T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q -FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Tezi Hazırlayan
Ünal KAYA

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Şubat 2012
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q -FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Tezi Hazırlayan
Ünal KAYA

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Şubat 2012
NEVŞEHİR

Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ danışmanlığında **Ünal KAYA** tarafından hazırlanan **"*q*-Fark Operatörünün Spektral Analizi"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

22.02.2012

JÜRİ:

Başkan : **Prof. Dr. İhsan SOLAK**

Üye : **Doç. Dr. Murat ERDURAN**

Üye : **Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ**

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 29.02.2012 tarih ve 2012-18/1 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

29/02/2012

Prof. Dr. Selçuk KERVAN
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve desteğini hep gördüğüm danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ’a, Nevşehir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nün değerli öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

q -FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Ünal KAYA
Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Şubat 2012
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

ÖZET

Bu tez çalışmasında öncelikle konunun tarihsel gelişimi anlatılmıştır. Daha sonra spektral analizin temel tanım ve teoremleri hatırlatılmış ve sınır koşullarındaki disipatif q-fark operatörünün tanımı verilerek, bir disipatif operatör kurmak için gerekli tanım ve teoremler verilmiş ve kısaca q-fark operatörü ve fark denklemlerinden bahsedilmiştir.

q-fark operatörünün sınır değer problemi ele alınmış ve bu probleme uygun maksimal disipatif operatör oluşturulmuştur. q-fark operatörünün sınır değer problemi ve disipatif operatörün özvektörler ve asosye vektörler sistemi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kendine eş operatör, disipatif operatör, q-fark operatörü, maksimal operatör

SPECTRAL ANALYSIS OF *q*-DIFFERENCE OPERATOR

Ünal KAYA
Nevşehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, February 2012
Thesis Supervisor : Assist. Prof. Dr. Aytekin ERYILMAZ

ABSTRACT

In this thesis study, firstly the historical progress of the subject is considered. Then some basic definitions and main theorems of spectral analysis are recalled. In addition essential definitions and theorems of conditional of boundary a dissipative *q*-difference operator are given to construct dissipative operator. *q*-difference operator and difference equations are investigated.

At the end, boundary value problem of *q*-difference operator is studied and maximal dissipative operator is constructed. Furthermore, eigenvectors and associated vectors of the dissipative operator and boundary value problem of *q*-difference operator are investigated.

Keywords: Self-adjoint operator, dissipative operator, *q*-difference operator, maximal operator

İÇİNDEKİLER

KISALTMA ve SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
Δ	: Fark operatörü
E	: Kaydırma (shift) operatörü
(y_k)	: y_k dizisi
$\bar{z}$	: z karmaşık sayısının eşleniği
$D(A)$	: A operatörünün tanım kümesi
$\overline{D(A)}$	: $D(A)$ kümesinin kapanışı
A^*	: A operatörünün eş (adjoint) operatörü
$W_n(U,V)$	: U ile V çözümlerinin wronskiyeni
ℓy	: Fark ifadesi
L	: Maksimal operatör
L_0	: Minimal simetrik operatör
$def\, L_0$	: L_0 operatörünün defekt sayısı
A_h	: Maksimal disipatif operatör
$\widetilde{A}$	: A operatörünün genişlemesi
$\operatorname{Im}\lambda$	: λ karmaşık sayısının sanal (imajiner) kısmı
$\mathcal{N}_\lambda$	: A operatörünün defekt uzayı
$\dim \mathcal{N}_\lambda$	: A operatörünün defekt uzayının boyutu
H	: Hilbert uzayı
$\lVert A \rVert$	: A sınırlı operatörünün normu
$\lVert x \rVert$	: x vektörünün normu
$(.,.)$	: İç çarpım
$\Delta_{\frac{1}{2}} f(x)$	: Bölünmüş fark operatörü
$D_{q^{\frac{1}{2}}} f(x)$	: Bölünmüş q-fark türevi
$D_q y(x)$	: q-fark türevi
D_q	: q-fark operatörü

$D_q^m y(x)$: m. mertebeden q-fark türevi

$D_q W(x)$: q-Lioville-Ostrogradsky formülü

D_0 : L_0 operatörünün tanım bölgesi

$\hat{\chi}_n$: A_h operatörünün özvektörleri

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Ayrık zamanlarda meydana gelen doğa olaylarını formüle eden bağıntılar olarak ortaya çıkan fark denklemleri, diferansiyel denklemlerin ayrık benzeri (discrete analojisi) biçimindedir. Eski zamanlardan beri fark denklemlerinin (Adi fark ve q-fark denklemlerinin) incelenmesine matematikçiler ve fizikçiler tarafından büyük ilgi duyulmaktadır. Adi fark için, Atkinson 1964, Kelley and Peterson 1991, Elaydi 1996 ve q-fark için Jackson 1910, Carmichael 1912, Mason 1915, Adams 1928/29, Trijitzinsky 1933, Bohner and Peterson 2001, Kac and Cheung 2002, Gaspard Bangerezako 2008 vb. gibi kaynaklarda bu denklemler son zamanlarda çeşitli uygulamalarından dolayı daha yoğun bir şekilde incelenmeye başlanmıştır.

q-fark denklemleri bir taraftan diferansiyel denklemleri diskritleştirerek (ayrıklaştırarak) yaklaşık çözerken, diğer taraftan da birçok pratik olayın matematiksel modelleri olarak ortaya çıkmaktadırlar. Adi fark ve q-fark denklemleri kolaylıkla algoritmalaştırılarak, bilgisayarda çözmek için çok uygundurlar.

q-fark denklemlerine fizik, mühendislik, teknik bilimlerde sıkça karşılaşılmış olup, bu denklemler uygulamalı bilimcilerin çalıştıkları bir dal olarak ortaya çıkmıştır. q-fark denklemlerinin çözümlerini elde etmeye çalışmak uzun uğraşlar gerektirdiğinden çözümlerin spektral analizi hakkında bilgiler veren çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar, q-fark operatörünün özfonksiyonlarının açılımlarının bulunmasına yani spektral analizine ilişkindir.

Tezde ikinci mertebeden self-adjoint olmayan (disipatif), sınır koşullarındaki spektral parametreli q-fark operatörü ele alınmıştır. Daha sonra sınır değer problemi tarafından oluşturulan q-fark operatörünün özdeğer ve özvektörleri belirlenmiştir. Böylece q-fark operatörünün spektral özellikleri incelenmiştir.

2.BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1. (Lineer Uzay veya Vektör Uzayı) $V \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve K herhangi bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V ye K üzerinde lineer uzay denir.

A) $(V, +)$ cebirsel yapısı değişmeli bir gruptur. Yani,

G1) $\forall x, y \in V$ için $x + y \in V$ dir. (Kapalılık özelliği)

G2) $\forall x, y, z \in V$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir. (Birleşme özelliği)

G3) $\forall x \in V$ için $x + 0 = 0 + x = x \in V$ olacak şekilde bir tek $0 \in V$ vardır.

G4) $\forall x \in V$ için $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak şekilde bir tek $-x \in V$ vardır.

G5) $\forall x, y \in V$ için $x + y = y + x$ dir. (Değişme özelliği)

B) $x, y \in V$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1) $\alpha . x \in V$ dir.

L2) $\alpha(x + y) = \alpha . x + \alpha . y$ dir.

L3) $(\alpha + \beta). x = \alpha . x + \beta . y$ dir.

L4) $(\alpha . \beta)x = \alpha(\beta . x)$ dir.

L5) $\forall x \in V$ için $1. V = V$ olacak şekilde $1 \in K$ vardır. Burada $1, K$ cisminin birim elemanıdır.

$K = \mathbb{R}$ olması halinde V ye reel, $K = \mathbb{C}$ olması halinde V ye kompleks lineer uzay denir [1].

Tanım 2.2. Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir [2].

Tanım 2.3. X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longrightarrow \|x\| \tag{2.1}$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için,

$$\begin{aligned} &\textbf{N1)}\ \|x\| = 0 \langle = \rangle\, x = \theta \\ &\textbf{N2)}\ \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \\ &\textbf{N3)}\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{aligned} \tag{2.2}$$

özelliklerini sağlıyorsa, X üzerinde bir norm denir ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir [3].

Tanım 2.4. $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere X bir vektör uzayı (lineer uzay) olsun.

$$(.,.) : XxX \longrightarrow K \tag{2.3}$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar ise $(.,.)$ ye X üzerinde bir iç çarpım, $\big(X, (.,.)\big)$ ikilisine de iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) denir [2].

i) $\forall x \in X$ için $(x, x) \geq 0$ ve $(x, x) = 0 \langle = \rangle\, x = \theta$
ii) $\forall x, y \in X$ için $(x, y) = \overline{(y, x)}$
iii) $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
iv) $\forall x, y, z \in X$ için $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

Tanım 2.5. $\big(X, (.,.)\big)$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun. x vektörünün normu,

$$\|x\| = (x, x)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j|^2\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

olarak tanımlanır. Bu norma göre $\big(X, (.,.)\big)$ iç çarpım uzayı bir normlu vektör uzayı olur [2].

Tanım 2.6. Bir $(X,(.,.))$ iç çarpım uzayı,

$$\|x\| = (x,x)^{1/2} \tag{2.5}$$

normuna göre tam ise, yani $(X,(.,.))$ içindeki her Cauchy dizisi yakınsak ise, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [2].

Tanım 2.7. H Hilbert uzayının herhangi bir $D \subseteq H$ lineer alt uzayı ve bir L operatörü için,

$$L: D \subseteq H \longrightarrow H \tag{2.6}$$

dönüşümü verilsin. Eğer her $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ ve her $x_1, x_2 \in D$ için,

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 L x_1 + \alpha_2 L x_2 \tag{2.7}$$

sağlanıyorsa L dönüşümüne lineer operatör, D ye ise L operatörünün tanım bölgesi denir ve $D(L)$ ile gösterilir. L operatörünün değer kümesi de $Im(L)$ veya $R(L)$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.8. H Hilbert uzayında tanımlanan bir lineer A operatörü için, $\forall x \in H$ olmak üzere,

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \tag{2.8}$$

olacak şekilde bir c sayısı varsa A ya sınırlı operatör denir. Bu c sayılarının en küçüğüne A sınırlı operatörünün normu denir ve $\|Ax\|$ ile gösterilir.

$$\|A\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{2.9}$$

eşitliği yardımı ile A sınırlı operatörünün normu hesaplanır [2].

Teorem 2.9. Sınırlı her lineer A operatörü süreklidir [2].

Tanım 2.10. $\forall x \in H$ için $(Ax, x) \geq 0$ ise A ya pozitif lineer operatör denir [2].

Tanım 2.11. (Bir Operatörün Özdeğer ve Özvektörü) H Hilbert uzayında A, lineer bir operatör olsun. A operatörünün tanım bölgesinde bulunan $f \neq 0$ vektörü için,

$$Af = \lambda f \tag{2.10}$$

denklemi sağlanıyorsa, λ kompleks sayısına A operatörünün özdeğeri denir. f vektörüne de, A operatörünün λ ya karşılık gelen özvektörü (özfonksiyonu) denir. λ_1 bir özdeğer ise $Af = \lambda_1 f$ dir. Bu denklemin çözümleri olan vektörler, H da bir lineer alt uzay oluştururlar. $H\lambda_1$ ile gösterilen bu alt uzayın boyutuna λ_1 özdeğerinin katı denir ve $\dim H\lambda_1$ ile sembolize edilir. $H\lambda_1$ uzayına özaltuzay denir. $\dim H\lambda_1 = 1$ ise, λ_1 özdeğerine sade (basit) özdeğer denir [4].

Tanım 2.12. H Hilbert uzayı ise ve A, H de bir operatör olmak üzere A nın tanım kümesi $D(A)$, H kompleks Hilbert uzayında yoğun, yani $\overline{D(A)} = H$ olsun. $f \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, A^* g) \tag{2.11}$$

eşitliğini sağlayan A^* operatörüne A nın adjoint operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $g \in H$ vektörler kümesine A^* ın tanım kümesi denir ve $D(A^*)$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.12 den aşağıdaki özellikler elde edilir.

i) $(A^*)^* = A$

ii) $(A + B)^* = A^* + B^*$

iii) $(AB)^* = B^* A^*$

iv) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*, \quad \lambda \in K$

v) $\|A^*\| = \|A\|$, (A sınırlı ise)

Tanım 2.13. Eğer $A = A^*$ ise A operatörüne self adjoint (kendine eş) operatör denir [5].

Tanım 2.14. $A : D(A) \longrightarrow H$ lineer bir operatör ve $\overline{D(A)} = H$ yani $D(A)$, H de yoğun olmak üzere her $f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag) \tag{2.12}$$

ise, $A \subset A^*$ ise A ya simetrik operatör denir. Adjoint operatör kapalı olduğundan $A \subset A^*$ bağıntısı simetrik operatörün kapanabilir olduğunu ifade eder [2].

Tanım 2.15. (İzometrik Operatör) $D(A)$, A operatörünün tanım bölgesi olmak üzere her $x, y \in D(A)$ için,

$$\left(A_x, A_y\right) = (x, y) \tag{2.13}$$

ise A ya izometrik operatör denir [2].

Tanım 2.16. Bir A izometrik operatörünün tanım ve değer kümesi H Hilbert uzayı ise A ya üniter operatör denir. H üzerinde, A tersi alınabilir bir operatör olmak üzere $A^* = A^{-1}$ veya $A^*A = AA^* = I$ ise A ya ortogonal veya üniter operatör denir [2].

Tanım 2.17. (Bir Operatörün Genişlemesi) $f \in D(A)$ için $\tilde{A}f = Af$ ve $D(\tilde{A}) \supset D(A)$ ise $\tilde{A}$ operatörüne A operatörünün genişlemesi denir. A ya ise $\tilde{A}$ operatörünün kısıtlaması denir [2].

Tanım 2.18. (Simetrik Operatörün Defekt Uzayları) A, H Hilbert uzayında simetrik bir operatör, λ keyfi bir kompleks sayı, R_λ ve $R_{\bar{\lambda}}$ sırasıyla, $(A - \lambda I)$ ve $\left(A - \bar{\lambda} I\right)$ operatörlerinin değer kümesi olmak üzere,

$$\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{H} \Theta R_\lambda \tag{2.14}$$

$$\mathcal{N}_{\bar{\lambda}} = \mathcal{H} \Theta R_{\bar{\lambda}} \tag{2.15}$$

uzaylarına A operatörünün defekt uzayları denir [2].

Lemma 2.19. Bir A operatörünün maksimal simetrik olması için gerekli ve yeterli koşul A operatörünün diğer simetrik genişlemelerinin bulunmamasıdır [2].

Lemma 2.20. Her self adjoint (kendine eş) A operatörü maksimal simetrik operatördür fakat tersi doğru değildir [2].

Tanım 2.21. (İndis Defekt) $Im\,\lambda > 0$ ve

$$m = \dim \mathcal{N}_{\lambda} \tag{2.16}$$
$$n = \dim \mathcal{N}_{\bar{\lambda}} \tag{2.17}$$

olmak üzere, (m, n) ikilisine A operatörünün indis defekti adı verilir [2].

Lemma 2.22. Bir kapalı simetrik operatörünün kendine eş (self-adjoint) olması için gerek ve yeter koşul bu operatörün indis defektinin $(0,0)$ olmasıdır [2].

Tanım 2.23. (Disipatif Operatör) A lineer operatörünün $D(A)$ tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olmak üzere her $f \in D(A)$ için,

$$Im(Af, f) \geq 0 \tag{2.18}$$

ise, A operatörüne disipatif operatör denir. Her $f \in D(A)$ için,

$$Im(Af, f) \leq 0 \tag{2.19}$$

ise, A operatörüne akretif operatör denir [6].

Tanım 2.24. Bir disipatif operatörün diğer disipatif genişlemeleri yoksa maksimal disipatif adını alır [6].

Teorem 2.25. Her disipatif operatör maksimal bir disipatif genişlemeye sahiptir [7].

Tanım 2.26. ($\boldsymbol{\ell^2}$ uzayı) Elemanları reel veya kompleks sayılardan oluşan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty \tag{2.20}$$

olacak şekilde $f = \{x_n\}_1^{\infty}$ ve $g = \{y_n\}_1^{\infty}$, ... dizilerinin uzayı ℓ^2 ile gösterilir. $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sayılarına f vektörünün bileşenleri denir. ℓ^2 uzayındaki iç çarpım,

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlanır [8].

3. BÖLÜM

q - FARK OPERATÖRÜ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde tez çalışmasına zemin hazırlayacak önemli tanımlara, teoremlere ve uygulamalara yer verilmiştir. Ayrıca incelenilen denklemlerin çözümlerinin yapısını belirleyen faktörler üzerinde durulmuştur.

3.1. Fark Fonksiyonu

Tanım 3.1. h, herhangi bir sabit; x h de eşit aralıklı bağımsız bir değişken ve y ise x bağımsız değişkeninin bir fonksiyonu olmak üzere,

$$\Delta y(x) = y(x + h) - y(x) \tag{3.1}$$

biçiminde ifade edilen $\Delta y(x)$ fonksiyonuna y nin birinci farkı denir.

Buradaki, Δ sembolü, y fonksiyonu üzerinde işlem yaparak yeni bir Δy fonksiyonunu üreten bir fark operatörü ve h sayısı da fark aralığıdır. h , x deki değişimi ifade eder ve genellikle Δx ile gösterilir. Bu, (3.1) de $y(x) = x$ alınarak aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\Delta y(x) = \Delta x = (x + h) - x \ , \quad \Delta x = h \tag{3.2}$$

Örnek 3.2. Aşağıda $h = 1$ alınarak çeşitli fonksiyonların $\Delta y(1)$ ve $\Delta y(2)$ farkları bulunmuştur.

i) $y(x) = 3x - 2$ olsun.

$$\Delta y(1) = \Delta y(1 + 1) - y(1) = y(2) - y(1) = 4 - 1 = 3$$

$$\Delta y(2) = y(2 + 1) - y(2) = y(3) - y(2) = 7 - 4 = 3$$

$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x) = [3(x+1) - 2] - [3x - 2] = 3$ olduğundan, $y(x) = 3x - 2$ fonksiyonunun $h = 1$ için $\Delta y(x)$ farkı her zaman 3 e eşittir

ii) $\mathrm{y(x) = x^2 + 1}$

$$\Delta\mathrm{y}(1) = \mathrm{y}(2) - \mathrm{y}(1) = 5 - 2 = 3$$

$$\Delta\mathrm{y}(1) = \mathrm{y}(2) - \mathrm{y}(1) = 5 - 2 = 3$$

$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x) = [(\mathrm{x}+1)^2] - [\mathrm{x}^2 + 1] = 2x + 1$ olduğundan, bu örnekte de $h = 1$ için $\Delta y(x)$ farkının her zaman $2x + 1$ e eşit olduğu görülmektedir.

3.1.1. Δ ve *E* Operatörleri

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k \tag{3.3}$$

biçiminde tanımlanan operatöre Δ operatörü denir.

$$y_{k+1} - y_k \tag{3.4}$$

ifadesine y_k nın farkı denir. Δ birinci fark operatörüdür. İkinci fark operatörü

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \Delta\Delta \\ \Delta^2 y_k &= \Delta(\Delta y_k) \\ &= \Delta(y_{k+1} \\ &= \Delta y_{k+1} - \Delta y_k \\ &= (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) \\ &= y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k \end{aligned} \tag{3.5}$$

biçiminde ifade edilir. Genel olarak,

$$\Delta(\Delta^n y_k) = \Delta^{n+1} y_k \tag{3.6}$$

dır. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\Delta^m \Delta^n y_k = \Delta^n \Delta^m y_k = \Delta^{m+n} y_k \tag{3.7}$$

dir. $m = 0$ olduğunda,

$$\Delta^0 \Delta^n y_k = \Delta^{n+1} y_k = \Delta^n \Delta^0 y_k \tag{3.8}$$

dır. Δ^0 ın birim operatör olduğu görülür. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \Delta(x_k + y_k) &= \Delta x_k + \Delta y_k \\ \Delta(c y_k) &= c\Delta y_k \\ \Delta(c_1 x_k + c_2 y_k) &= c_1 \Delta x_k + c_2 \Delta y_k \end{aligned} \tag{3.9}$$

olduğundan Δ lineer bir operatördür. Şimdi E operatörünü ele alalım. $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} E^p y_k &= y_{k+p} \\ E y_k &= y_{k+1} \\ E^2 y_k &= y_{k+2} \end{aligned} \tag{3.10}$$

E operatörü shift (kaydırma) operatörüdür. $p, q \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$E^p(c_1 x_k + c_2 y_k) = c_1 x_{k+p} + c_2 y_{k+p} \tag{3.11}$$

ve

$$E^p E^q y_k = E^q E^p y_k = E^{p+q} y_k \tag{3.12}$$

dır. Δ ve E nin tanımlarından,

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k \tag{3.13}$$

ve

$$\begin{aligned} E^p y_k &= y_{k+1} \Delta y_k \\ &= E y_k - y_k \\ &= (E - 1) y_k \end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\Delta = E - 1 \tag{3.15}$$

veya

$$E = \Delta + 1 \tag{3.16}$$

dır [9].

3.1.2. Temel Fark Operatörleri

x_k ve y_k, k nın fonksiyonları olsun.

Çarpımın Farkı

$$\begin{aligned}\Delta(x_k y_k) &= x_{k+1}y_{k+1} - x_k y_k \\ &= x_{k+1}y_{k+1} - x_{k+1}y_k + x_{k+1}y_k - x_k y_k \\ &= x_{k+1}(y_{k+1} - y_k) + y_k(x_{k+1} - x_k) \\ &= x_{k+1}\Delta y_k + y_k \Delta x_k\end{aligned} \tag{3.17}$$

Farklar için Leibnitz Teoremi

$$\begin{aligned}\Delta^n(x_k y_k) = x_k \Delta^n y_k + \binom{n}{1}\,(\Delta x_k)(\Delta^{n-1} y_{k+1}) \\ + \binom{n}{2}(\Delta^2 x_k)(\,\Delta^{n-2} y_{k+2}) + \ \dots + \binom{n}{1}\,(\Delta x_k)(\Delta^{n-1} y_{k+1})\end{aligned} \tag{3.18}$$

Bölümün Farkı

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{x_k}{y_k}\right) &= \frac{x_{k+1}}{y_{k+1}} - \frac{x_k}{y_k} = \frac{x_{k+1}y_k - y_{k+1}x_k}{y_k y_{k+1}} \\ &= \frac{x_{k+1}y_k - x_k y_k + x_k y_k - y_{k+1}x_k}{y_k y_{k+1}} \\ &= \frac{y_k(x_{k+1} - x_k) - x_k(y_{k+1} - y_k)}{y_k y_{k+1}}\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$= \frac{y_k \Delta x_k + x_k \Delta y_k}{y_k y_{k+1}} = \frac{y_k \Delta x_k + x_k \Delta y_k}{y_k y_{k+1}}$$

Sonlu Toplamın Farkı

$$S_k = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_k \tag{3.20}$$

olsun.

$$S_{k+1} = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_k + y_{k+1} \tag{3.21}$$

olur.

$$\Delta S_k = S_{k+1} - S_k = y_{k+1} \tag{3.22}$$

dır.

3.1.3. Δ^{-1} Operatörü ve Toplam Analizi

$$\Delta(\Delta^{-1} y_k) = y_k \tag{3.23}$$

olacak şekilde $\Delta^{-1} y_k$ tanımlayalım.

$$z_k = \Delta^{-1} y_k \tag{3.24}$$

olsun.

$$\begin{aligned} \Delta z_k &= z_{k+1} - z_k \\ &= \Delta(\Delta^{-1} y_k) \\ &= y_k \end{aligned} \tag{3.25}$$

olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} z_{k+1} - z_k &= y_k \\ z_k - z_{k-1} &= y_{k-1} \\ z_{k-1} - z_{k-2} &= y_{k-2} \\ &\vdots \\ z_2 - z_1 &= y_1 \end{aligned} \tag{3.26}$$

taraf tarafa toplanırsa,

$$z_{k+1} - z_1 = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_k \tag{3.27}$$

veya

$$z_{k+1} = z_1 + \sum_{r=1}^{k} y_r \tag{3.28}$$

ve

$$z_k = z_1 + \sum_{r=1}^{k} y_r \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.28) eşitliğinde (3.23) yerine yazılırsa,

$$\Delta^{-1}y_k = \sum_{r=1}^{k-1} y_r + z_1 \tag{3.30}$$

elde edilir. Burada z_1 sabit sayıdır. Genel olarak,

$$\Delta^{-n}y_k = \Delta^{-1}(\Delta^{-n+1}y_k) \tag{3.31}$$

dır [10].

3.2. *q*-Fark Denklemleri

3.2.1. Giriş

$\mathbb{Z}$ tam sayıların $\mathbb{C}$ de kompleks sayıların kümesini göstermek üzere $y:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun $x\in\mathbb{Z}$ noktasında fark türevi (adi fark türevi) $\Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$ olarak tanımlanır. *m*. mertebeden fark denklemi genel olarak, y aranan fonksiyon olmak üzere,

$$F\big(x, y(x), \Delta y(x), \dots, \Delta^m y(x)\big) = 0, \quad x\in\mathbb{Z} \tag{3.32}$$

şeklinde verilir. Bu denklemi,

$$\Phi\big(x, y(x), y(x+1), \dots, y(x+m)\big) = 0, \quad x\in\mathbb{Z} \tag{3.33}$$

şeklinde de yazabiliriz. Şimdi $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi yerine, $q>1$ bir sabit reel sayı olmak üzere, $q^{\mathbb{Z}} = \{q^k : k\in\mathbb{Z}\}$ kümesini alalım. $y:\ q^{\mathbb{Z}}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu için bu fonksiyonun $x\in q^{\mathbb{Z}}$ noktasında q-fark türevi,

$$D_q y(x) = \frac{y(qx)-y(x)}{(q-1)x}, \qquad x\in q^{\mathbb{Z}} \tag{3.34}$$

olarak tanımlanır. *m*. mertebeden q-fark denklemi,

$$F\left(x, y(x), D_q y(x), \dots, D_q^m y(x)\right) = 0, \quad x\in q^{\mathbb{Z}} \tag{3.35}$$

$$\Phi\big(x, y(x), y(qx), \dots, y(q^m x)\big) = 0, \quad x\in q^{\mathbb{Z}} \tag{3.36}$$

şeklinde verilir [11].

Şimdi de $0<|q|<1$ durumu için q-fark denkleminin tanımına bakalım. $x(s)$, s değişkenine bağlı bir fonksiyon, q^s ise q nun s değişkenine bağlı düzgün bir şekli ve $(q^s+q^{-s})/2$, $s\in\mathbb{Z}$, $0<|q|<1$, q nun düzgün olmayan şekli olmak üzere;

$$Df\big(x(s)\big) = \frac{f\left(x\left(s+\frac{1}{2}\right)\right) - f\left(x\left(s-\frac{1}{2}\right)\right)}{x\left(s+\frac{1}{2}\right) - x\left(s-\frac{1}{2}\right)} \tag{3.37}$$

yazılabilir. Bu türevin temel özelliği n. dereceden bir polinomu $(n-1)$. dereceden polinoma dönüştürmesidir. O halde $x(s)$ fonksiyonunun bölünmüş türevi aşağıdaki birinci eşitliktir [12,13].

$$Df(x)=\frac{d}{dx}f(x) \tag{3.38}$$

$$\Delta_{\frac{1}{2}}f(x)=\Delta f(t)=f(t+1)-f(t)=\left(e^{\frac{d}{dt}}-1\right)f(t);\quad t=x-\frac{1}{2} \tag{3.39}$$

$$D_{q^{\frac{1}{2}}}f(x)=D_qf(t)=\frac{f(qt)-f(t)}{qt-t}=\frac{e^{(q-1)t\frac{d}{dt}}-1}{qt-t};\quad t=q^{-\frac{1}{2}}x \tag{3.40}$$

(3.38) eşitliği $x(s)$ fonksiyonunun bölünmüş türevi, (3.39) ise bölünmüş fark operatörü ve (3.40) eşitliğindeki türev ise birinci mertebeden Askey-Wilson bölünmüş q-fark türevi olarak tanımlanır [14]. O halde,

$$Df\big(x(z)\big)=\frac{f\left(x\left(q^{\frac{1}{2}}z\right)\right)-f\left(x\left(q^{-\frac{1}{2}}z\right)\right)}{x\left(q^{\frac{1}{2}}z\right)-x\left(q^{-\frac{1}{2}}z\right)},\quad x(z)=\frac{z+z^{-1}}{2},z=q^s \tag{3.41}$$

yazabiliriz. Şimdi de q-fark denkleminin genel (kapalı) denklemini yazalım.

$$F\left(x,y(x),D_qy(x),\dots,D_q^ky(x)\right)=0\quad x\in\mathbb{C} \tag{3.42}$$

Buradaki D_q , (3.40) daki türevdir ve Jackson türevi olarak tanımlanır [15].

Yani,

$$D_qf(x)=\frac{f(qx)-f(x)}{qx-x},\ x(s)=q^s,\ s\in\mathbb{Z} \tag{3.43}$$

Burada q-fark denklemi, genel q-denkleminin özel bir halidir.

$$F\left(x,y(x),y(qx),\dots,y(xq^k)\right)=0,\quad x\in\mathbb{C} \tag{3.44}$$

Böylece q reel ve $0<q<1$ olur. Ayrıca q^s, x e bağlı ve $s\in\mathbb{Z}$ dir [16].

Şimdi de q-fark denklemlerinin genel seri çözümlerini bulmak için q-hipergeometrik serilerini verelim.

Tanım 3.2.1. (q-Hipergeometrik Serileri) q-fark denklemlerinin genel seri çözümlerinin şekli aşağıdaki gibi yazılır.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{3.45}$$

Bunların arasında en dikkat çeken,

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \tag{3.46}$$

q^n in bir rasyonel fonksiyonudur. Örneğin,

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i - q^{-n})}{\prod_{i=1}^{s}(\beta_i - q^{-n})(q - q^{-n})} \tag{3.47}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada ${}_r\varphi_s\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s\end{matrix}\middle| q; z\right)$ dizisi şu şekilde gösterilir.

$${}_r\varphi_s\left(\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s\end{matrix}\middle| q; z\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1; q)_k (\alpha_2; q)_k \dots (\alpha_r; q)_k}{(\beta_1; q)_k (\beta_2; q)_k \dots (\beta_s; q)_k} \left[(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}\right]^{1+s-r} \frac{z^k}{(q; q)_k} \tag{3.48}$$

Böylece,

$$\left(a_1, \dots, a_p; q\right)_k = (a_1; q)_k \dots \left(a_p; q\right)_k, \ (a; q)_0 = 1 \ \text{ için,}$$

$$(a; q)_k = (1 - a)(1 - aq)(1 - aq^2) \dots (1 - aq^{k-1}), \qquad k = 1,2, \dots \tag{3.49}$$

yazılır. Bu yüzden bu ifade, hipergeometrik seriler olarak belirtilir [17].

Tanım 3.2.2. (q-Türev Fonksiyonu)

(3.41) deki Jackson Türevi, n. dereceden bir polinomu, $(n-1)$. dereceden polinoma dönüştürür. Bu türev de,

$D_q x^k = \frac{q^k - 1}{q-1} x^{k-1}$ ve $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, x^k$ yazılabilir. O halde,

$$D_q p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{q^{k+1} - 1}{q-1} x^k \tag{3.50}$$

şeklinde elde edilir.

3.2.2. Birinci Mertebeden q-Fark Denklemleri

1.mertebeden q-fark denklemlerinin genel (kapalı) şekli (3.51) veya (3.52) eşitliklerinden biriyle gösterilir.

$$f\left(x, y(x), D_q y(x)\right) = 0 \tag{3.51}$$

$$g\big(x, y(x), y(qx)\big) = 0 \tag{3.52}$$

Burada genel olarak (3.52) denkleminin yerine (3.51) denklemi kullanılacaktır. Genel q-fark denklemlerinin genel bir çözüm yöntemi olsa da, birinci dereceden q-fark denklemleri bazı özel durumlarda da çözülebilir [18].

3.2.2.1. Birinci Mertebeden Lineer q-Fark Denklemi

Şimdi (3.53) q-fark denklemini ele alalım.

$$D_q y(x) = a(x) y(qx) + b(x) \tag{3.53}$$

Bu denklem, değişken katsayılı lineer homojen olmayan q-fark denklemidir. (3.53) denklemi (3.54) denklemine eşdeğerdir.

$$D_q y(x) = a(x) y(x) + b(x) \tag{3.54}$$

Gerçekten (3.54) eşitliğini benzer bir şekilde,

$$D_q y(x) = \tilde{a}(x)y(x) + \tilde{b}(x) \tag{3.55}$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\tilde{a}(x) = a(qx); \quad \tilde{b}(x) = b(qx) \tag{3.56}$$

elde edilir. (3.53) de x yerine $q^{-1}x$ ve q yerine de q^{-1} alınırsa (3.55) denklemi elde edilmiş olur. Örneğin (3.53) denklemine karşılık gelen homojen denklemi ele alalım.

$$D_q y(x) = a(x)y(qx) \tag{3.57}$$

(3.57) deki D_q türevini şu şekilde de gösterebiliriz.

$$y(x) = [1 + (1-q)xa(x)]y(qx) \tag{3.58}$$

(3.58) deki tekrarlama N defa olduğunda,

$$y(x) = y(x_0)\prod_{t=q^{-1}x_0}^{x} [1 + (1-q)ta(t)]$$

$$= y(q^N x)\prod_{i=0}^{N-1} \left[1 + (1-q)xq^i a\left(q^i x\right)\right] \tag{3.59}$$

yazılabilir. Eğer $0 < q < 1$ için, $N \longrightarrow \infty$ ise $q^N \longrightarrow 0$ olur. O halde,

$$y(x) = y(0)\prod_{i=0}^{\infty} \left[1 + (1-q)q^i x a\left(q^i x\right)\right] \tag{3.60}$$

elde ederiz.

Örnek 3.2.3. $a(x) = \frac{q^k - 1}{q-1} . \frac{1}{q^k(x-1)}$, $k \in \mathbb{N}$ olsun. Bu denklemin çözümü,

$$y(x) = y(0)\prod_{i=0}^{\infty} \left[1 + (1-q)q^i x a\left(q^i x\right)\right]$$

$$= y(0)\prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - q^i x\right) = y(0)(x;q)_k$$

şeklindedir. Homojen olmayan (3.53) denklemini düşünelim. Buna göre “sabitlerin değişimi” yöntemine göre,

$$y(x) = c(x)y_0(x) \tag{3.61}$$

yazılır. Burada $y_0(x)$, (3.57) homojen denklemine karşılık gelen bir çözüm ve $c(x)$ de bilinmeyen bir fonksiyondur. (3.61) eşitliği (3.53) den elde edilir ve elde edilen denklemin çözümü şu şekildedir.

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} y_0^{-1}(t)\, b(t) d_q t + c \tag{3.62}$$

Böylece (3.53) ün genel çözümü,

$$y(x) = y_0(x)c + \int_{x_0}^{x} y_0(x)\, y_0^{-1}(t) b(t) d_q t \tag{3.63}$$

şeklindedir. $c = y_0^{-1}(x_0)y(x_0)$ ve $x_0 = 0$ alınırsa, sırasıyla (3.64) ve (3.65) denklemleri elde edilir.

$$c(x) = (1-q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i\, y_0^{-1}\big(q^i x\big) b\big(q^i x\big) + c \tag{3.64}$$

ve

$$y(x) = y_0(x)c + (1-q)x \sum\nolimits_0^{\infty} q^i\, y_0(x) y_0^{-1}\big(q^i x\big) b\big(q^i x\big) \tag{3.65}$$

Buna göre (3.54) denklemine belirsiz yöntem uygulandığında, sabitler bir çözüm belirtir. Yani,

$$y(x) = y_0(x)c + \int_{x_0}^{x} y_0(x)\, y_0^{-1}(qt) b(t) d_q(t) \tag{3.66}$$

veya $x_0 = 0$ için,

$$y(x) = y_0(x)c + (1-q)x \sum\nolimits_0^{\infty} q^i\, y_0(x) y_0^{-1}\big(q^{i+1} x\big) b\big(q^i x\big) \tag{3.67}$$

dir.

3.2.3. Yüksek Mertebeden Lineer q-Fark Denklemleri

3.2.3.1. Genel Yöntem

$$\left[D_{q^{-1}}^{k}+a_1(x)D_{q^{-1}}^{k-1}+\cdots+a_{k-1}(x)D_{q^{-1}}+a_k(x)\right]y(x)=g(x) \qquad (3.68)$$

denklemini ele alalım. (3.68) ifadesini k. mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan lineer q-fark denklemi olarak tanımlayabiliriz. Buradaki homojen denklemi yazalım [19].

$$\left[D_{q^{-1}}^{k}+a_1(x)D_{q^{-1}}^{k-1}+\cdots+a_{k-1}(x)D_{q^{-1}}+a_k(x)\right]y(x)=0 \qquad (3.69)$$

Şimdi,

$$z_1(x)=y(x);\ z_2(x)=D_{q^{-1}}y(x),\ldots,z_k(x)=D_{q^{-1}}^{k-1}y(x) \qquad (3.70)$$

olsun. Buradan,

$$\begin{gathered} D_{q^{-1}}z_1(x)=z_2(x) \\ D_{q^{-1}}z_2(x)=z_3(x) \\ \ldots \\ D_{q^{-1}}z_{k-1}(x)=z_k(x) \\ D_{q^{-1}}z_k(x)=-\big(a_1(x)z_k(x)+\cdots+a_k(x)z_1(x)\big)+g(x) \end{gathered} \qquad (3.71)$$

sistemini elde ederiz. Matris terimlerini,

$$D_q z(x)=A(x)z(qx)+G(x) \qquad (3.72)$$

yazabiliriz. Burada $z(x)=\big(z_1(x),\ldots,z_k(x)\big)^t$ dir. (3.72) denkleminin homojen kısmı $D_q z(x)=A(x)z(qx)$ dir ve $\Phi(x)$ temel matris ve $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_k(x)$ sistemin çözümleri olmak üzere,

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_k(x) \\ D_{q^{-1}}y_1(x) & D_{q^{-1}}y_2(x) & \cdots & D_{q^{-1}}y_k(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{q^{-1}}^{k-1}y_1(x) & D_{q^{-1}}^{k-1}y_2(x) & \ldots & D_{q^{-1}}^{k-1}y_k(x) \end{pmatrix} \qquad (3.73)$$

olur. Böylece (3.72) denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\mathrm{z}(x)=\Phi(x).\mathrm{C}(x) \tag{3.74}$$

Burada $\mathrm{C}(x)=\left(\mathrm{C}_1(x),\dots,\mathrm{C}_\mathrm{k}(x)\right)^\mathrm{t}$ sistemin çözümüdür.

$$\Phi(x).\mathrm{D}_q\mathrm{C}(x)=\mathrm{G}(x) \tag{3.75}$$

sistemi yazılır ve

$$\mathrm{C}(x)=C+(1-q)x\sum\nolimits_0^\infty q^i\,\Phi^{-1}\left(q^ix\right)G\left(q^ix\right) \tag{3.76}$$

olur. (3.68) in genel çözümü şu şekildedir.

$$y(x)=z_1(x)=\sum\nolimits_{i=1}^k C_i(x)\,y_i(x) \tag{3.77}$$

Şimdi de q-fark denklemini alalım.

$$\left[D_q^k+a_1(x)D_q^{k-1}+\dots+a_{k-1}(x)D_q+a_k(x)\right]y(x)=g(x) \tag{3.78}$$

(3.78) in çözümü $\mathrm{z}(x)=\Phi(x).\mathrm{C}(x)$ dir. Burada,

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_k(x) \\ D_qy_1(x) & D_qy_2(x) & \cdots & D_qy_k(x) \\ . & . & . & . \\ D_q^{k-1}y_1(x) & D_q^{k-1}y_2(x) & \dots & D_q^{k-1}y_k(x) \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

$\mathrm{C}(x)$, sistemin çözümüdür.

$$\Phi(qx)D_q\mathrm{C}(x)=h(x) \tag{3.80}$$

$h(x)=\left(0,\dots,0,g(x)\right)^t$ ile

$$\mathrm{C}(x)=C+(1-q)x\sum\nolimits_0^\infty q^i\,\Phi^{-1}\left(q^{i+1}x\right)h\left(q^ix\right) \tag{3.81}$$

elde edilir.

3.2.4. İkinci Mertebeden Lineer q-Fark Denklemi

Diferansiyel veya fark denklemlerinde, ikinci mertebeden q-fark denklemlerinin teori ve uygulamalarının özel bir yeri vardır.

İkinci mertebeden lineer q-fark denklemlerinin genel şekli şu şekildedir [20].

$$a_0(x)D_q^2y + a_1(x)D_qy + a_2(x)y = b(x) \tag{3.82}$$

Bu denklemin homojen kısmını yazalım.

$$a_0(x)D_q^2y + a_1(x)D_qy + a_2(x)y = 0 \tag{3.83}$$

3.2.4.1. Çözüm Yöntemi

Şimdi (3.83) denkleminin normalleştirilmiş basit şeklini yazalım.

$$D_q^2y + a_1(x)D_qy + a_2(x)y = 0 \tag{3.84}$$

Durum 3.2.4. Lineer q-fark denklemlerinin çözüm yöntemine göre (3.84) denkleminin iki tane lineer bağımsız çözümü vardır. Genel olarak ikinci mertebeden bu denklemin a_1 ve a_2 katsayıları değişken olduğundan çözümü bulunamaz. Bunun için denklemin bir çözümü bilindiği zaman, denklemin mertebesi azaltılır ve ikinci çözüm kolaylıkla bulunur. O halde $y_1 = y_1(x)$ çözümü verilsin. Buna göre ikinci çözümü bulalım.

$$y_2 = z(x)y_1(x) \tag{3.85}$$

olsun. Burada $z(x)$ bilinmeyen bir fonksiyondur.
y_1, (3.84) ün bir çözümüdür ve z için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$y_1(q^2x)D_q^2z + \{a_1y_1(qx) + D_q[y_1(qx)] + [D_qy_1](qx)\}D_qz = 0 \tag{3.86}$$

(3.87) deki dönüşümle birlikte (3.86) daki ikinci mertebeden denklemi, birinci mertebeden q-fark denklemine dönüşür.

$$D_qz = t(x) \tag{3.87}$$

Durum 3.2.5. y_2 çözümünü bulmanın bir başka yolu, (3.84) ün birinci çözümü olan y_1 in bilinmesidir. Bu formülü kullanarak (3.84) ü şu şekilde yazabiliriz.

$$y(q^2x) + \tilde{a}_1(x)y(qx) + \tilde{a}_2(x)y(x) = 0 \tag{3.88}$$

Burada $\tilde{a}_1(x) = a_1(q-1)xq - q - 1$ ve $\tilde{a}_2(x) = a_2(q-1)^2x^2q - a_1(q-1)xq + q$ dur. $y_1$ve y_2 (3.88) in çözümüdür. Buna göre,

$$\begin{pmatrix} y(x) & y_1(x) & y_2(x) \\ y(qx) & y_1(qx) & y_2(qx) \\ y(q^2x) & y_1(q^2x) & y_2(q^2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{a}_1(x) \\ \tilde{a}_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.89}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y(x) & y_1(x) & y_2(x) \\ y(qx) & y_1(qx) & y_2(qx) \\ y(q^2x) & y_1(q^2x) & y_2(q^2x) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.90}$$

yazılır. Burada determinantın ilk sütunu ile sonuç karşılaştırılarak denklem (3.84) ü verir.

$$V(qx) = \tilde{a}_2(x)V(x), \tag{3.91}$$

$V(x) = y_1(x)y_2(qx) - y_2(x)y_1(qx)$ şeklindedir.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ D_qy_1(x) & D_qy_2(x) \end{vmatrix} = y_1(x)D_qy_2(x) - y_2(x)D_qy_1(x) \tag{3.92}$$

Buradan,

$$V(x) = (q-1)x\,W(x) \tag{3.93}$$

elde edilir. (3.91) kullanılarak,

$$D_qW(x) = [(q-1)xa_2(x) - a_1]W(x) \tag{3.94}$$

$q \longrightarrow 1$ için (3.94) diferansiyel denklemindeki Lioville-Ostrogradsky formülüne dönüştürülebilir. Bu nedenle (3.94) denklemine, q-Lioville-Ostrogradsky formülü olarak bakabiliriz. Diğer yandan, eğer (3.94) deki y_1 bilinerek, ikinci çözüm olan y_2 birinci mertebeden q-fark denklemini sağlar, dolayısıyla ikinci mertebeden denkleminin çözümleri bulunabilir.

Durum 3.2.6. (3.83) denklemi seriler yardımıyla da çözülebilir. Burada $x \in \mathbb{C}$ değişkeni analitik fonksiyonlarla ilgilidir. Böylece (3.83) deki denkleminin kökeninin analitik fonksiyonlar olduğu görülmektedir. Buradan yakınsak kuvvet serisini şu şekilde yazabiliriz.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n; \;\; g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n \tag{3.95}$$

Buradaki (3.83) denkleminin analitik çözümlerini bulmak için aşağıdaki teoremi kullanabiliriz.

Teorem 3.2.7. İkinci mertebeden q-fark denklemi,

$$D_q^2 y + f(x) D_q + g(x) y = 0 \tag{3.96}$$

$f(x)$ ve $g(x)$ analitik fonksiyonlarıyla birlikte orijindedir ve orijinde iki lineer bağımsız çözüme sahiptir.

Durum 3.2.8. Sabit katsayılı yüksek mertebeli q-fark denklemlerinin çözüm yöntemi (3.83) deki ikinci mertebeden denklemler için de uygulanabilir. (3.84) denklemindeki a_1 ve a_2 katsayılarını alalım. Bu durumda,

$$D_q^2 y + a_1 D_q y + a_2 y = 0 \tag{3.97}$$

$e_q(\lambda x)$ fonksiyonu (3.97) nin bir çözümü olsun. O halde,

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \tag{3.98}$$

şeklinde (3.97) nin karakteristik denklemini yazabiliriz. Böylece a ve b (3.98) in bir kökü olsun. Buna göre,

$$(D_q - b)(D_q - a)y = (D_q - a)(D_q - b)y = 0 \tag{3.99}$$

olur. Burada iki durum söz konusudur.

i) Kökler farklıdır. Bu durumda (3.97) nin iki bağımsız çözümü vardır.

$$y_1(x) = e_q(ax); \quad y_2(x) = e_q(bx) \tag{3.100}$$

ii) (3.98) bir çift köke sahiptir. O halde,

$$\left(D_q - a\right)^2 y = D_q^2 + a_1 D_q y + a_2 y = 0 \tag{3.101}$$

olur ve $a_1 = -2a,\ a_2 = a^2$ şeklindedir. Burada birinci çözüm $y_1 = e_q(ax)$ ve ikinci çözüm de $y_2 = z(x)y_1(x)$ olur.

Böylece (3.101) ifadesini,

$$y_1(qx)D_q^2 z(x) + \left[a_1 y_1(qx) + D_q y_1(qx)\right]D_q z(x) + D_q[y_1(qx)]D_q z(qx) = 0 \tag{3.102}$$

yazabiliriz ve $D_q z(qx) = t(x)$ dönüşümü uygulanırsa,

$$y_1(qx)D_q t(x) + \left[a_1 y_1(qx) + D_q y_1(qx)\right]t(x) + D_q[y_1(qx)]t(qx) = 0 \tag{3.103}$$

elde edilir. $y_1(x)$ değeri göz önüne alınarak, $D_q e_q(\lambda x) = \lambda e_q(\lambda x)$ ile (3.103) ifadesini daha basit şekilde yazabiliriz.

$$D_q t(x) + [a_1 + a]t(x) + aqt(qx) = 0 \tag{3.104}$$

ya da

$$D_q t(x) - at(x) + aqt(qx) = 0 \tag{3.105}$$

yazılır. (3.105) in çözümünü bulmak için,

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n\, x^n \tag{3.106}$$

ifadesini yazabiliriz ve katsayılar için yineleme denklemi,

$$\frac{q^{n+1}}{q-1} t_{n+1} + a(q^{n+1} - 1)t_n = 0 \tag{3.107}$$

yazılır. Buradan çözüm,

$$t_n = (1-q)^n a^n t_0 \tag{3.108}$$

şeklindedir. Diğer denklemden,

$$D_q z(x) = t(x) = t_0 \sum_{n=0}^{\infty} (1-q)^n\, a^n x^n \tag{3.109}$$

olur. $z(x) = \sum_0^\infty z_n\, x^n$ ve bu,

$$z_{n+1}\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = t_0(1-q)^n a^n \tag{3.110}$$

ya da

$$z_n = t_0\frac{\big((1-q)a\big)^n}{a(1-q^n)} = t_0\frac{(1-q)^{n-1}a^{n-1}}{1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}}, n = 1,2,\ldots \tag{3.111}$$

olur. z_0 keyfi bir sayı ve böylece,

$$y_2 = z(x) = y_1(x) \tag{3.112}$$

birlikte aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$z(x) = z_0 + t_0 x + t_0(1-q)\sum_{2}^{\infty}\frac{(1-q)^{n-2}a^{n-1}}{1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}}x^n \tag{3.113}$$

Burada $q \longrightarrow 1$ ve $z(x) \longrightarrow z_0{+}t_0 x$ için sabit katsayılı ikinci mertebeden fark denkleminin y_1 ve y_2 gibi çözümlerini karakteristik denklem yardımıyla bulabiliriz.

3.3. Homojen q-Fark Operatörü

3.3.1. Giriş

$q > 1$ sabit bir reel sayı, $q^{\mathbb{Z}} = \{q^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots , q^{-2}, q^{-1}, q^0, q^1, q^2, \dots\}$ ve $y(x)$ de reel veya kompleks değerli fonksiyonu $q^{\mathbb{Z}}$ üzerinde tanımlı ise bu durumda, D_q q-fark operatörü şu şekilde ifade edilir [11].

$$D_q y(x) = \frac{y(qx) - y(x)}{(q-1)x} \, , x \in q^{\mathbb{Z}} \tag{3.114}$$

Burada $D_q y(x)$ fonksiyonuna da $y(x)$ fonksiyonunun q-fark türevi denir. Yüksek mertebeden q-farklar, D_q operatörünü ard-arda uygulamakla elde edilir. Örneğin, ikinci mertebeden q-fark operatörü şu şekildedir.

$$\begin{aligned} D_q^2 y(x) &= D_q\left(D_q y(x)\right) = D_q\left(\frac{y(qx) - y(x)}{(q-1)x}\right) \\ &= \frac{\frac{y(q^2x) - y(qx)}{(q-1)qx} - \frac{y(qx) - y(x)}{(q-1)x}}{(q-1)x} \\ &= \frac{y(q^2x) - y(qx) - q\big(y(qx) - y(x)\big)}{(q-1)^2 qx} \\ &= \frac{y(q^2x) - (1+q)y(qx) + qy(x)}{(q-1)^2\, qx^2} \end{aligned} \tag{3.115}$$

D_q operatörünün temel özellikleri aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 3.3.1. Şu formüller doğrudur:

(a) $D_q\big(y(x) + z(x)\big) = D_q y(x) + D_q z(x)$;

(b) $D_q\big(cy(x)\big) = cD_q y(x)$ eğer c bir sabit ise ;

(c) $D_q\big(y(x)z(x)\big) = \left(D_q y(x)\right) z(x) + y(qx) D_q z(x)$

$= y(x) D_q z(x) + \left(D_q y(x)\right) z(qx)$;

İspat 3.3.1.

(a) $D_q\big(y(x)+z(x)\big) = \frac{y(qx)+z(qx)-\left(y(x)+z(x)\right)}{(q-1)x} = \frac{y(qx)-y(x)+z(qx)-z(x)}{(q-1)x}$

$$= \frac{y(qx)-y(x)}{(q-1)x} + \frac{z(qx)-z(x)}{(q-1)x} = D_q y(x) + D_q z(x);$$

(b) $D_q\big(cy(x)\big) = \frac{cy(qx)-cy(x)}{(q-1)x} = c\,\frac{y(qx)-y(x)}{(q-1)x} = cD_q y(x).$

(c) $D_q\big(y(x)z(x)\big) = \frac{y(qx)z(qx)-y(x)z(x)}{(q-1)x}$

$$= \frac{y(qx)z(qx)-y(qx)z(x)+y(qx)z(x)-y(x)z(x)}{(q-1)x}$$

$$= \frac{y(qx)[z(qx)-z(x)]+[y(qx)-y(x)]\,z(x)}{(q-1)x}$$

$$= y(qx)\,\frac{z(qx)-z(x)}{(q-1)x} + \frac{y(qx)-y(x)}{(q-1)x}\,z(x)$$

$$= y(qx)D_q z(x) + \Big(D_q y(x)\Big)\,z(x).$$

Örnek 3.3.2.

(a) Sabitin q-fark türevi sıfıra eşittir:

$D_q c = \frac{c-c}{(q-1)x} = 0.$

(b) $D_q x = \frac{qx-x}{(q-1)x} = \frac{(q-1)x}{(q-1)x} = 1$ (3.116)

(c) $D_q x^2 = \frac{(qx)^2-x^2}{(q-1)x} = \frac{q^2x^2-x^2}{(q-1)x} = \frac{(q-1)(q+1)x^2}{(q-1)x} = (q+1)x.$

şeklinde olur.

4. BÖLÜM

q-FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

4.1. Giriş

Bu bölümde, $\ell^2(\mathbb{N})$ Hilbert uzayında ikinci mertebeden self-adjoint olmayan (disipatif), sınır koşullarındaki spektral parametreli q-fark operatörü ele alınmıştır [23,25,27]. Ayrıca, sınır değer problemi tarafından oluşturulan operatörün özdeğer ve özvektörleri belirlenmiştir. (4.4) ve (4.6) denklemlerinin spektral parametreli sınır değer problemleri üzerine önemli çalışmalar vardır.

Bu tür problemler birçok makalede belirli fiziksel süreçler ile bağlantılı olarak ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir [24,25,27].

Burada [22,29] da yer alan q-türev hesabının tanımına bakacağız. Ayrıca, aynı özdeğer problemine sahip olan bir operatör, $\ell^2(\mathbb{N})$ de oluşturulan uzayın tanımı ve sınır değer probleminin terimleri incelenmiştir. Böylece sınır değer problemi tarafından üretilen operatörün özdeğer ve özvektörleri elde edilmiştir.

$y_0, y_1, y_2, \ldots$ kompleks sayılarından oluşan her $y = \{y_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ dizisi için bileşenleri $(\ell y)_n$ olan ℓy dizisi $(n \in \mathbb{N})$ olmak üzere,

$$(\ell y)_n = (a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + q a_n y_{n+1}), \qquad n \geq 1 \qquad (4.1)$$

biçiminde tanımlanır.

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + qa_n y_{n+1} = 0\,, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{4.2}$$

denkleminin $y = y(x)$ ve $z = z(x)$ çözümlerinin Wronskiyeni,

$$W(y,z) = a(x)qx\{y(x)z(qx) - y(qx)z(x)\} \tag{4.3}$$

biçiminde tanımlanır.

$$a\left(\frac{x}{q}\right)y\left(\frac{x}{q}\right) + b(x)y(x) + qa(x)y(qx) = 0, \qquad x \in q^{\mathbb{Z}} \tag{4.4}$$

denklemindeki $x = q^n (n \in \mathbb{Z})$ ifadesini,

$a_n = a(q^n),\ b_n = b(q^n)$ ve $y_n = y(q^n) \quad n \in \mathbb{Z}$ için,

$$W_n(y,z) = [y,\bar{z}]_n = a_n q^{n+1}(y_n z_{n+1} - y_{n+1}z_n), \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.5}$$

ifadesini kolaylıkla sağlar.

Her $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $n < m$ için,

$$\sum_{j=n}^{m}\left\{(\ell y)_j \overline{z_j} - y_j(\ell \overline{z})_j\right\} = [y,z]_m - [y,z]_{n-1} \tag{4.6}$$

eşitliğine Green formülü denir [22].

Fark ifadesinden q- fark operatörüne geçmek için,

$$(y,z)_q = \sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n \overline{z_n} \tag{4.7}$$

iç çarpımını sağlayan, $\sum_{n=0}^{\infty} \ |y_n|^2 < \infty$ olacak şekilde bütün kompleks değerli $y = \{y_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ dizilerinden oluşan $\ell^2(\mathbb{N})$ Hilbert Uzayını kuralım. $\ell y \in \ell^2(\mathbb{N})$ koşulunu sağlayan $\ell^2(\mathbb{N})$ uzayındaki $y = \{y_n\}\,(n \in \mathbb{N})$ dizilerinin kümesini D ile gösterelim. D üzerinde $Ly = \ell y$ eşitliğini sağlayan maksimal L operatörünü tanımlayalım. Her $y, z \in D$ için $[y,z]_\infty = \lim_{n\to\infty}[y,z]_n$ limitinin varlığı ve sonlu olduğu (4.2) formülünden elde edilir. Bundan dolayı (4.2) de $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$(Ly,z) - (y,Lz) = [y,z]_\infty - [y,z]_{-\infty} \tag{4.8}$$

elde edilir.

$\ell^2(\mathbb{N})$ uzayında bileşenlerinin sonlu sayıdası sıfırdan farklı olan vektörlerin bulunduğu lineer D_0' kümesini düşünelim. D_0' kümesinde L operatörünün kısıtlamasını L_0' ile gösterelim. L_0' operatörünün simetrik olduğu (4.8) den görülebilir. L_0' operatörünün kapanışını L_0 ile gösterelim. D_0, L_0 operatörünün tanım bölgesi olup,

$$\forall z \in D \text{ için } [y,z]_\infty = 0 \tag{4.9}$$

koşulunu sağlayan $y \in D$ vektörlerini içerir. L_0 kapalı simetrik operatör olup, onun indis defekti (0,0) ve (1,1) dir. Bunun dışında $L = L_0^*$ dır [23,27].

L_0 ve L operatörlerine minimal ve maksimal operatörler denir. $(0,0)$ indis defekti için L_0 operatörü self-adjoint (kendine eş) bir operatördür. Yani, $L_0^* = L_0 = L$ dir.

Lemma 4.1.1. Keyfi $y = \{y_n\} \in D$ ve $z = \{z_n\} \in D$ vektörleri için,

$$[y,z]_n = [y,u]_n[\bar{z},v]_n - [y,v]_n[\bar{z},u]_n \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}) \tag{4.10}$$

dir.

Teorem 4.1.2. L_0 operatörünün tanım bölgesi olan D_0,

$$[y,u]_\infty = [y,v]_\infty = 0 \tag{4.11}$$

sınır koşullarını sağlayan $y \in D$ vektörlerinden oluşmaktadır.

4.2. Disipatif Operatör Oluşturma

$$(\ell y)_n = \lambda y_n \qquad y \in D, \qquad n \geq 1\,, \tag{4.12}$$

$$[y,v]_0 + h[y,u]_0 = 0, \quad \mathrm{Im}h > 0, \tag{4.13}$$

$$\alpha_1[y,v]_\infty - \alpha_2[y,u]_\infty = \lambda(\,\alpha_1'[y,v]_\infty - \alpha_2'[y,u]_\infty), \tag{4.14}$$

λ spektral parametre ile verilen sınır değer problemini alalım. Fark denkleminin tanımından,

$$(\ell y)_n = (a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + q a_n y_{n+1}),\;\; n \geq 1 \tag{4.15}$$

Burada λ spektral parametre $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1', \alpha_2' \in \mathbb{R}$ ve

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1 \\ \alpha_2' & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1'\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2' > 0 \tag{4.16}$$

dır.

Aşağıdaki kabulleri yapalım.

$$\begin{aligned} M_\infty(y) &= \alpha_1[y,v]_\infty - \alpha_2[y,u]_\infty\,, \\ M_\infty'(y) &= \alpha_1'[y,v]_\infty - \alpha_2'[y,u]_\infty\,, \\ N_1^0(y) &= [y,v]_0, \\ N_2^0(y) &= [y,u]_0\,, \\ N_1^\infty(y) &= [y,v]_\infty, \\ N_2^\infty(y) &= [y,u]_\infty \\ M_0(y) &= N_2^0(y) + hN_1^0(y) \end{aligned} \tag{4.17}$$

Lemma 4.2.1. Keyfi $y, z \in D$ için $M_\infty(\bar{z}) = \overline{M_\infty(z)}$, $M_\infty'(\bar{z}) = \overline{M_\infty'(z)}$ ve $N_1^0(\bar{z}) = \overline{N_1^0(z)}$, $N_2^0(\bar{z}) = \overline{N_2^0(z)}$ olmak üzere,

i) $$[y,z]_\infty = \frac{1}{\alpha}[M_\infty(y)\overline{M_\infty'(z)} - M_\infty'(y)\overline{M_\infty(z)}] \tag{4.18}$$

ii) $$[y,z]_0 = N_1^0(y).N_2^0(\bar{z}) - N_1^0(\bar{z}).N_2^0(y) \tag{4.19}$$

dir.

İspat 4.2.1.

i) $$\frac{1}{\alpha}[M_\infty(y).\overline{M'_\infty(z)} - M'_\infty(y).\overline{M_\infty(z)}]$$

$$= \frac{1}{\alpha}[(\alpha_1[y,v]_\infty - \alpha_2[y,u]_\infty).(\alpha'_1[\bar{z},v]_\infty - \alpha'_2[\bar{z},u]_\infty) \tag{4.20}$$

$$-(\alpha'_1[y,v]_\infty - \alpha'_2[y,u]_\infty\ (\alpha_1[\bar{z},v]_\infty - \alpha_2[\bar{z},u]_\infty))]$$

$$= \frac{1}{\alpha}\ [\alpha'_1\alpha_2([y,v]_\infty[\bar{z},u]_\infty - [y,u]_\infty[\bar{z},v]_\infty)$$

$$-\alpha_1\alpha'_2([y,v]_\infty[\bar{z},u]_\infty - [y,u]_\infty[\bar{z},v]_\infty)]$$

$$= \frac{1}{\alpha}[(\alpha'_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha'_2)\ ([y,v]_\infty[\bar{z},u]_\infty - [y,u]_\infty[\bar{z},v]_\infty)].$$

Lemma 4.1.1 den dolayı,

$\frac{1}{\alpha}\left[M_\infty(y).\overline{M'_\infty(z)} - M'_\infty(y).\overline{M_\infty(z)}\right] = [y,z]_\infty$ elde edilir.

ii) $[y,z]_0 = \begin{vmatrix} y_0 & \bar{z}_0 \\ y_1 & \bar{z}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N_1^0(y) & N_1^0(\bar{z}) \\ N_2^0(y) & N_2^0(\bar{z}) \end{vmatrix} = N_1^0(y).N_2^0(\bar{z}) - N_1^0(\bar{z}).N_2^0(y)$ olarak elde edilir [31].

4.3. Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında Ürettiği Lineer Operatör

$f^{(1)} \in \ell^2(\mathbb{N})$, $f^{(2)} \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\hat{f} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix}$ şeklinde iki bileşenli elemanların lineer uzayını $H = \ell^2(\mathbb{N})\oplus\mathbb{C}$ şeklinde gösterelim.

Böylece, $\hat{f} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix}, \hat{g} = \begin{pmatrix} g^{(1)} \\ g^{(2)} \end{pmatrix} \in H$ için,

$$f^{(1)} = (f_n^{(1)}),\ \ g^{(1)} = \left(g_n^{(1)}\right),\quad (n \in \mathbb{N}) \tag{4.21}$$

olmak üzere,

$$\left(\hat{f},\hat{g}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n f_n^{(1)}\bar{g}_n^{(1)} + \frac{1}{\alpha}f^{(2)}\bar{g}^{(2)} \tag{4.22}$$

formülü H lineer uzayında bir iç çarpım tanımlar. Buradaki α sabiti (4.18) ifadesinde tanımlanmıştı.

Bu iç çarpıma göre H lineer uzayı bir Hilbert uzayı olur. Dolayısıyla verilmiş sınır değer problemine uygun Hilbert uzayı tanımlanmış oldu.

Verilen sınır değer problemine uygun $A_h : H \to H$ operatörünü,

$$D(A_h) = \left\{ \hat{f} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix} \in H : f^{(1)} \in D, M_0 f^{(2)} = M'_\infty(f^{(1)}) \right\} \tag{4.23}$$

$$A_h \hat{f} = \tilde{\ell}(\hat{f}) = \begin{pmatrix} \ell(f^{(1)}) \\ M_\infty(f^{(1)}) \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

eşitlikleri ile birlikte tanımlayalım.

Lemma 4.3.1. $H = \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayında (4.23) ve (4.24) eşitlikleri ile tanımlı A_h operatörü için,

$$\left(A_h \hat{f}, \hat{g}\right) - \left(\hat{f}, A_h \hat{g}\right) = [f^{(1)}, g^{(1)}]_0 - [f^{(1)}, g^{(1)}]_\infty + \frac{1}{\alpha}\left[M_\infty\left(f^{(1)}\right).\overline{M'_\infty(g^{(1)})} - M'_\infty\left(f^{(1)}\right).\overline{M_\infty(g^{(1)})}\right] \tag{4.25}$$

eşitliği sağlanır.

İspat 4.3.1. $(\ell y)_n$ nin tanımı ve (4.22) den,

$$\begin{aligned}
(A_h \hat{f}, \hat{g})_N &= \textstyle\sum_{n=1}^{N} q^n \left(a_{n-1} f_{n-1}^{(1)} + b_n f_n^{(1)} + q a_n f_{n+1}^{(1)}\right)\overline{g_n^{(1)}} + \frac{1}{\alpha} M_\infty f^{(1)} \overline{M'_\infty}(g^{(1)}) \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{N} q^n \left(a_{n-1} f_{n-1}^{(1)} \overline{g_n^1} + b_n f_n^{(1)} \overline{g_n^1} + q a_n f_{n+1}^{(1)} \overline{g_n^1}\right) + \frac{1}{\alpha} M_\infty f^{(1)} \overline{M'_\infty}(g^{(1)}) \\
&= q(a_0 f_0^{(1)} \bar{g}_1^1 + b_1 f_1^{(1)} \bar{g}_1{}^1 + q a_1 f_2^{(1)} \bar{g}_1{}^1) \\
&\quad + q^2(a_1 f_1^{(1)} \bar{g}_2^1 + b_2 f_2^{(1)} \bar{g}_2{}^1 + q a_2 f_3^{(1)} \bar{g}_2{}^1) \\
&\quad + \cdots + q^N\left(a_{N-1} f_{N-1}^{(1)} \bar{g}_1^{(1)} + b_N f_N^{(1)} \bar{g}_N^{(1)} + q a_N f_{N+1}^{(1)} \bar{g}_N^{(1)}\right) + \frac{1}{\alpha} M_\infty f^{(1)} \overline{M}'_\infty(g^{(1)})
\end{aligned} \tag{4.26}$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
(\hat{f}, A_h \hat{g})_N &= \textstyle\sum_{n=1}^{N} q^n \left(a_{n-1} \bar{g}_{n-1}^{(1)} + b_n \bar{g}_n^{(1)} + q a_n g_{n+1}^{(1)}\right) f_n^{(1)} + \frac{1}{\alpha} M'_\infty(f^{(1)}) \overline{M}_\infty(g^{(1)}) \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{N} q^n \left(a_{n-1} f_n^{(1)} \bar{g}_{n-1}^{(1)} + b_n f_n^{(1)} \bar{g}_n^{(1)} + q a_n f_n^{(1)} g_{n+1}^{(1)}\right) + \frac{1}{\alpha} M'_\infty f^{(1)} \overline{M}_\infty(g^{(1)}) \\
&= q(a_0 f_1^{(1)} \bar{g}_0^1 + b_1 f_1^{(1)} \bar{g}_1^1 + q a_1 f_1^{(1)} \bar{g}_2^1) \\
&\quad + q^2(a_1 f_2^{(1)} \bar{g}_1^1 + b_2 f_2^{(1)} \bar{g}_2^1 + q a_2 f_2^{(1)} \bar{g}_3^1) \\
&\quad + \cdots + q^N\left(a_{N-1} f_N^{(1)} \bar{g}_{N-1}^{(1)} + b_N f_N^{(1)} \bar{g}_N^{(1)} + q a_N f_N^{(1)} \bar{g}_{N+1}^{(1)}\right) + \frac{1}{\alpha} M_\infty f^{(1)} \overline{M}'_\infty(g^{(1)})
\end{aligned} \tag{4.27}$$

olur. Böylece,

$$(A_h\hat{f},\hat{g})_N-(\hat{f},A_h\hat{g})_N=q\Big(a_0f_0^{(1)}\bar{g}_1^{(1)}-a_0f_1^{(1)}\bar{g}_0^{(1)}\Big)+q^{N+1}(a_Nf_{N+1}^{(1)}\bar{g}_N^{(1)}-$$
$$a_Nf_N^{(1)}\bar{g}_{N+1}^{(1)}\ )\ +\frac{1}{\alpha}M_\infty f^{(1)}M'_\infty\big(g^{(1)}\big)-\frac{1}{\alpha}M'_\infty\big(f^{(1)}\big)\overline{M_\infty}\big(g^{(1)}\big)$$
$$=qa_0\Big(f_0^{(1)}\bar{g}_1^{(1)}-a_0f_1^{(1)}\bar{g}_0^{(1)}\Big)-q^{N+1}a_N(f_N^{(1)}\bar{g}_{N+1}^{(1)}-f_{N+1}^{(1)}\bar{g}_N^{(1)})$$
$$+\frac{1}{\alpha}\big[M_\infty\big(f^{(1)}\big)M'_\infty\big(g^{(1)}\big)-M'_\infty\big(f^{(1)}\big)M_\infty\big(g^{(1)}\big)\big] \tag{4.28}$$
$$=\big[f^{(1)},g^{(1)}\big]_0-\big[f^1,g^{(1)}\big]_N+\frac{1}{a}\big[M_\infty\big(f^{(1)}\big)\overline{M'_\infty}\big(g^{(1)}\big)-M'_\infty\big(f^{(1)}\big)\overline{M_\infty}\big(g^{(1)}\big)\big]$$

$N\to\infty$ için limit alınacak olursa,

$$(A_h\hat{f},\hat{g})\ -(\hat{f},A_h\hat{g})=\ \big[f^{(1)},g^{(1)}\big]_0-\big[f^{(1)},g^{(1)}\big]_\infty$$
$$+\frac{1}{a}\big[M_\infty\big(f^{(1)}\big)\overline{M'_\infty(g^{(1)})}-M'_\infty\big(f^{(1)}\big)\overline{M_\infty(g^{(1)})}\big] \tag{4.29}$$

bulunur.

Teorem 4.3.2. A_h operatörü H uzayında disipatiftir.

İspat 4.3.2. $\hat{y}=\{\hat{y}_n\}\in D(A_h)\ ve\ \overline{D(A_h)}=H$ için (4.22) eşitliğinden,

$N\to\infty$ için,

$$(A_h\hat{y},\hat{y})-(\hat{y},A_h\hat{y}\ )=\big[y^{(1)},y^{(1)}\big]_0-\big[y^{(1)},y^{(1)}\big]_\infty \tag{4.30}$$
$$+\frac{1}{a}\big[M_\infty\big(y^{(1)}\big)M'_\infty\big(y^{(1)}\big)-M'_\infty\big(y^{(1)}\big)\overline{M'_\infty(y^{(1)})}\big]$$

(4.18) den,

$$(A_h\hat{y},\hat{y})-(\hat{y},A_h\hat{y}\ )=\big[y^{(1)},y^{(1)}\big]_0 \tag{4.31}$$

olur. (4.19) dan dolayı,

$$(A_h\hat{y},\hat{y})-(\hat{y},A_h\hat{y}\ )=N_1^0\big(y^{(1)}\big)N_2^0\big(\bar{y}^{(1)}\big)-N_1^0\big(\bar{y}^{(1)}\big)N_2^0\big(y^{(1)}\big) \tag{4.32}$$

olur ve $M_0(y)=0$ ise $N_2^0\big(y^{(1)}\big)=-hN_1^0(y^{(1)})$ olacağından,

$$(A_h\hat{y},\hat{y}) - (\hat{y},A_h\hat{y}\,) = N_1^0\big(y^{(1)}\big)(-\bar{h}N_1^0\big(\bar{y}^{(1)}\big) + N_1^0\big(\bar{y}^{(1)}\big)hN_1^0\big(y^{(1)}\big)$$
$$= \big(h-\bar{h}\big)\Big(N_1^0\big(y^{(1)}\big)N_1^0\big(y^{-(1)}\big)\Big)$$
$$= \big(h-\bar{h}\big)\big|N_1^0\big(y^{(1)}\big)\big|^2$$
$$= 2i\ \mathrm{Imh}\big|N_1^0(y^{(1)})\big|^2. \tag{4.33}$$

Böylece, $\mathrm{Im}\,(A_h\hat{y},\hat{y}) = \mathrm{Imh}\big|N_1^0(y^{(1)})\big|^2 \geq 0$ $(\mathrm{Im}h > 0\,)$ elde edilir. Yani A_h operatörü H uzayında disipatiftir.

4.4. A_h Operatörünün Özdeğerleri ve Özvektörleri

Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için (4.12) denkleminin koşullarını sağlayan çözümleri, $\phi(\lambda)$ ve $\chi(\lambda)$ olsun.

$$\begin{aligned}
N_1^0\big(\phi(\lambda)\big) &= [\chi(\lambda),v]_0 = -1\\
N_2^0\big(\phi(\lambda)\big) &= [\chi(\lambda),u]_0 = h\\
N_2^0\big(_\chi(\lambda)\big) &= [\phi\,(\lambda),v]_\infty = \alpha_2 - \lambda\alpha_2',\\
N_1^\infty\big(_\chi(\lambda)\big) &= [\phi\,(\lambda),u]_\infty = \alpha - \lambda\alpha_1'.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

(4.19) eşitliğinin sıfırdaki Wronskiyeni olan $\Delta_0(\lambda)$,

$$\begin{aligned}
\Delta_0(\lambda) &= [\chi(\lambda),\phi\,(\lambda)]_0 = -[\phi\,(\lambda),\chi(\lambda)]_0\\
&= -N_1^0\big(\phi(\lambda)\big)N_2^0\big(\chi(\lambda)\big) + N_1^0\big(\chi(\lambda)\big)N_2^0\big(\phi(\lambda)\big)\\
&= N_2^0\big(\chi(\lambda)\big) + hN_1^0(\chi(\lambda))\\
&= M_0(\chi(\lambda)).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. (4.18) eşitliğinin sonsuzdaki Wronskiyeni olan $\Delta_\infty(\lambda)$,

$$\begin{aligned}
\Delta_\infty(\lambda) &= [\chi(\lambda),\phi(\lambda)]_\infty = -[\phi(\lambda),\chi(\lambda)]_\infty\\
&= -\tfrac{1}{a}\big[M_\infty\big(\phi(\lambda)\big)M_\infty'\big(\chi(\lambda)\big) - M_\infty'\big(\phi(\lambda)\big)M_\infty\big(\chi(\lambda)\big)\big]
\end{aligned} \tag{4.36}$$

yazılabilir.

Bununla birlikte α nın tanımındaki terimlerden,

$$\begin{aligned}
\Delta_\infty(\lambda) &= -\frac{1}{\alpha}\,\Big[\Big(\alpha_1 N_1^\infty\big(\phi(\lambda)\big)\Big) - \alpha_2 N_2^\infty\big(\phi(\lambda)\big)\Big(\alpha_1' N_1^\infty\big(\chi(\lambda)\big)\Big) - \alpha_2' N_2^\infty\big(\chi(\lambda)\big) \\
&\quad -\alpha_1' N_1^\infty\big(\phi(\lambda)\big) - \alpha_1' N_2^\infty\big(\phi(\lambda)\big)\big(\alpha_1 N_1^\infty\big(\chi(\lambda)\big) - \alpha_2 N_2^\infty\big(\chi(\lambda)\big)\big)\Big] \\
&= \frac{-1}{\alpha}\big[(\alpha_1'\alpha_2 - \alpha_2'\alpha_1)\big(N_1^\infty\big(\phi(\lambda)\big)N_2^\infty\big(\chi(\lambda)\big) - N_2^\infty\big(\phi(\lambda)\big)N_1^\infty\big(\chi(\lambda)\big)\big)\big] \\
&= \frac{-1}{\alpha}\big[(-\alpha)\big(N_1^\infty\big(\phi(\lambda)\big)(\alpha_1 + \lambda\alpha_1') - N_2^\infty(\phi(\lambda))(\alpha_2 + \lambda\alpha_2')\big] \qquad (4.37) \\
&= \alpha_1 N_1^\infty\big(\phi(\lambda)\big) - \alpha_2 N_2^\infty\big(\phi(\lambda)\big) + \lambda\Big(\alpha_1' N_1^\infty\big(\phi(\lambda)\big) - \alpha_2' N_2^\infty\big(\phi(\lambda)\big)\Big) \\
&= M_\infty\big(\phi(\lambda)\big) + \lambda\, M_\infty'\big(\phi(\lambda)\big).
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Lemma 4.4.1. (4.12) – (4.14) sınır değer probleminin özdeğerleri ancak ve ancak $\Delta(\lambda)$ nın sıfır yerlerinden ibarettir.

$$\big(\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) = \Delta_\infty(\lambda)\big)\,. \qquad (4.38)$$

İspat 4.4.1. ($\Rightarrow$) $\Delta_0(\lambda)$ nın bir sıfırı λ_0 olsun. Öyleyse,

$$(\lambda_0) = \phi_0(\lambda_0)\chi_0(\lambda_0) - \phi_0(\lambda_0)\chi_0(\lambda_0) = 0 \qquad (4.39)$$

dır. $n = 1$ için $\Delta_0(\lambda)$, $\phi(\lambda_0)$ ve $\chi(\lambda_0)$ vektörlerinin Wronskiyeni olduğundan ϕ ve χ çözümleri lineer bağımlı olur. Yani,

$$\phi(\lambda_0) = k\chi(\lambda_0) \qquad (4.40)$$

olacak şekilde $k \neq 0$ sabit sayısı bulunur. Böylece $\phi(\lambda_0)$, (4.12) – (4.14) sınır değer probleminin $\lambda = \lambda_0$ için bir çözümü olur. Yani $\lambda = \lambda_0$ bir özdeğerdir.

($\Leftarrow$) Şimdi bunun tersinin de doğru olduğunu gösterelim. Yani $\lambda = \lambda_0$ özdeğer ise $\Delta_0(\lambda_0) = 0$ ve $\Delta_\infty(\lambda) = 0$ olduğunu gösterelim. $\lambda = \lambda_0$ için $\Delta_0(\lambda_0) \neq 0$ ve $\Delta_\infty(\lambda) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\Delta_0(\lambda_0) \neq 0$ ve $\Delta_\infty(\lambda) \neq 0$ ise $\phi(\lambda_0)$ ve $\chi(\lambda_0)$ vektörleri lineer bağımsız olur. Buna göre (4.12) denkleminin genel çözümünü,

$$\chi(\lambda_0) = c_1(\lambda_0)\phi(\lambda_0) + c_2\chi(\lambda_0). \tag{4.41}$$

şeklinde yazabiliriz. (4.13) sınır koşulu gereği,

$$[y, v]_0 + h[y, u]_0 = 0 \tag{4.42}$$

eşitliği sağlanır. Buradan (4.13) koşulu dikkate alınırsa,

$$c_1\big(\phi_0(\lambda_0) + h\phi_0(\lambda_0)\big) + c_2\big(\chi_0(\lambda_0) + h\chi_0(\lambda_0)\big) = 0 \tag{4.43}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\phi(\lambda_0)$ çözüm vektörünün (4.13) sınır koşulunu sağladığı göz önüne alınırsa,

$$c_2\big(\chi_0(\lambda_0) + h\chi_{-1}(\lambda_0)\big) = c_2\Delta_0(\lambda_0) = 0 \tag{4.44}$$

bulunur. Kabulümüz gereği $\Delta_0(\lambda_0) \neq 0$ olduğundan $c_2 = 0$ olur. (4.13) koşulundan ve $c_2 = 0$ olmasından,

$$c_1\{[\phi(\lambda_0), v]_\infty(\alpha_1 - \lambda\alpha_1') - [\phi(\lambda_0), u]_\infty(\alpha_2 - \lambda\alpha_2')\} = c_1\Delta_\infty(\lambda_0) = 0 \tag{4.45}$$

olur. Kabul gereği $\Delta_0(\lambda_0) \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ olur. Böylece $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olur.

Sonuç olarak, $y(\lambda_0) \neq 0$ olur. Bu λ_0 ın özdeğer olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

$\Delta_{-1}(\lambda)$ ve $\Delta_\infty(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırlarını $\lambda_n(n = 0,1, \dots)$ şeklinde gösterirsek,

$$\hat{\chi}_n = \begin{pmatrix} \chi(\lambda_n) \\ M_\infty'\big(\chi(\lambda_n)\big) \end{pmatrix} \in D(A_h) \tag{4.46}$$

vektörleri $A_h\hat{\chi}_n = \lambda_n\hat{\chi}_n$ eşitliğini sağlar. Yani $\hat{\chi}_n$ vektörleri A_h operatörünün özvektörleridir.

Tanım 4.4.2. Eğer λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ vektörler sistemini,

$$\begin{aligned} \ell(y_0) &= \lambda_0 y_0, \\ M_\infty(y_0) - \lambda_0 M'_\infty(y_0) &= 0, \\ M_0(y_0) &= 0, \\ \ell(y_s)_n - \lambda_0 y_s - y_{s-1} &= 0, \\ M_\infty(y_s) - \lambda_0 M'_\infty(y_s) - M'_\infty(y_{s-1}) &= 0, \\ M_0(y_s) &= 0, \quad s = 1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{4.47}$$

yazabiliriz. Buradan, λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ vektörler sistemine, (4.12) – (4.14) sınır değer probleminin öz ve birleştirilmiş (asosye) vektörler zinciri denir [32].

Lemma 4.4.3. (4.12) – (4.14) sınır probleminin özdeğerleri ve A_h disipatif operatörünün özdeğerleri çakışır. Yani, (4.12) – (4.14) sınır değer probleminin λ_0 özdeğerine karşılık gelen her bir $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ özvektörler zinciri ve birleştirilmiş (asosye) vektörleri, A_h disipatif operatörünün aynı λ_0 özdeğerine karşılık gelen $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ birleştirilmiş özvektörler zincirine karşılık gelir. Bu durumda,

$$\hat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ M'_\infty(y_k) \end{pmatrix}, \quad k = 0,1,2,\dots,n \tag{4.48}$$

eşitliği elde edilir.

İspat 4.4.3.

Eğer $\hat{y}_0 \in D(A_h)$ ve $A_h \hat{y}_0 = \lambda_0 \hat{y}_0$ ise $\ell(y)_0 = \lambda_0 y_0$, $M_\infty(y_0) - \lambda_0 M'_\infty(y_0) = 0$ ve $M_0(y_0) = 0$ ise eşitlikleri sağlanır. Yani (4.12) – (4.14) sınır değer probleminin özvektörü y_0 dır.

Tersine olarak eğer (4.47) şartları varsa buradan,

$\begin{pmatrix} y_0 \\ M'_\infty(y_0) \end{pmatrix} = \hat{y}_0 \in D(A_h)$ ve $A_h \hat{y}_0 = \lambda_0 \hat{y}_0$ olur. Yani $\hat{y}_0$, A_h operatörünün özvektörüdür.

Ayrıca, eğer disipatif A_h operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ birleştirilmiş özvektörler zinciri ise,

Buradan $\hat{y}_k \in D(A_h)$ $(k = 0,1,2, \dots, n)$ ve $A_h\hat{y}_0 = \lambda_0\hat{y}_0,$ $A_h\hat{y}_s = \lambda_0\hat{y}_s + \hat{y}_{s-1}$ $s = 1,2, \dots, n$ şartları ile birlikte (4.47) eşitliğini elde ederiz. Burada $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ vektörleri, $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ vektörlerinin birinci bileşenleridir.

Tersine, (4.12) – (4.14) sınır değer problemine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ bileşenleri,

$\hat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ M'_\infty(y_k) \end{pmatrix} \in D(A_h),$ $k = 0,1,2, \dots, n$ ve

$A_h\hat{y}_0 = \lambda_0\hat{y}_0$, $A_h\hat{y}_s = \lambda_0\hat{y}_s + \hat{y}_{s-1}$, $s = 1,2, \dots, n$ olur.

Böylece Lemma 4.4.3 sağlanır.

5. BÖLÜM

SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada fark denklemleri (Adi fark ve q-fark denklemleri) ve q-fark operatörü hakkında bilgi verildikten sonra, $\ell^2(\mathbb{N})$ Hilbert uzayında ikinci mertebeden disipatif, sınır koşullarındaki spektral parametreli q-fark operatörü ele alınmıştır. Maksimal disipatif operatör oluşturulmuş, sınır değer problemi tarafından oluşturulan q-fark operatörünün özdeğer ve özvektörleri incelenmiştir. Ayrıca, aynı özdeğer problemine sahip olan disipatif q-fark operatörünün, $\ell^2(\mathbb{N})$ de oluşturulan uzayı ve sınır değer probleminin terimleri incelenmiştir.

q-fark operatörünün sınır değer problemi ve disipatif operatörün özvektörler ve asosye vektörler sistemi de incelenmiştir. Böylece sınır değer problemi tarafından üretilen disipatif operatörün özdeğer ve özvektörleri elde edilmiştir.

Sonuç olarak, q-fark operatörünün sınır değer problemi ile A_h disipatif operatörün özvektörlerinin çakıştığı görülmüştür**.** Elde edilen sonuçlar birçok fiziksel probleme uygulanabilir.

KAYNAKLAR

1. Bozkurt, D., Türen, B., Lineer Cebir, Selçuk Üniversitesi Yayınları, Konya, s. 32, 2000.

2. Naimark, M. A., Linear Differential Operators, 2nd ed., Nauka Moskow, 1968, English transl., of 1st ed., v.1, 2, Ungar, New York, 1969.

3. Musayev, B., Alp, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya, s.72, 2000.

4. Kostyuchenko, A.G. and Sargsyan, I.S., Distribution of Eigenvalues, Nauka, Moskow, 1979.

5. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Willey and Sons, New York, 1978.

6. Kuzhel, A.V., Characteristics Functions and Models of Nonselfadjoint Operators, Kluwer Academic Publisher, Boston, London, 1996.

7. Gorbachuk, M.L. and Gorbachuk, V.I., Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Naukova Dumka, Kiev, 1984; English Transl. Birkhauser Verlag, 1991.

8. Akhiezer, N.I., and Glazman, I.M., Theory of Linear Operators in Hilbert Space, New York, pp.135-142, 1963.

9. Mickens, R.E., Difference Equations: Theory and Applications Van Nostrand Reinhold, New York, pp.92-108, 1990.

10. Başbük, M., Sturm-Liouville Fark Operatörünün Spektral Özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, Nevşehir Üniversitesi, Nevşehir, 2010.

11. Huseynov, A., *q*-Fark Denklemlerinin İkinci Derece Demetleri için Özdeğer Problemi ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara, 2006.

12. Magnus AP, Special Nonuniform Lattices (Snul) Orthogonal Polynomials on Discrete Dense Sets of Points, J. Comp. Appl. Math., 65, pp.253-265, 1995.

13. Marco M, Parcet J, A New Approach to The Theory of Classical Hypergeometric Polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 358, pp.183-214, 2006.

14. R. Askey, J. Wilson, Some Basic Hypergeometric Orthogonal Polynomials That Generalize The Jacobi Polynomials, Mem. Am. Math. Soc., 54, pp.1-55, 1985.

15. Jackson H F, *q*-Difference Equations, Am. J. Math., 32, pp.305-314, 1910.

16. J. P. Ramis, J. Sauloy, C. Zhang, *q*-Difference Equations (In French), Gaz. Math., 96, pp. 20-49, 2003.

17. Gasper G, Rahman M, Basic Hypergeometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, pp.120-132, 1990.

18. G Bangerezako, *q*-Difference Equations, University of Burundi Faculty of Sciences Department of Mathematics, Preprint, Bujumbura, pp.15-23, 2008.

19. G Bangerezako, *q*-Difference Equations, University of Burundi Faculty of Sciences Department of Mathematics, Preprint, Bujumbura, pp.35-41, 2008.

20. G Bangerezako, *q*-Difference Equations, University of Burundi Faculty of Sciences Department of Mathematics, Preprint, Bujumbura, pp.41-53, 2008.

21. Magnus A P, Associated Askey-Wilson Polynomials as Laguerre- Hahn Orthogonal Polynomials, Springer Lectures Notes in Math., 1329, Springer, Berlin, pp.261-278, 1988.

22. Adıvar, M. and Bohner, M., Spectral Analysis of q-Difference Equations with Spectral Singularities, Mathematical and Computer Modelling., 43, pp.695-703, 2006.

23. Agarwal, R.P., Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications, Marcel Dekker, New York, pp.69-83, 2000.

24. Allahverdiev, B.P., Dissipative Second-Order Difference Operators with General Boundary Conditions, Journal of Difference Equations and Applications, 10, pp.1-16, 2004.

25. Allahverdiev, B.P., A Nonselfadjoint Sturm-Liouville Problem with A Spectral Parameter in the Boundary Conditions, Math. Nach., 278, pp.743-755, 2005.

26. Allahverdiev, B.P., Extensions, Dilations and Functional Models of Infinite Jacobi Matrix, Czechoslovak Math. Journal, 55 (130), pp.593-609, 2005.

27. Atkinson, F.V., Discrete and Continuous Boundary Problems, Acad. Pres Inc., New York, pp.170-182, 1964.

28. Bairamov, E., Çakar, O., and Krall A.M., Non-selfadjoint Difference Operators and Jacobi Matrices with Spectral Singularities, Matematiche Nachrichten., 229, pp.5-14, 1999.

29. Huseynov, A., Bairamov, E., An Eigenvalue Problem for Quadratic Pencils of q-Difference Equations and Its Applications, J. Applied Mathematics Letters, 10.1016, pp.1-7, 2008.

30. Kac, V., Cheung, P., Quantum Calculus, Springer-Verlag, New York, pp.150-165, 2002.

31. Eryılmaz, A., Fark Operatörlerinin Spektral Teorisi, Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta, 2006.

32. Eryılmaz, A., On A Dissipative Second Order *q*-Difference Operator, IJRRAS, 2010

ÖZGEÇMİŞ

Ünal KAYA 1981 yılında Kırşehir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kırşehir'de tamamladı. 1999'da kazandığı Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2004 yılında mezun oldu. 2004 yılında Milli Eğitim Bakanlığında öğretmen olarak göreve başladı. Sivas, Kırşehir ve Kayseri illerindeki çeşitli okullarda çalıştı ve halen bu görevini sürdürmektedir. 2009 yılında Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansa başladı.

Adres : Küçük Mustafa Mah. Atlı Sk. No:6/8 MELİKGAZİ/ KAYSERİ
E-posta : unlky@hotmail.com