T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY SOFT KÜMELERİN CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE UYGULAMALARI

Tezi Hazırlayan
Özlem BULUT

Tezi Yöneten
Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2012
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Hacı AKTAŞ danışmanlığında **Özlem BULUT** tarafından hazırlanan '**Genelleştirilmiş Fuzzy Soft Kümelerin Cebirsel Yapılar Üzerine Uygulamaları'** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

16.07.2012

JÜRİ:

Başkan: Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Demet Parlak SÖNMEZ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 16.07.2012 tarih ve 2012-43-1 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

16 / 07 / 2012

Prof. Dr. Selçuk KERVAN

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

"Genelleştirilmiş Fuzzy Soft Kümelerin Cebirsel Yapılar Üzerine Uygulamaları" konulu tez çalışmam süresince sağlamış oldukları öğrenim bursu için TÜBİTAK' a teşekkür ederim. Tez çalışmamın seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Doç. Dr. Hacı AKTAŞ' a, eğitim hayatım boyunca benden maddi manevi desteğini esirgemeyen sevgili aileme ve özellikle ağabeyime en içten teşekkürlerimi sunarım.

GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY SOFT KÜMELERİN CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNE UYGULAMALARI

Özlem BULUT
Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2012
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

ÖZET

Ekonomi, mühendislik, çevre, sosyal ve tıp gibi bilimlerde birçok belirsizlik ifade eden problemler vardır. Bu tür problemler klasik metotlarla çözülemez. Bu çalışmada belirsizliklerin çözümü için ortaya konan bulanık küme teorisi, esnek küme teorisi, bulanık esnek küme teorisi ve genelleştirişmiş bulanık esnek küme teorileri incelenmiştir. Bu kümeler üzerinde tanımlanan cebirsel yapılar araştırılarak, bu kümeler üzerindeki cebirsel yapıların çeşitli özellikleri üzerinde durulmuştur. Çalışmanın son bölümünde genelleştirilmiş bulanık esnek grup ve genelleştirilmiş bulanık esnek halka cebirsel yapıları tanımlanarak bazı özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş bulanık esnek kümeler, genelleştirilmiş bulanık esnek grup, genelleştirilmiş bulanık esnek halka.

APPLICATIONS OF GENERALIZED FUZZY SOFT SETS ON ALGEBRAIC STRUCTURES

Özlem BULUT
Nevşehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, July 2012
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hacı AKTAŞ

ABSTRACT

In many sciences such as economy, engineering, environment, social and medical there are various problems which state uncertainties. Classical methods are not able to solve this kind of problems. In this work, fuzzy set theory, soft set theory, fuzzy soft set theory and generalized fuzzy soft sets theories are investigated which has developed for the solution of uncertaintes. Algebraic properties of these structure are mentioned by studying algebraic structures defined on these sets. In the last part of this thesis, algebraic structures that are generalized fuzzy soft group and generalized fuzzy soft ring are defined and some properties of these structures are examined.

Keywords: Generalized fuzzy soft sets, generalized fuzzy soft groups, generalized fuzzy soft rings.

SİMGELER

μ_G :	karakteristik fonksiyon
G_α:	bulanık level küme
$\bar{T}$:	T kümesinin tümleyeni
$\oplus$:	bulanık cebirsel toplam
(F, A) :	esnek küme
(f, A) :	bulanık esnek küme
$\tilde{\subset}$:	esnek alt küme
$\rceil E$:	parametrelerin değilinin kümesi
$\emptyset$:	boş küme
Φ :	boş esnek küme
$\tilde{A}$:	mutlak esnek küme
$\wedge$:	ve operatörü
$\vee$:	veya operatörü
$\times$:	kartezyen çarpım
$\tilde{\cup}$:	esnek kümelerde birleşim
$\tilde{\cap}$:	esnek kümelerde kesişim

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Bulanık Küme kavramı ilk kez 1965 yılında Zadeh[1] tarafından tanımlanmıştır. Zadeh, bilinen olgularla ifade edilen klasik kümeler yerine dereceli üyelik fonksiyonuyla ifade edilen bulanık küme kavramını önerdi. Bulanık küme kavramı, belirsizliklerin anlatımı ve belirsizliklerle çalışılabilmesi için kurulmuş katı bir matematik düzen olarak açıklanabilir ve belirsizliğin bir tür biçimlenişi ve formüllendirilmesidir. Bir çeşit çok-değerli küme kuramıdır. Fakat işlemleri diğer küme kuramlarından farklılık gösterir. Klasik kümelerde, kümeye ait olan elemanlar ve ait olmayan elemanlar vardır. Bulanık küme kavramı, çalışma yapılan alana ait her bir bireye matematiksel olarak kümedeki üyelik derecesini temsil eden bir değer atayarak tanımlar. Bu değer elemanın bulanık küme tarafından ifade edilen kavrama uygunluk derecesini belirtir. Bundan dolayı elemanların kümeye ait olması farklılaşır. Elemanların üyelik dereceleri 0 ile 1 arasındaki reel sayılarla temsil edilir. Tam üye olma durumu ve üye olmama durumu bulanık kümede sırası ile 1 ve 0 değerleriyle karşılanır. Bundan dolayı da klasik küme kavramı bulanık küme kavramının bu iki değere kısıtlanmış özel bir şekli olarak görülebilir. Bulanık küme kavramı uygulamalı bilimlerde kullanım alanı bulduğu kadar teorik bilimlerde de kullanılmaktadır.

Bulanık küme üzerinde ilk cebirsel yapı, üyelik fonksiyonu kullanılarak, 1971 yılında A. Rosenfeld[2] tarafından ‘fuzzy groups’ olarak yayımlanan makalesinde verildi. Bulanık grup teorinin temel özellikleri klasik grup teorideki sonuçlar kullanılarak elde edilmiştir. Bu güne kadar çok sayıda araştırmacı cebirsel yapılarda bu yeni kavramın özelliklerini çalışmışlardır. Bulanık gruplar kullanılarak daha karmaşık bulanık cebirsel yapılar olan bulanık halkalar ve bulanık idealler 1982 yılında Liu[3,4] tarafından çalışılmıştır. 1992 yılında Dixit ve arkadaşları[5] sonlu bulanık alt kümeler üzerinde bulanık alt halka ve bulanık idealler üzerine çalışmalar yapmıştır.

Belirsizliklerle uğraşmak mühendislik, çevre bilimleri, tıp bilimi ve sosyal bilimler gibi birçok alanda başlıca problemdir. Bu tür problemler klasik metotlarla çözülemez. Belirsizliklerle uğraşan olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi, yaklaşımlı kümeler teorisi, aralık matematik teorisi gibi teoriler vardır. Bu teorilerin her biri kendi içinde zorluklara sahiptir. Bu yüzden belirsizliklerin yol açtığı problemleri çözmek için Molodtsov[6] esnek küme teorisi olarak adlandırılan farklı bir yaklaşım önermiştir. Esnek küme teorisi olarak adlandırılan bu yaklaşım diğer yaklaşımlardaki zorluklardan tamamen ayrılmıştır. Esnek küme teorisi çeşitli alanlarda uygulamalar için zengin bir potansiyele sahiptir ve bunların bazıları Molodtsov' un çalışmalarında gösterilmiştir. Daha sonra Maji ve arkadaşları[7] esnek kümeler üzerinde esnek kümelerin birleşimi, kesişimi, AND ve OR gibi çeşitli küme işlemleri tanımlamışlardır. Esnek kümeler üzerinde yukarıdaki işlemler tanımlanarak teori ve uygulamada kullanılmasına imkan sağlanmış oldu. Buna göre esnek küme kavramı ve esnek kümeler üzerinde tanımlanan küme işlemleri, tıpta karar verme problemlerinde[8,9,10,11], bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümeler gibi belirsizlik belirten kümelerle karşılaştırılmasında[12] ve üzerinde çeşitli cebirsel yapıların tanımlanmasında[13,14,15,16] kullanılmıştır.

Esnek kümeler üzerinde ilk cebirsel yapı Aktaş ve Çağman[12] tarafından "soft sets and soft groups" isimli makale ile tanımlamış ve esnek grupların temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu çalışmada bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümeler, esnek kümeler ile karşılaştırmıştır. Maji tarafından bulanık esnek kümeler BCK-BCI cebirleri üzerine uygulandı. Jun[13] bulanık esnek cebirleri ve bulanık esnek idealleri tanımladı ve temel özelliklerini inceledi. Feng ve arkadaşları[14] esnek yarı halka kavramını ifade ettiler ve esnek kümeler için mevcut olan özellikleri yarı halka yapısına uyarladılar. Acar ve arkadaşları[15] esnek halkalar için temel kavramları verdiler. Ali ve arkadaşları[16] esnek kümeler için bilinen birleşim ve kesişim gibi cebirsel yapıları yeniden düzenleyerek esnek kümelerde yeni ifadeler oluşturdular.

2001 Yılında Maji ve arkadaşları[17] bulanık küme ve esnek kümenin birleşimi olan bulanık esnek küme kavramını tanımlamışlar ve uygulamalarını vermişlerdir. Aygünoğlu ve Aygün[18], Aktaş ve Çağman[12] tarafından tanımlanan esnek grupların bir genelleştirmesi olan bulanık esnek grubu tanımlayarak karakteristik özelliklerini incelemiştir. Subramanian ve arkadaşları[19] çalışmasında bulanık esnek halka tanımını vererek bulanık esnek halkaların homomorfik görüntüsünden bahsetmiştir.

Genelleştirilmiş bulanık esnek küme, Maji ve Arkadaşları[17] tarafından tanıtılan bulanık esnek küme kavramının genişletilmesi ile Majumdar ve Samanta[20] tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada esnek küme derecelendirilerek veya kümeye aitlik derecesi verilerek bulanık hale dönüştürülmüştür. Genelleştirilmiş bulanık esnek küme tanımı, parametrelerin her bir değerine göre bir bulanık kümenin seçiminde belirsizlik içerdiğinden daha gerçekçidir. Bu kavramın tanımlanmasıyla çeşitli özellikleri çalışıldı ve bir karar verme probleminin çözümünde bu kavram Majumdar ve Samanta[20] çalışmasında kullanıldı.

Bu tez çalışmasında ilk bölüm giriş kısmına ayrılmış ve bulanık kümeler, esnek kümeler, bulanık esnek kümeler, genelleştirilmiş bulanık esnek kümeler hakkında genel bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde çalışmanın devamında kullanılacak olan bulanık küme teorisinin temel kavramlarından bahsedilerek bulanık cebirsel yapılarla ilgili tanımlar ve bazı özellikler verilmiştir.

Esnek kümelerle ilgili geniş bir literatür taraması yapılarak araştırılması sonucunda üçüncü bölümde esnek kümelerle ilgili temel kavram ve teoremlere hatırlatılarak Aktaş ve Çağman[12] tarafından tanımlanan ve esnek kümeler üzerinde ilk cebirsel yapı olan esnek gruplar araştırılmış ve temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca esnek grupların inşasında kullanılan mantık kullanılarak tanımlanan ve iki işlemli cebirsel yapı olan esnek halkalar çalışılarak genel özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölüm genelleştirilmiş bulanık ensek kümeler için temel oluşturan ve Maji ve arkadaşları[17] tarafından tanımlanan bulanık esnek kümelere ayrılmıştır. Bu bölümde bulanık esnek kümelerin özellikleri incelenerek temel cebirsel yapılardan olan ve esnek grupların bir genellemesi olan bulanık esnek grup ve bulanık esnek halkaların temel özellikleri çalışılmıştır.

Beşinci bölümde bulanık esnek küme kavramını derecelendirilerek veya bulanık esnek kümeye üyelik değeri verilerek elde edilen genelleştirilmiş bulanık esnek küme kavramı ve üzerinde tanımlanan küme işlemleri ile bu işlemlerin özellikleri ifade edilerek ispatlanmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş bulanık esnek kümeler üzerinde tanımlanan bağıntı kavramı tanıtılmış ve çeşitli uygulamalarına yer verilmiştir.

Altıncı bölümde yukarda çalışılan genelleştirilmiş bulanık esnek kümeler üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek grup ve genelleştirilmiş bulanık esnek halka tanımlamaları yapılmış ve bu kavramlara ait temel bazı özellikler verilerek ispatları yapılmıştır.

Bu çalışmanın son bölümü olan yedinci bölüm sonuç ve öneriler kısmına ayrılmıştır.

2.BULANIK KÜMELER VE BULANIK CEBİRSEL YAPILAR

2.1.Bulanık Kümeler

Bulanık Küme kavramı ilk kez 1965 yılında Zadeh[1] tarafından tanımlanan bir çeşit çok-değerli küme kuramıdır. Fakat işlemleri diğer küme kuramlarından farklılık gösterir. Klasik kümelerde, kümeye ait olan elemanlar ve ait olmayan elemanlar vardır. Bulanık küme kavramı, çalışma yapılan alana ait her bir bireye matematiksel olarak kümedeki üyelik derecesini temsil eden bir değer atayarak tanımlar. Bu değer elemanın bulanık küme tarafından ifade edilen kavrama uygunluk derecesini belirtir. Bundan dolayı elemanların kümeye ait olması farklılaşır. Elemanların üyelik dereceleri 0 ile 1 arasındaki reel sayılarla temsil edilir. Tam üye olma durumu ve üye olmama durumu bulanık kümede sırası ile 1 ve 0 değerleriyle karşılanır. Bundan dolayı da klasik küme kavramı bulanık küme kavramının bu iki değere kısıtlanmış özel bir şekli olarak görülebilir. Bulanık küme kavramı uygulamalı bilimlerde kullanım alanı bulduğu kadar teorik bilimlerde de kullanılmaktadır. Biz bu bölümde bulanık kümeler ile ilgili temel tanımları vererek hatırlatma yapacağız.

Tanım 2.1.1[1] X klasik anlamda evrensel küme ve G, X'in alt kümesi olsun. X'den $\{0,1\}$ kümesine $\mu_G(x)$ karakteristik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in G \\ 0 & , \quad x \notin G \end{cases}$$

Bu tanımda fonksiyonun değer kümesini $[0,1]$ kapalı aralığı alırsak G kümesi bir bulanık küme olarak adlandırılır. Burada $\mu_G(x)$, x'in G'de üyelik derecesidir. $\mu_G(x)$ 1'e ne kadar yakın ise x'de G'ye o kadar çok aittir. Üyelik derecesi sıfır olan elemanlar normalde kümeye yazılmazlar.

X'in G bulanık alt kümesi $G = \{(x, \mu_G(x)) : x \in X, , \mu_G(x) \in [0,1]\}$ şeklinde ikililerden oluşur. Eğer X kümesi sonlu ise Zadeh [1] tarafından önerilen aşağıdaki gösterimle de ifade edilebilir.

$$G = \mu_G(x_1)/x_1 + \cdots + \mu_G(x_n) / x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_G(x_i) / x_i$$

Tanım 2.1.2[1] G, X'in bir bulanık alt kümesi olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_G(x) = 0$ ise G'ye boş bulanık küme denir ve $G = \emptyset$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3[1] G, X'in bir bulanık alt kümesi olsun. $\alpha \in [0,1]$ için

$$G_\alpha = \{x \in X : \mu_G(x) \geq \alpha\}$$

kümesine G'nin α seviyeli elemanlarının kümesi denir. G'nin güçlü α seviyeli elemanlarının kümesi ise

$$G_{\alpha^{'}} = \{x \in X : \mu_G(x) > \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2. Bulanık Kümelerde Temel İşlemler

Tanım2.2.1[21] $G = \{(x, \mu_G(x)) : \mu_G(x) \in [0,1]\}$ ve

$T = \{(x, \mu_T(x)) : \mu_T(x) \in [0,1]\}$ iki bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için

$$\mu_G(x) \leq \mu_T(x)$$

oluyorsa G'ye T'nin bulanık alt kümesi denir. $G \subseteq T$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2[1] $G = \{(x, \mu_G(x)) : \mu_G(x) \in [0,1]\}$ ve $T = \{(x, \mu_T(x)) : \mu_T(x) \in [0,1]\}$ iki bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için

$$\mu_G(x) = \mu_T(x)$$

ise G bulanık kümesi T bulanık kümesine eşittir denir. $G = T$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3[1] G bir bulanık küme olsun. G bulanık kümesinin tümleyeni $\mu_{\bar{G}}(x) = 1 - \mu_G(x)$ olmak üzere

$$\bar{G} = \{(x\,, \mu_{\bar{G}}(x)) : \mu_{\bar{G}}(x) \in [0,1]\}$$

şeklinde tanımlı olup $\bar{G}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4[1] G ve T, X'in iki bulanık alt kümesi olsun. G ile T'nin kesişim kümesi $\forall x \in X$ için

$$\mu_{G\cap T}(x) = min(\mu_G(x), \mu_T(x))$$

olmak üzere

$$G \cap T = \{(x, \mu_{G\cap T}(x)) : \mu_{G\cap T}(x) \in [0,1]\}\text{' dir.}$$

Tanım 2.2.5[1] G ve T, X'in iki bulanık alt kümesi olsun. G ile T'nin birleşim kümesi $\forall x \in X$ için

$$\mu_{G\cup T}(x) = max\ (\mu_G(x), \mu_T(x))$$

olmak üzere

$$G \cup T = \{(x, \mu_{G\cup T}(x)) : \mu_{G\cup T}(x) \in [0,1]\}\text{' dir.}$$

Tanım 2.2.6[1] G ve T, X'in iki bulanık alt kümesi olsun. G ile T'nin fark kümesi $\forall x \in X$ için

$$\mu_{G-T}(x) = \mu_{G\cap\bar{T}}(x) = min(\mu_G(x), \mu_{\bar{T}}(x))$$

olmak üzere

$$G - T = \{(x, \mu_{G-T}(x) : \mu_{G-T}(x) \in [0,1])\}\text{ ' dir.}$$

Tanım 2.2.7[1] $X = U$ ve $\forall x \in U$ için $\mu_G(x) = 1$ ise U evrensel kümesi bir bulanık kümedir. $U = \{(x, \mu_U(x)) : x \in U, \mu_U(x) = 1\} = U \times 1$ şeklinde ifade edilir. G kümesi evrensel kümenin alt kümesi iken G, bulanık kümesi U'nun alt kümesi değildir. Fakat G bir kartezyen çarpımın alt kümesidir. Yani $\{(x, \mu_G(x)) \in G \times [0,1]\} \subset U \times [0,1]$' dir.

Bulanık kümeler üzerinde temel işlemlere örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.2.8[1] $X = \{x_1, x_2, x_3\,, x_4, x_5\}$ kümesi üzerinde G ve T bulanık kümeleri aşağıdaki şekilde verilsin.

$G = \{(x_1, 0{,}1), (x_2\ , 0{,}3), (x_3\ , 0), (x_4, 1), (x_5\ , 0{,}8)\}$

$T = \{(x_1\ , 0{,}5), (x_2\ , 0{,}2), (x_3\ , 0{,}4), (x_4, 1), (x_5\ , 0{,}7)\}$

$\bar{T} = \{(x_1\ , 0{,}5), (x_2\ , 0{,}8), (x_3\ , 0{,}6), (x_4, 0), (x_5\ , 0{,}3)\}$

$G - T = \{(x_1\ , 0{,}1), (x_2\ , 0{,}3), (x_3\ , 0), (x_4, 0), (x_5\ , 0{,}3)\}$

$G \cup T = \{(x_1\ , 0{,}5), (x_2\ , 0{,}3), (x_3\ , 0{,}4), (x_4, 1), (x_5\ , 0{,}8)\}$

$G \cap T = \{(x_1\ , 0{,}1), (x_2\ , 0{,}2), (x_3\ , 0), (x_4, 1), (x_5\ , 0{,}7)\}$

2.3. Bulanık Kümenin Özellikleri

G, T ve K kümeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $G \cup G = G$

ii) $G \cap G = G$

iii) $G \cap (U \times [0{,}1]) = G$

iv) $G \cup \emptyset = G$

v) $G \cap \emptyset = \emptyset$

vi) $G \cup (U \times [0{,}1]) = U \times [0{,}1]$

vii) $G \cup (U \times [0{,}1]) = U \times [0{,}1]$

viii) $G \cap T = T \cap G$

ix) $G \cup T = T \cup G$

x) $(G \cap T) \cap K = G \cap (T \cap K)$

xi) $(G \cup T) \cup K = G \cup (T \cup K)$

xii) $G \cap (T \cup K) = (G \cap T) \cup (G \cap K)$

xiii) $G \cup (T \cap K) = (G \cup T) \cap (G \cup K)$

xiv) $\bar{\bar{G}} = G$

xv) $\overline{G \cap T} = \bar{G} \cup \bar{T}$

xvi) $\overline{G \cup T} = \bar{G} \cap \bar{T}$

Burada klasik kümelerden farklı olarak bazı özelliklerde U yerine $U \times [0{,}1]$ kullanılmıştır.

2.4. Bulanık Kümelerin Cebirsel Çarpımı ve Toplamı

Tanım 2.4.1[21] G ve T iki bulanık küme olsun. G ile T bulanık cebirsel çarpımı $x\epsilon U$ için $\mu_{G.T}(x) = \mu_G(x).\mu_T(x)$olmak üzere $G.T = \{(x, \mu_{G.T}(x)): x \in U\}$ şeklinde tanımlanır ve $G.T$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.2[21] G ve T iki bulanık küme olsun. G ile T bulanık cebirsel toplamı $\mu_{G\oplus T}(x) = \mu_G(x) + \mu_T(x) - \mu_G(x)\mu_T(x)$ olmak üzere

$$G\oplus T = \left\{\left(x, \mu_{G\oplus T}(x)\right): x \in U\right\}$$

şeklinde tanımlanır. $G\oplus T$ İle gösterilir.

Örnek 2.4.3. $G = \{(x_1\ ,0{,}1), (x_2\ ,0{,}7), (x_3\ ,1), (x_4\ ,0)\}$

$$T = \{(x_1\ ,0{,}4), (x_2\ ,0{,}3), (x_3\ ,1), (x_4\ ,0{,}2)\}$$

bulanık kümeleri verilsin.

$$G.T = \left\{(x_1\ ,(0{,}1).(0{,}4)), (x_2\ ,(0{,}7).(\ 0{,}3)), \left(x_3\ ,(1).(1)\right), (x_4\ ,(0).(0{,}2))\right\}$$

$$= \{(x_1\ ,0{,}04), (x_2\ ,0{,}21), (x_3\ ,1), (x_4\ ,0)\}$$

$$G\oplus T = \{(x_1\ ,0{,}46), (x_2\ ,0{,}79), (x_3\ ,1), (x_4\ ,0{,}2)\}$$

2.4.4. Cebirsel Çarpım ve Toplamın Özellikleri

G, T ve K bulanık kümeleri için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $G.U = G$
ii) $G\oplus U = G$
iii) $G.\emptyset = \emptyset$
iv) $G\oplus\emptyset = G$
v) $G.T = T.G$
vi) $G\oplus T = T\oplus G$
vii) $(G.T).K = G.(T.K)$
viii) $(G\oplus T)\oplus K = G\oplus(T\oplus K)$
ix) $\overline{G.T} = \bar{G}\oplus\bar{T}$
x) $\overline{G\oplus T} = \bar{G}.\bar{T}$

Cebirsel çarpım ve toplamın dağılma özelliği yoktur. Küme işlemlerini ve cebirsel işlemleri ilgilendiren özellikler aşağıdaki gibidir.

i) $G.(T \cap K) = (G.T) \cap (G.K)$
ii) $G.(T \cup K) = (G.T) \cup (G.K)$
iii) $G \oplus (T \cap K) = (G \oplus T) \cap (G \oplus K)$
iv) $G \oplus (T \cup K) = (G \oplus T) \cup (G \oplus K)$

2.5. Bulanık Gruplar

Bulanık cebirsel yapılarla ilgili ilk çalışma 1971 yılında A. Rosenfeld[2] tarafından yapıldı. Rosenfeld[2] bulanık grup teorinin temel özelliklerini klasik grup teorideki sonuçları kullanılarak elde etmiştir. Bu bölümde bulanık grup tanımı verilerek bunlarla ilgili bazı teoremler verilecektir.

Tanım 2.5.1[21] X bir grup ve G, X'in bulanık alt kümesi olsun. G'nin üyelik fonksiyonu μ_G ile gösterilsin.

i) $\forall x, y \in X$ için $\mu_G(xy) \geq min\{\mu_G(x), \mu_G(y)\}$

ii) $\forall x \in X$ için $\mu_G(x^{-1}) \geq \mu_G(x)$

Bu iki şart sağlanıyor ise G'ye bulanık grup denir.

iii) e, G' nin birim elemanı olmak üzere $\mu_G(e) = 1$ koşulu da sağlanıyor ise G'ye standartlaştırılmış bulanık grup denir.

Örnek 2.5.2[21] G bir bulanık küme, $(G, .)$ bir grup olsun.

$G = \{1, -1, i, -i\}$ ve $0 < t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = 1$ olmak üzere

$\mu_G(1) = t_3$, $\mu_G(-1) = t_1$, $\mu_G(i) = \mu_G(-i) = t_2$ şeklinde tanımlayalım.

i) $\forall x, y \in G$ için $\mu_G(xy) \geq min\{\mu_G(x), \mu_G(y)\}$

$\mu_G(1 \, . -1) = \mu_G(-1) = t_1 \geq min\{\mu_G(1), \mu_G(-1)\} = t_1$

$\mu_G(i \, . -i) = \mu_G(1) = t_3 \geq min\{\mu_G(i), \mu_G(-i)\} = t_2$

$\mu_G(1 \, . -i) = \mu_G(-i) = t_2 \geq min\{\mu_G(1), \mu_G(-i)\} = t_2$

$\mu_G(\,1\,.\,i) = \mu_G(i) = t_2 \geq min\{\mu_G(1), \mu_G(i)\} = t_2$

$\mu_G(-1\,.\,i) = \mu_G(-i) = t_2 \geq min\{\mu_G(-1), \mu_G(i)\} = t_1$

$\mu_G(-1\,.-i) = \mu_G(i) = t_2 \geq min\{\mu_G(-1), \mu_G(-i)\} = t_1$

ii) $\forall x \in G$ için $\mu_G(x^{-1}) \geq \mu_G(x)$

$1 \in G$ için $\quad \mu_G(1^{-1}) = \mu_G(1) = t_3 \geq \mu_G(1) = t_3$
$-1 \in G$ için $\quad \mu_G(-1^{-1}) = \mu_G(-1) = t_1 \geq \mu_G(-1) = t_1$
$i \in G$ için $\quad \mu_G(i^{-1}) = \mu_G(-i) = t_2 \geq \mu_G(i) = t_2$
$-i \in G$ için $\quad \mu_G(-i^{-1}) = \mu_G(i) = t_2 \geq \mu_G(-i) = t_2$

(i) ve (ii) şartları sağlandığından, G bir bulanık gruptur.

Tanım 2.5.3[21] S bir grupoid olsun. Eğer her $x, y \in S$ için

$$\mu(xy) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

ise $\mu: S \to [0,1]$ dönüşümüne bir bulanık grupoid denir.

Önerme 2.5.4[21] Eğer $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ ise her bir μ bulanık altgrupoidi için $\mu(x_1 x_2 \dots\, x_n) \geq min\{\,\mu(x_i) : 1 \leq i \leq n\,\}$ eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.5.5[21] G bir grup olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mu: G \to [0,1]$ dönüşümüne bir bulanık alt grup denir.

i) $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$
ii) $\forall x \in G$ için $\mu(x) = \mu(x^{-1})$

Tanım 2.5.6[21] μ, S' nin bir bulanık altkümesi ise herhangi bir $t \in [0,1]$ için

$$A_t = \{\, x \in S :\, \mu(x) \geq t\,\}$$

kümesi μ nün level altkümesi olarak adlandırılır.

Önerme 2.5.7[21] G birimi e olan bir grup olsun. Eğer μ, G' nin bulanık altgrubu ise $\forall x \in G$ için $\mu(x) \leq \mu(e)$' dir.

İspat. Tanım 2.5.5' den $\forall x \in G$ için $\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geq min\{\mu(x), \mu(x^{-1})\} = \mu(x)$ bulunur.

Bulanık normal altgrup tanımını vermeden önce iki lemma ispatlayalım.

Lemma 2.5.8[21] Eğer μ, sonlu bir G grubunun bir bulanık altgrupoidi ise μ bir bulanık altgruptur.

İspat. $x \in G$ olsun. Önce tümevarımla ifadenin her k için doğru olduğunu gösterelim. $k = 0$ için iddia Önerme 2.5.7' nin sonucudur. $k > 0$ ve iddia $k - 1$ için doğru olsun. O zaman $\mu(x^{k-1}) \geq \mu(x)$ olacağından, $\mu(x^k) = \mu(xx^{k-1}) \geq min\{\mu(x), \mu(x^{k-1})\} = \mu(x)$ olur. Şimdi G sonlu olduğundan $x^n = e$ olacak biçimde $n \geq 1$ tamsayısı vardır. Buradan $\mu(x^{-1}) = \mu(x^{n-1}) \geq \mu(x)$ bulunur. Ayrıca $(x^{-1})^n = e$ olduğundan, benzer biçimde $\mu(x) \geq \mu(x^{-1})$' dir. Dolayısıyla $\mu(x) = \mu(x^{-1})$ ve μ bir bulanık alt gruptur.

Lemma 2.5.9[21] μ bir G grubunun bulanık alt grubu ve $x \in G$ olsun. Bu takdirde $\forall y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(y)$ olması için gerek ve yeter koşul $\mu(x) = \mu(e)$ olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\forall y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(y)$ olsun. Bu takdirde $y = e$ seçersek $\mu(x) = \mu(e)$ elde ederiz.

Tersine kabul edelim ki $\mu(x) = \mu(e)$ olsun. Bu takdirde Önerme 2.5.7' den $\forall y \in G$ için $\mu(y) \leq \mu(x)$ dir. $\mu(xy) \geq min\{\mu(x), \mu(y)\}$ olduğundan

$$\forall y \in G \text{ için } \mu(xy) \geq \mu(y) \qquad (1)$$

dir. Diğer taraftan $\mu(y) = \mu(x^{-1}xy) \geq min\,\{\mu(x), \mu(xy)\}$ ve $\forall y \in G$ için $\mu(x) \geq \mu(y)$ olduğundan $min\,\{\mu(x), \mu(xy)\} = \mu(xy)$ bu yüzden

$$\forall y \in G \text{ için } \mu(xy) \leq \mu(y) \qquad (2)$$

elde ederiz. (1) ve (2) eşitsizliklerinden istenen elde edilir.

Sonuç 2.5.10[21] Lemma 2.5.9' un hipotezi sağlansın. $\mu(x) = \mu(e)$ ise $\forall y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(yx)$' dir.

Tanım 2.5.11[21] μ bir G grubunun bulanık alt grubu olsun. Eğer $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(yx)$ ise μ ye bulanık normal alt grup denir.

Teorem 2.5.12[21] Bir G grubunun μ bulanık alt grubunun normal olması için gerek ve yeter koşul μ' nün, G' nin eşlenik sınıfları üzerinde sabit olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki μ bir bulanık normal alt grup olsun. Bu takdirde $\forall x, y \in G$ için $\mu(y^{-1}xy) = \mu(xyy^{-1}) = \mu(x)$ olur.

Tersine kabul edelim ki μ, G nin eşlenik sınıfları üzerinde sabit olsun. Bu takdirde $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(xyxx^{-1}) = \mu(x(yx)x^{-1}) = \mu(yx)$dir. Dolayısıyla Tanım 2.5.11' den μ, G' nin bulanık normal alt grubudur.

2.6. Bulanık Halkalar

Bulanık gruplar kullanılarak daha karmaşık bulanık cebirsel yapılar olan bulanık halkalar ve bulanık idealler 1982 yılında Liu[3] tarafından çalışılmıştır. 1992 yılında Dixit[5] sonlu bulanık alt kümeler üzerinde bulanık alt halka ve bulanık idealler üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu bölümde bulanık halka ve bulanık idealden bahsedeceğiz.

Tanım 2.6.1[5] Bir R halkasının bir μ bulanık alt kümesi verilsin. Eğer $\forall x, y \in R$ için

(i) $\mu(x-y) \geq min\ (\mu(x),\ \mu(y))$

(ii) $\mu(xy) \geq\ min\ (\mu(x),\ \mu(y))$

koşulları sağlanıyorsa μ bulanık alt kümesine R' nin bulanık alt halkası denir.

Tanım 2.6.2[5] Bir R halkasının bir μ bulanık alt kümesi verilsin. Eğer $\forall x, y \in R$ için

(i) $\mu(x-y) \geq min\ (\mu(x),\ \mu(y))$

(ii) $\mu(xy) \geq\ max\ (\mu(x),\ \mu(y))$

koşulları sağlanıyorsa μ bulanık alt kümesine R' nin bulanık ideali denir.

Lemma 2.6.3[5] Bir R halkasının herhangi bir bulanık alt halkası (bulanık ideali) μ olsun. Eğer $x, y \in R$ için $\mu(x) < \mu(y)$ ise $\mu(x-y) = \mu(x) = \mu(y-x)$' dir.

İspat. μ bir bulanık alt halka olduğundan ve lemmanın hipotezinden $\mu(x-y) \geq \min\big(\mu(x), \mu(y)\big) = \mu(x) = \min\big(\mu(y), \mu(x)\big)$' dir.

Eğer μ, R' nin herhangi bir bulanık alt halkası (bulanık ideali) ise her bir μ_t level altkümesi $\mu_t \geq 0$ olmak üzere R' nin bir alt halkası (ideali)' dir.

Tanım 2.6.4[5] μ, bir R halkasının herhangi bir bulanık alt halkası (bulanık ideali) ve $0 \leq t \leq \mu(0)$ olsun. μ_t alt halkası (ideali) μ' nün bir level alt halkası (level ideali)' dır.

μ' nün level alt halkalarının ailesi $\{\mu_t : t \in \mathrm{Im}\,\mu\}$'dir. Ayrıca $\mathrm{Im}\,\mu = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, $t_0 > t_1 > \dots > t_n$, $\mu_{t_0} \subset \mu_{t_1} \subset \cdots \subset \mu_{t_n} = R$' dir.

Tanım 2.6.5[5] X bir cisim ve F, X'in bir bulanık kümesi olsun. F'nin üyelik fonksiyonu μ_F ile gösterilsin. Eğer

i) $\forall x, y \in X$ için $\mu_F(x+y) \geq \min\{\mu_F(x), \mu_F(y)\}$

ii) $\forall x \in X$ için $\mu_F(-x) \geq \mu_F(x)$

iii) $\forall x, y \in X$ için $\mu_F(x.y) \geq \min\{\mu_F(x), \mu_F(y)\}$

iv) $\forall x \in X$ için $x \neq 0$ olmak üzere $\mu_F(x^{-1}) \geq \mu_F(x)$

v) $\mu_F(0) = 1$ ve $\mu_F(1) = 1$

koşulları sağlanıyorsa F'ye X'de bir bulanık cisim denir.

Önerme 2.6.6[5] F' nin X'de bir bulanık bir cisim olması için gerek ve yeter koşul

i) $\forall x, y \in X$ için $\mu_F(x-y) \geq \min\{\mu_F(x), \mu_F(y)\}$

ii) $\forall x, y \in X$ ve $y \neq 0$ için $\mu_F(xy^{-1}) \geq \min\{\mu_F(x), \mu_F(y)\}$

olmasıdır.

Önerme 2.6.7[5] X ve Y cisim, f, X'den Y'ye bir homomorfizma olsun. F, Y'de bir bulanık cisim olmak üzere F'nin ters görüntüsü $f^{-1}[F]$, X'de bir bulanık cisimdir.

İspat. $f: x \longrightarrow y$ bir homomorfizma olmak üzere

i) $\forall x, y \in X$ için $\mu_{f^{-1}(F)}(x-y) = \mu_F(f(x-y)) = \mu_F(f(x) - f(y))$

$$\geq \min\{\mu_F(f(x)), \mu_F(f(y))\}$$

$$= \min\{\mu_{f^{-1}(F)}(x), \mu_{f^{-1}(F)}(y)\}$$

ii) $\forall x, y \in X$ için $\mu_{f^{-1}(F)}(xy^{-1}) = \mu_F(f(xy^{-1})) = \mu_F(f(x)f(y^{-1}))$

$$\geq \min\{\mu_F(f(x)), \mu_F(f(y))\}$$

$$= \min\{\mu_{f^{-1}(F)}(x), \mu_{f^{-1}(F)}(y)\}$$

Önerme 2.6.8[5] Eğer F, X cismi üzerinde bir bulanık cisim ise $\forall x \in X$ için $\mu_F(-x) = \mu_F(x)$ dir. Ayrıca $0 \neq x \in F$ için $\mu_F(x^{-1}) = \mu_F(x)$ dir.

3. ESNEK KÜMELER VE ESNEK CEBİRSEL YAPILAR

1.Esnek Kümeler

Belirsizliklerle uğraşmak mühendislik, çevre bilimi, tıp bilimi ve sosyal bilimler gibi birçok alanda başlıca problemdir. Bu tür problemler klasik metotlarla çözülemez. Belirsizliklerin yol açtığı problemleri çözmek için Molodtsov[6] esnek küme teorisi olarak adlandırılan farklı bir yaklaşım önermiştir. Esnek küme teorisi çeşitli alanlarda uygulamalar için zengin bir potansiyele sahiptir ve bunların birkaçı Molodtsov' un çalışmalarında gösterilmiştir. Molodtsov' un çalışmalarının ardından esnek kümeler ile ilgili farklı uygulamalar da incelenmiştir. Daha sonra Maji ve arkadaşları[7] esnek kümeler üzerinde çeşitli işlemleri tanıtmıştır. Bu bölümde esnek küme ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım.3.1.1[7] U evrensel küme, E parametrelerin kümesi, $A \subset E$ olsun. $P(U)$ da U' nun kuvvet kümesi olsun. $F: A \to P(U)$ bir dönüşüm olmak üzere (F, A) ikilisine esnek küme denir. Başka bir ifadeyle esnek küme, U evrensel kümesinin parametreleştirilmiş alt kümesidir. $\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$, (F, A) esnek kümesinin ε- yaklaşımlı elemanlarının kümesi olarak göz önüne alınabilir. Yani bir esnek küme, küme değildir.

Örnek 3.1.2[7] Kabul edelim ki U göz önüne alınan şartlar altındaki arabaların kümesi ve E, parametrelerin kümesi olsun. Her bir parametre bir kelime ya da bir cümledir.

$E =$ { pahalı, güzel, ahşap, ucuz, bahçeli, bakımlı, bakımsız }

olsun. Bu durumda bir esnek küme tanımlamak; güzel evleri, pahalı evleri ve diğerlerini belirtmek anlamına gelir. (F, E) esnek kümesi, Mr. X' in satın alacağı evlerin çekiciliğini açıklar.

Kabul edelim ki $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ 6 evi göstersin.

e_1 ‘pahalı’ parametresini

e_2 ‘güzel’ parametresini

e_3 ‘ahşap’ parametresini

e_4 ‘ucuz’ parametresini

e_5 ‘bahçeli’ parametresini

göstermek üzere $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ şeklinde verilsin.

Kabul edelim ki $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$, $F(e_5) = \{h_1\}$ olsun. (F, E) esnek kümesi, U evrensel kümesinin alt kümelerinin $\{F(e_i), i = 1,2,3, \dots ,8\}$ parametrize edilmiş bir ailesidir ve bir nesnenin yaklaşık tanımlarının koleksiyonunu bize verir. Burada göz önüne aldığımız F dönüşümü “ (.) evler ” şeklindedir. Buradaki (.) $e \in E$ parametreleri tarafından doldurulmaktadır. Buradan $F(e_1)$’ in fonksiyonel değeri $\{h_2, h_4\}$ kümesi olan “pahalı evler” anlamına gelir. Böylece (F, E) esnek kümesini aşağıdaki gibi yaklaşımların bir koleksiyonu olarak gösterebiliriz.

(F, E) ={ pahalı evler= $\{h_2, h_4\}$, güzel evler= $\{h_1, h_3\}$, ahşap evler= $\{h_3, h_4, h_5\}$, ucuz evler= $\{h_1, h_3, h_5\}$, bahçeli evler= $\{h_1\}$}.

Her bir yaklaşım için iki kısım söz konusudur.

i) Bir tahmini p

ii) Bir v yaklaşık değer kümesi (veya kısaca değer kümesi)

Örneğin, pahalı evler= $\{h_2, h_4\}$ yaklaşımı için aşağıdaki özellikleri verebiliriz.

i) Tahmini isim pahalı evler

ii) Yaklaşık değer kümesi veya değer kümesi $\{h_2, h_4\}$’ dir.

Tanım 3.1.3[7] Bir U evrensel kümesi üzerinde (F, A) ve (G, B) iki esnek küme olsun.
i) $A \subset B$ ve

ii)$\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$ ve $G(\varepsilon)$ özdeş yaklaşımlar ise (F, A), (G, B)' nin esnek alt kümesidir ve $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$ ile gösterilir. Eğer (G, B), (F, A)' nın esnek alt kümesi ise (F, A)' ya (G, B)' nin esnek üst kümesi denir ve $(F, A) \tilde{\supseteq} (G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4[7] (F, A) ve (G, B), U evrensel kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. (F, A), (G, B)' nin esnek alt kümesi ve (G, B), (F, A)' nın esnek alt kümesi ise (F, A) ve (G, B) esnek kümeleri eşittir denir.

Tanım 3.1.5[7] Kabul edelim ki $E = \{e_1, e_2 \dots, e_n\}$ parametrelerin kümesi olsun. E' nin değilinin kümesi $\rceil E$ ile gösterilir.$\rceil E = \{\rceil e_1, \rceil e_2 \dots, \rceil e_n\}$.Burada $\forall$i için $\rceil e_i$, e_i'nin değili demektir.

Şimdi aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 3.1.6[7]

1) $\rceil(\rceil A) = A$
2) $\rceil(A \cup B) = \rceil A \cup \rceil B$
3) $\rceil(A \cap B) = \rceil A \cap \rceil B$

Tanım 3.1.7[7](F, A) esnek kümesinin tümleyeni $(F, A)^c$ olarak gösterilir ve $(F, A)^c = (F^c, \rceil A)$' dir ve

$$F^c : \rceil A \to P(U)$$

şeklinde gösterilir. $\forall \alpha \in \rceil A$ için $F^c(\alpha) = U - F(\rceil \alpha)$' dir.

F'in esnek tümleyen fonksiyonu F^c olmak üzere $(F^c)^c = F$ ve $((F, A)^c)^c = (F, A)$' dir.

Tanım 3.1.8[7] U üzerinde (F, A) esnek küme olsun. Eğer $\forall e \in A$ için $F(e) = \emptyset$ ise (F, A)' ya boş esnek küme denir ve Φ ile gösterilir.

Tanım 3.1.9 [7] U üzerinde (F, A) esnek küme olsun. Eğer $\forall e \in A$ için $F(e) = U$ ise, (F, A)'ya mutlak esnek küme denir ve $\widetilde{A}$ ile gösterilir. $\widetilde{A}^c = \Phi$, $\Phi^c = \widetilde{A}$ dır.

Aşağıda iki esnek küme üzerinde "ve" , "veya" operatörlerini vereceğiz.

Tanım 3.1.10[7] (F,A) ve (G,B), U üzerinde iki esnek küme olsun. $(F,A)\wedge(G,B)$ ile gösterilen "(F,A) ve (G,B)" işlemi $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ ile tanımlanmaktadır. Burada $\forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ için $H(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$' dır.

Tanım 3.1.11 [7] (F,A) veya (G,B) ,U üzerinde iki esnek küme olsun. $(F.A) \vee (G,B)$ ile gösterilen "(F,A)veya (G,B)" işlemi $(F,A) \vee (G,B) = (H, A \times B)$ ile tanımlanmaktadır. Burada $\forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ için $H(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cup G(\beta)$'dir.

Esnek kümelerde Demorgan kuralının olduğunu da görebiliriz.

Önerme 3.1.12[7] i)$\big((F,A) \vee (G,B)\big)^c = (F,A)^c \wedge (G,B)^c$

ii) $\big((F,A) \wedge (G,B)\big)^c = (F,A)^c \vee (G,B)^c$

İspat. **i)** Varsayalım ki $(F,A) \vee (G,B) = (O, A \times B)$ olsun.

$\big((F,A) \vee (\mathrm{G},\mathrm{B})\big)^c = (O, A \times B)^c = (O^c, \rceil(A \times B))$

$J(x,y) = F^c(x) \cap G^c(y)$ olduğu için

$(F,A)^c \wedge (G,B)^c = (F^c, \rceil A) \wedge (G^c, \rceil B)$

$= (J, \rceil A \times \rceil B)$

$= (J, \rceil(A \times B))$

$(\rceil\alpha, \rceil\beta\ ) \in (\rceil A \times \rceil B)$ alalım.

$O^c(\rceil\alpha,\ \rceil\beta\ ) = U - O(\alpha,\beta)$

$= U - [F(\alpha) \cup G(\beta)]$

$= [U - F(\alpha)] \cap [U - G(\beta)]$

$= (F^c(\rceil\alpha) \cap G^c(\rceil\beta)$

$= J\ (\rceil\alpha,\ \rceil\beta\ )$

elde edilir. Dolayısıyla O^cve J eşit olup

$\big((F,A) \vee (G,B)\big)^c = (F,A)^c \wedge (G,B)^c$ 'dir.

ii) Varsayalım ki $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ olsun.

$\big((F,A) \wedge (G,B)\big)^c = (H, A \times B)^{\,c} = (H^c, \rceil(A \times B))$

$K(x,y) = F^c(x) \cup G^c(y)$ olduğu için

$(F,A)^c \vee (G,B)^c = (F^c, \rceil A) \vee (G^c, \rceil B)$

$= (K, \rceil A \times \rceil B)$

$= (K, \rceil(A \times B))$

$(\rceil\alpha, \rceil\beta) \in (\rceil A \times \rceil B)$ alalım.

$H^c(\rceil\alpha, \rceil\beta) = U - H(\alpha,\beta)$

$= U - [F(\alpha) \cap (G,\beta)]$

$= [U - F(\alpha)] \cup [U - G(\beta)]$

$= \big(F^c(\rceil\alpha) \cup G^c(\rceil\beta)\big)$

$= K(\rceil\alpha, \rceil\beta)$

Buradan $H^c = K$' dır.

Öyleyse $\big((F,A) \wedge (G,B)\big)^c = (F,A)^c \vee (G,B)^c$

Tanım 3.1.13[7] (F,A) ve $(G,B), U$ üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin birleşimi (H,C)'dir. Burada $C = A \cup B$ ve $\forall e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & eğer \;\; e \in A - B \\ G(e) & eğer \;\; e \in B - A \\ F(e) \cup G(e) & eğer \;\; e \in A \cap B \end{cases}$$

ile tanımlanmıştır. Bu ifadeyi $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (H,C)$ biçiminde yazarız.

Tanım 3.1.14[7] (F,A) ve $(G,B), U$ üzerinde iki esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin kesişimi (H,C)'dir. Burada $C = A \cap B$ ve $\forall e \in C$ için $H(e) = F(e)$ veya $H(e) = G(e)$ (her ikisi de aynı küme olduğunda) ile tanımlanır. Bu ifadeyi $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (H,C)$ şeklinde yazarız.

Önerme 3.1.15[7]

i) $(F,A)\,\tilde{\cup}\,(F,A) = (F,A)$

ii) $(F,A)\,\tilde{\cap}\,(F,A) = (F,A)$

iii) $(F,A)\,\tilde{\cup}\,\Phi = \Phi$ (Burada Φ boş esnek kümedir.)

iv) $(F,A)\,\tilde{\cap}\,\Phi = \Phi$

v) $(F,A)\,\tilde{\cup}\,A = A$ (Burada A mutlak esnek kümedir.)

vi) $(F,A)\,\tilde{\cap}\,A = (F,A)$

Önerme 3.1.16[7]

i) $\big((F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B)\big)^{c} = (F,A)^{c}\ \tilde{\cup}\ (G,B)^{c}$

ii) $\big((F,A)\ \tilde{\cap}\ (G,B)\big)^{c} = (F,A)^{c}\ \tilde{\cap}\ (G,B)^{c}$

İspat. i) Kabul edelim ki $(F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B) = (H, A\cup B)$ olsun. Bu durumda

$$H(a) = \begin{cases} F(\alpha) & \text{eğer } \alpha \in \mathrm{A}/B \\ G(\alpha) & \text{eğer } \alpha \in B/A \\ F(a) \cup G(a) & \text{eğer } \alpha \in A\cap B \end{cases}$$

dır. Buradan $\big((F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B)\big)^{c} = (H,\ A\cup \mathrm{B})^{c}$

$= (H^{c}, \rceil A \cup \rceil B)$'dir.

elde edilir. Dolayısıyla $\forall \rceil\alpha \in \rceil A \cup \rceil B$ için $H^{c}(\rceil\alpha) = U - H(\alpha)$ 'dır.

Buradan $$H^{c}(\rceil\alpha) = \begin{cases} F^{c}(\rceil\alpha) & \text{eğer } \rceil\alpha \in \rceil A - \rceil B \\ G^{c}(\rceil\alpha) & \text{eğer } \rceil\alpha \in \rceil B - \rceil A \\ F^{c}(\rceil\alpha) \cup G^{c}(\rceil\alpha) & \text{eğer } \rceil\alpha \in \rceil A \cap \rceil B \end{cases}$$

olup $(F,A)^{c}\,\tilde{\cup}\,(G,B)^{c} = (F^{c}, \rceil A)\ \tilde{\cup}\ (G^{c}, \rceil B) = (K, \rceil A \cup \rceil B)$' dır.

Burada $$K(\rceil\alpha) = \begin{cases} F^{c}(\rceil\alpha) & \text{eğer } \rceil\alpha \in \rceil A - \rceil B \\ G^{c}(\rceil\alpha) & \text{eğer } \rceil\alpha \in \rceil B - \rceil A \\ F^{c}(\rceil\alpha) \cup G^{c}(\rceil\alpha) & \text{eğer } \rceil\alpha \in \rceil A \cap \rceil B \end{cases}$$

dır. Dolayısıyla H^{c} ve K eşittir.

Sonuç olarak $\big((F,A)\ \tilde{\cup}\ (G,B)\big)^{c} = (F,A)^{c}\ \tilde{\cup}\ (G,B)^{c}$ 'dir.

ii) Kabul edelim ki $\big((F,A)\ \tilde{\cap}\ (G,B)\big)^c = (H, A\cap B)$ olsun.

$$\big((F,A)\ \tilde{\cap}\ (G,B)\big)^c = (H^c,]A\ \cap]B)$$

ve

$$(F,A)^c\ \tilde{\cap}\ (G,B)^c = (F^c,]A\ )\ \tilde{\cap}\ (G^c,]B)\ = (K,]A\ \cap]B)$$

olsun. Burada $\forall\ ]\ \alpha \in (]A\ \cap]B)$ için

$K(]\alpha) = F^c(]\alpha)$ veya $G^c(]\alpha)$

$= F(\alpha)$ veya $G(\alpha)$ $\quad (\alpha \in A \cap B)$

$= H(\alpha)$

$= H^c(]\alpha)$

dır.Dolayısıyla K ve H^c eşittir. Sonuç olarak $\big((F,A)\ \tilde{\cap}\ (G,B)\big)^c = (F,A)^c\ \tilde{\cap}\ (G,B)^c$ ‘dir.

Önerme 3.1.17[7] $(F,A),(G,B)$ ve $(H,C), U$ üzerinde üç esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler vardır.

iii) $(F,A)\ \tilde{\cup}\ \big((G,B)\ \tilde{\cup}\ (H,C)\big) = \big((F,A)\ \tilde{\cup}\ (G,B)\big)\ \tilde{\cup}\ (H,C)$

iv) $(F,A)\ \tilde{\cap}\ \big((G,B)\ \tilde{\cap}\ (H,C)\big) = \big((F,A)\ \tilde{\cap}\ (G,B)\big)\ \tilde{\cap}\ (H,C)$

v) $(F,A)\ \tilde{\cup}\ \big((G,B)\ \tilde{\cap}\ (H,C)\big) = \big((F,A)\ \tilde{\cup}\ (G,B)\big)\ \tilde{\cap}\ \big((F,A)\ \tilde{\cup}\ (H,C)\big)$

vi) $(F,A)\ \tilde{\cap}\ \big((G,B)\ \tilde{\cup}\ (H,C)\big) = \big((F,A)\ \tilde{\cap}\ (G,B)\big)\ \tilde{\cup}\ \big((F,A)\ \tilde{\cap}\ (H,C)\big)$

İspat. Tanım 3.1.13 ve Tanım 3.1.14’ den kolayca yapılabilir.

Önerme 3.1.18[7] $(F,A),(G,B)$ ve (H,C), U üzerinde üç esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler vardır.

i) $(F,A) \vee \big((G,B) \vee (H,C)\big) = \big((F,A) \vee (G,B)\big) \vee (H,C)$

ii) $(F,A) \wedge \big((G,B) \wedge (H,C)\big) = \big((F,A) \vee (G,B)\big) \vee (H,C)$

iii) $(F,A) \vee \big((G,B) \wedge (H,C)\big) = \big((F,A) \vee (G,B)\big) \wedge \big((F,A) \vee (H,C)\big)$

iv) $(F,A) \wedge \big((\mathrm{G},\mathrm{B}) \vee (\mathrm{H},\mathrm{C})\big) = \big((\mathrm{F},\mathrm{A}) \wedge (\mathrm{G},\mathrm{B})\big) \vee \big((\mathrm{F},\mathrm{A}) \wedge (\mathrm{H},\mathrm{C})\big)$

İspat. Tanım 3.1.10 ve Tanım 3.1.11' den kolayca yapılabilir.

3.2 Esnek Gruplar

2001 yılında, Maji[7] ve diğer bilim adamları bulanık esnek küme kavramını önermiş, daha sonra da uygulamalarını vermiştir. Aktaş ve Çağman[12] çalışmalarında esnek grupları tanımlamış ve bu grupların temel özelliklerini vermiştir. Bu bölümde esnek grup kavramı verilmekte, bunların özellikleri ve uygulamaları gösterilmektedir.

Ayrıca bu bölümde G bir grup ve A boştan farklı bir küme olarak alınacaktır. R, A kümesinin bir elamanıyla G grubunun bir elemanı arasındaki keyfi bir bağıntıyı temsil etsin. A' dan G' ye bir R bağıntısı

$$R = \{(x,y) \in A \times G : \ y \in F(x)\}$$

ile tanımlansın. $F: A \rightarrow P(G)$ küme değerli dönüşümü

$$F(x) = \{y \in G : (x,y) \in R, x \in A \ ve \ y \in G\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada (F,A) ikilisi G üzerinde esnek kümedir. (A,G,R) üçlüsü yaklaşım kümesi olarak ifade edilir.

Tanım 3.2.1[12] $(F,A), G$ üzerinde esnek küme olsun. $\forall x \in A$ için $F(x) < G$ ise (F,A)' ya G üzerinde esnek grup denir.

Aşağıdaki örneği kullanarak bu tanımı açıklayalım.

Örnek 3.2.2[12] $G = A = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ ve

$F(x) = \{y \in \mathrm{G} : \ xRy \Leftrightarrow y = x^n, \ n \in \mathrm{IN}\}$şeklinde bir küme değerli fonksiyon tanımlayalım. Bu durumda (F,A) esnek grubu, G'nin alt gruplarının bir koleksiyonunu veren $\{F(x): x \in \mathrm{A}\}$ alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesidir. Yani (F,A) esnek kümesini, F dönüşümü ile tanımlanmış G'nin aşağıdaki alt gruplarının bir koleksiyonu olarak düşünebiliriz.

$F(e) = \{e\}$

$F(12) = \{e, (12)\}$

$F(13) = \{e, (13)\}$

$F(23) = \{e, (23)\}$

$F(123) = F(132) = \{e, (123), (132)\}$

$\forall x \in A$ için $F(x)$'ler G grubunun alt grubu olduğu için$(F, A), G$ üzerinde bir esnek gruptur.

Tablo 1.

x	y					
	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
e	1	0	0	0	0	0
(12)	1	1	0	0	0	0
(13)	1	0	1	0	0	0
(23)	1	0	0	1	0	0
(123)	1	0	0	0	1	1
(132)	1	0	0	0	1	1

Örnekteki esnek grubu temsil eden eşitlikler yukarıdaki Tablo 1'de verilmiştir.

$y = x^n$ ve $n \in N$ ise, burada (x, y) ikilisi 1 sayısı ile belirtilir. $y \neq x^n$ ise bu durumda (x, y) ikilisi 0 sayısı ile belirtilir. Hesaplama amacıyla herhangi bir esnek grup Tablo 1'deki gibi bir tablo formunda nümerik olarak gösterilebilir. Her esnek küme için bir esnek grup üretilemeyeceğini biliyoruz.

Örnek 3.2.2' de $x \in$ G'nin mertebesi $o(x)$ olmak üzere $G = S_3$ ve $H(x) = \{ y \in \mathrm{G} : x\ R\ y \Leftrightarrow o(x) = o(y) \}$ için (H, G), G üzerinde esnek grup değildir.

Rosenfeld'in[22] de tanımladığı bulanık grup, esnek grupların özel bir durumudur.

A, G'de bir bulanık grup ve μ_A, A'nın üyelik fonksiyonu olsun. $\mu_A : G \rightarrow [0,1]$ olmak üzere $\forall \alpha \in [0,1]$ için $F(\alpha) = \{ x \in G : \mu_A(x) \geq \alpha \}$ tarafından verilen μ_A, fonksiyonu için G'nin alt gruplarının α-level alt kümesinin ailesini düşünelim. F ailesi için aşağıdaki μ_A fonksiyonunu

$$\mu_A(x) = \sup\{\alpha : x \in F(\alpha)\}$$

şeklinde tanımlayalım. Rosenfeld'in A bulanık gruplarının ailesi $(F, [0,1])$ esnek grubuna eşittir.

Teorem 3.2.3[12] (F, A) ve (H, A), G üzerinde iki esnek grup olsun. $(F, A) \tilde{\cap} (H, A)$, G üzerinde bir esnek gruptur.

İspat. Tanım 3.1.14.' den $(F, A) \tilde{\cap} (H, A) = (U, C)$ yazarız. Burada $C = A \cap A$ ve $\forall x \in C$ için $U(x) = F(x)$ ya da $U(x) = H(x)$' dir. $U: A \to P(G)$ tanımlanır. Bu nedenle $(U, A), G$ üzerinde bir esnek kümedir. (F, A) ve (H, A), G üzerinde iki esnek grup olduğundan $\forall x \in A$ için $U(x) = F(x) < G$ ya da $U(x) = H(x) < G$' dir. O halde $(F, A) \tilde{\cap} (H, A) = (U, C)$, G üzerinde bir esnek gruptur.

Teorem 3.2.4[12] (F, A) ve $(H, B), G$ üzerinde iki esnek grup olsun. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise $(F, A) \tilde{\cup} (H, B), G$ üzerinde bir esnek gruptur.

İspat. Tanım 3.1.13.' den $(F, A) \tilde{\cup} (H, B) = (U, C)$ yazabiliriz. $A \cap \mathrm{B} = \emptyset$ olduğundan $\forall x \in C$ için $x \in A - B$ ya da $x \in B - A$ 'dır.

Eğer $x \in A - B$ ise $U(x) = F(x) < G$' dir.

Eğer $x \in A - B$ ise $U(x) = H(x) < G$' dir.

Dolayısıyla $(U, C) = (F, A) \tilde{\cup} (H, B)$, G üzerinde bir esnek gruptur.

Teorem 3.2.5[12] (F, A) ve $(H, B), G$ üzerinde esnek iki grup olsun. $(F, A) \wedge (H, B), G$ üzerinde bir esnek gruptur.

İspat. Tanım 3.2.14'den $(F, A) \wedge (H, B) = (U, A \times B)$ yazabiliriz.

$\alpha \in A$ ve $\beta \in B$ için $F(\alpha)$ ve $H(\beta), G$'nin alt grubu iken $F(\alpha) \cap H(\beta)$'da G'nin alt grubudur. $\forall(\alpha, \beta) \in A \times B$ için $U(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cap H(\beta)$, G'nin bir alt grubudur.

Sonuç olarak $(F, A) \wedge (H, B), G$ üzerinde bir esnek gruptur.

Tanım 3.2.6[12] $(F, A), G$ üzerinde bir esnek grup olsun. G'nin birim elemanı e olmak üzere $\forall x \in A$ için $F(x) = \{e\}$ ise (F, A)' ya G üzerinde birim esnek grup denir.

Teorem 3.2.7[12] $(F, A), G$ üzerinde bir birim esnek grup ve f, G'den K'ya bir homomorfizm olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $F(x) = Kerf$ ise $(f(F),\ A)$, K üzerinde birim gruptur.

İspat. e, G'nin birim elemanı olmak üzere $(F, A), G$ üzerinde birim esnek grup olduğundan $\forall x \in A$ için $F(x) = \{e\}$'dir. K'nın birim elemanı e_k olmak üzere $\forall x \in A$ için $f\big(F(x)\big) = e_k$' dır. Tanım 3.2.6'dan $(f(F), A)$, K üzerinde birim esnek gruptur.

Tanım 3.2.8[12] $(F, A\,)$, G üzerinde bir esnek grup olsun. $\forall x \in A$ için $F(x) = G$ ise (F, A)' ya, G üzerinde bir mutlak esnek grup denir.

Teorem 3.2.9[12] $(F, A), G$ üzerinde bir mutlak esnek grup ve f, G 'den K'ya bir homomorfizm olsun. $(\,f(F), A\,)$, K üzerinde mutlak esnek gruptur.

İspat. $(F, A), G$ üzerinde mutlak esnek grup olduğundan $\forall x \in A$ için $F(x) = G$'dir. $\forall x \in A$ için $f\big(F(x)\big) = f(G) = K$'dır. Tanım 3.2.8.'den $(f(F), A)$, K üzerinde mutlak esnek gruptur.

Tanım 3.2.10[12] (F, A) ve $(H, K), G$ üzerinde iki esnek grup olsun. Eğer

i) $K \subset A$
ii) $\forall x \in K$ için $H(x) < F(x)$

bu iki şart sağlanıyor ise (H, K)' ya (F, A)' nın esnek alt grubu denir ve $(H, K) \,\tilde{\leq}\, (F, A)$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.11[12] $G = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

$$A = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

$$K = A_3 = \{e, (123), (132)\}$$

gruplarını göz önüne alalım. $F(x)$ ve $H(x)$ fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$F(x) = \{\, y \in S_3 : xRy \Leftrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{x}^{\mathrm{n}}\,, \mathrm{n} \in \mathrm{N}\,\}$

$H(x) = \{ y \in S_3 : xRy \Leftrightarrow \mathrm{y} = < x > \}$

$F(e) \ = \{e\}$

$F(12) = \{e, (12)\}$

$F(13) = \{e, (13)\}$

$F(23) = \{e, (23)\}$

$F(123) = \{e, (123), (132)\}$

$F(132) = \{e, (123), (132)\}$

$H(e) \ = \{e\}$

$H(123) = \{e, (123), (132)\}$

$H(132) = \{e, (123), (132)\}$

$\forall x \in A$ için $H(x) < F(x)$ ve $A_3 < S_3$ olduğundan $(H, K) \tilde{\leq} (F, A)$'dır.

Teorem 3.2.12[12] (F, A) ve (H, A), G üzerinde iki esnek grup olsun.

1) $\forall x \in A$ için $F(x) \subseteq H(x)$ ise (F, A), (H, A)'nın esnek alt grubudur.

2) $E = \{e\}$ ve (U, E) ve (F, G), G üzerinde iki esnek grup ise (U, E), (F, G)'nin esnek alt grubudur.

Tanım 3.2.13[12] (F, A) ve (H, B) sırasıyla G ve K üzerinde iki esnek grup olsun.

$f: G \rightarrow K$, $g: A \rightarrow B$ iki fonksiyon olsun. Eğer

i) f, G'den K'ya bir homomorfizm

ii) g, A'dan B'ye bir dönüşüm

iii) $\forall x \in A$ için $f\big(F(x)\big) = H\big(g(x)\big)$

koşulları sağlanıyorsa (f, g)' ye esnek homomorfizm denir. Ayrıca (F, A) ve (H, B)'ye esnek homomofriktir denir ve $(F, A) \sim (H, B)$ ile gösterilir.

Bu tanımda eğer f, G'den K'ya bir izomorfizm ve g, A'dan B'ye bir 1-1 dönüşüm ise (f, g) esnek izomorfizm denir. Ayrıca $(F, A), (H, B)$'ye esnek izomorfiktir denir ve

$(F, A) \cong (H, B)$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.14[12] $(Z, +)$ ve $(Z_m, \oplus)$ gruplarını göz önüne alalım.

Z' den Z_m' e bir homomofizm tanımlayalım. k∈Z için $f(k) = \bar{k}$ olsun.

Z^+'dan Z_m'e bir g dönüşümü tanımlayalım. $g: Z^+ \to Z_m$ ve $k \in Z^+$için $g(k) = \bar{k}$ olsun.

$F: Z^+ \to P(Z)$ ve $F(x) = \{ y \in Z : y = 5kx, k \in Z \}$ olsun.

$H: Z_m \to P(Z_m)$ ve $H(u) = \{\bar{y} \in Z_m : y = uk, k \in 5Z\}$ olsun.

$F(x) = 5xZ$ ve $H(u) = \{\overline{ku}: k \in 5Z\}$ elde edilir.

Sonuç olarak (F, Z^+) ve (H, Z_m) sırasıyla Z ve $Z_m$üzerinde esnek gruplardır.

$f(F(x)) = \{ \overline{5xk} : k \in Z\}$ ve $H(g(x)) = \{\overline{xs}: s \in 5Z\}$ olduğundan $f(F(x)) = H(g(x))$' dir. Buradan (f, g) bir esnek homomorfizmdir ve $(F,\ Z^+)$, (H, Z_m)'e esnek homomorfiktir.

Tanım 3.2.15[12] $(F, A), G$ üzerinde bir esnek grup, (H, B)'de (F, A)'nın esnek alt grubu olsun.

$\forall x \in B$ için $H(x) \lhd F(x)$, yani $H(x)$, $F(x)$' in normal alt grubu ise (H, B)' ye (F, A)' nın normal esnek alt grubu denir ve $(H, B) \tilde{\lhd} (F, A)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.16[12] $(F, A), G$ üzerinde bir esnek grup olsun. (F, A)'nın normal esnek gruplarının bir ailesi $i \in I$ için $(H: K_i)$ olsun.

1) $\cap_{i \in I} (H_i, K_i), (F, A)$'nın bir normal esnek alt grubudur.

2) $\wedge_{i \in I} (H_i, K_i), (F, A)$'nın bir normal esnek alt grubudur.

3) $\forall$i, j∈ I için $K_i \cap K_j = \emptyset$ ise $\vee_{i \in I}(H_i, K_i), (F, A)$'nın normal esnek alt grubudur.

Tanım 3.2.17[12] (F,A) ve (H,B) sırasıyla G ve K üzerinde iki esnek grup olsun. (F,A) ve (H,B) esnek gruplarının çarpımı $\forall(x,y) \in A \times B$ için $U(x,y) = F(x) \times H(y)$ olmak üzere $(F,A) \times (H,B) = (U, A \times B)$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.2.18[12] (F,A) ve (H,B) sırasıyla G ve K üzerinde iki esnek grup olsun. $(F,A) \times (H,B)$ çarpımı $G \times K$ üzerinde bir esnek gruptur.

İspat. Tanım 3.2.17' den $(F,A) \times (H,B) = (U, A \times B)$' dir. Bu durumda $\forall(x,y) \in A \times B$ için $U(x,y) = F(x) \times H(y)$' dir. $F(x)$ ve $H(y)$, sırasıyla G ve K' nın alt grupları olduklarından $F(x) \times H(y)$ de $G \times K$' nın alt grubudur. O halde $(F,A) \times (H,B)$ çarpımı $G \times K$ üzerinde bir esnek gruptur.

3.3. Esnek Halkalar

Acar ve arkadaşları[15] çalışmalarında esnek halkalar için temel kavramları verdiler. Bu bölümde R değişmeli halkası üzerindeki bütün esnek kümeleri göz önüne alınacaktır.

Tanım 3.3.1[15] $(F,A), R$ halkası üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun. $\forall x \in R$ için $F(x)$, R'nin alt halkası ise (F,A)' ya R üzerinde esnek alt halka denir.

Örnek 3.3.2[15] $R = A$, $Z_6 = \{ 0,1,2,3,4,5 \}$ olsun.

$F: A \to P(R)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$F(x) = \{y \in R : \mathrm{x.y} = 0 \}$ şeklinde bir küme değerli fonksiyon tanımlayalım.

$F(0) = R$, $F(1) = \{0\}$, $F(2) = \{0,3\}$, $F(3) = \{0,2,4\}$, $F(4) = \{0,3\}$, $F(5) = \{0\}$.

$\forall x \in Z_6$ için $F(\alpha)$, R' nin alt halkası olduğundan (F,A), R üzerinde esnek halkadır.

Teorem 3.3.3[15] (F,A) ve $(G,B), R$ üzerinde esnek halka olsun.

1) $(F,A) \tilde{\wedge} (G,B)$ boştan farklı ise R üzerinde bir esnek halkadır.
2) $(F,A) \tilde{\cap} (G,B)$ boştan farklı ise R üzerinde bir esnek halkadır.

İspat: 1) Tanım 3.1.10' dan $(F,A) \tilde{\wedge} (G,B) = (H,C)$ yazabiliriz
Buradan $C = A \times B$ ve $\forall(a,b) \in C$ için $H(a,b) = F(a) \cap F(b)$'dir. $H(a,b) = F(a) \cap G(b) \neq \emptyset$ ‘dır. (F,A) ve (G,B), R ‘nin esnek alt halkaları olduğundan $F(a)$ ve

$G(b), R$’ nin alt halkasıdır. R’nin herhangi sayıdaki alt halkalarının kesişimi de R’nin bir alt halkası olduğundan $H(a,b) = F(a) \cap G(b)$ de R’ nin bir alt halkasıdır.
Sonuç olarak (H,C) de R üzerinde bir esnek halkadır.

2) Tanım 3.1.14’ den $(F,A)\ \tilde{\cap}\ (\mathrm{G},\mathrm{B}) = (H,C)$ yazabiliriz.
Bazı $x \in A \cap B$ için $H(x) = F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$’ dır. Burada $H(x) \neq \emptyset$ ve $F(x)$ ile $G(x)$, R’ nin alt halkasıdır. R’ nin herhangi sayıdaki alt halkalarının kesişimi de R’nin bir alt halkası olduğundan $H(x) = F(x) \cap G(x)$ de R’ nin bir alt halkasıdır. Sonuç olarak $(H,C) = (F,A) \tilde{\cap} (G,B)$ boştan farklı ise R’ nin bir esnek alt halkasıdır.

Tanım 3.3.4[15] (F,A) ve $(G,B), R$ üzerinde esnek halka olsun. Eğer

i) $B \subset \mathrm{A}$

ii) $\forall x \in supp(G,B)$ için $G(x)$, $F(x)$’ in alt halkası

ise (G,B)’ ye (F,A)’nın esnek alt halkası denir.

Örnek 3.3.5[15] $R = A = 2Z$ ve $B = 6\,Z \subset A$ olsun. $F: A \to P(R)$, $G: B \to P(R)$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. $F(x) = \{nx: n \in Z\}$, $G(x) = \{5nx: n \in Z\}$olacak şekilde küme değerli fonksiyonları tanımlayalım.
$\forall x \in B$ için $G(x) = 5xZ$, $F(x) = xZ$ nin alt halkasıdır. Böylece (G,B), (F,A)’nın esnek alt halkasıdır.
Teorem 3.3.6[15](F,A) ve (G,B), R üzerinde iki esnek halka olsun. $(F,A)\ \tilde{\cap}\ (G,B)$, (F,A) ve (G,B)’ nin bir esnek alt halkasıdır.

İspat. Tanım 3.1.14.’ den $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (H,C)$ yazabiliriz.

$A \cap B \subset A$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$, $F(x)$’in alt halkasıdır.

Böylece (H,C), (F,A)’ nın esnek alt halkasıdır. Ayrıca $A \cap B \subset B$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$, $G(x)$ ‘in alt halkasıdır. Buradan $(H,C), (F,A)$’ nın esnek alt halkasıdır.

Örnek 3.3.7[15] $R = Z$, $A = 2Z$ ve $B = 3Z$ olsun. $F: A \to P(R)$, $G: B \to P(R)$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

$F(x) = \{2nx: n \in Z\} = 2xZ$
$G(x) = \{3nx: n \in Z\} = 3xZ$

$(F,A)\ \widetilde{\cap}\ (G,B)=(H,C)$ şeklinde tanımlansın. Burada $C=A\cap B=6\,Z$' dir. $\forall x\in C$ için $H(x)=F(x)\cap G(x)=6xZ$ olup $H(x)$ $F(x)$'in ve $G(x)$'in alt halkasıdır. Sonuç olarak (F,A) ve (G,B) sırasıyla (F,A)'nın ve (G,B)'nin esnek alt halkasıdır.

4. BULANIK ESNEK KÜMELER VE BULANIK ESNEK CEBİRSEL YAPILAR

2001 Yılında Maji ve arkadaşları[17] bulanık küme ve esnek kümenin birleşimi olan bulanık esnek küme kavramını tanımlamışlar ve uygulamalarını vermişlerdir Bu bölümde bulanık esnek küme kavramı verilmekte, bu kavramın bazı özellikleri ve uygulamaları gösterilmektedir.

4.1. Bulanık Esnek Kümeler

Tanım 4.1.1[17] U evrensel küme, E parametrelerin kümesi ve $A \subset E$ olsun. U' nun bulanık alt kümelerinin kuvvet kümesini I^u ile gösterelim. $f: A \rightarrow I^u$ tanımlı bir dönüşüm olmak üzere (f, E) ikilisi U üzerinde bir bulanık esnek kümedir. Başka bir ifadeyle bulanık esnek küme, esnek kümelerde parametrelerden aldığı elemanları U' nun kuvvet kümesi yerine bulanık kümeye götürür.

Örnek 4.1.2[17] Kabul edelim ki U göz önüne alınan şartlar altındaki evlerin kümesi ve E parametrelerin kümesi olsun. Burada her bir parametre bir bulanık küme ya da bulanık kümeler içeren cümlelerdir.
$E =${pahalı (e_1), güzel (e_2), ahşap (e_3), ucuz (e_4), bahçeli (e_5)} . Bu durumda bir bulanık esnek küme pahalı evler, güzel evler ve diğerlerini belirtir. Burada (f, E) bulanık esnek kümesi Mr. X.' in alacağı evlerin çekiciliğini göstersin.
Kabul edelim ki
$f(e_1) = \{(h_1, 0{,}5), (h_2, 1), (h_3, 0{,}4), (h_4, 1), (h_5, 0{,}3), (h_6, 0)\}$
$f(e_2) = \{(h_1, 1), (h_2, 0{,}4), (h_3, 1), (h_4, 0{,}4), (h_5, 0{,}6), (h_6, 0{,}8)\}$
$f(e_3) = \{(h_1, 0{,}2), (h_2, 0{,}3), (h_3, 1), (h_4, 1), (h_5, 1), (h_6, 0)\}$
$f(e_4) = \{(h_1, 1), (h_2, 0), (h_3, 1), (h_4, 0{,}2), (h_5, 1), (h_6, 0{,}2)\}$
$f(e_5) = \{(h_1, 0{,}8), (h_2, 0{,}1), (h_3, 0{,}5), (h_4, 0{,}3), (h_5, 0{,}5), (h_6, 0{,}3)\}$

olsun.(f, E) bulanık kümesi $\{f(e_i), i = 1,2,3, \dots ,8\}$'in bir parametrize edilmiş bir ailesidir ve bir nesnenin yaklaşık tanımlarının koleksiyonunu bize verir. Bu örnekte göz önüne aldığımız f dönüşümü " (.) evler " şeklindedir. Buradaki (.) $e \in E$ parametreleri tarafından doldurulmaktadır. Pahalı evler anlamına gelen $F(e_1)$' in foksiyonel değeri $\{(h_1, 0{,}5), (h_2, 1), (h_3, 0{,}4), (h_4, 1), (h_5, 0{,}3), (h_6, 0)\}$' dir. Böylece (f, E) esnek kümesini aşağıdaki gibi yaklaşımların bir koleksiyonu olarak gösterebiliriz.

pahalı evler = $\{(h_1, 0{,}5), (h_2, 1), (h_3, 0{,}4), (h_4, 1), (h_5, 0{,}3), (h_6, 0)\}$,
güzel evler = $\{(h_1, 1), (h_2, 0{,}4), (h_3, 1), (h_4, 0{,}4), (h_5, 0{,}6), (h_6, 0{,}8)\}$,
ahşap evler = $\{(h_1, 0{,}2), (h_2, 0{,}3), (h_3, 1), (h_4, 1), (h_5, 1), (h_6, 0)\}$,
ucuz evler= $\{(h_1, 1), (h_2, 0), (h_3, 1), (h_4, 0{,}2), (h_5, 1), (h_6, 0{,}2)\}$,
bahçeli evler= $\{(h_1, 0{,}8), (h_2, 0{,}1), (h_3, 0{,}5), (h_4, 0{,}3), (h_5, 0{,}5), (h_6, 0{,}3)\}$.

Her bir yaklaşım için iki kısım söz konusudur.

iii) Bir tahmini p
iv) Bir v yaklaşık bulanık değer kümesi (veya kısaca değer kümesi)

Örneğin, pahalı evler= $\{(h_1, 0{,}5), (h_2, 1), (h_3, 0{,}4), (h_4, 1), (h_5, 0{,}3), (h_6, 0)\}$ yaklaşımı için aşağıdaki özellikleri verebiliriz.

iii) Tahmini isim pahalı evler

iv) Yaklaşık değer kümesi veya değer kümesi
$\{(h_1, 0{,}5), (h_2, 1), (h_3, 0{,}4), (h_4, 1), (h_5, 0{,}3), (h_6, 0)\}$' dir.

Tanım 4.1.3[17] (f, A) ve $(g, B), U$ evrensel kümesi üzerinde iki bulanık esnek küme olsun.

i) $A \subset B$ ve
ii) $\forall \varepsilon \in A$ için $f(\varepsilon)$, $g(\varepsilon)$' nin bulanık alt kümesi ise
(f, A), (g, B)' nin bulanık esnek alt kümesidir.

Örnek 4.1.4[17] (f, A) ve $(g, B), U$ üzerinde iki bulanık esnek küme olsun.

Burada $A =$ { güzel, ucuz, bahçeli } ve $B =$ { güzel, ucuz, bahçeli, bakımlı }.
f (güzel)= { $(h_1, 0{,}4), (h_2, 0{,}6), (h_3, 0{,}5), (h_4, 0{,}8), (h_5, 1)\}$,

f (ucuz) = $\{(h_1, 1), (h_2, 0{,}5), (h_3, 0{,}5), (h_4, 1), (h_5, 0{,}7)\}$,
f(bahçeli) = $\{ (h_1, 0{,}5), (h_2, 0{,}6), (h_3, 0{,}8), (h_4, 0{,}8), (h_5, 0{,}7)\}$,
g(güzel) = $\{ (h_1, 0{,}4), (h_2, 0{,}7), (h_3, 0{,}6), (h_4, 0{,}9), (h_5, 1)\}$,
g(ucuz)= $\{(h_1, 1), (h_2, 0{,}6), (h_3, 0{,}5), (h_4, 1), (h_5, 1)\}$,
g(bahçeli)= $\{(h_1, 0{,}6), (h_2, 0{,}6), (h_3, 0{,}6), (h_4, 0{,}5), (h_5, 1)\}$.
g(bakımlı)= $\{(h_1, 0{,}4), (h_2, 0{,}6), (h_3, 0{,}5), (h_4, 0{,}8), (h_5, 1)\}$.
Yani $(f, A) \tilde{\subset} (g, B)$'dir.

Tanım 4.1.4[17] (f, A) ve (g, B), U evrensel kümesi üzerinde iki bulanık esnek küme olsun. (f, A), (g, B)' nin bulanık esnek alt kümesi ve (g, B), (f, A)' nın bulanık esnek alt kümesi ise (f, A) ve (g, B) bulanık esnek kümeleri eşittir denir.

Tanım 4.1.5[17] (f, A), U evrensel kümesi üzerinde bulanık esnek küme olsun. (f, A) bulanık esnek kümesinin tümleyeni $(f, A)^c$ olarak gösterilir ve $(f, A)^c = (f^c, \rceil A)$' dir. Burada $f^c : \rceil A \to I^u$ şeklinde gösterilir. $\forall \alpha \in \rceil A$ için $f^c(\alpha)$, $f(\rceil \alpha)$' nın bulanık tümleyenidir.

Tanım 4.1.6[17] (f, A) bir esnek küme olsun. $\forall \varepsilon \in A$ için $f(\varepsilon), U$' nun boş bulanık kümesi ise (f, A) boş bulanık esnek kümedir ve Φ ile gösterilir.

Tanım 4.1.7[17] (f, A) bir bulanık esnek küme olsun. $\forall \varepsilon \in A$ için $f(\varepsilon) = U$ ise (f, A) mutlak bulanık esnek kümedir ve $\widetilde{A}$ ile gösterilir. $\widetilde{A}^{\,c} = \Phi$ ve $\Phi^c = \widetilde{A}$.

Tanım 4.1.8[17] (f, A) ve (g, B), U üzerinde iki bulanık esnek küme olsun. $(f, A) \wedge (g, B)$ ile gösterilen "(f, A) ve (g, B)" işlemi $(f, A) \wedge (g, B) = (h, A \times B)$ ile tanımlanmaktadır. Burada $\forall$ $(\alpha, \beta) \in A \times$ B için $h(\alpha, \beta) = f(\alpha) \tilde{\cap} g(\beta)$' dır ve $\tilde{\cap}$ iki bulanık kümenin bulanık kesişim operatörüdür.

Tanım 4.1.9[17] (f, A) veya (g, B) , U üzerinde iki bulanık esnek küme olsun. $(f, A) \vee (g, B)$ ile gösterilen "(f, A)veya (g, B)" işlemi $(f, A) \vee (g, B) = (h, A \times B)$ ile tanımlanmaktadır. Burada $\forall(\alpha, \beta) \in A \times B$ için $h(\alpha, \beta) = f(\alpha) \tilde{\cup} g(\beta)$' dir ve $\tilde{\cup}$ iki bulanık kümenin bulanık birleşim operatörüdür.

Bulanık Esnek kümelerde Demorgan kuralının olduğunu da görebiliriz.

Önerme 4.1.10[17] i)$\big((f,A) \vee (g,B)\big)^c = (f,A)^c \wedge (g,B)^c$

ii) $\big((f,A) \wedge (g,B)\big)^c = (f,A)^c \vee (g,B)^c$

İspat . **(i)** $(f,A) \vee (g,B) = (o, A\times B)$ olsun. Tanım 4.1.9' dan $o(\alpha,\beta) = f(\alpha) \tilde{\cup} g(\beta)$ yazabiliriz.

$$\big((f,A) \vee (g,B)\big)^c = (o, A \times B)^c = (o^c, \rceil A \times \rceil B)$$

Tanım 3.1.5' den $\rceil(e_1,e_2) = (\rceil e_1, \rceil e_2)$ ve $\rceil(A,B) = (\rceil A, \rceil B)$ yazabiliriz. $\alpha \in \rceil A$ ve $\beta \in \rceil B$ olsun.

$$o^c(\alpha,\beta) = \big(f(\alpha) \tilde{\cup} g(\beta)\big)^c = f^c(\alpha) \tilde{\cap} g^c(\beta)\text{'dır.}$$

$(f,A)^c \wedge (g,B)^c = (f^c, \rceil A) \wedge (g^c, \rceil B) = (h, \rceil A \times \rceil B)$ olsun.

Burada $h(\alpha,\beta) = f^c(\alpha) \tilde{\cap} g^c(\beta) = o^c(\alpha,\beta)$' dir.

Böylece o^c ve h eşittir. Yani $\big((f,A) \vee (\mathrm{g},\mathrm{B})\big)^c = (f,A)^c \wedge (g,B)^c$' dır.

(ii) $(f,A) \wedge (g,B) = (h, A\times B)$ olsun. Tanım 4.1.8' den $h(\alpha,\beta) = f(\alpha) \tilde{\cap} g(\beta)$' dir.

$$\big((f,A) \wedge (g,B)\big)^c = (h, A \times B)^c = (h^c, \rceil A \times \rceil B)$$

yazabiliriz. Şimdi $\alpha \in \rceil A$ ve $\beta \in \rceil B$ olsun.

$h^c(\alpha,\beta) = \big(f(\alpha) \tilde{\cap} g(\beta)\big)^c = f^c(\alpha) \tilde{\cup} g^c(\beta)$' dir.

$(f,A)^c \vee (g,B)^c = (f^c, \rceil A) \vee (g^c, \rceil B) = (o, \rceil A \times \rceil B)$ olsun.

$o(\alpha,\beta) = f^c(\alpha) \tilde{\cup} g^c(\beta) = h^c(\alpha,\beta)$' dir.

Böylece h^c ve o eşittir. Yani $\big((f,A) \wedge (g,B)\big)^c = (f,A)^c \vee (g,B)^c$' dır.

Tanım 4.1.11[17] (f,A) ve (g,B), U evrensel kümesi üzerinde iki bulanık esnek küme olsun. (f,A) ve (g,B) bulanık esnek kümelerinin birleşimi (h,C) ile gösterilir.

Burada $C = A \cup B$ ve $\forall e \in C$ için

$$h(e) = \begin{cases} f(e) & eğer \;\; e \in A - B \\ g(e) & eğer \;\; e \in B - A \\ f(e) \mathbin{\tilde{\cup}} g(e) & eğer \;\; e \in A \cap B \end{cases}$$

$(h, C) = (f, A) \mathbin{\tilde{\cup}} (g, B)$ yazabiliriz.

Tanım 4.1.12[17] (f, A) ve $(g, B), U$ üzerinde iki bulanık esnek küme olsun. Bu esnek kümelerin kesişimi (h, C) esnek kümesidir. Burada $C = A \cap B$ ve $\forall e \in C$ için $h(e) = f(e) \cap g(e)$ ile tanımlanır. $(h, C) = (f, A) \mathbin{\tilde{\cap}} (g, B)$' dir.

Önerme 4.1.13[17]

i) $(f, A) \mathbin{\tilde{\cup}} (f, A) = (f, A)$

ii) $(f, A) \mathbin{\tilde{\cap}} (f, A) = (f, A)$

iii) $(f, A) \mathbin{\tilde{\cup}} \Phi = \Phi$ (Burada Φ boş bulanık esnek kümedir)

iv) $(f, A) \mathbin{\tilde{\cap}} \Phi = \Phi$

v) $(f, A) \mathbin{\tilde{\cup}} \tilde{A} = \tilde{A}$ (Burada $\tilde{A}$ mutlak bulanık esnek kümedir)

vi) $(f, A) \mathbin{\tilde{\cap}} \tilde{A} = (f, A)$

Önerme 4.1.14[17]

i) $\big((f, A) \mathbin{\tilde{\cup}} (g, B)\big)^{c} = (f, A)^{c} \mathbin{\tilde{\cup}} (g, B)^{c}$

ii) $\big((f, A) \mathbin{\tilde{\cap}} (g, B)\big)^{c} = (f, A)^{c} \mathbin{\tilde{\cap}} (g, B)^{c}$

İspat.

i) $(h, A \cup B) = (f, A) \mathbin{\tilde{\cup}} (g, B)$ olsun.

$$h(e) = \begin{cases} f(e) & \text{eğer} \;\; e \in A - B \\ g(e) & \text{eğer} \;\; e \in B - A \\ f(e) \mathbin{\tilde{\cup}} g(e) & \text{eğer} \;\; e \in A \cap B \end{cases}$$

olup $\big((f, A) \mathbin{\tilde{\cup}} (g, B)\big)^{c} = \big((h, A \cup B)\big)^{c} = (h^{c}, \rceil A \cup \rceil B)$ olur. Ayrıca

$$h^{c}(\rceil e) = \begin{cases} f^{c}(\rceil e)'\text{nin bulanık tümleyeni} & \text{eğer} \;\; \rceil e \in \rceil A - \rceil B \\ g^{c}(\rceil e)'\text{nin bulanık tümleyeni} & \text{eğer} \;\; \rceil e \in \rceil B - \rceil A \\ f^{c}(\rceil e) \mathbin{\tilde{\cup}} g^{c}(\rceil e)'\text{nin bulanık tümleyeni} & \text{eğer} \;\; \rceil e \in \rceil A \cap \rceil B \end{cases}$$

$(f,A)^c \ \tilde{\cap} \ (g,B)^c = \ (f^c, \rceil A) \ \tilde{\cap} \ (g^c, \rceil B) = (k, \rceil A \cup \rceil B)$' dir. Burada

$$k(\rceil e) = \begin{cases} f^c(\rceil e)'\text{nin bulanık tümleyeni} & \text{eğer } \rceil e \in \rceil A - \rceil B \\ g^c(\rceil e)'\text{nin bulanık tümleyeni} & \text{eğer } \rceil e \in \rceil B - \rceil A \\ f^c(\rceil e) \ \tilde{\cup} \ g^c(\rceil e)'\text{nin bulanık tümleyeni} & \text{eğer } \rceil e \in \rceil A \cap \rceil B \end{cases}$$

h^c ve k fonksiyonları eşittir. Öyleyse $\left((f,A)\right) \ \tilde{\cup} \ \left(g,B)\right)^c = (f,A)^c \ \tilde{\cup} \ (g,B)^c$ 'dir.

ii) $(f,A) \ \tilde{\cap} \ (g,B) = \ (h, A \cap B)$ olsun.

$\left((f,A) \ \tilde{\cup} \ (g,B)\right)^c = \left(\ (h, A \cup B)\right)^c = (\mathrm{h}^c, \rceil A \cap \rceil B).$

Burada $h^c(\rceil e) = f^c(\rceil e)$ ya da $g^c(\rceil e)$. Şimdi

$(f,A)^c \ \tilde{\cap} \ (g,B)^c = (f^c, \rceil A) \ \tilde{\cap} \ (g^c, \rceil B) = (k, \rceil A \cup \rceil B)$' dir. Burada $\rceil e \in \rceil A \cap \rceil B$'dir.

$k(\rceil e) = f^c(\rceil e)$ ya da $g^c(\rceil e)$ olur.

h^c ve k fonksiyonları eşittir. Öyleyse $\left((f,A) \ \tilde{\cap} \ \left(g,B)\right)^c = (f,A)^c \ \tilde{\cap} \ (g,B)^c$ 'dir.

4.2. Bulanık Esnek Gruplar

Bu bölümde Aktaş ve Çağman[12] tarafından tanımlanan esnek grupların bulanık kümeler üzerindeki uygulaması olan Aygünoğlu ve Aygün[18] tarafından çalışılan bulanık esnek grup kavramı ve temel özellikleri verilecektir.

Tanım 4.2.1[18] X bir grup ve (f,A) X üzerinde bir bulanık esnek küme olsun. $\forall a \in A$ ve $\forall x,y \in X$ için

(1) $f_a(x.y) \geq min\left(f_a(x), f_a(y)\right)$

(2) $f_a(x^{-1}) \geq f_a(x)$

şartları sağlanıyorsa (f,A) bulanık esnek kümesine X üzerinde bulanık esnek grup denir.

Önerme 4.2.2[18] (f,A) bir bulanık esnek küme olsun. $\forall a \in A$ ve $\forall x,y \in X$ için $f_a(x.y^{-1}) \geq min\left(f_a(x), f_a(y)\right)$ olması için gerek ve yeter şart (f,A)' nın bulanık esnek grup olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki (f,A) bulanık esnek grup olsun. $\forall x,y \in X$ için

$$f_a(x.y^{-1}) \geq min\left(f_a(x), f_a(y)\right)$$

olduğunu göstermeliyiz. $\forall a \in A$ ve $\forall x, y \in X$ için

$$f_a(x.y^{-1}) \geq min\big(f_a(x), f_a(y^{-1})\big) \geq min\big(f_a(x), f_a(y)\big)\text{' dır.}$$

Tersine $\forall x, y \in X$ için $f_a(x.y^{-1}) \geq min\left(f_a(x), f_a(y)\right)$ olsun.

$\forall x \in X$ ve e, X' in birim elemanı olmak üzere

$f_a(e) = f_a(x.x^{-1}) \geq min\big(f_a(x), f_a(x^{-1})\big) \geq min\big(f_a(x), f_a(x)\big) = f_a(x)$.

Ayrıca $f_a(x^{-1}) = f_a(e.x^{-1}) \geq min\big(f_a(e), f_a(x)\big) \geq min\big(f_a(x), f_a(x)\big) = f_a(x)$.

$\forall a \in A$ ve $\forall x, y \in X$ için

$f_a(x.y) = f_a(x.(y^{-1})^{-1}) \geq min\big(f_a(x^{-1}), f_a(y^{-1})\big) \geq min\big(f_a(x), f_a(y)\big)$.

Buradan (f, A) bulanık esnek gruptur.

Önerme 4.2.3[18] (f, A) bir bulanık esnek grup ve e, X' in birim elemanı olsun. $\forall a \in A$ ve $\forall x \in X$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

(1) $f_a(x^{-1}) = f_a(x)$

(2) $f_a(e) \geq f_a(x)$

İspat. (1) $\forall x \in X$ için $f_a(x) = f_a((x^{-1})^{-1}) \geq f_a(x^{-1})$.

(2) $\forall x \in X$ için $f_a(e) = f_a(x.x^{-1}) \geq min\big(f_a(x), f_a(x^{-1})\big) = min\big(f_a(x), f_a(x)\big) = f_a(x)$.

Örnek 4.2.4[18] Tüm doğal sayıların kümesi N olsun ve $\forall n \in N$ için $f(n) = f_n: R \to I$ ve $f: N \to I^R$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \exists k \in Z, \quad x = k2^n \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$xy = k2^n$ olsun. $f_n(xy) = \frac{1}{n} \geq min\left\{\frac{1}{n}, 0\right\} = 0 \geq min\{f(x), f(y)\}$.

Burada Z tüm tamsayılarım kümesidir. (f, N) ikilisi R üzerinde bir bulanık esnek küme formundadır. (f, N) bulanık esnek kümesi R üzerinde bulanık esnek gruptur.

Teorem 4.2.5[18] (f, A) ve (g, B), X üzerinde iki bulanık esnek grup olsun. $(f, A)\ \tilde{\cap}\ (g, B)$ kesişimi X üzerinde bulanık esnek alt gruptur.

İspat. $(f, A) \cap (g, B) = (h, C)$ olsun. Burada $C = A \cap B$, $\forall x \in X$ ve $\forall c \in C$ için $h_c = f_c \wedge g_c$ ve $h_c(x) = f_c(x) \wedge g_c(x)$' dir . Keyfi bir $c \in C$ ve $\forall x \in X$ için

$f_c(x.y) \geq \ min\big(f_c(x), f_c(y)\big)$, $f_c(x^{-1}) \geq f_c(x)$ ve

$g_c(x.y) \geq \ min\big(g_c(x), g_c(y)\big)$, $g_c(x^{-1}) \geq g_c(x)$.

Buradan

(i) $(f_c \wedge g_c)(x.y) = \ f_c(x.y) \wedge g_c(x.y) \geq min\ \big(f_c(x), f_c(y)\big) \wedge min\ \big(g_c(x), g_c(y)\big)$

$= \ min\ \big(f_c(x) \wedge g_c(x), f_c(y) \wedge g_c(y)\big)$

$= \ min\ \big((f_c \wedge g_c)(x), (f_c \wedge g_c)(y)\big)$

(ii) $\forall x \in X$ ve $\forall c \in C$ için $(f_c \wedge g_c)(x^{-1}) \geq (f_c \wedge g_c)(x)$' dir.

(i) ve (ii) şartları sağlandığından $(f, A) \ \tilde{\cap}\ (g, B)$ kesişimi X üzerinde bulanık esnek alt gruptur.

Teorem 4.2.6[18] (f, A) ve (g, B), X üzerinde iki bulanık esnek grup olsun. $A \cap B = \emptyset$ ise $(f, A)\ \tilde{\cup}\ (g, B)$, X üzerinde bulanık esnek alt gruptur.

İspat. $A \cap B = \emptyset$ ve $(f, A) \cup (g, B) = (h, C)$ olsun.

$\forall c \in C$ için $c \in A - B$ veya $c \in B - A$ dır.

$c \in A - B$ ise $h_c = f_c$, X' in bir bulanık alt grubudur.

$c \in B - A$ ise $h_c = g_c$, X' in bir bulanık alt grubudur.

Buradan $(f, A)\ \tilde{\cup}\ (g, B)$, X üzerinde bulanık esnek alt gruptur.

Tanım 4.2.7[18] (f, A), X üzerinde bulanık esnek küme olsun. $X_\alpha = \{x \in X :\ f_a(x) \geq \alpha\ ,\ \forall a \in A\}$ alt kümesine bulanık esnek level alt kümesi denir.

Teorem 4.2.8[18](f, A), X üzerinde bulanık esnek grup olsun. Bu takdirde X_α level kümesi X'in bir alt grubudur.

İspat. $e \in X$ ve $\forall a \in A$ için f_a bulanık grup olduğundan $f_a(e) \geq \alpha$ dolayısıyla $e \in X_\alpha$. Yani $X_\alpha \neq 0$' dır. $\forall x, y \in X_\alpha$ olmak üzere $xy^{-1} \in X_\alpha$ olduğunu gösterelim. $\forall a \in A$ için f_a bulanık grup olduğundan

$$f_a(xy^{-1}) \geq min\{\ f_a(x), f_a(y)\}$$

$$\geq \{\alpha, \alpha\} = \alpha$$

olduğundan $xy^{-1} \in X_\alpha$' dir. Sonuç olarak X_α, X'in bir alt grubudur.

4.3.Bulanık Esnek Halkalar

Subramanian ve arkadaşları[19] çalışmasında bulanık esnek halka tanımını vererek bulanık esnek halkaların homomorfik görüntüsünden bahsetmiştir. Bu bölümde bulanık esnek halkalar ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 4.3.1[19] U evrensel küme ve E parametrelerin kümesi olsun, (f, A), bir R halkası üzerinde boştan farklı bulanık esnek küme olsun. (f, A), R üzerinde bulanık esnek halka olması için gerek ve yeter koşul $\forall a \in A$ ve $\forall x, y \in R$ için

i) $f_a(x + y) \geq min\{\, f_a(x)\,,\, f_a(y)\,\}$

ii) $f_a(-x) \geq f_a(x)$

iii) $f_a(xy) \geq min\{\, f_a(x)\,,\, f_a(y)\,\}$

olmak üzere $f(a) = f_a$' nın R' nin bulanık alt halka olmasıdır.

Tanım 4.3.2[19] (f, A), U üzerinde bulanık esnek küme olsun. $\forall \alpha \in [0,1]$ için $(f, A)_\alpha = \{(f_a)_\alpha : a \in A\}$, α −level esnek küme olarak tanımlanır.

Tanım 4.3.3[19] A ve B sırasıyla X ve Y kümeleri için parametreler kümesi olmak üzere $\varphi: X \rightarrow Y$ ve $\psi: A \rightarrow B$ iki fonksiyon olsun. (φ, ψ) bulanık esnek fonksiyon olarak tanımlanır.

Tanım 4.3.4[19] (φ, ψ) bulanık esnek fonksiyon altında (g, B)' nin ters görüntüsü $(\varphi, \psi)^{-1}$ ile gösterilir ve $(\varphi, \psi)^{-1}\,(g, B) = \left(\varphi^{-1}(g), \psi^{-1}(B)\right)$ tarafından tanımlanan bulanık esnek kümedir.

Tanım 4.3.5[19] $(\varphi, \psi) : X \rightarrow Y$ bulanık esnek fonksiyon olsun. Eğer φ, $X \rightarrow Y$ bir homomorfizm ise (φ, ψ) bulanık esnek homomorfizmdir. Eğer φ, $X \rightarrow Y$ bir izomorfizm ve ψ, A' dan B' ye 1-1 dönüşüm ise (φ, ψ) bulanık esnek izomorfizmdir.

Tanım 4.3.6[19] f_a, R' de bulanık esnek halka ve $\theta: R \rightarrow R^{\prime}$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f_a^{\theta}: R \rightarrow [0,1]$ ve $f_a^{\theta}(x) = f_a(\theta x)$ olarak tanımlanır.

Önerme 4.3.7[19] R ve $R^{\prime}$ iki esnek halka ve $\theta: R \rightarrow R^{\prime}$ bir esnek homomorfizm olsun. f_b , R' nin bulanık esnek halkası ise $\theta^{-1}(\, f_b)$ de R' nin bulanık esnek halkasıdır

İspat. $R^{\prime}$' nin bulanık esnek halkası f_b ve $x, y \in R$ olsun.

i) $\mu_{\theta^{-1}(f_b)}(x+y) = \mu_{f_b}\theta(x+y)$

$$=\mu_{f_b}(\theta x+\theta y) \geq min\{\mu_{f_b}(\theta x), \mu_{f_b}(\theta y)\}$$

$$\geq min\left\{\mu^{(x)}_{\theta^{-1}(f_b)}, \mu^{(y)}_{\theta^{-1}(f_b)}\right\}$$

ii) $\mu^{(-x)}_{\theta^{-1}(f_b)} = \mu_{f_b}\theta(-x) \geq \mu_{f_b}\theta(x) = \mu^{(x)}_{\theta^{-1}(f_b)}$

iii) $\mu^{(xy)}_{\theta^{-1}(f_b)} = \mu_{f_b}\theta(xy) = \mu_{f_b}\big((\theta x)(\theta y)\big) \geq min\{\mu_{f_b}(\theta x), \mu_{f_b}(\theta y)\}$

$\geq min\left\{\mu^{(x)}_{\theta^{-1}(f_b)}, \mu^{(y)}_{\theta^{-1}(f_b)}\right\}$

i), ii) ve iii) şartları sağlandığından $\theta^{-1}(f_b)$ R' nin bulanık esnek halkasıdır.

Önerme 4.3.8[19] f_a, R' de bulanık esnek halka ve $\theta: R \to R^{\,|}$ bir esnek homomorfizm olsun. $f_a^{\theta} = \left\{\left(x, f_a^{\theta}(x)\right) : x \in R\right\}$ bulanık esnek kümesi R' nin bulanık esnek alkasıdır.

İspat. $x, y \in R$ olsun.

i) $f_a^{\theta}(x+y) = f_a\theta(x+y)$

$= f_a(\theta x+\theta y) \geq min\{f_a\theta(x), f_a\theta(y)\} \geq min\{f_a^{\theta}(x), f_a^{\theta}(y)\}$

ii) $f_a^{\theta}(-x) = f_a\big(\theta(-x)\big) = f_a\big(\theta(x)\big) \geq f_a^{\theta}(x)$

iii) $f_a^{\theta}(xy) = f_a\theta(xy) = f_a\big((\theta x)(\theta y)\big) \geq min\{f_a(\theta x), f_a(\theta y)\}$

$\geq min\{f_a^{\theta}(x), f_a^{\theta}(y)\}$

i), ii) ve iii) şartları sağlandığından f_a^{θ} , R'nin bulanık esnek halkasıdır.

Önerme 4.3.9[19] f_a, U' da bulanık esnek küme olsun. f_a, U' da bulanık esnek halka olması için gerek ve yeter şart $\forall a \in A$ ve keyfi bir $\alpha \in [0,1]$ için $(f_a)_\alpha \neq 0$, $(f_a)_\alpha$, α −level esnek kümesi U üzerinde bulanık esnek halka olmasıdır.

İspat. f_a, U üzerinde bulanık esnek halka olsun. $\forall a \in A$ için f_a, U' nun bulanık alt halkasıdır. Keyfi bir $\alpha \in [0,1]$ için $(f_a)_\alpha \neq 0$. Kabul edelim ki $x, y \in (f_a)_\alpha$ için $f_a(x) \geq \alpha$ ve $f_a(y) \geq \alpha$.

i) $(f_a)_\alpha\,(x+y) \geq min\{(f_a)_\alpha\,(x), (f_a)_\alpha\,(y)\} \geq min\{f_a(x), f_a(y)\}$

$$\geq min\{\alpha, \alpha\} \geq \alpha$$

$$x+y \in (f_a)_\alpha$$

ii) $(f_a)_\alpha\,(-x) \geq (f_a)_\alpha\,(x) \geq f_a(x) \geq \alpha$

$$-x \in (f_a)_\alpha$$

iii) $(f_a)_\alpha\,(xy) \geq min\{(f_a)_\alpha\,(x), (f_a)_\alpha\,(y)\} \geq min\{f_a(x), f_a(y)\}$
$\geq min\{\alpha, \alpha\} \geq \alpha$. Burada $xy \in (f_a)_\alpha$' dır.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ BULANIK ESNEK KÜMELER

Genelleştirilmiş bulanık esnek küme kavramı Maji ve Arkadaşları[7] tarafından tanıtılan bulanık esnek küme kavramının genişletilmesi ile Majumdar ve Samanta[20] tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada esnek küme derecelendirilerek veya kümeye aitlik derecesi verilerek bulanık hale dönüştürülmüştür. Genelleştirilmiş bulanık esnek küme tanımı parametrelerin her bir değerine göre bir bulanık kümenin seçiminde belirsizlik içerdiğinden daha gerçekçidir. Genelleştirilmiş bulanık esnek küme kavramın tanımlanmasıyla çeşitli özellikleri çalışıldı ve bir karar verme probleminin çözümünde bu kavram [20] çalışmasında kullanıldı.

5.1. Genelleştirilmiş Bulanık Esnek Kümeler

Tanım 5.1.1[20] $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ evrensel küme ve $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ parametrelerin kümesi olsun. Burada (U, E) ikilisi esnek kümedir. $F: E \to I^u$ ve $\mu: E \to I = [0,1]$ tanımlı dönüşüm olsun. Burada I^u, U' nun bütün bulanık alt kümelerinin koleksiyonudur. $F_\mu: E \to I^u \times I$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanan bir fonksiyondur. $f_e \in I^u$ olmak üzere $F_\mu(e) = (f_e, \mu(e))$' dir.

F_μ' ye (U, E) esnek evrensel kümesi üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek küme denir. Burada her e_i parametresi için $F_\mu(e_i) = \left(f_{e_i}, \mu(e_i)\right)$, sadece U' nun elemanlarının f_{e_i}' deki üyelik derecesini belirtmez, aynı zamanda $\mu(e_i)$ ile gösterilen böyle bir aitliğin mümkün olma derecesini belirtir.

Örnek 5.1.2[20] $U = \{x_1, x_2, x_3\}$ üç gömleğin kümesi ve $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ gömleklerin niteliklerini gösteren parametrelerin kümesi olsun. Burada $e_1 =$ parlak , $e_2 =$ ucuz , $e_3 =$ renkli' dir. $F: A \to I^u$ ve μ, E' nin bulanık alt kümesi olmak üzere $\mu: E \to I = [0,1]$ aşağıdaki şekilde tanımlansın

$\mu(e_1) = 0{,}1$, $\mu(e_2) = 0{,}4$, $\mu(e_3) = 0{,}6$.

$F_\mu: E \to I^u \times I$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$F_\mu(e_1) = (\{(x_1, 0{,}7), (x_2, 0{,}4), (x_3, 0{,}3)\}, 0{,}1)$

$F_\mu(e_2) = (\{(x_1, 0{,}1), (x_2, 0{,}2), (x_3, 0{,}9)\}, 0{,}4)$

$F_\mu(e_3) = (\{(x_1, 0{,}8), (x_2, 0{,}5), (x_3, 0{,}2)\}, 0{,}6)$

O halde F_μ , (U, E) üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek kümedir.

Tanım 5.1.3[20] F_μ ve G_δ, (U, E) üzerinde iki genelleştirilmiş bulanık esnek küme olsun. Eğer

(i) μ , δ' nın bulanık alt kümesi

(ii) $\forall e \in E$ için f_e, g_e' nin bulanık alt kümesi

şartları sağlanıyorsa F_μ' ye G_δ' nın genelleştirilmiş bulanık esnek alt kümesidir denir ve $F_\mu \subseteq G_\delta$ ile gösterilir.

Örnek 5.1.4[20] Örnek 5.1.2. de (U, E) üzerinde verilen F_μ genelleştirilmiş bulanık esnek kümesi verilsin. (U, E) üzerinde G_δ genelleştrilmiş bulanık esnek kümesi aşağıdaki şekilde tanımlansın. Burada $\delta \in I^E$' dir.

$G_\delta(e_1) = (\{(x_1, 0{,}2), (x_2, 0{,}3), (x_3, 0{,}1)\}, 0{,}1)$
$G_\delta(e_2) = (\{(x_1, 0), (x_2, 0{,}1), (x_3, 0{,}7)\}, 0{,}3)$
$G_\delta(e_3) = (\{(x_1, 0{,}7), (x_2, 0{,}3), (x_3, 0{,}1)\}, 0{,}5)$
$F_\mu(e) = \big(f_e, \mu(e)\big)$ ve $G_\delta(e) = \big(g_e, \delta(e)\big)$' dir. $\forall e \in E$ için $\mu(e) \geq \delta(e)$' dir. Ayrıca $\forall e \in E$ ve $\forall x \in U$ için $f_e(x) \geq g_e(x)$ olduğundan μ , δ' nın bulanık alt kümesi ve f_e, g_e' nin bulanık alt kümesidir. O halde G_δ, F_μ' nün genelleştirilmiş bulanık esnek alt kümesidir.

Tanım 5.1.5[20] F_μ ve G_δ, (U, E) üzerinde iki genelleştirilmiş bulanık esnek küme olsun. Eğer $\forall e \in E$ için $\delta(e) = \mu^c(e)$ ve $g_e = {f_e}^c$ ise G_δ' ya F_μ' nün tümleyeni denir ve ${F_\mu}^c = G_\delta$ ile gösterilir.

Tanım 5.1.6[20] F_μ ve G_δ, (U, E) üzerinde iki genelleştirilmiş bulanık esnek küme olsun. F_μ ve G_δ kümelerinin birleşimi $H_v: E \to I^u \times I$, $H_v(e) = \big(h_e, v(e)\big)$ olmak üzere

$F_\mu \tilde{\cup} G_\delta = H_v$ ile tanımlanır. Burada $h_e = max\{f_e, g_e\}$ ve $v(e) = max\{\mu(e), \delta(e)\}$' dir.

Tanım 5.1.7[20] F_μ ve G_δ, (U, E) üzerinde iki genelleştirilmiş bulanık esnek küme olsun. F_μ ve G_δ kümelerinin kesişimi

$$H_v: E \to I^u \times I,\ H_v(e) = \big(h_e, v(e)\big)$$

olmak üzere $F_\mu \tilde{\cap} G_\delta = H_v$ ile tanımlanır. Burada $h_e = min\{f_e, g_e\}$ ve $v(e) = min\{\mu(e), \delta(e)\}$' dir.

Örnek 5.1.8[20] Sırasıyla Örnek 5.1.2. ve örnek 5.1.4.' de tanımlanan F_μ ve G_δ geneleştirilmiş bulanık esnek kümelerini göz önüne alalım. $F_\mu \tilde{\cup} G_\delta = H_v$ olsun. Burada $H_v: E \to I^u \times I$, $H_v(e) = \big(h_e, v(e)\big)$ ile tanımlı dönüşümdür. Ayrıca $h_e = max\ \{f_e, g_e\}$ ve $v(e) = max\ \{\mu(e), \delta(e)\}$' dir.

$H(e) = max\{f_e, g_e\} = max\ \{\{(x_1, 0{,}2), (x_2, 0{,}3), (x_3, 0{,}1)\},\ \{(x_1, 0{,}7), (x_2, 0{,}4), (x_3, 0{,}3)\}, \{(x_1, 0{,}7), (x_2, 0{,}4), (x_3, 0{,}3)\}\}$ ve $v(e) = max\ \{\mu(e), \delta(e)\} = \{0{,}1, 0{,}1\} = 0{,}1$' dir.

$$F_\mu \tilde{\cup} G_\delta = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \quad F_\mu \tilde{\cap} G_\delta = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Tanım 5.1.9[20] $\Phi_\theta: E \to I^u \times I$ ve $\Phi_\theta(e) = \big(\vartheta_e, \theta(e)\big)$ ile tanımlansın. Burada $\forall e \in E$ için $f_e = \bar{0}$ ve $\theta(e) = 0$ ise genelleştirilmiş bulanık esnek kümeye genelleştirilmiş boş bulanık esnek küme denir ve Φ_θ ile gösterilir.

Tanım 5.1.10[20] $\tilde{A}_\alpha : E \to I^u \times I$ ve $\tilde{A}_\alpha(e) = \big(A_e, \alpha(e)\big)$ ile tanımlansın. Burada $\forall e \in E$ için $A_e = \bar{1}$ ve $\alpha(e) = 1$ ise genelleştirilmiş bulanık esnek kümeye bir genelleştirilmiş mutlak bulanık esnek küme denir ve $\tilde{A}_\alpha$ ile gösterilir.

Önerme 5.1.11[20] F_μ, (U, E) üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek küme olmak üzere aşağıdaki önermeler doğrudur.

(i) $F_\mu = F_\mu \tilde{\cup} F_\mu$

(ii) $F_\mu \tilde{\cap} F_\mu = F_\mu$

(iii) $F_\mu \tilde{\cup} \Phi_\theta = F_\mu$

(iv) $F_\mu \,\tilde{\cap}\, \Phi_\theta = \Phi_\theta$

(v) $F_\mu \,\tilde{\cup}\, \tilde{A}_\alpha = \tilde{A}_\alpha$

(vi) $F_\mu \,\tilde{\cap}\, \tilde{A}_\alpha = F_\mu$

İspat.

(i) $F_\mu \,\tilde{\cup}\, F_\mu = H_v$ olsun. $H_v(e) = \big(h_e, v(e)\big)$ ve $\forall e \in E$ için $h_e = max\{f_e\,, f_e\} = f_e$ ve $v(e) = max\{\mu(e)\,, \mu(e)\} = \mu(e)$' dir.

O halde $F_\mu \,\tilde{\cup}\, F_\mu = F_\mu$

(ii) $F_\mu \,\tilde{\cap}\, F_\mu = H_v$ olsun. $H_v(e) = \big(h_e, v(e)\big)$ ve $\forall e \in E$ için $h_e = min\{f_e\,, f_e\} = f_e$ ve $v(e) = min\{\mu(e)\,, \mu(e)\} = \mu(e)$' dir.

O halde $F_\mu \,\tilde{\cap}\, F_\mu = F_\mu$.

(iii) $F_\mu \,\tilde{\cup}\, \Phi_\theta = H_v$ olsun. $H_v(e) = \big(h_e, v(e)\big)$ ve $\forall e \in E$ için $h_e = max\{f_e\,, \varphi(e)\} = max\{f_e, \bar{0}\} = f_e$ ve $v(e) = max\{\mu(e)\,, \theta(e)\} = max\{\mu(e), 0\} = \mu(e)$.

O halde $H_v = F_\mu$ olduğundan $F_\mu \,\tilde{\cup}\, \Phi_\theta = F_\mu$' dir.

(iv) $F_\mu \,\tilde{\cap}\, \Phi_\theta = H_v$ olsun. $H_v(e) = \big(h_e, v(e)\big)$ ve $\forall e \in E$ için $h_e = min\{f_e\,, \varphi(e)\} = min\{f_e, \bar{0}\} = \bar{0}$ ve $v(e) = min\{\mu(e)\,, \theta(e)\} = min\{\mu(e), 0\} = 0$.

O halde $H_v = \Phi_\theta$ olduğundan $F_\mu \,\tilde{\cap}\, \Phi_\theta = \Phi_\theta$' dir.

(v) $F_\mu \,\tilde{\cup}\, \tilde{A}_\alpha = H_v$ olsun. $H_v(e) = \big(h_e, v(e)\big)$ ve $\forall e \in E$ için $h_e = max\big\{f_e\,, \tilde{A}_e\big\} = max\{f_e, \bar{1}\} = \bar{1}$ ve $v(e) = max\{\mu(e)\,, \alpha(e)\} = max\{\mu(e), 1\} = 1$' dir.

O halde $H_v = \tilde{A}_\alpha$ olduğundan $F_\mu \,\tilde{\cup}\, \tilde{A}_\alpha = \tilde{A}_\alpha$' dir.

(vi) $F_\mu \,\tilde{\cap}\, \tilde{A}_\alpha = H_v$ olsun. $H_v(e) = \big(h_e, v(e)\big)$ ve $\forall e \in E$ için $h_e = min\big\{f_e\,, \tilde{A}_e\big\} = min\{f_e, \bar{1}\} = f_e$ ve $v(e) = min\{\mu(e)\,, \alpha(e)\} = min\{\mu(e), 1\} = \mu(e)$' dir.

O halde $H_v = F_\mu$ olduğundan $F_\mu \,\tilde{\cap}\, \tilde{A}_\alpha = F_\mu$' dir.

Önerme 5.1.12[20] Aşağıdaki önermeler doğrudur.

a) $F_\mu \tilde{\cup} F_\mu{}^c, \tilde{A}_\alpha$ ’ nın esnek alt kümesi genelleştirilmiş bulanık esnek alt grubudur.

b) $\Phi_\theta, F_\mu \tilde{\cap} F_\mu{}^c$’ nin esnek alt kümesidir.

İspat. **a)** $F_\mu \tilde{\cup} F_\mu{}^c = H_v$ olsun. $H_v(e) = \left(h_e, v(e)\right)$ ve $\forall e \in E$ için $h_e = max\{f_e\,, f_e{}^c\} \leq \bar{1}$ ve $v(e) = max\{\mu(e)\,, \mu^c(e)\} \leq 1$’ dir.

O halde $H_v,\ \tilde{A}_\alpha$ ’ nın genelleştirilmiş bulanık esnek altkümesidir.

b) $F_\mu \tilde{\cap} F_\mu{}^c = H_v$ olsun. $H_v(e) = \left(h_e, v(e)\right)$ ve $\forall e \in E$ için

$h_e = min\{f_e\,, f_e{}^c\} \geq 0$ ve $v(e) = min\{\mu(e)\,, \mu^c(e)\} \geq 0$’ dır.
O halde , Φ_θ, H_v’ nin genelleştirilmiş bulanık esnek alt grubudur.

Önerme 5.1.13[20] F_μ , G_δ ve H_λ, (U, E) üzerinde üç genelleştirilmiş bulanık esnek küme olmak üzere aşağıdaki önermeler doğrudur.

(i) $F_\mu \tilde{\cup} G_\delta = G_\delta \tilde{\cup} F_\mu$

(ii) $F_\mu \tilde{\cap} G_\delta = G_\delta \tilde{\cap} F_\mu$

(iii) $F_\mu \tilde{\cup} (G_\delta \tilde{\cup} H_\lambda) = (F_\mu \tilde{\cup} G_\delta) \tilde{\cup} H_\lambda$

(iv) $F_\mu \tilde{\cap} (G_\delta \tilde{\cap} H_\lambda) = (F_\mu \tilde{\cap} G_\delta) \tilde{\cap} H_\lambda$

İspat. **(i)** $F_\mu \tilde{\cup} G_\delta = H_\lambda$ve $G_\delta \tilde{\cup} F_\mu = K_v$ olsun. $H_\lambda(e) = \left(h_e, \lambda(e)\right)$ ve $K_v(e) = \left(k_e, v(e)\right)$olarak tanımlanır. $\forall e \in E$ için $h_e = max\{f_e\,,\ g_e\} = max\{g_e\,, f_e\} = k_e$ ve $\lambda(e) = max\{\mu(e)\,, \delta(e)\} = v(e)$. Burada $H_\lambda = K_v$ olduğundan $F_\mu \tilde{\cup} G_\delta = G_\delta \tilde{\cup} F_\mu$’ dir.

(ii) $F_\mu \tilde{\cap} G_\delta = H_\lambda$ve $G_\delta \tilde{\cap} F_\mu = K_v$ olsun. $H_\lambda(e) = \left(h_e, \lambda(e)\right)$ ve $K_v(e) = \left(k_e, v(e)\right)$olarak tanımlanır. $\forall e \in E$ için $h_e = min\{f_e\,,\ g_e\} = min\{g_e\,, f_e\} = k_e$ ve $\lambda(e) = min\{\mu(e)\,, \delta(e)\} = v(e)$. Burada $H_\lambda = K_v$ olduğundan $F_\mu \tilde{\cap} G_\delta = G_\delta \tilde{\cap} F_\mu$’ dir.

(iii) ve **(iv)** Tanım 5.1.6. ve Tanım 5.1.7. kullanılarak benzer şekilde yapılır.

5.2. Genelleştirilmiş Bulanık Esnek Kümeler Üzerinde Bağıntı

Tanım 5.2.1 [20] F_μ ve G_δ, (U, E) esnek evrensel kümesi üzerinde iki genelleştirilmiş bulanık esnek küme ve $C \subseteq E^2$ olsun. F_μ' den G_δ' ya bulanık esnek bir R bağıntısı $R: C \to I^u \times I$ve $\forall(e, f) \in C$ için $R(e, f) = F_\mu(e) \cap G_\delta(e)$ ile tanımlansın. $R(e, f)$ ifadesine F_μ' den G_δ' ya bir bulanık esnek bağıntı denir.

$R(e, f)$ bağıntısı aşağıdaki tanımla genelleştirilebilir.

Tanım 5.2.2[20] Δ bir indis kümesi olmak üzere $\left(e_{i_1}, e_{i_{2,\dots,}} e_{i_n}\right) \in C$ için $F = \left\{f^i_{\mu_i}, i \in \Delta\right\}$, (U, E) üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek kümenin bir koleksiyonu ve $C \subset E^n$ olsun.

Bu takdirde $R: C \to I^u \times I$' ya $R\left(e_{i1}, e_{i2,\dots,} e_{in}\right) = \cap_{j=1}^n f^i_{\mu_i}\left(e_{i_j}\right)$ olarak tanımlanır.

Genelleştirilmiş bulanık esnek bağıntı çeşitli karar verme problemlerinde kullanılır. Buna örnek olarak aşağıdaki problem verilebilir.

Kabul edelim ki evrensel küme x_1, x_2, x_3, x_4 gibi 4 makine, yani $U = \{x_1, x_2, x_{3,} x_4\}$ ve üç parametre e_1, e_2, e_3 bu makinelerin belli özel görevlerine göre onların performanslarını göstersin. Buna göre $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. Bir firma makinelerin sadece iki özelliğine bağlı olarak makineleri satın almak istesin. F_μ ve G_δ sırasıyla A ve B uzmanları tarafından iki gözlem olsun. Bunların üyelik matrisleri $F_\mu$ve G_δ aşağıdaki şekilde verilsin.

$$F_\mu = (F, \mu) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$G_\delta = (G, \mu) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

F_μ ve G_δ arasında $R: C \to I^u \times I$' ya genelleştirilmiş bulanık esnek bağıntı verilsin.

$$\begin{pmatrix} R & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \lambda \\ (e_1,e_1) & (0{,}4) & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ (e_1,e_2) & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & (0{,}6) & 0{,}5 \\ (e_1,e_3) & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & (0{,}4) & 0{,}3 \\ (e_2,e_1) & 0{,}4 & (0{,}6) & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ (e_2,e_2) & (0{,}7) & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ (e_2,e_3) & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & (0{,}4) & 0{,}3 \\ (e_3,e_1) & 0{,}4 & 0{,}4 & (0{,}5) & 0{,}3 & 0{,}5 \\ (e_3,e_2) & 0{,}6 & 0{,}4 & (0{,}5) & 0{,}6 & 0{,}7 \\ (e_3,e_3) & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & (0{,}4) & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Burada en iyi makineyi belirlemek için ilk olarak, son sütun hariç her bir satırdaki en yüksek aitlik derecesini (parantezle belirlenen) işaretleyelim. Şimdi makinelerin her birinin skoru, her bir satırdaki en yüksek değer ile λ değerinin çarpılmasıyla elde edilecektir. Buna göre skoru en yüksek olan makine istenilen makinedir.

Bu tabloda (e_i, e_i), $i = 1{,}2{,}3$ çiftlerinin değerlerini göz önünde bulundurmuyoruz. Buna göre skor tablosu aşağıdaki şeklindedir.

$$\begin{pmatrix} R & (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) & (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) & (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \\ x_i & x_1 & x_4 & x_4 & x_2 & x_1 & x_4 & x_3 & x_3 & x_4 \\ skor & \times & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}6 & \times & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}5 & \times \\ \lambda & & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}5 & & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}7 & \end{pmatrix}$$

Bu tabloya göre firma en yüksek skorlu makineyi seçecektir. Dolayısıyla x_3 makinesini satın alacaktır.

6.GENELLEŞTİRİLMİŞ BULANIK ESNEK CEBİRSEL YAPILAR

Rosenfeld[2] tarafından bulanık gruplar kavramının, Aktaş ve Çağman[12] tarafından esnek gruplar kavramlarının tanımlanması ve bu kavramların çeşitli araştırmacılar tarafından çalışılması ile bulanık kümeler ve esnek kümeler üzerinde birçok cebirsel yapı tanımlanarak bu yapıların özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde Majumdar ve Samanta[20] tarafından tanımlanan genelleştirilmiş bulanık esnek kümeler kullanılarak genelleştirilmiş bulanık esnek grup ve bulanık esnek halka kavramını tanımlayacak bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

6.1 Genelleştirilmiş Bulanık Esnek Gruplar

Tanım 6.1.1 F_μ , (U, E) esnek evrensel kümesi üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek küme olsun. Eğer $\forall e \in E$ için $\mu(e) > 0$ ve

(i) $\forall e \in E$ için ve $\forall x, y \in U$ için $f_e(xy) \geq \min\{f_e(x), f_e(y)\}$

(ii) $\forall x \in U$ için $f_e(x) = f_e(x^{-1})$

şartları sağlanıyor ise F_μ' ye (U, E) esnek evrensel kümesi üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek grup denir.

Örnek 6.1.2 $U = \{e, a, b, ab\}$, Klein'ın 4-lü grubu olmak üzere $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $\mu: E \to I = [0,1]$ fonksiyonu

$\mu(e_1) = 0{,}1,\ \mu(e_2) = 0{,}4,\ \mu(e_3) = 0{,}6$

olarak tanımlansın.

$f_{e_1}(ab) = 0{,}4,\ f_{e_1}(a) = 0{,}4, f_{e_1}(b) = 0{,}6, f_{e_1}(e) = 0{,}5$

$f_{e_2}(ab) = 0{,}5, f_{e_2}(a) = 0{,}6, f_{e_2}(b) = 0{,}5\ f_{e_2}(e) = 1$

$f_{e_3}(ab) = 0{,}8$, $f_{e_3}(a) = 0{,}9$, $f_{e_3}(b) = 0{,}8$, $f_{e_3}(e) = 0{,}6$

olarak tanımlansın ve $\forall x \in U$ için $x^2 = e$ olsun.

$\forall e \in E$ için $\mu(e) > 0$ olmalı. $\mu(e_1) = 0{,}1 \geq 0$, $\mu(e_2) = 0{,}4 \geq 0$, $\mu(e_3) = 0{,}6 \geq 0$ olduğundan bu şart sağlanır.

(i) F_μ' nün genelleştirilmiş bulanık esnek grup olması için $\forall e \in E$ ve $\forall x, y \in U$ için $f_e(xy) \geq \min\{f_e(x), f_e(y)\}$ olduğunu göstermeliyiz. $e_1 \in E$ ve

$a, b \in U$ için $f_{e_1}(ab) = 0{,}5 \geq min\{f_{e_1}(a), f_{e_1}(b)\} = min\{0{,}4, 0{,}6\} = 0{,}4.$

$a, e \in U$ için $f_{e_1}(ae) = f_{e_1}(a) = 0{,}4 \geq min\{f_{e_1}(a), f_{e_1}(e)\} = min\{0{,}4, 0{,}5\} = 0{,}4.$

$b, e \in U$ için $f_{e_1}(be) = f_{e_1}(b) = 0{,}6 \geq min\{f_{e_1}(b), f_{e_1}(e)\} = min\{0{,}6, 0{,}5\} = 0{,}5.$

$ab, a \in U$ için $f_{e_1}(aba) = f_{e_1}(aab) = f_{e_1}(a^2b) = f_{e_1}(b) = 0{,}6 \geq$

$$min\{f_{e_1}(ab), f_{e_1}(a)\} = min\{0{,}4, 0{,}4\} = 0{,}4.$$

$ab, b \in U$ için $f_{e_1}(abb) = f_{e_1}(ab^2) = f_{e_1}(a) = 0{,}4 \geq$

$$min\{f_{e_1}(ab), f_{e_1}(b)\} = min\{0{,}4, 0{,}6\} = 0{,}4.$$

$e_2$ve e_3 parametreleri için de bu şartın sağlandığı benzer şekilde gösterilebilir.

(ii) Klein'in 4-lü grubunda her elemanın tersi kendisine eşit olduğundan $\forall x \in U$ için $f_e(x) = f_e(x^{-1})$ şartı da sağlanır.

O halde (i) ve (ii) şartları sağlandığından $F_\mu = (f_e, \mu(e))$ genelleştirilmiş bulanık esnek gruptur.

Teorem 6.1.3 F_μ ve G_δ, (U, E) üzerinde iki genelleştirilmiş bulanık esnek grup olsun. Bu takdirde $F_\mu \,\tilde{\cap}\, G_\delta$, (U, E) üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek gruptur.

İspat. F_μ ve G_δ, (U, E) üzerinde iki genelleştirilmiş bulanık esnek grup olduğundan $\forall e \in E$ için $\mu(e) > 0$ ve $\delta(e) > 0$' dır. $F_\mu \,\tilde{\cap}\, G_\delta = H_v$ olsun.

(i) Buna göre $H_v = (h_e, v(e))$' dir. $v(e) = min\{\mu(e), \delta(e)\} > 0$' dır.

Ayrıca $\forall e \in E$ ve $\forall x, y \in U$ için $h_e(xy) \geq min\{f_e(xy), g_e(xy)\}$' dir. f_e ve g_e bulanık grup olduklarından

$h_e(xy) = min\{f_e(xy), g_e(xy)\} \geq min\{min\{f_e(x), f_e(y)\}, min\{g_e(x), g_e(y)\}\} =$
$min\{min\{f_e(x), g_e(x)\}, min\{f_e(y), g_e(y)\}\} = min\{h_e(x), h_e(y)\}$ elde edilir.

(ii) $\forall x \in U$ için $h_e(x) = h_e(x^{-1})$ olduğunu göstermeliyiz. $h_e = max\{f_e, g_e\}$ ve F_μ ve G_δ iki genelleştirilmiş bulanık esnek grup olduğundan

$h_e(x) = max\{f_e(x), g_e(x)\} = max\{f_e(-x), g_e(-x)\} = h_e(-x)$ olur.

O halde (i) ve (i) şartları sağlandığından $F_\mu \widetilde{\cap} G_\delta$, (U, E) üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek gruptur.

Tanım 6.1.4 F_μ ve G_δ, (U, E) esnek evrensel kümesi üzerinde iki genelleştirilmiş bulanık esnek grup olsun. Eğer

(i) μ, δ' nın bulanık alt kümesi

(ii) $\forall e \in E$ için f_e, g_e' nin bulanık alt grubu

ise F_μ' ye G_δ' nın genelleştirilmiş bulanık esnek alt grubu denir.

Örnek 6.1.5 Örnek 6.1.2' de (U, E) üzerinde verilen F_μ genelleştirilmiş bulanık esnek grubu verilsin. (U, E) üzerinde G_δ genelleştirilmiş bulanık esnek grubu aşağıdaki şekilde tanımlansın

$\delta(e_1) = 0{,}5$, $\delta(e_2) = 0{,}7$, $\delta(e_3) = 0{,}9$ olarak tanımlansın.

$g_{e_1}(ab) = 0{,}5$, $g_{e_1}(a) = 0{,}5$, $g_{e_1}(b) = 0{,}7$, $g_{e_1}(e) = 0{,}6$

$g_{e_2}(ab) = 0{,}7$, $g_{e_2}(a) = 0{,}8$, $g_{e_2}(b) = 0{,}7$, $g_{e_2}(e) = 1$

$g_{e_3}(ab) = 0{,}9$, $g_{e_3}(a) = 0{,}9$, $g_{e_3}(b) = 1$, $g_{e_3}(e) = 0{,}8$

(i) μ, δ' nın bulanık alt kümesi olduğunu göstermeliyiz. $\forall e \in E$ için $\delta(e_1) = 0{,}5 \geq \mu(e_1) = 0{,}1$, $\delta(e_2) = 0{,}7 \geq \mu(e_2) = 0{,}4$, $\delta(e_3) = 0{,}9 \geq \mu(e_3) = 0{,}6$ olduğundan μ, δ' nın bulanık alt kümesidir.

(ii) $\forall e \in E$ ve $\forall x \in U$ için $g_{e_1}(x) \geq f_{e_1}(x)$ olduğu da görülebilir.

O halde (i) ve (i) şartları sağlandığından F_μ, G_δ' nın genelleştirilmiş bulanık esnek alt grubudur.

Tanım 6.1.6 $\tilde{A}_\alpha : E \to I^u \times I$ ve $\tilde{A}_\alpha(e) = (A_e, \alpha(e))$ ile tanımlansın. Burada $\forall e \in E$ için $A_e = \bar{1}$ ve $\alpha(e) = 1$ ve A_e bir bulanık grup ise $\tilde{A}_\alpha$ ‘ ya genelleştirilmiş mutlak bulanık esnek grup denir.

Önerme 6.1.7 F_μ, (U, E) üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek grup ve $\tilde{A}_\alpha$ genelleştirilmiş mutlak bulanık esnek grup olmak üzere aşağıdaki önermeler doğrudur.

(1) $F_\mu \tilde{\cap} F_\mu$, F_μ' nün bir genelleştirilmiş bulanık esnek alt grubudur.

(2) $F_\mu \tilde{\cap} \tilde{A}_\alpha$, F_μ' nün bir genelleştirilmiş bulanık esnek alt grubudur.

(3) $F_\mu \tilde{\cup} \tilde{A}_\alpha$ genelleştirilmiş bulanık esnek gruptur.

İspat. (1) $F_\mu \tilde{\cap} F_\mu = H_v$ olsun. $H_v(e) = (h_e, v(e))$ ve $\forall e \in E$ için $h_e = min\{f_e, f_e\} = f_e$ ve $v(e) = min\{\mu(e), \mu(e)\} = \mu(e)$' dir. $\forall e \in E$ için

(i) $\forall e \in E$ için $\mu(e) \geq \mu(e)$' dir.

(ii) $\forall e \in E$ için f_e, f_e' nin bulanık alt grubudur.

O halde (i) ve (i) şartları sağlandığından $F_\mu \tilde{\cap} F_\mu$, F_μ' nün bir genelleştirilmiş bulanık esnek alt grubudur.

(2) $F_\mu \tilde{\cap} \tilde{A}_\alpha = H_v$ olsun. $H_v(e) = (h_e, v(e))$ ve $\forall e \in E$ için $h_e = min\{f_e, A_e\} = min\{f_e, 1\} = f_e$ ve $v(e) = min\{\mu(e), \alpha(e)\} = min\{\mu(e), 1\} = \mu(e)$' dir. $\forall e \in E$ için

(i) $\forall e \in E$ için $\alpha(e) = 1 \geq \mu(e)$' dir.

(ii) $\forall e \in E$ için f_e, A_e' nin bulanık alt grubudur.

O halde (i) ve (i) şartları sağlandığından $F_\mu \tilde{\cap} F_\mu$, $\tilde{A}_\alpha$ ' nin bir genelleştirilmiş bulanık esnek alt grubudur.

(3) Tanım 5.1.6 ve Tanım 6.1.1 kullanılarak kolay bir şekilde ispatlanır.

Tanım 6.1.8 (U, E) birim esnek grup ve F_μ, (U, E) üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek grup ise F_μ' ye genelleştirilmiş birim bulanık esnek grup denir.

6.2. Genelleştirilmiş Bulanık Esnek Halkalar

Tanım 6.2.1 F_μ, (U,E) evrensel kümesi üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek küme olsun. Eğer $\forall e \in E$ için $\mu(e) > 0$ ve

iv) $\forall x,y \in R$ için $f_a(x-y) \geq min\{\, f_a(x)\,,\, f_a(y)\,\}$

v) $\forall x,y \in R$ için $f_a(xy) \geq min\{\, f_a(x)\,,\, f_a(y)\,\}$

şartları sağlanıyor ise F_μ'ye (U,E) esnek evrensel kümesi üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek halka denir.

Örnek 6.2.2 $Z_3 = \{\, 0{,}1{,}2 \,\}$ halkası, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ parametrelerin kümesi ve $\mu: E \rightarrow I = [0{,}1]$ fonksiyonu

$$\mu(e_1) = 0{,}5,\ \ \mu(e_2) = 0{,}3,\ \ \mu(e_3) = 0{,}7$$

olarak tanımlansın.

$$f_{e_1}(0) = 0{,}4,\ \ f_{e_1}(1) = 0{,}3,\ f_{e_1}(2) = 0{,}3$$

$$f_{e_2}(0) = 0{,}5,\ f_{e_2}(1) = 0{,}2,\ f_{e_2}(2) = 0{,}2$$

$$f_{e_3}(0) = 1,\ f_{e_3}(1) = 0{,}8,\ f_{e_3}(2) = 0{,}8$$

olarak tanımlansın.

$\forall e \in E$ için $\mu(e) > 0$ olmalı. $\mu(e_1) = 0{,}5 \geq 0,\ \ \mu(e_2) = 0{,}3 \geq 0,\ \ \mu(e_3) = 0{,}7 \geq 0$ olduğundan bu şart sağlanır.

(i) F_μ' nün genelleştirilmiş bulanık esnek halka olması için $\forall e \in E$ ve $\forall x,y \in U$ için $f_e(x-y) \geq \min\{f_e(x), f_e(y)\}$ olduğunu göstermeliyiz. $e_1 \in E$ ve

$0{,}1 \in U$ için

$$f_{e_1}(0-1) = f_{e_1}(-1) = f_{e_1}(2) = 0{,}3 \geq min\{f_{e_1}(0), f_{e_1}(1)\} = min\{0{,}4,\ \ 0{,}3\} = 0{,}3.$$

$1{,}0 \in U$ için $f_{e_1}(1-0) = f_{e_1}(1) = 0{,}3 \geq min\{f_{e_1}(1), f_{e_1}(0)\} = min\{0{,}3, 0{,}4\} = 0{,}3.$

$0{,}2 \in U$ için

$$f_{e_1}(0-2) = f_{e_1}(-2) = f_{e_1}(1) = 0{,}3 \geq min\{f_{e_1}(0), f_{e_1}(2)\} = min\{0{,}4, 0{,}3\} = 0{,}3.$$

$2,0 \in U$ için

$f_{e_1}(2-0) = f_{e_1}(2) = 0,3 \geq min\{f_{e_1}(2), f_{e_1}(0)\} = min\{0,3, 0,4\} = 0,3.$

$1,2 \in U$ için

$f_{e_1}(1-2) = f_{e_1}(-1) = f_{e_1}(2) = 0,3 \geq min\{f_{e_1}(1), f_{e_1}(2)\} = min\{0,3, 0,3\} = 0,3.$

$2,1 \in U$ için

$f_{e_1}(2-1) = f_{e_1}(1) = 0,3 \geq min\{f_{e_1}(2), f_{e_1}(1)\} = min\{0,3, 0,3\} = 0,3.$

$e_2$ve e_3 parametreleri için de bu şartın sağlandığı benzer şekilde gösterilebilir.

(ii) $\forall x, y \in R$ için $f_a(xy) \geq min\{\, f_a(x)\,,\, f_a(y)\,\}$ olduğunu göstermeliyiz. $e_1 \in E$ ve

$0,1 \in U$ için $f_{e_1}(0.1) = f_{e_1}(0) = 0,4 \geq min\{f_{e_1}(0), f_{e_1}(1)\} = min\{0,4,\ 0,3\} = 0,3.$

$1,0 \in U$ için $f_{e_1}(1.0) = f_{e_1}(0) = 0,4 \geq min\{f_{e_1}(1), f_{e_1}(0)\} = min\{0,3, 0,4\} = 0,3.$

$0,2 \in U$ için $f_{e_1}(0.2) = f_{e_1}(0) = 0,4 \geq min\{f_{e_1}(0), f_{e_1}(2)\} = min\{0,4, 0,3\} = 0,3.$

$2,0 \in U$ için $f_{e_1}(2.0) = f_{e_1}(0) = 0,4 \geq min\{f_{e_1}(2), f_{e_1}(0)\} = min\{0,3, 0,4\} = 0,3.$

$1,2 \in U$ için $f_{e_1}(1.2) = f_{e_1}(2) = 0,3 \geq min\{f_{e_1}(1), f_{e_1}(2)\} = min\{0,3, 0,3\} = 0,3.$

$2,1 \in U$ için $f_{e_1}(2.1) = f_{e_1}(2) = 0,3 \geq min\{f_{e_1}(2), f_{e_1}(1)\} = min\{0,3, 0,3\} = 0,3.$

$e_2$ve e_3 parametreleri için de bu şartın sağlandığı benzer şekilde gösterilebilir.

(i)ve (ii) şartları sağlandığından f_μ , genelleştirilmiş bulanık esnek halkadır.

Teorem 6.2.3 F_μ ve G_δ, (U, E) üzerinde iki genelleştirilmiş bulanık esnek halka olsun. Bu takdirde $F_\mu \,\widetilde{\cap}\, G_\delta$, (U, E) üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek halkadır.

İspat. F_μ ve G_δ, (U, E) üzerinde iki genelleştirilmiş bulanık esnek halka olduğundan $\forall e \in E$ için $\mu(e) > 0$ ve $\delta(e) > 0$' dır.

$F_{\mu}\ \tilde{\cap}\ G_{\delta} = H_{v}$ olsun. Buna göre $H_{v} = \big(h_{e}, v(e)\big)$' dir. $v(e) = min\{\mu(e), \delta(e)\} > 0$' dır.

(i) $\forall e \in E$ ve $\forall x, y \in U$ için $h_{e}(x - y) \geq min\{h_{e}(x), h_{e}(y)\}$ olduğunu göstermeliyiz. $h_{e}(x) = min\{f_{e}(x), g_{e}(y)\}$ ve f_{e} ve g_{e} bulanık grup olduklarından

$h_{e}(x - y) = min\{f_{e}(x - y), g_{e}(x - y)\} \geq$
$min\big\{min\{f_{e}(x), f_{e}(y)\}, min\{g_{e}(x), g_{e}(y)\}\big\} =$
$min\big\{min\{f_{e}(x), g_{e}(x)\}, min\{f_{e}(y), g_{e}(y)\}\big\} = min\{h_{e}(x), h_{e}(y)\}$ elde edilir.

(ii) $\forall e \in E$ ve $\forall x, y \in U$ için $h_{e}(xy) \geq min\{h_{e}(x), h_{e}(y)\}$ olduğunu göstermeliyiz.

$h_{e}(xy) = min\{f_{e}(xy), g_{e}(xy)\} \geq min\big\{min\{f_{e}(x), f_{e}(y)\}, min\{g_{e}(x), g_{e}(y)\}\big\} =$
$min\big\{min\{f_{e}(x), g_{e}(x)\}, min\{f_{e}(y), g_{e}(y)\}\big\} = min\{h_{e}(x), h_{e}(y)\}$ elde edilir.

(i) ve (ii) şartları sağlandığından $F_{\mu}\ \tilde{\cap}\ G_{\delta}$, (U, E) üzerinde genelleştirilmiş bulanık esnek halkadır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ekonomi, mühendislik, çevre, sosyal ve tıp gibi bilimlerde birçok belirsizlik ifade eden problemlerin çözümü için ortaya konan bulanık küme teorisi, esnek küme teorisi, bulanık esnek küme teorisi ve genelleştirişmiş bulanık esnek küme teorileri incelenmiştir. Bu kümeler üzerinde tanımlanan cebirsel yapılar araştırılarak çeşitli özellikleri üzerinde durulmuştur. Çalışmanın 6. Bölümde genelleştirilmiş bulanık esnek grup ve genelleştirilmiş bulanık esnek halka cebirsel yapıları tanımlanarak bazı özellikleri incelenmiştir. Daha sonraki çalışmalarda bulanık esnek kümeler üzerinde 6. Bölümde verilen cebirsel yapıların özellikleri daha geniş bir şekilde ele alınabilir. Cisim gibi diğer cebirsel yapılar da bu kümeler üzerinde inşa edilebilir.

KAYNAKLAR

1) L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control 8(1965) 338-353.

2) A.Rosenfeld, 1971, Fuzzy Groups, J. Math. Anal. Appl. 35(1971) 512-517.

3) Wang-Jin Liu, Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals,Fuzzy Sets and Systems 8 (1982) 133-139.

4) Wang-Jin Liu, Operations on fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems 11 (1982) 31-41.

5) V. N. Dixit, On Fuzzy Rings, Fuzzy Sets and Systems, 49 (1992) 205-213.

6) D. Molodtsov, Soft set theory-first result, , Comput.Math.Appl. 37 (1999) 19-31.

7) P. K. Maji, R. Biswas, A. R. Roy, Soft set theory, Comput.Math.Appl. 45 (2003) 555-562.

8) P. K.Maji, A. R. Roy, R. Biswas, An application of soft sets in a decision making problem,Comput. Math. Appl. 44 (2002) 1077-1083.

9) F. Feng, *Y. Li* and N. *Çağman*, Generalized uni–int decision making schemes based on choice value soft sets, European Journal of Operational Research 220 (2012) 162-170.

10) Y. Jiang, H. Liu, Y. Tang, Q. Chen, Semantic decision making using ontology-based soft sets, Mathematical and Computer Modelling 53 (2011) 1140-1149.

11) N. Çağman and S. Enginoğlu, Soft set theory and uni-int decision making, European Journal of Operational Research 207 (2010) 848-855.

12) H. Aktaş, N. Çağman, Soft sets and soft groups, Inform.Sci. 177 (2007) 2726-2735.

13) Y. B. Jun, Soft BKC/BKI-algebra, , Comput.Math.Appl. 56 (2008) 1408-1413.

14) F. Feng, Y.B.Jun, X.Zhao, Soft semirings , Comput.Math.Appl. 56 (2008) 2621-2628.

15) U. Acar, F. Koyuncu ve B. Tanay, Soft Set Soft Rings, Computers and Mathematics with Applicarions, 59 (2010) 3458-3463.

16) M.I. Ali, F. Feng, X. Liu and W. K. M. Shabir, On some new operations in soft set theory, Computers and Mathematics with Appl. 57 (2009) 1547-1553.

17) P. K. Maji, R. Biswas, A. R. Roy, Fuzzy soft set, Journal of Fuzzy Mathematics 9 (3) (2001) 589-602.

18) A. Aygünoğlu and H. Aygün, Introduction to Fuzzy soft groups, Computers and Mathematics with Appl. 58 (2009) 1279-1286.

19) S. Subramanian, R. Nagarajan and A. Mohan,Homomorphic Image of Fuzzy Soft Rings with Supremum Property under Triangular Norms, Internationa l Mathematical Forum 7 (2012) 6,281-295.

20) Majumdar and S.K. Samanta, Generalised Fuzzy Soft Set, Computers and Mathematics with Appl. 57 (2010) 1425-1432.

21) H. J. Zimmermann, Fuzzy Set Theory and Its Aplications, Kluwer Academic Publishers, 1991.

ÖZGEÇMİŞ

Özlem BULUT 1987 yılında Malatya'da doğdu. İlköğretim, orta öğretim ve liseyi Adana'da tamamladı. 2005'de kazandığı Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. 2009 yılında İçişleri Bakanlığında memur olarak göreve başladı. 2011 yılında Erciyes Üniversitesinde Formasyon Sertifikası alarak öğretmenliğe geçiş yaptı. Halen öğretmen olarak görevine devam etmektedir.

Adres: Hacı Osman Arı Anadolu Sağlık
Meslek Lisesi Karapınar / Konya
Telefon:
e-posta : ozlembulut01@hotmail.com