki farklı tepe noktası x, y bitişiktir. Bir R halkasının G(R) ile gösterilen birim çizgesi [24], R'nin tüm elemanlarını köşeler olacak şekilde ayarlayarak ve x ve y farklı köşelerini sadece $x + y \in U(R)$ ise bitişik olacak şekilde tanımlayarak elde edilen çizgedir. Halka sonluysa, $\overline{T_\Gamma(R)}$ birim çizgesinden başka bir şey değildir. Sonsuz bir halka olması durumunda, G (R), $\overline{T_\Gamma(R)}$ 'nin bir alt çizgesidir, gerekli uygun bir alt çizge değildir [13].

Örneğin, $R = \mathbb{Q}[x](+)\frac{\mathbb{Q}_{(x)}}{\mathbb{Q}_{[x]}}$ halkasını düşünün.

O halde R, $U(R) = Reg\ (R)$ ile sonsuzdur ve dolayısıyla $\overline{T_\Gamma(R)}$ = G(R).

Açıklama 3.24

R sonlu, değişmeli bir halka olsun. O zaman aşağıdaki şartlar doğrudur:

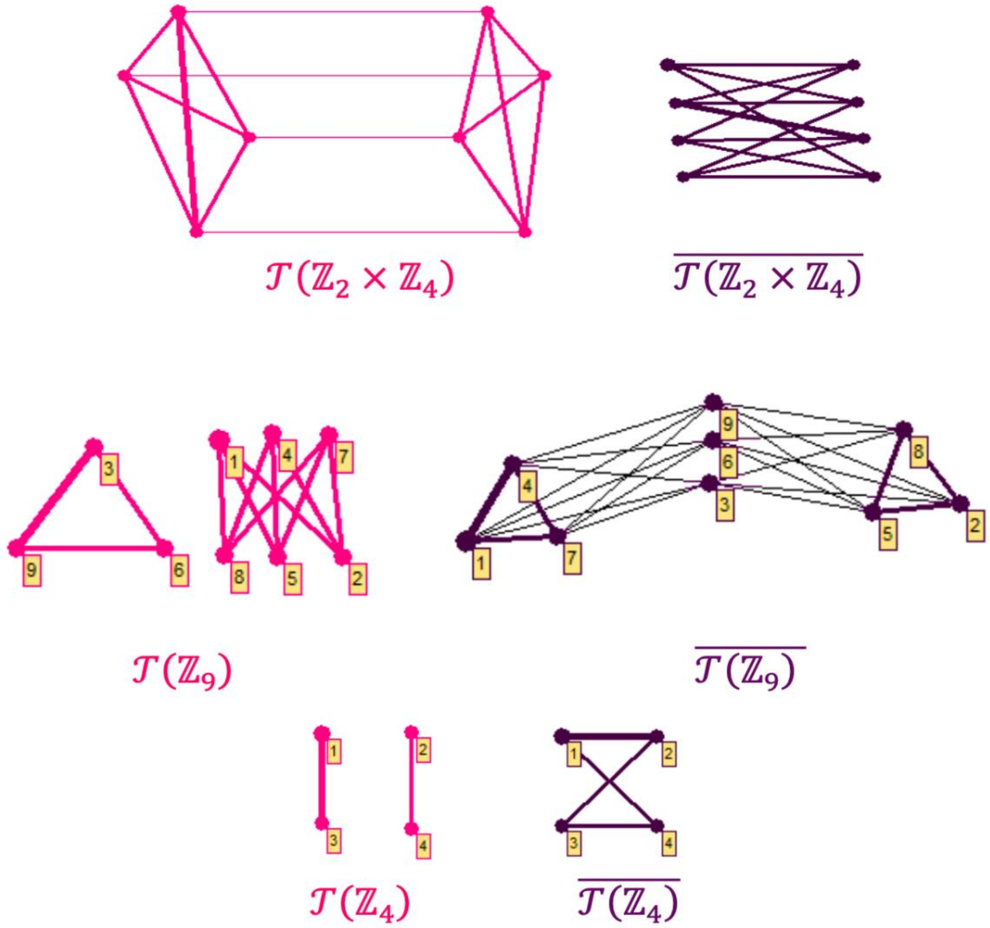
1. $\overline{\mathcal{T}(\mathrm{R})}$ izole noktaya sahip değildir.

2. R bir tamlık bölgesi değilse o zaman $\overline{\mathcal{T}(\mathrm{R})}$,$|R| - 1$ dereceli bir noktaya sahip değildir.

3. $\overline{\mathcal{T}(\mathrm{R})}$,$d_{(a)}$ = $|R| - 1$ olan bir $m \in R$ noktasını içerir gerek ve yeter koşul R bir cisimdir ve $a = -a$ olmasıdır [16].

Örnek 3.25

R değişmeli halkalarla $\overline{\mathcal{T}(\mathrm{R})}$ grafını inceleyelim:



Şekil 3.5. Total ve total olmayan graf örnekleri

$\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_9$ ve $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ halkalarının total tümleyen graflarında hiçbir izole nokta yoktur. Bu halkalar tamlık bölgesi olmadığı için hiçbir noktanın derecesi $|R| - 1$ değildir.

Son yıllarda toplam halka çizgesi üzerine birçok makale yayınlanmıştır. $G = (V, E)$ bir çizge olsun. G'nin herhangi iki köşesi arasında bir yol varsa, G bağlantılıdır. Aksi halde G bağlantısızdır. Diğer bir durumda G'nin iki köşesi aynı değilse G'nin tamamen bağlantısız olduğu söylenebilir. G'nin x ve y köşeleri için, x'ten y'ye bir yol var ise x'ten y'ye giden en kısa yolun uzunluğu $d(x, y)$ ile gösterilir. Ayrıca x ve y arasında yol yoksa $d(x, y) = 0$ ve $d(x, y) = \infty$ tanımlanır. G nin çapı $çap(G) = sup(d(x, y): x, y \in V(G))$'dir. $gr(G)$ ile gösterilen G'nin çevresi, ($gr(G) = \infty$, G hiç döngü içermiyorsa) içindeki döngünün uzunluğudur. G ve H çizgelerinin birbirine izomorfik olduğu söylenir. G≅H olarak yazılır. Eğer birebir denklik varsa;

$f : V(G) \to V(H)$ öyle ki G'nin her x ve y köşesi için $x, y \in E(G)$ ancak ve ancak $f(x)f(y) \in E(H)$ isedir.

G'nin her bir kenarının bir kez alt bölümlere ayrılmasıyla oluşturulan çizgesi $S(G)$ ile belirtin. Yani G'nin her bir kenarı 2 uzunluğunda bir yolla değiştirilir. Bir G, G^2çizgesinin karesinin, köşe kümesi $V(G^2) = V(G)$ ve kenar kümesi $E(G^2) = E(G) \cup \{uv: d_G(u, v) = 2\}$ olan çizgedir [17].

Lemma 3.26

Toplam çizge T (G), S (G)'nin karesine izomorfiktir. u, *T(G)*'nin bir tepe noktası olsun. u, G'deki bir tepe noktasına karşılık gelirse, buna v-tepe denir. Aksi takdirde u, G'deki bir kenara karşılık gelir, o zaman buna e-tepe denir. T (G) tanımından, u, G'deki xy kenarına karşılık gelen bir e-tepe olduğunda u'nun yalnızca iki v-köşesine bitişiktir x ve y ve u' nun diğer tüm bitişik köşeleri e-köşelerdir. U, bir v-tepe olduğunda ve G'de b'ye bitişik olduğunda, o zaman u, T (G) 'de b ve ω'ye bitişiktir; burada ω, G'deki ub kenarına karşılık gelen bir e-tepe noktasıdır. Böylece, u bir v-tepe olduğunda $deg_{T(G)}u = 2deg_G$u ve u G'deki xy kenarına karşılık gelen bir e-tepe olduğunda $deg_{T(G)}u = deg_G x + deg_G y'$dir. G'de maksimum dereceye sahip bir tepe noktası aynı zamanda T (G) 'de maksimum derecenin bir tepe noktası olacaktır. Δ_1 Maksimum G derecesini ve Δ maksimum T (G) derecesini ifade eder. Dolayısıyla $\Delta = 2\Delta_1$'dir [13].

Tanım 3.27

G grafında her bir noktadan sadece bir kere geçen bir yol varsa iki nokta arasındaki bu yola Hamilton yolu denir. G'nin tüm noktalarını kapsayan bir alt grafı döngü oluşturuyorsa bu alt grafa G' nin bir Hamilton döngüsü denir. Hamilton döngüsü içeren bir grafa ise Hamilton graf denir [13].

Teorem 3.28

$\lambda_{2,1}(T(G)) \leq 1/2\ \Delta^2 + \Delta$

Kanıt

T (G) için Algoritma 2.1 ile elde edilen en büyük I etiketine sahip bir tepe noktası x olsun. Tanımdan [13];

$I_1 = \{i: 0 \leq i \leq l - 1\ ve\ d\ (x,y) = 1\ bazı\ y \in S_i\ için\}$,

$I_2 = \{i: 0 \leq i \leq l - 1\ ve\ d\ (x,y) = 2, bazı\ y \in S_i\ için\}$,

$\overline{I_2} = \{i: 0 \leq i \leq l - 1\ ve\ d\ (x,y) \leq 2\ bazı\ y \in S_i\ için\}$,

$\overline{I_3} = \{i: 0 \leq i \leq l - 1\ ve\ d\ (x,y) \geq 3\ her\ y \in S_i\ için\}$

Açıktır ki $|\overline{I_2}| + |I_3| = l$.

Herhangi bir $i \in I_3, x \notin F_i$ için. Aksi takdirde S_i∪{x} F_i' nin 2-kararlıdır ve bu da S_i seçimiyle çelişmektedir. Yani, S_{i-1}'deki bazı y tepe noktası için $d\ (x,y) = 1$, yani, $i - 1 \in I_1$. Bu $|I_3| \leq |I_1|$ anlamına gelir.

Dolayısıyla $l = |\overline{I_2}| + |I_3| \leq |\overline{I_2}| + |I_1| \leq 2|I_1| + |I_2|$.

L'yi bulmak için, $\Delta(T\ (G))$ açısından $2|I_1| + |I_2|$ tahmin etmek yeterlidir. Açıkçası, $|I_1| \leq \Delta$. Sonra $|I_2|$ 'yi değerlendireceğiz.

Durum 1: x'in T (G) 'nin bir v-tepe noktası olduğunu varsayalım. x' den uzaklık 2 olan tüm köşeleri iki küme böler: $A = \{v: d\ (v,x) = 2$ ve v bir v-tepe$\}$ ve $B = \{u: d\ (u,x) = 2$ ve u bir e-tepe noktasıdır$\}$. A'daki herhangi bir v için, v aynı zamanda

G'deki x'ten 2'ye uzaklıkla karşılık gelen tepe noktasıdır. Bu nedenle, A kümesindeki köşe sayısı en fazla $\Delta_1(\Delta_1 - 1)$'dir.

U, B'de bir e-tepe ise ve G'deki yz kenarına karşılık geliyorsa, o zaman y (veya z), T (G)'de x'e bitişiktir.

Ve B kümesinde y (veya z) 'ye bitişik en fazla $deg_G y - 1$ (ya da $deg_G z - 1$) köşeleri vardır. Böylece, B kümesinde tepe noktası sayısı en çok $\Delta_1(\Delta_1 - 1)$. Yani x'den uzaklığı 2 olan köşe sayısı $|A| + |B| \leq 2\Delta_1 (\Delta_1 - 1)$ = 1/2 Δ^2- Δ.

Durum 2: x'in $T(G)$ 'nin bir e-tepe noktası olduğunu ve G'deki ab kenarına karşılık geldiğini varsayalım. X'den uzaklık 2 olan tüm köşeleri iki kümeye bölerr: $A = \{v: d(v,x) = 2$ *ve v bir v-tepe}* ve $B = \{u: d(u,x) = 2$ *ve u bir e-tepe noktasıdır*$\}$. A'daki herhangi bir v için, v, a veya b'ye bitişiktir. $a, b \notin A$.

Dolayısıyla,
A kümesindeki köşe sayısı en fazla $(deg_G a - 1) + (deg_G b - 1) \leq 2(\Delta_1 - 1)$.

Eğer w bir e-tepe ve $d(w,x) = 1$ ise, w, $T(G)$ 'de a (veya b)' ye bitişiktir. Böylece b kümesinde w'ye bitişik olan en çok $deg_{G(T)} w - deg_G a - 1 (yada\ deg_{T(G)} w - deg_G b - 1)$köşeler vardır.

C_1 = {w: d (w, x) = 1, *w* bir e-tepe olsun ve T (G) 'de a'ya komşu olsun},

ve C_2= {w: d (w, x) = 1, *w* bir e-tepedir ve T (G) 'de b'ye bitişiktir}.

Dolayısıyla, B kümesindeki köşe sayısı;

$$\sum_{w_1 \in C_1} \deg_{T(G)} w_1 - \deg_D a - 1) + \sum_{w_2} (\deg_{T(G)} w_2 - \deg_G b - 1$$

$$\leq \sum_{w_1 \in C_1} (\Delta_1 -) + \sum_{w_2 \in C_2} (\Delta_1 - 1)$$

$$= (\deg_G a - 1)(\Delta_1 - 1) + (\deg_G b - 1)(\Delta_1 - 1)$$
$$\leq 2(\Delta_1 - 1)^2.$$

Yani x'den uzaklığı 2 olan köşe sayısı:

$$|A| + |B| \leq 2(\Delta_1 - 1) + 2(\Delta_1 - 1)^2 = 1\frac{1}{2}\Delta^2 - \Delta$$

O halde, $|I_2| \leq max\left\{\frac{1}{2}\Delta^2 - \Delta, \frac{1}{2}\Delta^2 - \Delta\right\} = \frac{1}{2}\Delta^2 - \Delta$

Böylelikle, $\lambda_{1,2}\big(T(G)\big) \leq I \leq 2|I_1| + |I_2| \leq 2\Delta + \left(\frac{1}{2}\Delta^2 - \Delta\right) = \frac{1}{2}\Delta^2 + \Delta$ dir.

$\frac{1}{2}\Delta^2 + \Delta \leq \Delta^2$ *için* $\Delta \geq 2$ olduğundan Griggs ve Yeh varsayımı toplam çizgeler için doğrudur [3] sonucuna göre, çap 2 çizgesinin tamamlayıcısı G bir Hamilton yoluna sahipse, $\lambda_{2,1}(G) = |V(G)| - 1$. Aşağıdaki teorem, bir çizgenin Hamiltoniyen olması için yeterli bir durumu göstermektedir [13].

Teorem 3.29

G minimum derece δ ile bir çizge olsun. Eğer $\delta \geq |V(G)|/2$, sonra G bir Hamilton döngüsü vardır [13].

3.1. Toplam Çizgenin Çapı ve Çevresi

Bu bölümde, komütatif bir halkanın toplam çizgesinin çevresi ve çapı sunulmaktadır. Her şeyden önce, komütatif bir halkanın toplam çizgesindeki her köşenin derecesi hakkında tartışıyoruz. Aşağıdaki gözlem H.R. Maimani ve arkadaşlarına bağlıdır [18].

Lemma 3.1.1

R'nin sonlu bir komütatif halka ve Z(R)'nin R'deki tüm sıfır bölenlerin kümesi olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur [18]:

(i) *Eğer* $2 \in Z(R)$ *ise o halde* $deg(v) = |Z(R)| - 1$ *için* $v \in V(T\Gamma(R))$;

(ii) *Eğer* $2 \notin Z(R)$ *ise o halde* $deg(v) = |Z(R)| - 1$ *için* $v \in Z(R)$ *ve* $deg(v) = |Z(R)|$ *her tepe noktası için* v $\notin Z(R)$. Daha sonra, $T_\Gamma(R)$ çapı ile ilgilenilir. $T_\Gamma(R)$ çalışmasının, Z(R) 'nin bir R ideali olup olmadığına bağlı olarak doğal olarak iki duruma ayrılır. Aşağıdaki teorem, Z(R) R'nin bir ideali olduğunda R'nin toplam çizgesini tamamen karakterize eder [18].

Teorem 3.1.2

R, Z(R)'nin R'nin ideali olacak şekilde komütatif bir halka olsun ve $|Z(R)| = \lambda$ ve $|R/Z(R)| = \mu$.

O halde ; $\begin{cases} K_\lambda, \underbrace{K_{\lambda,\lambda} \cup K_{\lambda,\lambda} \cup K_{\lambda,\lambda} \cup K_{\lambda,\lambda} \cup \ldots K_{\lambda,\lambda} \cup}_{\left(\frac{\mu-1}{2}\right) adet} & \text{ise } 2 \notin Z(R) \end{cases}$

$K_\lambda \cup \underbrace{K_\lambda \cup K_\lambda \cup K_\lambda \ldots K_\lambda}_{(\mu-1)\text{adet}}$ $\quad ise\ 2 \in Z(R)$ olur

Dolayısıyla, eğer Z(R) R'nin bir ideali ise, o zaman $T_\Gamma(R)$ bağlantısı kesilir ve böylece çap $(T_\Gamma(R)) = \infty$. Aşağıdaki sonuç, $T_\Gamma(R)$'nin $Reg_\Gamma(R)$ alt çizgesinin çapını göstermektedir [13].

Sonuç 3.1.3

R, Z (R) R'nin bir ideali olacak şekilde komütatif bir halka olsun. O halde;

(i) $çap(Reg_\Gamma(R))$= 0 *ancak ve ancak* $R \cong \mathbb{Z}_2$;

(ii) çap$(Reg_\Gamma(R))$= 1 ancak ve ancak, ya $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_2$ ve $R \cong \mathbb{Z}_2$ (yani $R/Z(R) \cong Z\_2$ ve $|Z(R)| \geq 2$), ya da $R \cong \mathbb{Z}_3$;
(iii) çap$(Reg_\Gamma(R))$= 2 ancak ve ancak $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_3$ ve$R \cong \mathbb{Z}_3$ (yani, $R/Z(R) \cong \mathbb{Z}_3$ ve $|Z(R)| \geq 2$);

(iv)Aksi taktirde, çap$(Reg_\Gamma(R)) = \infty$.

Bir sonraki sonuç, $T_\Gamma(R)$ çevresinin açık bir tanımını verir [13].

Sonuç 3.1.4

R, Z (R) R'nin bir ideali olacak şekilde komütatif bir halka olsun.

O halde [13];

(i) $gr(T_\Gamma(R))$ = 3 *ancak ve ancak* $|Z(R)| \geq 3$;

(ii) $gr(T_\Gamma(R))$ = 4 *ancak ve ancak* $2 \notin Z(R)$ *ve* $|Z(R)| = 2$;

(iii)*Aksi taktirde,* $gr(T_{\Gamma}(R)) = \infty$.

Bir sonraki teorem, Z(R) R'nin bir ideali olmadığında, $T_{\Gamma}(R)$ 'nin bağlılığı için bir karakterizasyon sağlar [13].

Teorem 3.1.5

Z(R), R'nin değişmeli bir halka olmasına izin verin, öyle ki Z(R) R'nin ideali değildir [13].

O halde, $T_{\Gamma}(R)$,ancak ve ancak $(Z(R)) = R$ ise bağlıdır. Özellikle, Z(R) R'nin ideali olmayacak şekilde sonlu bir değişmeli halka ise R, o zaman $T_{\Gamma}(R)$ bağlanır [13].

Teorem 3.1.6

R, Z (R) R'nin ideali olmayacak ve $T_{\Gamma}(R)$ bağlanacak şekilde komütatif bir halka olsun. $n \geq 2$'nin en az tamsayı olsun, böylece bazı $z_1, \ldots, z_n \in Z(R)$için $R = (z_1, \ldots, z_n)$ olur. O zaman $çap(T_{\Gamma}(R)) = n$. Özellikle, eğer R sonlu bir komütatif halka ise ve Z(R), R'nin bir ideali değilse, o zaman $çap(T_{\Gamma}(R)) = 2$ [13].

Sonuç 3.1.7

R, Z(R)'nin R'nin ideali olmadığı şekilde komütatif bir halka olsun ve, $T_{\Gamma}(R)$ 'nin bağlı olduğu varsayılsın. O halde $çap(T_{\Gamma}(R)) = d(0, 1)$ [13].

Sonuç 3.1.8

R, Z(R)'nin R'nin ideali olmadığı şekilde komütatif bir halka olsun ve $T_{\Gamma}(R)$ 'nin bağlı olduğunu varsayalım. O halde $çap(Reg_{\Gamma}(R)) \geq çap(T_{\Gamma}(R))) - 2$ olur. Bir sonraki sonuç, toplam bölüm halkasının toplam çizgenin çapını verir [13].

Teorem 3.1.9

Eğer I, R'de sonlu bir ideal ise, o zaman $T_l(\Gamma\ (R))$ sonsuz bir klik içerir, ancak ve ancak $T_l(\Gamma\ (R))$ sonsuz bir kliğe sahipse [18].

Kanıt

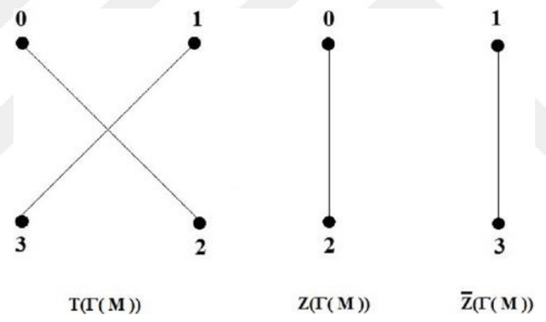
Eğer R sonsuz bir klik C'ye sahipse, $\bar{C}$'nin homomorfik görüntüsü C, T_l *(R ($\bar{R}$)) 'de* R^{-}= R / I olan bir kliktir ve I sonlu olduğundan, $\bar{C}$ hala sonsuzdur.

C'nin sonsuz bir klik olduğunu varsayıyoruz.

Eğer x adj y için, $x , y \in C$ ise, o zaman $r x + yr \in Z_l (R)$ ile x ve y'den farklı sıfır olmayan bir $r \in Z_l (R)$ vardır.

Bu, $(r + I) (x + I) + (y + I) (r + I) \in Z_l (R / I)$ verir.

Böylece $(x + I)\, adj\, (y + I)$. Bu nedenle $\bar{C}$ bir kliktir. Tersine, $\{\bar{x_l}\}$ $\bar{C}$ de bir klik olsun. O zaman $\{x_i\}$ 'nin C'de bir klik olduğunu doğrulamak kolaydır [13].



Şekil 3.6. $T(\Gamma(M))$, $Z(\Gamma(M))$, $\bar{Z}(\Gamma(M))$,

Genelleştirilmiş toplam çizgelerin cinsi

Bu bölümde, değişmeli halkaların genelleştirilmiş toplam çizgelerinin cinsi hakkında tartışıyoruz. Üç ana genelleme türü vardır:

(1) (Abbasi ve Habibi [19])

R değişmeli bir halka olsun ve I onun düzgün ideali olsun. S(I), R'nin I'e asal olmayan tüm elemanlarının kümesi olsun; yani, $S(I) = \{\alpha \in R : r\alpha \in I \; bazı \; r \in R \setminus I \;\; için\}$

R'nin I'e göre toplam çizgesi, T (Γ_I(R)) ile gösterilen, R'nin tüm elemanlarının köşeleri olduğu yönsüz çizgedir ve farklı x, y ∈ R için, x ve y köşeleri bitişiktir ancak ve ancak

$x + y \in S(I)$ ise. $I = \{0\}$ durumunda, T (Γ_I(R)) çizgesi, R'nin toplam çizgesidir.

(2) (Barati ve arkadaşları [20])

R, değişmeli bir halka ve S, R'nin çarpımsal olarak kapalı bir alt kümesi olsun. $\Gamma_S(R)$ ile gösterilen basit bir çizge tanımlayın, tüm R öğelerinin köşeleri olduğu ve iki farklı köşe noktası olan $x, y \in R$, ancak ve ancak $x + y \in S$ ise bitişiktir. $S = Z(R)$ alırsak, $\Gamma_S(R) = T_\Gamma(R)$olur.

(3) (Anderson ve Badawi [13])

R değişmeli bir halka olsun ve H, R \ H'nin doymuş, çarpımsal olarak kapalı bir R alt kümesi olacak şekilde R'nin boş olmayan uygun bir alt kümesi olsun. R'nin genelleştirilmiş toplam çizgesi, köşeler olarak R'nin tüm öğelerini içeren basit $GT_H(R)$ çizgesidir ve iki ayrı köşe noktası x ve y, ancak ve ancak $x + y \in H$ ise bitişiktir. $H = Z(R)$ olduğunda, $GT_H(R)$R'nin toplam çizgesidir.

Toplam çizgenin tamamlayıcısının cinsi ve genellemesi

Toplam çizgenin $\overline{T_\Gamma(R)}$ tamamlayıcısı, tepe noktası olarak R ile basit yönsüz bir çizgedir ve $x + y \in Reg(R)$ [6]' da $\overline{T_\Gamma(R)}$ olmak üzere iki farklı tepe noktası x, y bitişiktir. Bir R halkasının G(R) ile gösterilen birim çizgesi, R'nin tüm elemanlarını köşeler olacak şekilde ayarlayarak ve x ve y farklı köşelerini sadece $x + y \in U(R)$ ise bitişik olacak şekilde tanımlayarak elde edilen çizgedir. Halka sonluysa, $\overline{T_\Gamma(R)}$ birim çizgesinden başka bir şey değildir. Sonsuz bir halka olması durumunda, G (R), $\overline{T_\Gamma(R)}$ 'nin bir alt çizgesidir, gerekli uygun bir alt çizge değildir [13].

Örneğin, $R = \mathbb{Q}[x](+)\frac{\mathbb{Q}(x)}{\mathbb{Q}[x]}$ halkasını düşünün.

O halde R, $U(R) = Reg(R)$ ile sonsuzdur ve dolayısıyla $\overline{T_\Gamma(R)}$ = G(R).

Tam graftan total graf oluşturulması

K_n n köşeli bir tam çizge ve T(K_n) de tam çizgenin total çizgesi olsun. T($\boldsymbol{K_n}$) nin dört parametrisini (n, k, λ, μ) hesaplamak için güçlü ve düzenli çizge olan

$\mathrm{T}(K_n)$ için formül üretilmiştir. $\mathrm{T}(K_n)$ grafının özdeğerleri, spektrumu, enerjisini hesaplayalım.Tam bir grafın total grafı $\mathrm{T}(K_n)$ ile gösterilir ve $\mathrm{T}(K_n)$ nin bitişiklik matrisi $\mathrm{A}(\mathrm{T}(K_n))$ ile gösterilir [13].

Lemma 3.1.10

Tam bir graftan elde edilen toplam grafın köşeleri $\frac{n(n+1)}{2}$ dir [21].

Lemma 3.1.11

Tam bir grafın toplam grafı $2.(n-1)$ düzenlidir [21].

Lemma 3.1.12

Tam bir grafın total grafının kenarları $\frac{n(n^2-1)}{2}$ dir [21].

Kanıt

Lemma2 den tam grafın total grafı $2.(n-1)$ düzenlidir. Dolayısıyla $2.(n-1)$ kenarı vardır. Tam bir grafın total grafının her bir köşesine rastlar ve $\frac{n(n+1)}{2}$ tane köşesi vardır.(Lemma1 den).Dolayısıyla tüm köşelerinin derecelerinin toplamı $2.(n-1) \times \frac{n(n+1)}{2}$ dir.Ayrıca bir kenar bir köşe iki tepe noktası sağlar. O halde kenar sayısı $\frac{2.(n-1)\times\frac{n(n+1)}{2}}{2}$ olup $\frac{n.(n^2-1)}{2}$ kenarı vardır.

Tam bir graftan elde edilen toplam grafın spektrumu ve enerjisi Grafın bitişiklik matrisi aracılığı ile elde edilen özdeğerler kümesine grafın spektrumu denir. Genel gösterim şöyledir.

$$Spec(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \ \lambda_2 \dots \\ n_1 \ n_{2\dots} \end{pmatrix}$$

Tam bir grafın toplam grafının güçlü ve düzenli olduğunu söylemiştik. Güçlü düzenli bir grafın bitişiklik matrisi düzenli bir grafın tam olarak üç özdeğeri vardır. Dolayısıyla tam bir grafın toplam grafıda üç özdeğere sahiptir [21].

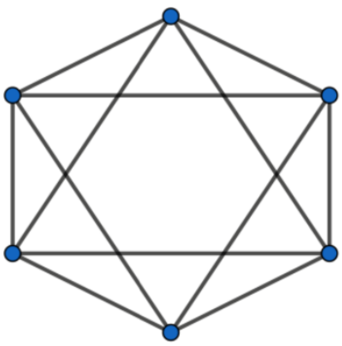
Total Grafın Enerjisi

$n > 2$ olan tam bir grafın K_n grafının enerjisi

$$E\big(T(K_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

$E\big(T(K_n)\big) = 2.(n-1) + n.(n-3) + \frac{(n-2).(n+1)}{2}|-2| = 2.(n-2):(n+1)$dir [13].

K_3 ün total grafı göz önünde bulundurulduğunda;



Şekil 3.7. $T(K_3)$.

Bitişiklik matrisi şöyledir.

$$A\ (\mathrm{T(k_3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$T(K_3)$ total grafı 6 köşeye sahiptir.4 ü düzenlidir.$\lambda = 2, \mu = 4$.

Özdeğerler hesaplandığında

$\lambda^{3\cdot}(\lambda+2)^2.(\lambda-4) = 0$
$\lambda = 0, \lambda = -2\ ve\ \lambda = 4$

Spektrumu hesaplandığında $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Enerji hesaplandığında

$E\big(T(K_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 0 + |-2| + |-2| + |4| = 8$ elde edilir [13].

4. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Günümüzde bilim ve teknoloji dünyası için spektral graf teori, graflara ilişkin matrislerin spektral özellikleri ile graf yapısı arasındaki ilişkileri incelemeye ve anlamlandırmaya çalışan bir öneme sahiptir.Özellikle halka ve grup gibi cebirsel yapılarla inşa edilen grafların spektrası oldukça ilgi çekici sonuçlar verebilir.

Yapılan literatür çalışması sonucu değişmeli bir R halkası üzerine tanımlı sıfır bölen graf, total graf ve graf yapıları ve parametrilerinin sonuçları incelenmiştir.

Total graf spektrası üzerine çok fazla Türkçe çalışma olmaması sebebiyle bu tez ülkemizde Türkçe kaynak olarak kullanılması açısından önem arz etmektedir. Bu tezde verilen tanım, kavram ve teoremler birçok cebir ve graf kitaplarında bulunmasına karşılık lisans ve lisansüstü öğrencilerinin yararlanması amacıyla bilimsel disiplin gözetilerek verilmiştir. Genel olarak konu ile alakalı yeni ve açık problemlerin ispatlanabilmesi oldukça zor olmasına karşın imkansız değildir.

KAYNAKLAR

1. Söyler, H., Fendoğlu, E. “Route optimization of Malatya Metropolitan Municipality pesticide vehicles”. *Alphanumeric Journal, 6* (1), 13-24, 2018.

2. Biggs, N., Lloyd, E., Wilson, R. *Algeraic graph theory*. Oxford, Oxford University Press, 1974.

3. Weyl, H. *Symmetry* (Vol. 104). Princeton University Press, 2015.

4. Seker, S. E. “Çizge Teorisi (Graph Theory)”. YBS Ansiklopedi, 2(2), 17-29, 2015.

5. https://adatis.co.uk/business-insights-with-graph-theory-introduction-to-graph-theory-and-algorithms/

6. Gurjar, M. Applications of Euler’s Theorem.

7. Ahmed, H. “Graph routing problem using Euler’s theorem and its applications”. *Engineering Mathematics*, 3 (1), 1-5, 2019.

8. Gupta, P., Sikhwal, O. “A study of vertex-edge coloring techniques with application”. *International Journal of Core Engineering & Management*, 1 (2), 27-32, 2014.

9. Çiftçi, F. Çizgeleri boyamak [Tez, Anadolu Üniversitesi], 2001-2012 Güz Dönemi.

10. Vasudev, C. *Graph theory with applications*. New Age International Publishers.

11. Seker, S. E. Çizge Teorisi (Graph Theory). *YBS Ansiklopedi*, 2(2), 17-29, 2015.

12. Shao, Y., Li, H., Gu, X., Yin, H., Li, Y., Miao, X., ... Chen, L. Distributed graph neural network training: A survey. ACM Computing Surveys, 2022.

13. Anderson, D.F., Badawi, A. “The total graph of a commutative ring”, *J. Algebra*, 320, 2706–2719, 2008.

14. Khashyarmanesh, K., Khorsandi, M.R.” Projective total graphs of commutative rings”, *Rocky Mountain J. Math*, 43 (4), 1207–1213, 2013.

15. Akbari, S., Kiani, D., Mohammadi, F., Moradi, S., "The Total Graph and Regular Graph of a Commutative Ring", *Journal of Pure and Applied Algebra*, (213), 2224-2228, 2009.

16. Asir, T., Chelvam, Tamizh, T., "On the Total Graph and Its Complement of a Commutative Ring", *Communications in Algebra*, (41), 3820-3835, 2013.

17. Harary, F. *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

18. Maimani, H.R., Wickham, C., Yassemi, S. “Rings whose total graphs have genus at most one”, *Rocky Mountain J. Math*, 42, 1551–1560, 2012.

19. Abbasi, A., Habibi, S. “The total graph of a commutative ring with respect to proper ideals”, *J. Korean Math. Soc*., 49, 85–98, 2012.

20. Barati, Z., Khashyarmanesh, K., Mohammadi, F., Nafar, K. “On the associated graphs to a commutative ring”, *J. Algebra Appl*., 11 (2), 1250037, 2012.

21. Zhang, P., Chartrand, G. Introduction to graph theory. Tata McGraw-Hill, 2, (2006), 2-1.